

## ASPECTO NUMERICOS DE LA APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO AL PROBLEMA DE CONTACTO

FEDERICO PARIS\*

y

J. A. GARRIDO\*\*

### RESUMEN

El Método de los Elementos de Contorno ha sido poco utilizado para resolver problemas de contacto entre sólidos deformables. En el trabajo que se presenta se han desarrollado dos técnicas, (aplicación implícita de las condiciones de simetría y condensación estática de grados de libertad no activos durante el proceso de contacto) que permiten reducir el tiempo total de cálculo, así como la utilización de pequeños ordenadores al reducir también el tamaño del sistema de ecuaciones a resolver. La formulación del problema se realiza sin necesidad de establecer la superficie final deformada, utilizándose en la discretización elementos discontinuos lineales que permiten aplicar muy fácilmente las condiciones de contorno, no presentando ningún tipo de incompatibilidades durante el proceso de contacto.

### SUMMARY

Boundary Equation Method has not been too much used to solve contact problems between deformable bodies. In this paper two numerical options are presented: the implicit application of symmetry conditions and static condensation of passive degrees of freedom during the contact process. These options produce a reduction in the computation time and also allow the use of personal computers because of the reduction of the size of the system of equations to solve. The final strained configuration is avoided in the formulation. Linear discontinuous elements have been used in the discretization process. The boundary conditions are therefore very easy to apply and any incompatibilities has been detected during the contact process.

### INTRODUCCION

El desarrollo de los Métodos Numéricos en las últimas décadas ha permitido el estudio de complejos e importantes problemas de la Mecánica de Sólidos deformables. En el caso de contacto entre dos o más dominios, su importancia radica en el gran número de casos en que esta situación se plantea dentro de la Ingeniería Mecánica y Civil y su complejidad estriba en la naturaleza no lineal que puede aparecer en las condiciones de contorno, por variación del área de contacto con las cargas aplicadas, así como por el carácter irreversible de la fricción.

El Método de los Elementos Finitos ha significado una importante herramienta para analizar este tipo de problemas. Fredriksson<sup>1</sup> y Okamoto y Nabazawa<sup>2</sup> han reali-

\* Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Sevilla

\*\* Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Las Palmas.

Recibido: Mayo 1985

zados aplicaciones para diferentes leyes de fricción. Más recientemente, Oden y Pires<sup>3,4</sup> han extendido su aplicación para comportamientos no lineales y no locales en la interfase. En el Método de los Elementos de Contorno Anderson<sup>5,6,7</sup>, ha realizado aplicaciones a casos bidimensionales, utilizando elementos continuos y formulando el problema a través del establecimiento previo de la superficie deformada.

En este trabajo, continuación del presentado en<sup>8,9</sup>, se pretende profundizar en los aspectos numéricos que conlleva la aplicación del Método de los Elementos de Contorno, en orden a poner de manifiesto la ausencia de problemas que pudieran derivarse de la utilización de elementos incompatibles, así como a mejorar los tiempos de cálculo que en un problema no lineal, que requiere un proceso incremental de aplicación de las cargas e iteraciones en cada incremento, puede llegar a ser una importante restricción para su uso. Así, se analiza por un lado la influencia de la situación de los nodos en el elemento y las posibles incompatibilidades que pudieran aparecer. Por otro lado, se incluyen consideraciones que permiten reducir el tamaño del sistema de ecuaciones en casos con simetría, de especial relieve para este tipo de problemas en que el cálculo de las constantes que aparecen en la ecuación integral se realiza una sola vez, mientras que el número de veces que es preciso resolver el sistema de ecuaciones puede ser elevado. Finalmente, se presenta una técnica para condensar las variables del contorno que no se ven afectadas cualitativamente por el proceso incremental. De esta forma el tamaño del sistema de ecuaciones que hay que ir resolviendo puede de nuevo ser reducido.

Todas estas cuestiones se analizan en el apartado de aspectos numéricos. Previamente, en los apartados siguientes se establece la aplicación del Método de los Elementos de Contorno al problema de contacto. La ley de fricción que se considera es la de Coulomb, quedando incluido el caso sin rozamiento. La formulación no requiere la definición de la superficie de contacto final.

El procedimiento de solución se resume a través de un esquemático diagrama de flujo y en el apartado final se muestran algunos resultados, comparando con la solución analítica, si es posible, y con otros resultados numéricos.

## FORMULACION DEL PROBLEMA DE CONTACTO EN ECUACIONES INTEGRALES

Sean dos dominios A y B sometidos a la acción de cargas y/o restricciones en desplazamientos exteriores con una zona común de contacto  $\partial D_c$ , que puede mantenerse constante o aumentar al aplicar la sollicitación. Esta sollicitación puede constar de diferentes capítulos, siendo cada uno de ellos dependiente de un parámetro. En lo que sigue nos referiremos implícitamente al estudio de un capítulo de carga, pues la aplicación de un número superior de ellos no presenta ninguna diferencia conceptual, excepto que el estudio tensional de partida es diferente.

En la zona de contacto se va a suponer una ley de rozamiento que obedece a la clásica de Coulomb de tal forma que ambos dominios permanecen adheridos en un punto cualquiera hasta que la tensión tangencial alcanza en dicho punto un valor proporcional a la tensión normal existente, estableciéndose esta proporcionalidad a través del coeficiente de rozamiento. De esta forma, el área de contacto  $\partial D_c$  (Fig. 1) puede quedar potencialmente dividida en dos zonas. Una  $\partial D_{ca}$  en la que la tensión tangencial se mantiene por debajo del nivel de proporcionalidad definido, que llamaremos zona de adhesión y otra en que al haberse alcanzado dicho nivel ambos cuerpos pueden deslizar entre sí sobre el punto al que estamos refiriendo las tensiones. Esto,

naturalmente implica una ley de fricción local. A esta segunda zona la llamaremos de deslizamiento,  $\partial D_{cd}$ .

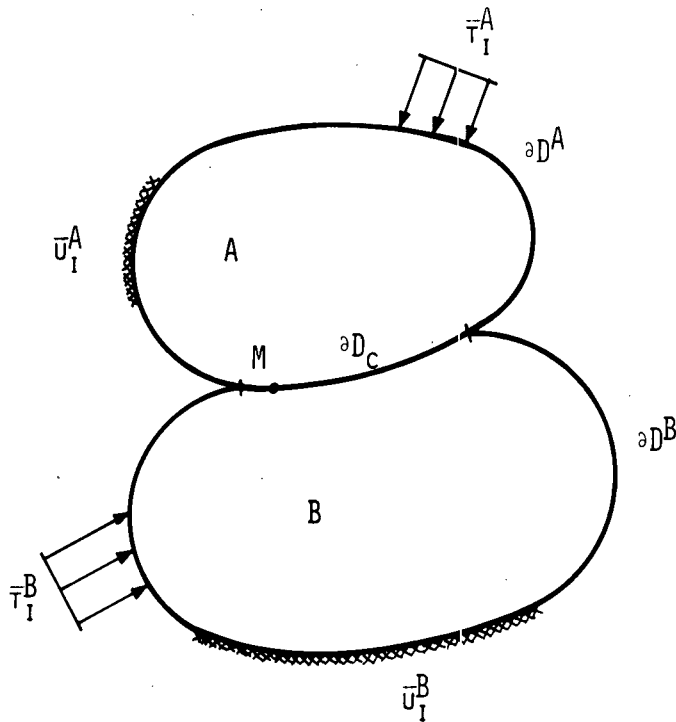


Fig. 1.— Definición del problema.

Las condiciones de contacto para un punto  $M$  que pertenezca a la zona de adhesión o deslizamiento son:

$$M \in \partial D_{ca}$$

$$\begin{aligned} u_1^A(M) + u_1^B(M) &= 0 \\ u_2^A(M) + u_2^B(M) &= 0 \\ t_1^A(M) &= t_1^B(M) \quad \text{con } t_1^A(M) \leq 0 \\ t_2^A(M) &= t_2^B(M) \quad \text{con } |t_2^A(M)| < \mu |t_1^A(M)| \end{aligned} \quad (1)$$

$$M \in \partial D_{cd}$$

$$\begin{aligned} u_1^A(M) + u_1^B(M) &= 0 \\ u_2^A(M) &\neq u_2^B(M) \\ t_1^A(M) &= t_1^B(M) \quad \text{con } t_1^A(M) \leq 0 \\ t_2^A(M) &= \pm \mu t_1^A(M) \\ t_2^B(M) &= \pm \mu t_1^B(M) \end{aligned} \quad (2)$$

donde todas las variables están referidas a un sistema local de coordenadas. El eje 1 es normal a la superficie de contacto y el 2 está contenido en dicha superficie. El caso de contacto sin fricción está asumido sin más que considerar  $\mu = 0$  en las expresiones (2) correspondientes a  $\partial D_{cd}$ . La zona de adhesión carece en este caso de sentido.

La ecuación de Somigliana permite establecer una formulación integral para cada dominio, incluyendo dichas ecuaciones los desplazamientos  $u$  y las tensiones  $t$  sobre el contorno de cada dominio. Así, en ausencia de fuerzas de volumen:

$$\begin{aligned} c_{ij}(x) u_j(x) + \int_{\partial D} T_{ij}(x,y) u_j(y) ds(y) = \\ = \int_{\partial D} U_{ij}(x,y) t_j(y) ds(y); x, y \in \partial D \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $T_{ij}$  y  $U_{ij}$  representan la solución de Kelvin de tensiones y desplazamientos y  $c_{ij}$  es un término que depende de la forma local del contorno en el punto  $x$ .

La ecuación (3) puede aplicarse para cada dominio. Cada contorno queda potencialmente dividido en la forma:

$$\partial D^K = \partial D_L^K + \partial D_{ca}^K + \partial D_{cd}^K \quad (K = A, B) \quad (4)$$

siendo  $\partial D_L$  la zona libre de contacto de cada dominio  $K$ . La aplicación de la ecuación de Somigliana (3), a cada dominio establece pues:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_L^K} T_{ij}^{*K} u_j^K ds + \int_{\partial D_{ca}^K} T_{ij}^{*K} u_j^K ds + \int_{\partial D_{cd}^K} T_{ij}^{*K} u_j^K ds = \\ = \int_{\partial D_L^K} U_{ij}^K t_j^K ds + \int_{\partial D_{ca}^K} U_{ij}^K t_j^K ds + \int_{\partial D_{cd}^K} U_{ij}^K t_j^K ds \end{aligned} \quad (5)$$

donde con  $T_{ij}^*$  se pretende representar el efecto del término libre,  $c_{ij}$ , en orden a simplificar la formulación.

Las ecuaciones (5) junto a las condiciones de contorno (1) y (2) definen el problema planteado en ecuaciones integrales. Puesto que en general se trata de un problema no lineal, las ecuaciones (5) sólo tienen sentido aplicadas incrementalmente, permaneciendo cualitativamente las condiciones de contorno durante el incremento de carga. En los casos en que la superficie de contacto sea conocida, independiente por tanto de la carga aplicada, el problema es lineal, si bien en el caso de que exista fricción es preciso detectar previamente cuáles son las zonas de adhesión y deslizamiento.

Incluyendo las condiciones de contorno (1) y (2) en las expresiones (5) y aplicándolas en valor incremental, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_L^A} T_{ij}^{*A} \Delta u_j^A ds + \int_{\partial D_{ca}^A} T_{ij}^{*A} \Delta u_j^A ds + \\ + \int_{\partial D_{cd}^A} T_{i1}^{*A} \Delta u_1^A + \int_{\partial D_{cd}^A} T_{i2}^{*A} \Delta u_2^A = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial D_L^A} U_{ij}^A \Delta t_j^A ds + \int_{\partial D_{ca}^A} U_{ij}^A \Delta t_j^A ds + \\
&+ \int_{\partial D_{cd}^A} U_{i1}^A \Delta t_1^A ds \pm \int_{\partial D_{cd}^A} U_{i2}^A \mu \Delta t_1^A ds
\end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D_L^B} T_{ij}^{*B} \Delta u_j^B ds - \int_{\partial D_{ca}^B} T_{ij}^{*B} \Delta u_j^A ds - \\
&- \int_{\partial D_{cd}^B} T_{i1}^{*B} \Delta u_1^A ds + \int_{\partial D_{cd}^B} T_{i2}^{*B} \Delta u_2^B ds = \\
&= \int_{\partial D_L^B} U_{ij}^B \Delta t_j^B ds + \int_{\partial D_{ca}^B} U_{ij}^B \Delta t_j^A ds + \\
&+ \int_{\partial D_{cd}^B} U_{i1}^B \Delta t_1^A ds \pm \int_{\partial D_{cd}^B} U_{i2}^B \mu \Delta t_1^A ds
\end{aligned} \quad (7)$$

### APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

La aproximación sobre los valores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{t}$  en el contorno se realiza utilizando elementos lineales no conformes, ya que en el Método de los Elementos de Contorno la compatibilidad inter elemental no es necesaria. Se usan elementos donde las variables están definidas por los valores en dos puntos intermedios situados a una distancia arbitraria de los extremos<sup>10</sup>. Así, con referencia a la Figura 2, los desplazamientos y las tensiones sobre el elemento  $k$  se definen:

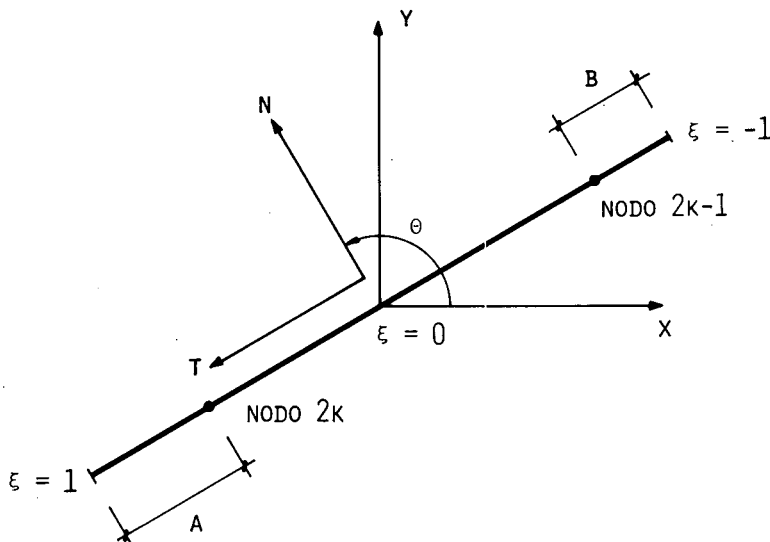


Fig. 2.— Configuración del elemento  $k$ .

$$\begin{aligned} \text{u) } \partial D_k &= \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{Q}^k(a,b) \mathbf{L}^k(\theta) \mathbf{u}_{nL}^k \\ \text{t) } \partial D_k &= \mathbf{N}(\xi) \cdot \mathbf{Q}^k(a,b) \mathbf{L}^k(\theta) \mathbf{t}_{nL}^k \end{aligned} \quad (8)$$

donde:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= -\frac{1}{2}(\xi-1) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi+1) \end{aligned} \quad ; \quad N = \left[ \begin{array}{cc|cc} N_1 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & N_2 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{Q}^k = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{q}^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}^k \end{array} \right] \quad \text{con } \mathbf{q}^k = \frac{1}{1-a-b} \begin{bmatrix} 1-b & -a \\ -b & 1-a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}^k(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{nL}^k = \begin{bmatrix} u_n(2k-1) \\ u_n(2k) \\ u_t(2k-1) \\ u_t(2k) \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{t}_{nL}^k = \begin{bmatrix} \sigma(2k-1) \\ \sigma(2k) \\ \tau(2k-1) \\ \tau(2k) \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las integraciones sobre el contorno por integraciones sobre elementos utilizando las expresiones (8) para aproximar desplazamientos y tensiones sobre ellos, y aplicando las ecuaciones (6) y (7) en cada nodo del contorno de los dominios A y B utilizados para la discretización, se obtiene.

$$\begin{bmatrix} H_t^A & 0 & -G_u^A & 0 & H_a^A & H_{d1}^A & H_{d2}^A & 0 & -G_a^A & -(G_{d1}^A \pm \mu G_{d2}^A) \\ 0 & H_t^B & 0 & -G_u^B & -H_a^B & -H_{d1}^B & 0 & H_{d2}^B & -G_a^B & -(G_{d1}^B \pm \mu G_{d2}^B) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u_L^A \\ \Delta u_L^B \\ \Delta t_L^A \\ \Delta t_L^B \\ \Delta u_{1d}^A \\ \Delta u_{2d}^A \\ \Delta u_{2d}^B \\ \Delta t_a^A \\ \Delta t_{1d}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_u^A \Delta \bar{u}_L^A + G_t^A \Delta \bar{t}_L^A \\ -H_u^B \Delta \bar{u}_L^B + G_t^B \Delta \bar{t}_L^A \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde:

$H_t^k$  : integraciones del núcleo  $T_{ij}^*$  (afectado por las matrices N, Q, L de acuerdo con (8)), sobre la parte de  $\partial D_E^k$  correspondiente a grados de libertad en que las tensiones son conocidas, realizadas desde todos los nodos de K.

$H_u^K$  : Id. correspondientes a grados de libertad en que los desplazamientos son conocidos.

$H_a^K$  : integraciones del núcleo  $T_{ij}^*$  sobre la parte en adhesión de la zona de contacto realizadas desde todos los nodos de K.

$H_{d1}^K$  : integraciones del núcleo  $T_{ij}^*$  sobre la parte en deslizamiento de la zona de contacto correspondiente al grado de libertad normal a dicha zona y realizadas desde todos los nodos de K.

$H_{d2}^K$  : id. al grado de libertad tangencial.

El significado de las matrices G es equivalente para los núcleos  $U_{ij}$ .

El sistema (9) constituye un sistema determinado de ecuaciones habiéndose ya agrupado las incógnitas en el vector del primer miembro.

El caso sin fricción se obtiene sin más que eliminar las variables asociadas a las zonas de adhesión y hacer  $\mu = 0$ .

## METODO DE RESOLUCION

Dos razones pueden originar el carácter no lineal del proceso de contacto entre sólidos deformables. Por un lado la variación de las dimensiones de la zona de contacto y por otro la evolución de las condiciones de contorno en dicha zona originada por la presencia de la fricción. La combinación de la posible presencia o no de estas dos situaciones da lugar a cuatro tipos de problemas que son los que se presentan en el apartado de resultados. El tratamiento de la primera situación exige la aplicación incremental de la carga de tal forma que cada incremento corresponda a una variación de la zona de contacto acorde con la discretización del contorno efectuada. El tratamiento de la segunda situación, exige por una parte, el suponer unas ciertas condiciones de contorno, cuya admisibilidad es preciso comprobar con los resultados obtenidos de la aplicación de la carga. Por otra parte, y una vez determinadas las condiciones de contorno admisibles para la aplicación de un incremento de carga es preciso acotar cual puede ser el valor de dicha carga, para que no se violen estas condiciones. El valor mínimo de carga que no altera las condiciones de contacto o que sólo produce un aumento o disminución de la zona de contacto de acuerdo a la discretización utilizada es el que hay que aplicar en el incremento que se está considerando. Así, si al finalizar el incremento n-1 del capítulo de carga, queda por aplicar una carga  $Q - Q_{n-1}$  siendo Q la total y  $Q_{n-1}$  la acumulada en los n-1 incrementos anteriores, en el incremento n se aplicará una carga:

$$\Delta Q_n = f_n (Q - Q_{n-1}) \quad 0 \leq f_n \leq 1 \quad (10)$$

siendo  $f_n$  el valor mínimo de los que se pueden obtener de los siguientes casos.

— Nodos que pueden entrar en contacto.

$$f_n = \left| \frac{\Delta_{n-1}}{(\Delta u_1^A)_n + (\Delta u_1^B)_n} \right| \quad (11)$$

siendo  $\Delta_{n-1}$  la distancia entre los dos nodos candidatos a entrar en contacto<sup>8</sup> y  $(\Delta u_1^A)_n$  y  $(\Delta u_1^B)_n$  los desplazamientos obtenidos con la aplicación de  $Q - Q_{n-1}$ .

— Nodos que pueden salir de la zona de contacto.

$$f_n = \left| \frac{(t_1)_{n-1}}{(\Delta t_1)_n} \right| \quad (12)$$

siendo  $(t_1)_{n-1}$  la tensión acumulada en los  $n-1$  primeros incrementos (de compresión) e  $(\Delta t_1)_n$  el resultado del sistema (9) (de tracción).

— Nodos que estando en adhesión pueden pasar a deslizamiento.

$$f_n = \left| \frac{(t_2)_{n-1} - \mu (t_1)_{n-1}}{(\Delta t_2)_n - \mu (\Delta t_1)_n} \right| \quad (13)$$

para que  $(t_2)_n = \mu (t_1)_n$ .

o bien,

$$f_n = \left| \frac{(t_2)_{n-1} + \mu (t_1)_{n-1}}{(\Delta t_2)_n + \mu (\Delta t_1)_n} \right| \quad (14)$$

para que  $(t_2)_n = -\mu (t_1)_n$ .

Por otro lado, la admisibilidad de las condiciones de contorno impuestas exige:

— Para nodos que se suponen continúan en la zona de contacto y estaban libres de tensiones

$$(\Delta t_1)_n \leq 0 \quad (15)$$

— Para nodos que se supone continúan en la zona de contacto de adhesión

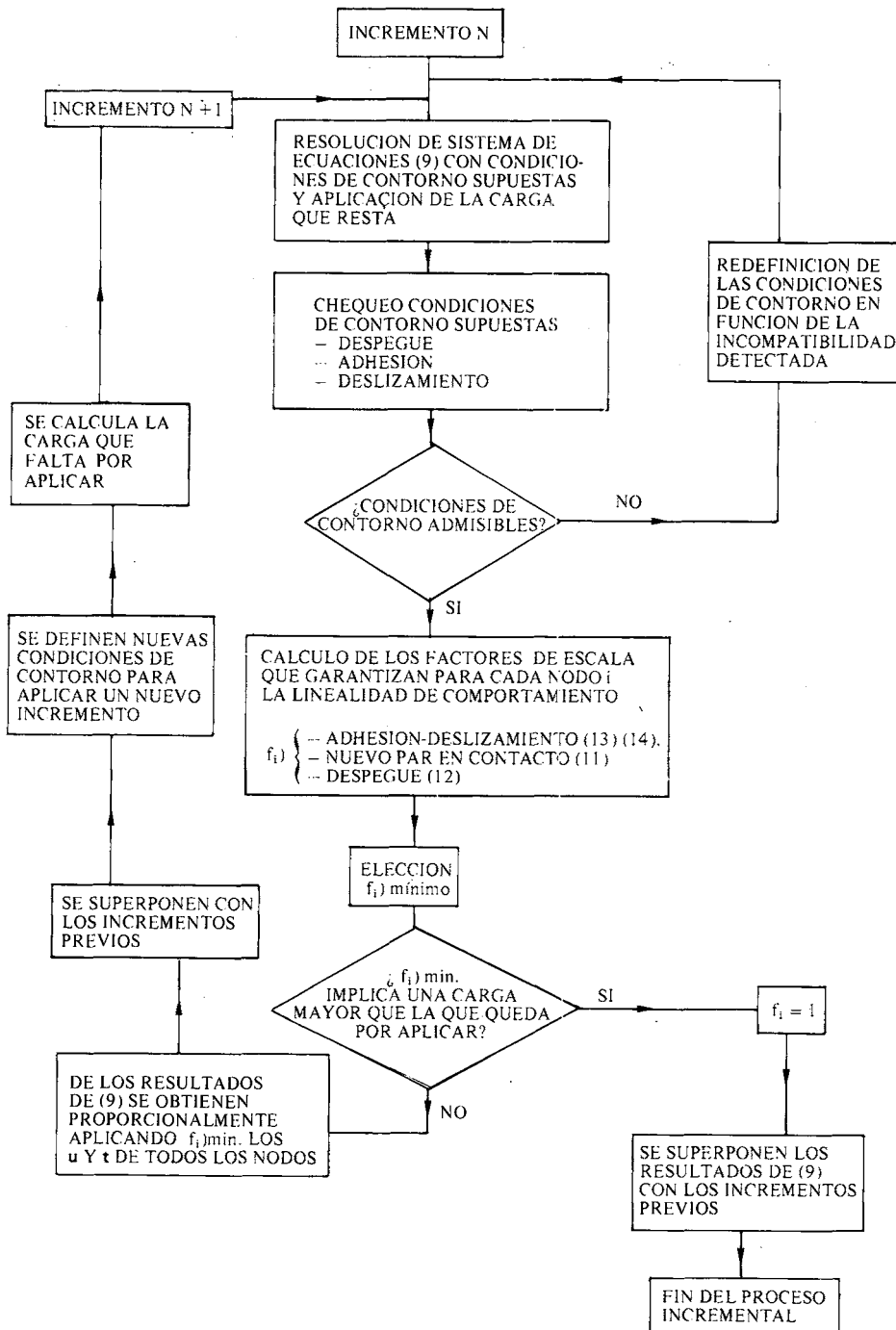
$$\frac{(\Delta t_2)_n}{(\Delta t_1)_n} < \mu \quad (16)$$

— Para nodos que se supone continúan en la zona de contacto de deslizamiento

$$(\Delta t_2)_n \left( (\Delta u_2^A)_n + (\Delta u_2^B)_n \right) < 0 \quad (17)$$

En el caso de que algunas de las condiciones anteriores no se cumplierse hay que repetir el incremento de carga dándole al par de nodos condiciones de contorno para que despegue (caso de haberse violado (15)), para que pase a deslizamiento (16) o para que posea adhesión (17).

El diagrama de flujo que sigue explicita la concatenación de operaciones a realizar en el incremento n de carga.



## ASPECTOS NUMERICOS

Desde un punto de vista computacional, la mayor dificultad que tiene la implementación del procedimiento indicado en el apartado anterior es el elevado coste de tiempo, y en menor medida, el tamaño de memoria que se necesita. Dos procedimientos pueden acoplarse para minimizar ambos problemas. El primero es de aplicación para casos en que exista al menos un eje de simetría, mientras que el segundo es de aplicación general, pues basta con que haya nodos de algún dominio que no vayan a pertenecer en todo el proceso general de carga a la zona de contacto y no esté aplicada en ellos alguna carga exterior o prefijado algún desplazamiento no nulo.

## Aplicación de las condiciones de simetría

Independientemente de la existencia o no de zonas de contacto, la presencia de simetría puede tomarse en consideración analizando sólo una parte del dominio e imponiendo condiciones de contorno sobre el eje de simetría, lo que implica aplicar ésta en forma explícita. Así, para el dominio que se representa en la Fig. 3a, que posee simetría respecto al eje  $y$ , puede resolverse alternativamente el problema representado en la Fig. 3b con las condiciones indicadas.

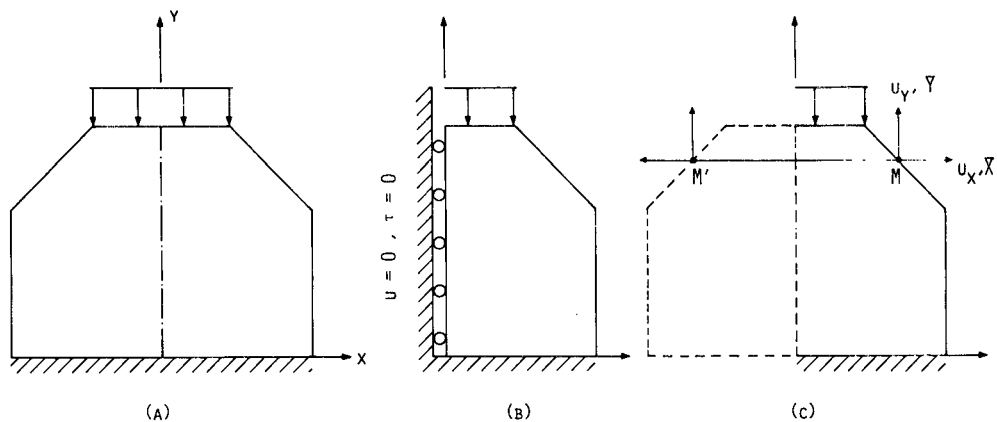


Figura 3. Consideración de la simetría.

Desde el punto de vista de la aplicación del Método de los Elementos de Contorno, la resolución del caso (b) frente al (a) significa un considerable ahorro tanto en el número de integraciones como en el tamaño del sistema de ecuaciones. Así, ciñéndonos al caso de usar elementos lineales discontinuos, si utilizamos  $2N$  elementos para modelar la configuración (a) será preciso realizar  $(2N * 2N) * 2$  integraciones, siendo el sistema resultante de dimensión  $4 * 2N$ . En el caso de la configuración (b) será preciso realizar  $(N + N_s) * (N + N_s) * 2$  integraciones, siendo el sistema de ecuaciones de dimensión  $4(N + N_s)$ , habiendo llamado  $N_s$  al número de elementos utilizados en la representación del eje. Puesto que  $N_s < N$  la alternativa (b) conduce a menos integraciones y a un sistema de ecuaciones de menor tamaño que (a).

La otra alternativa es considerar la simetría de forma implícita en la configuración (a). Los desplazamientos de dos puntos simétricos  $M$  y  $M'$  (Figura 3c) están relacionados por:

$$\begin{aligned}
 u_x(M) &= -u_x(M') \\
 u_y(M) &= u_y(M') \\
 \bar{X}(M) &= -\bar{X}(M') \\
 \bar{Y}(M) &= \bar{Y}(M')
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

por tanto, del sistema que define la configuración (a), teniendo en cuenta (18) sólo  $4*N$  son variables independientes, las correspondientes a la zona indicada, por ejemplo, en la Fig. 3c. Por ello no es preciso discretizar el eje de simetría, obteniendo un sistema de ecuaciones menor, si bien el número de integraciones es mayor. Así para el ejemplo de la Fig. 3c sería preciso realizar  $(N*2N)*2$  integraciones, mientras que el tamaño del sistema de ecuaciones es  $4*N$ .

Como se ve la alternativa (c) frente a la (b) para tomar en consideración la existencia de simetría implica más integraciones y la resolución de un sistema de ecuaciones menor. En un problema elástico lineal la elección de uno u otro procedimiento puede resultar dudosa y estar en función de las disponibilidades de cálculo. En un problema que requiere un procedimiento de resolución como el indicado en el apartado anterior no existe duda. Las integraciones, por estar en la hipótesis de pequeños desplazamientos se realizan una única vez, en la situación indeformada, mientras que el sistema de ecuaciones es preciso resolverlo al menos tantas veces como incrementos de carga haya que efectuar. (A veces en cada incremento de carga hay que resolver con diferentes condiciones de contorno). La disminución del tamaño del sistema de ecuaciones a resolver tiene por tanto en el tiempo total una influencia mayor, para un problema como el del contacto, por lo que la situación de simetría se toma en cuenta a través de la alternativa indicada en la Fig. 3c.

#### Condensación de grados de libertad no afectados por el carácter no lineal del programa

Muchas de las variables que aparecen en todos los incrementos no son estrictamente necesarias para la resolución del problema y pueden ser condensadas. No pueden serlo los grados de libertad en que hay una carga aplicada a un desplazamiento prescrito (distinto de cero). Tampoco pueden serlo los grados de libertad asociados a los nodos de la zona de contacto pues las condiciones de contorno varían a lo largo de la historia de carga. En la Fig. 4 estos nodos se representan por  $\partial D_N$  que debe incluir los nodos

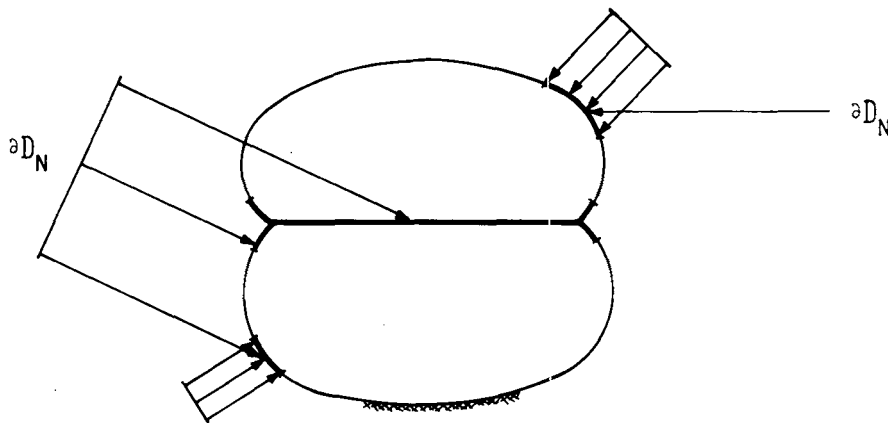


Figura 4. Representación de zonas de g.d.l. condensables.

de la zona candidata a ser de contacto cuando dicha superficie final es desconocida. La zona de nodos y grados de libertad que puede ser condensada se representa por  $\partial D_L$ .

La división del contorno de ambos dominios en la forma anteriormente indicada permite particionar el sistema de ecuaciones (9) en la forma

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{K}_{NL} \\ \hline \mathbf{K}_{LN} & \mathbf{K}_{LL} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_N \\ \mathbf{X}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_N \\ \mathbf{P}_L \end{Bmatrix} \quad (19)$$

por lo que el sistema queda

$$\mathbf{K}_{NN} \mathbf{X}_N + \mathbf{K}_{NL} \mathbf{X}_L = \mathbf{P}_N$$

$$\mathbf{K}_{LN} \mathbf{X}_N + \mathbf{K}_{LL} \mathbf{X}_L = \mathbf{P}_L$$

De la segunda obtenemos

$$\mathbf{X}_L = \mathbf{K}_{LL}^{-1} (\mathbf{P}_L - \mathbf{K}_{LN} \cdot \mathbf{X}_N) \quad (20)$$

y sustituyendo en la primera.

$$(\mathbf{K}_{NN} - \mathbf{K}_{NL} \mathbf{K}_{LL}^{-1} \mathbf{K}_{LN}) \mathbf{X}_N = \hat{\mathbf{P}}_N \quad (21)$$

con  $\hat{\mathbf{P}}_N = (\mathbf{P}_N - \mathbf{K}_{NL} \mathbf{K}_{LL}^{-1} \mathbf{P}_L)$ .

Puesto que  $\mathbf{K}_{NL}$  y  $\mathbf{K}_{LL}$  no varían a lo largo del proceso, al ser integraciones sobre elementos cuyas condiciones de contorno no varían, el producto:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{NL} \cdot \mathbf{K}_{LL}^{-1} \quad (22)$$

puede ser evaluado en el primer incremento y sigue siendo válido para todas las demás ocasiones en que es preciso resolver (9). Las variaciones en las condiciones de contorno afectan únicamente a las submatrices  $\mathbf{K}_{NN}$  y  $\mathbf{K}_{NL}$  así como a  $\mathbf{P}_N$  y  $\mathbf{P}_L$ .

Puede conseguirse una mayor eficacia numérica observando la estructura de las submatrices  $\mathbf{K}_{NL}$  y  $\mathbf{K}_{LL}^{-1}$

$$\mathbf{K}^* = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{NL}^A & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{K}_{NL}^B \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{LL}^{A-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{K}_{LL}^{B-1} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} \mathbf{K}_{NL}^A & \mathbf{K}_{LL}^{A-1} & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{K}_{NL}^B & \mathbf{K}_{LL}^{B-1} & \end{array} \right] \quad (23)$$

estructura cuya implementación permite el ahorro, tanto de capacidad de almacenamiento como de tiempo de cálculo.

Operativamente, por tanto, durante el primer incremento se determina  $\mathbf{K}^*$  a través de (23). En los sucesivos incrementos se aplica (21) para encontrar  $\mathbf{X}_N$  si bien antes de proceder a dar un nuevo incremento, lo que modificaría  $\mathbf{K}_{NN}$  y  $\mathbf{K}_{LN}$ , es preciso

calcular desplazamientos y tensiones en los grados de libertad condensados aplicando (20), con el valor de  $X_N$  obtenido en el incremento que se acaba de dar.

## RESULTADOS

Se van a estudiar tres problemas que recogen las diferentes posibilidades que pueden presentarse de evolución de la zona de contacto y presencia de fricción.

### Ejemplo 1 - Compresión de un dominio elástico rectangular sobre cimentación elástica.

Se trata de un problema, Fig. 5, en que la superficie de contacto está fijada y es, por tanto independiente de la magnitud de la carga aplicada. En el caso de ausencia de rozamiento se trata de un problema lineal por lo que se resuelve aplicando directamente toda la carga. En presencia de fricción la única dificultad estriba en la determinación de las zonas de adhesión y deslizamiento que están en función de las características geométricas de ambos dominios. Es preciso por tanto realizar un cierto número de pruebas con diferentes  $\partial D_{ca}$  y  $\partial D_{cd}$  hasta obtener resultados compatibles con la división de  $\partial D_c$  supuesta. En ese instante es posible aplicar toda la carga.

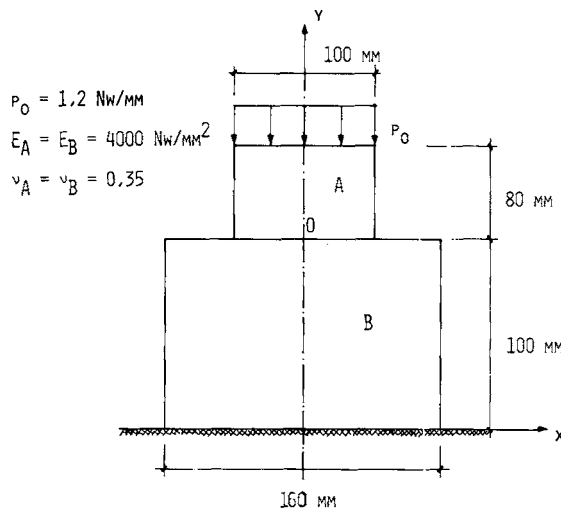


Figura 5. Definición del ejemplo.

La Fig. 6 indica la discretización utilizada. Se han empleado 7 elementos de igual longitud para representar la zona de contacto. Todos los nodos se encuentran a una distancia de los extremos igual a un cuarto de la longitud del elemento. Independientemente de la mejora de los resultados, la consideración de la simetría implícita que no requiere la discretización del eje de simetría, implica para esta discretización resolver un sistema de 140 ecuaciones (lo que supone un ahorro de un 33%) mientras que si se aplica la condensación estática se reduce a un sistema de 68 ecuaciones. Los casos en que  $\partial D_c$  está fijada no son, sin embargo, aquellos en que puede apreciarse mejor el ahorro de tiempo de cálculo debido a que el número de veces que es preciso resolver el sistema puede no ser muy elevado (una vez en el caso sin fricción).

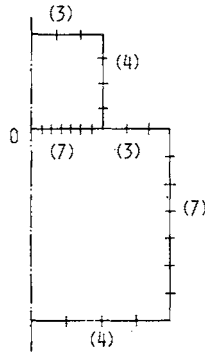
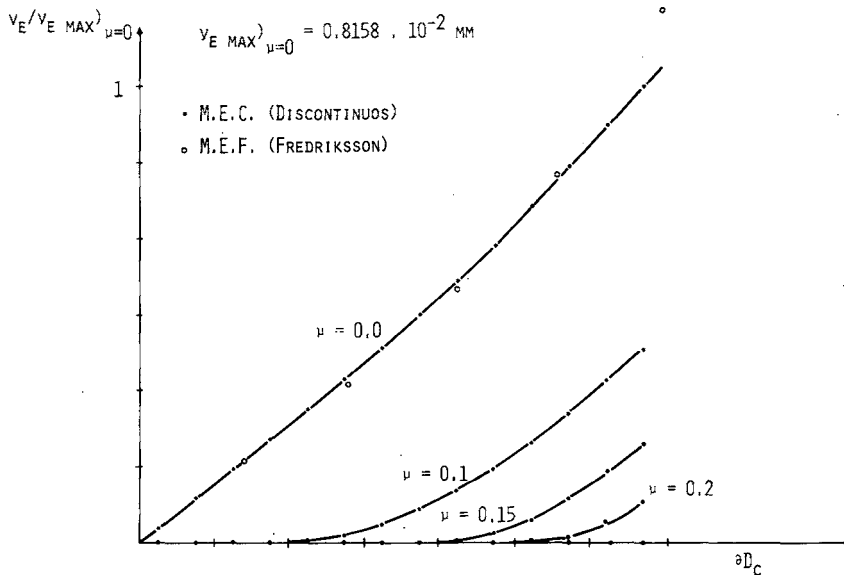


Figura 6. Discretización utilizada.

Puesto que no existe solución analítica de este problema, los resultados obtenidos con Elementos de Contorno discontinuos (E.C.D.) se comparan con los obtenidos por Fredriksson<sup>1</sup>, con Elementos Finitos (E.F.) y por Andersson<sup>6,7</sup> con Elementos de Contorno continuos (E.C.C.).

En la Fig. 7 se representan los deslizamientos relativos habidos entre nodos en contacto, para diferentes coeficientes de rozamiento. La zona de adhesión, en la que hay deslizamientos relativos, va aumentando a medida que se incrementa el valor del coeficiente de rozamiento.

Figura 7. Deslizamientos relativos en la zona de contacto para diferentes valores de  $\mu$ .

Los valores representados en la Fig. 7 corresponden a la consideración implícita de la simetría, lo que conlleva una mejora en los resultados debido a que se pueden imponer condiciones que dado el carácter de los elementos discontinuos no podrían

forzarse con la discretización de todo el contorno. Así el desplazamiento horizontal nulo del punto 0 (Fig. 6) se cumple con los resultados obtenidos de esta consideración como se puede apreciar en la Tabla 1.

$u_2^A \cdot 10^{+3}$ mm.	NODO 1	NODO 2	Punto 0
Simetría implícita	0.3074	0.9198	$0.12 \times 10^{-4}$
Simetría explícita	0.4553	0.9073	0.2293

Tabla 1. Desplazamientos horizontales en el elemento de  $\partial D_c^A$  que contiene al punto 0 ( $\mu=0$ ).

La Fig. 8 representa la evolución de las tensiones normales y tangenciales (en el caso de que haya rozamiento), a lo largo de la zona de contacto. La solución está en completo acuerdo con los resultados obtenidos por Andersson<sup>7</sup>.

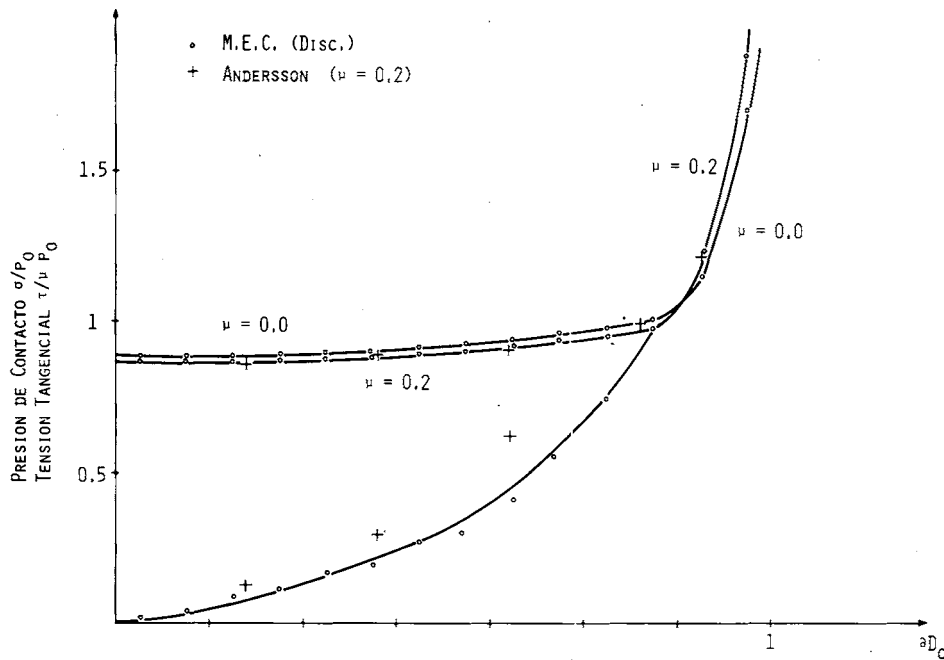


Figura 8. Tensiones normales y tangenciales en la zona de contacto.

### Ejemplo 2 - Compresión de disco circular sobre semiespacio elástico.

Se trata de un problema, Fig. 9, en que la superficie de contacto varía en función de la carga aplicada. En el caso en que además esté presente el efecto de fricción, puede ser preciso, como ya sucedía en el ejemplo anterior, realizar algunas iteraciones en cada

aplicación de carga para definir correctamente la evolución cualitativa de la zona de contacto. El caso de fricción y superficie variable es el más complejo, por tanto, que se puede presentar.

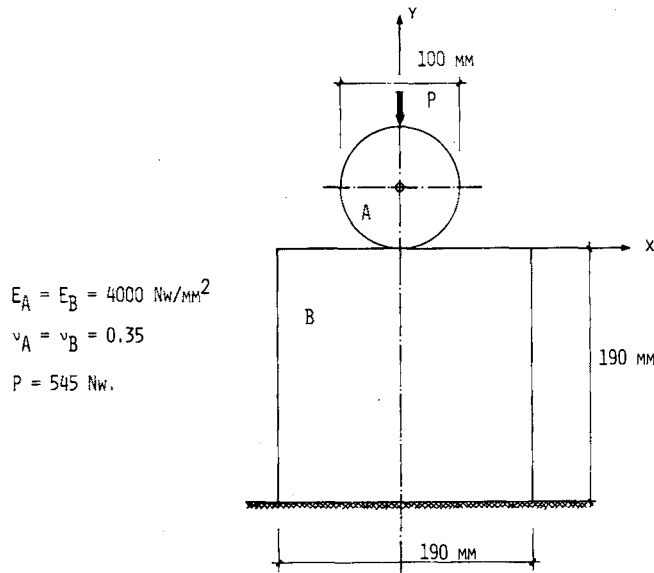


Figura 9. Definición del ejemplo.

La discretización realizada, con simetría implícita representa el disco con 18 elementos y la cimentación con 24 elementos. La carga se aplica mediante una distribución triangular sobre un elemento y la zona que se considera puede ser de contacto se modela con seis elementos, elementos que son evidentemente de la misma longitud en los contornos de ambos cuerpos. La consideración de condensación estática contemplada anteriormente reduce el tamaño del sistema de ecuaciones a 52. Debido a que en este caso la carga se va a aplicar en 12 incrementos la reducción del tiempo total de la resolución es muy importante, ya que el tiempo empleado es algo menos de un 10% del que se necesita arrastrando todas las variables en la resolución de cada incremento.

En el caso de ausencia de fricción, los resultados se comparan con la solución teórica de Hertz para el caso de cimentación semiinfinita.

La Tabla 2 muestra una relación entre las zonas de contacto obtenidas para diferentes valores en la carga aplicada, obteniéndose una excelente concordancia entre la solución analítica y la numérica con la formulación presentada.

		P. (New)				
		177.6	234	380	465.6	545
B/2 (mm)	E.c.d	2.275	2.625	3.325	3.65	3.95
	Hertz	2.227	2.556	3.262	3.61	3.90

Tabla 2. Semilongitud de contacto (B/2) para diferentes cargas (P).

La Fig. 10 muestra el deslizamiento total entre nodos a partir del instante en que se ha producido el contacto entre ellos, para diferentes valores del coeficiente de rozamiento.

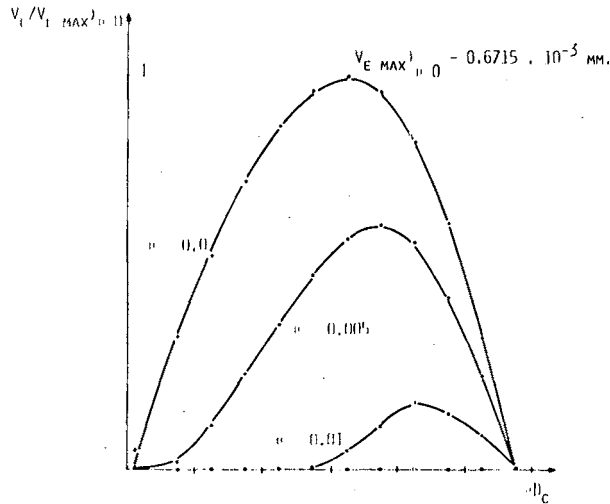


Figura 10. Desplazamientos relativos en la zona de contacto.

La Fig. 11 muestra la distribución final de las tensiones normales y tangenciales en la zona de contacto. Las tensiones normales no se ven alteradas por la presencia de la fricción por lo que sólo se representa un caso. Aparecen dos valores (con el resto de la discretización igual) para el primer nodo del primer elemento según que esté situado a  $0.125 L$  ó  $0.05 L$  del eje de simetría, siendo  $L$  la longitud de dicho elemento. Puesto que la situación del nodo condiciona la configuración inicial del proceso de carga, es evidente que al estar más próximo al eje se modela mejor la situación real y por tanto los resultados son más exactos. En el caso con rozamiento sólo queda en adhesión el primer nodo por lo que con los valores que se toman en ordenadas sólo se representan las tensiones tangenciales sobre el primer elemento.

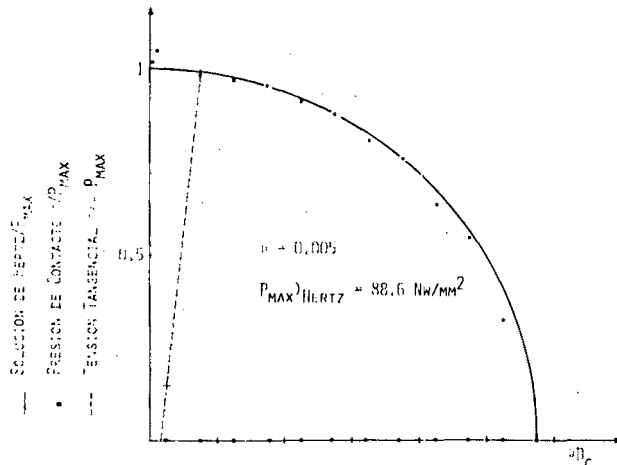


Figura 11. Tensiones normales y tangenciales en la zona de contacto en el instante final.

### Ejemplo 3 - Compresión de un punzón rígido sobre un semiplano elástico

Un punzón rígido es comprimido sobre un semiplano elástico como se muestra en la Fig. 12. El contorno del punzón lo describe la ecuación  $y = 0.05 x^4$ .

Se analiza el caso sin fricción, con objeto de contrastar los resultados con los obtenidos por Mahmoud, Salamon y Marks<sup>11</sup> utilizando el M.E.F.

Las características geométricas y elásticas de ambos dominios se especifican en la Fig. 12.

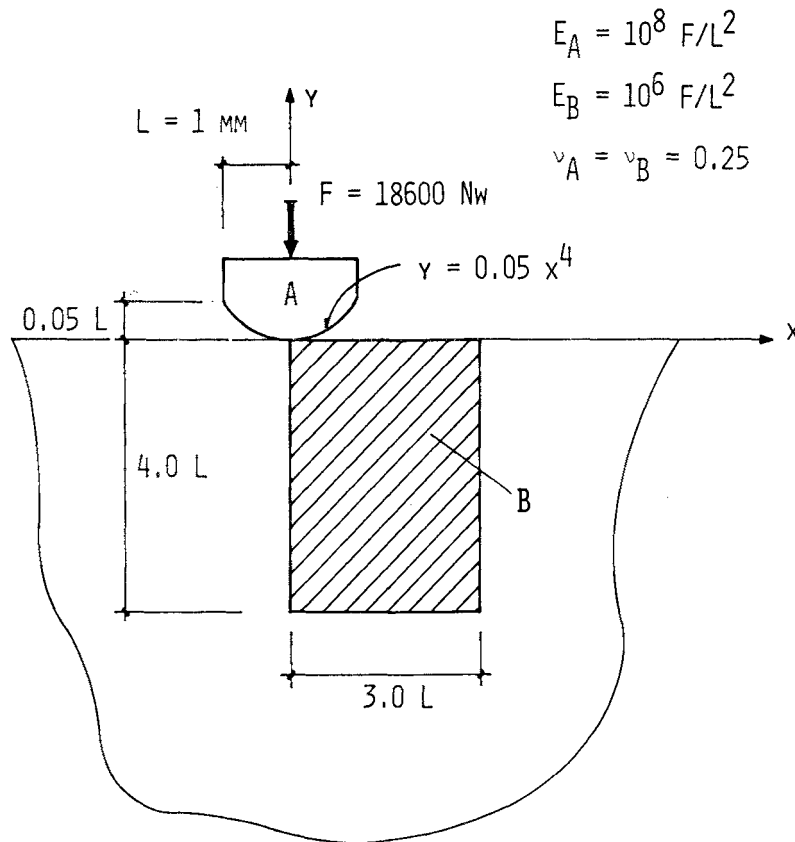


Figura 12. Definición del ejemplo.

La discretización utilizada describe el contorno del punzón con 21 elementos, mientras que la zona que se considera del semiespacio (sombreada en la Fig. 12) lo es con 28 elementos, por lo que el problema involucra a 196 grados de libertad.

Para la aplicación progresiva de la sollicitación, se consideran siete elementos discontinuos de igual longitud, como candidatos a contactar, que junto con el elemento del punzón que alberga la carga, conduce a un sistema condensado de 60 variables.

La totalidad de la carga se cubre en 12 incrementos (13 pares de contacto).

En la Fig. 13 se representa la evolución de la semilongitud de contacto con la carga aplicada, obteniéndose una ley concordante con la deducida por Mahmoud<sup>11</sup>. En la Fig. 14 se representa la distribución de tensiones normales en la interfase para el umbral de sollicitación, siendo ésta análoga a la deducida por Marks<sup>12</sup> mediante el M.E.F.

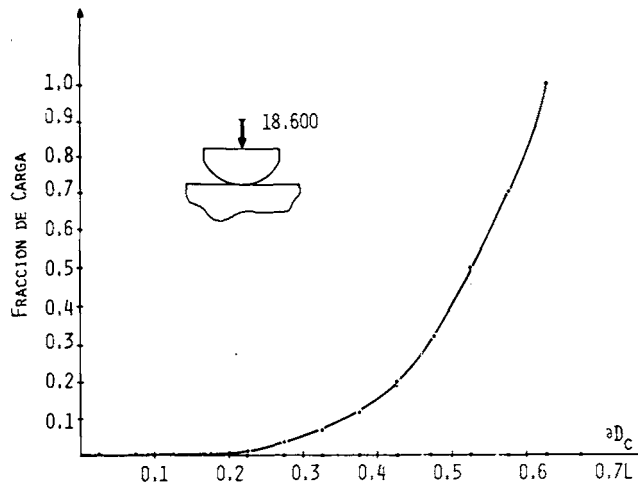


Figura 13. Evolución de la semilongitud de contacto con la sollicitación.

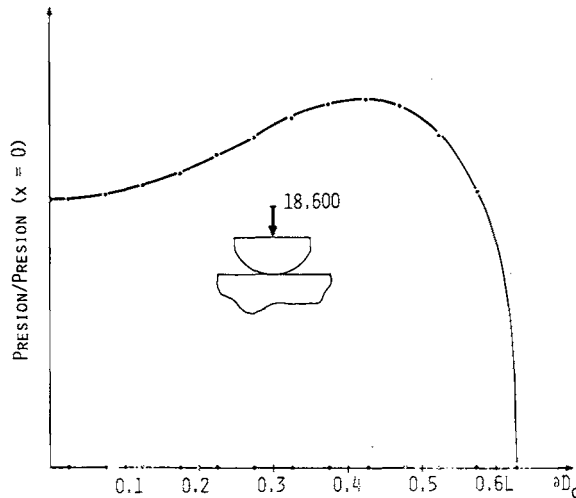


Figura 14. Distribución de tensiones normales en la zona de contacto.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación con ecuaciones integrales que permite un planteamiento de contorno del problema de contacto con fricción entre dominios bidimensionales, no incluyendo la definición de la superficie deformada como sucede en otras formulaciones previas.<sup>5</sup>

El Método de los Elementos de Contorno, con variación lineal, aunque discontinua entre elementos, ha permitido encontrar resultados numéricos a diversos problemas. El uso de elementos incompatibles tiene la ventaja de la facilidad de aplicación de las condiciones de contorno, fuera y dentro de la zona de contacto, y no se han detectado ningún tipo de problemas por la ubicación de diferentes posiciones de los nodos en el elemento ni por el criterio de avance de la zona de contacto que Anderson<sup>7</sup> indica para elementos parabólicos.

La aplicación de la simetría implícita y sobre todo la condensación de los grados de libertad correspondientes a nodos no activos durante el proceso incremental ha

supuesto un importante ahorro del tiempo de cálculo, así como una disminución del tamaño de memoria necesario para resolver un cierto problema. Estas ventajas se ponen especialmente de manifiesto en problemas donde está presente la fricción y donde la zona de contacto varía con la aplicación de las cargas.

En la necesaria comparación de eficiencia frente al Método de los Elementos Finitos, es preciso indicar que se trata de un problema claramente ventajoso para ser tratado con una alternativa de contorno ya que todas las variables importantes, asociadas al proceso de contacto se encuentran asociadas al contorno de ambos dominios. Esto hace, por otro lado, que en caso de usar Elementos Finitos para modelar el problema estos deben ser de orden superior (LST) para poder aplicar correctamente las condiciones en la zona de contacto. En caso de utilizar elementos con variación lineal de desplazamientos<sup>1</sup> se hace preciso una discretización muy fina en el entorno de la zona de contacto. La parte más gravosa del Método de los Elementos de Contorno, cual es el proceso de integración para generar el sistema de ecuaciones, tiene en este caso una influencia menor al mantener la hipótesis de pequeños desplazamientos (necesidad de integrar una sola vez) y tener que resolverlo incrementalmente. Las anteriores consideraciones sobre aplicación de la simetría y el proceso de condensación suponen al menos identificar los tiempos de resolución en una y otra alternativa, quedando finalmente la clásica ventaja de la alternativa de Contorno en lo que se refiere a facilidad de preparación de datos y flexibilidad de la discretización para adaptarse a zonas con altos gradientes de variación de las variables como es el caso del problema de contacto.

#### BIBLIOGRAFIA

1. B. Fredriksson. Finite Element solution of surface non-linearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems. *Computers and Structures*. Vol. 6, pp. 281-290, (1976).
2. N. Okamoto y M. Nabazawa. Finite element incremental contact analysis with various frictional conditions. *Int. J. Num. M. Eng.* Vol. 14, pp. 337-357, (1979).
3. J.T. Oden y E.B. Pires. Nonlocal and nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 50, 67-76, Marzo, (1983).
4. J.T. Oden y E.B. Pires. Numerical analysis of certain contact problems in elasticity with non-classical friction laws. *Computers and structures*. Vol. 16, número 1-4, pp. 481-485, (1983).
5. T. Anderson, B. Fredriksson y B.G. Allan Persson, The Boundary Element Method applied to two dimensional contact Problems. *New Developments in Boundary Element Methods* Ed., C.A. Brebbia. CML Publications, (1980).
6. T. Anderson. The boundary Element Method applied to two-dimensional contact Problem with Friction. *Boundary Element Method*. Ed. by C.A. Brebbia. Springer-Verlag. (1981).
7. T. Anderson. The Second generation Boundary Element Contact Program. *Boundary Element Methods in Engineering*. Springer-Verlag. (1982).
8. F. Paris y J.A. Garrido. Análisis del problema de contacto sin fricción con el Método de los Elementos de Contorno. *Anales de Ingeniería Mecánica*. Año 2, número 1, pp. 22-29. (1984).
9. F. Paris y J.A. Garrido. Análisis del problema de contacto con fricción con el Método de los Elementos de Contorno. *Anales de Ingeniería Mecánica*. Año 2, número 1, pp. 38-45. (1984).
10. F. Paris y J.A. Garrido. Elementos discontinuos lineales en el análisis elástico bidimensional con el Método de los Elementos de Contorno. *Anales de Ingeniería Mecánica*. Año 1, número 1, pp. 20-25. (1983).
11. F.F. Mahmoud, N.J. Salamon y W.R. Marks. A direct automated procedure for frictionless contact problems. *International Journal for numerical methods in engineering*. Vol. 18, pp. 45-257. (1982).
12. W.R. Marks y N.J. Salamon. A Modified conjugate gradient method for frictionless contact problems. *Transaction of the ASME*. Vol. 105, pp. 242-246, (1983).