



Escola Politècnica Superior
de Castelldefels

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

TRABAJO DE FINAL DE CARRERA

TÍTULO DEL TFC: Sistema de Navegación para Vehículos Aéreos Cuadricópteros

TITULACIÓN: Ingeniería Técnica Aeronáutica, especialidad Aeronavegación

AUTOR: Rodrigo Alberto Mayorga Rodríguez

DIRECTOR: Jaime Oscar Casas Piedrafita

FECHA: 30 de Junio de 2009

Título: Sistema de Navegación para Vehículos Aéreos Cuadricópteros

Autor: Rodrigo Alberto Mayorga Rodríguez

Director: Jaime Oscar Casas Piedrafita

Fecha: 30 de Junio de 2009

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo modelar los parámetros que influyen en el diseño del sistema de navegación de un vehículo cuadricóptero. Este diseño se hace a través del estudio inicial para un solo motor y una hélice, para luego ampliarlo a los cuatro elementos de propulsión. El resultado será un modelo de la planta sobre el que se estudiará el mejor controlador posible (PID) y la influencia de los errores y limitaciones de la planta y los sensores de medición. Los resultados obtenidos pueden ser aplicados a cualquier cuadricóptero diseñado y/o comprado.

Title: Navigation System for Quadrotor Air Vehicles

Author: Rodrigo Alberto Mayorga Rodríguez

Director: Jaime Oscar Casas Piedrafita

Data: June, 30th 2009

Overview

This work aims to model the parameters that influences the design of the navigation system of a quadrotor vehicle. This design is done initially through the study for a single engine and propeller, and then expanded to the four propulsion elements. The result will be a model of the plant on which will be considered the best possible driver (PID) and the influence of the error and limitation of the plant and measurement sensors.

The results can be applied to any quadrotor designed and / or purchased.

A mis padres, por apoyarme y creer en mí

A Gemma, por ser mi inspiración

“Nunca consideres el estudio como una obligación,
sino como una oportunidad para penetrar en el
bello y maravilloso mundo del saber”

- Albert Einstein -

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. Vehículos aéreos no tripulados	1
1.1.1. Introducción	1
1.1.2. Clasificación y descripción	2
1.2. Cuadricópteros	6
1.2.1. Historia.....	6
1.2.2. Cuadricópteros UAV	8
CAPÍTULO 2. DINÁMICA EN UNA DIMENSIÓN.....	10
2.1. Dinámica de un unirotor	10
2.1.1. Introducción	10
2.1.2. Análisis del funcionamiento de un motor.....	10
2.1.3. Hélices	14
2.1.4. Ejemplos Comerciales.....	16
2.1.5. Combinación Motor Hélice	17
2.2. Dinámica unidimensional del cuadricóptero.....	17
2.2.1. Introducción	17
2.2.2. Fuerzas en un cuadricóptero.....	17
2.2.3. Ascenso y Descenso	18
CAPÍTULO 3. DINÁMICA EN TRES DIMENSIONES	20
3.1. Descripción del sistema	20
3.1.1. Coordenadas generalizadas.....	20
3.1.2. Energía Cinética de Traslación	20
3.1.3. Energía Cinética Rotacional	21
3.1.4. Energía Potencial	21
3.2. Modelo Matemático	21
3.2.1. Modelo Euler-Lagrange para la Fuerza Total.....	22
3.2.2. Modelo Newton para los Momentos.....	22
3.2.3. Planta del modelo	24
3.3. Modelo Matemático Alternativo	26
3.3.1. Modelo dinámico	26
3.3.2. Planta del modelo dinámico	27
CAPÍTULO 4. SIMULACIÓN DE LOS MODELOS DESARROLADOS	29
4.1. Introducción.....	29
4.2. Funciones de Transferencia.....	29
4.3. Ajuste de planta.....	30
4.4. Controladores	32
4.4.1. Controlador PID.....	32
4.4.2. Controlador de Z.....	35
4.4.3. Controlador de XY	39
4.4.4. Controlador de ϕ	42

4.5. Variación sensor y planta	47
4.6. Integración controlador angular y de posición	51
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES.....	56
REFERENCIAS.....	57
ANEXO I.....	58
ANEXO II.....	60

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Tipos de aeronaves UAVS	3
Figura 1.2: Bregét-Richet Giroplano N°1	6
Figura 1.3: Convertawings Modelo A	7
Figura 1.4: Quad Tiltrotor	7
Figura 1.5: Descripción de los grados de libertad	9
Figura 2.1: Esquema partes de motor	11
Figura 2.2: Regla mano Derecha	12
Figura 2.3: Esquema PAR motor.....	12
Figura 2.4: Fuerzas cuadricóptero.....	18
Figura 3.1: Sistema de referencia fijo y móvil.....	26
Figura 4.1: Diagrama de bloques	29
Figura 4.2: Sistema de lazo cerrado.....	30
Figura 4.3: Planta Z sin controlador	31
Figura 4.4: Planta XY sin controlador.....	31
Figura 4.5: Planta ϕ sin controlador.....	32
Figura 4.6: Comportamiento sistema	34
Figura 4.7: Planta Z $K_D = 1, K_P = 1$	36
Figura 4.8: Planta Z $K_D = 10, K_P = 0,2$	37
Figura 4.9: Planta Z $K_D = 100, K_P = 0,2$	37
Figura 4.10: Planta Z error sensor 1 %	38
Figura 4.11: Planta Z error sensor 10 %	38
Figura 4.12: Planta XY $K_D = 1, K_P = 1$	40
Figura 4.13: Planta XY $K_D = 10, K_P = 1$	40
Figura 4.14: Planta XY $K_D = 0.5, K_P = 0,01$	41
Figura 4.15: Planta XY error sensor 1 %.....	41
Figura 4.16: Planta XY error sensor 10 %.....	42
Figura 4.17: Planta ϕ $K_D = 1, K_P = 1$	43
Figura 4.18: Planta ϕ $K_D = 1, K_P = 0,1$	43
Figura 4.19: Planta ϕ $K_D = 1, K_P = 0,01$	44
Figura 4.20: Planta ϕ $K_D = 5, K_P = 0,01$	44
Figura 4.21: Planta ϕ $K_D = 0,5, K_P = 0,01$	45
Figura 4.22: Planta ϕ $K_D = 0,3, K_P = 0,01$	45
Figura 4.23: PLANTA ϕ error sensor 1 %.....	46
Figura 4.24: PLANTA ϕ error sensor 10 %.....	46
Figura 4.25: Planta Z con retraso de sensor de 1 ms.....	47
Figura 4.26: Planta Z con retraso de sensor de 100 ms.....	48
Figura 4.27: Planta Z con retraso de sensor de 1 s.....	48
Figura 4.28: Planta Z retraso de sensor 1 ms y doble masa	49
Figura 4.29: Planta Z retraso de sensor 100 ms y doble masa	49
Figura 4.30: Planta Z retraso de sensor 1 ms y un polo extra	50
Figura 4.31: Planta Z retraso de sensor 100 ms y un polo extra	50
Figura 4.32: Integración controladores.....	51
Figura 4.33: Respuesta integración controladores	52
Figura 4.34: Integración controladores con retraso 1 ms	52

Figura 4.35: Respuesta integración controladores retraso 1 ms	53
Figura 4.36: Integración controladores con retraso 50 ms	53
Figura 4.37: Respuesta integración controladores retraso 50 ms	54
Figura 4.38: Integración controladores con retraso 100 ms	54
Figura 4.39: Respuesta integración controladores retraso 100 ms	55

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1: Usos civiles de los UAV.....	2
Tabla 1.2: Ventajas y Desventajas de los UAV	5
Tabla 1.3: Comparación vehículo de despegue vertical.....	5
Tabla 2.1: Características Draganfly V Ti.....	16
Tabla 2.2: Características Walkera UFO 5.....	16
Tabla 4.1: Valores de constantes	30
Tabla 4.2: Comportamiento del sistema con controladores	34

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1. Vehículos aéreos no tripulados

1.1.1. Introducción

Como su nombre indica, un vehículo aéreo no tripulado, o en inglés Unmanned Air Vehicle (UAV), es un tipo de aeronave controlada, ya sea remotamente o localmente, mediante un microprocesador, pero siempre sin presencia humana a bordo.

Estas aeronaves pueden ir desde un vehículo a escala con radio control (planeadores, helicópteros, dirigibles, aviones, entre otros) a vehículos tan sofisticados como pueden ser aviones a tamaño real, con sus respectivos equipos de navegación (GPS, VOR, Servomecanismos, entre otros), para vigilancia, espionaje, reconocimiento de terrenos, entre otros.

Las primeras aeronaves no tripuladas que se conocen, son de la guerra civil de Estados Unidos, donde ambos bandos enviaban globos con cargas explosivas tratando de que llegaran a los polvorines del enemigo para hacerlo estallar por los aires. No tuvieron un gran éxito ya que se dieron cuenta de que eran inexactos y poco fiables.

Durante la segunda guerra mundial tuvieron un gran éxito ya que Estados Unidos creó un prototipo de UAV conocido como *Operación Afrodita*. Eran aviones B-17 controlados remotamente y que repletos de explosivos (aproximadamente 9 toneladas) se hacían estrellar contra objetivos estratégicos.

En los años 60, los Estados Unidos comenzaron a desarrollar *drones*, o aviones teledirigidos, para espionaje y reconocimiento. El primero de ellos se conoce como el *Firebee* que fue fuertemente usado sobre la República Comunista de China.

Durante la guerra de Vietnam se usaron varios *Firebees* de reconocimiento con cámaras de día. Posteriormente fueron mejorados con cámaras de fotos nocturnas, comunicaciones e inteligencia electrónica.

En la guerra del golfo se utilizó el *Predator*, capaz de volar 700 kilómetros, con una autonomía de 24 horas y con dos puntos de anclaje de misiles *Hellfire* o *Stinger*.

Actualmente, además de aplicaciones militares, hay un gran interés en desarrollar UAV para aplicaciones civiles. Por esto, el número de grupos de investigación y empresas para crear este tipo de sistemas se ha ido multiplicando en los últimos años.

Algunas de las aplicaciones civiles de los UAV se pueden observar en la tabla 1.1 [1]:

Industria Civil	Uso
Agricultura	UAV equipados con pesticidas y fertilizantes para pulverizar en los campos.
Vigilancia cultivos	El 10 % de los cultivos de los Estados Unidos están siendo monitorizados por UAV en terrenos de gran extensión.
Control medioambiental e investigación de clima	Globos climáticos son lanzados para estudios del tiempo en la tierra.
Exploración mineral	Se buscan minerales que pueda haber en regiones de difícil acceso.
Vigilancia guardacostas	Se monitorizan las líneas costeras.
Telecomunicaciones	Los UAV están siendo usados en aplicaciones de telecomunicaciones móviles como plataformas de relevo, así como telecomunicaciones de emergencia en zonas de desastre.
Radiodifusión de noticias	Reporte en video de eventos donde los reporteros no pueden acceder.
Teledetección de recursos marinos	Detección de recursos bajo el mar donde los humanos no pueden acceder.
Detección de artillería sin detonar	Para la detección de minas no detonadas en zonas como Etiopía, Mozambique, Somalia y Sudán.
Control de tráfico aéreo	Apoyo a aeropuertos con sobrecarga de trabajo.
Control de tráfico terrestre	Monitoreo de tráfico y accidentes en autopistas.

Tabla 1.1: Usos civiles de los UAV

1.1.2. Clasificación y descripción

Una primera forma de clasificar los UAV es según su tamaño y peso. Las categorías son las siguientes

- MICRO: Menor a 1 kg.
- MINI: 1 – 10 kg.
- PEQUEÑO: 10 - 50 kg.
- MEDIANO: 50 -100 kg.

- GRANDE: Más de 100 kg.

Otra clasificación permite diferenciar dos grandes grupos en función de su despegue, los de despegue vertical, como helicópteros y dirigibles, y los de despegue no vertical, como aeroplanos y parapente. La figura 1.1 muestra un resumen de estas aeronaves.

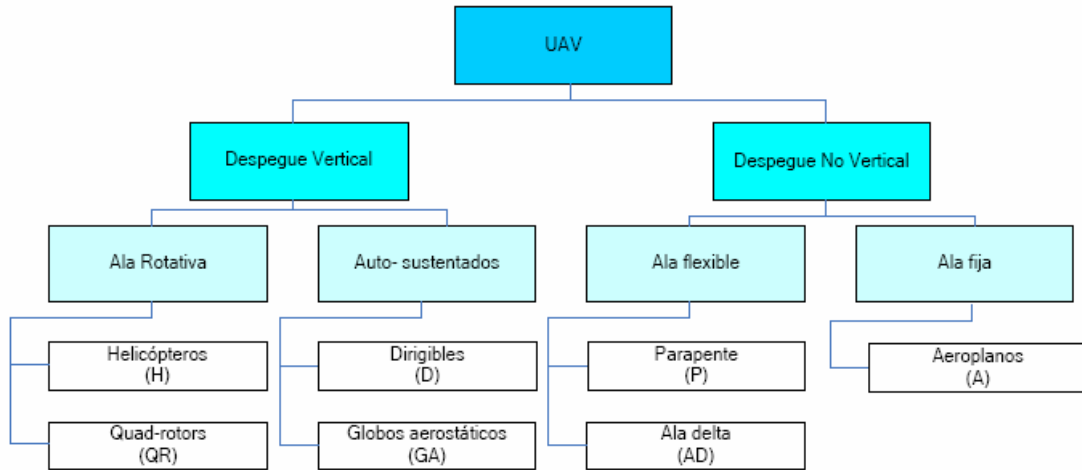







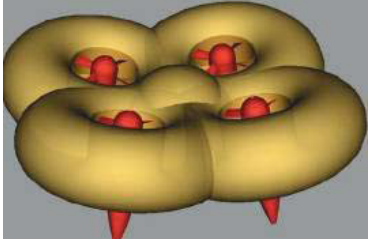
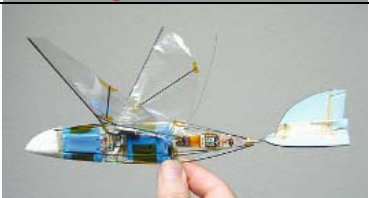



Figura 1.1: Tipos de aeronaves UAVS

La tabla 1.2 muestra ventajas y desventajas de algunos de los vehículos resumidos en la figura 1.1.

Configuración	Fotografía	Ventajas	Desventaja
Ala fija		-Mecánica simple -Operación silenciosa	-No permanece inmóvil
Rotor único		-Buen control y maniobrabilidad	-Mecánica compleja -Rotor grande -Cola larga
Rotor Axial		-Compacto -Mecánica simple	-Control complejo -Mala maniobrabilidad

Rotor Coaxial		-Compacto -Mecánica simple	-Aerodinámica compleja
Rotor Tandem		-Buen control y maniobrabilidad -No hay interferencia aerodinámica	-Mecánica compleja -Gran tamaño
Cuadricóptero		-Buena maniobrabilidad -Mecánica simple -Aumento en la carga útil	-Consume mucha energía -Gran tamaño
Dirigible		-Consume poca energía -Auto sustentación	-Gran tamaño -Mala maniobrabilidad
Híbrido		-Buena maniobrabilidad -Buena Supervivencia	-Gran tamaño -Diseño complejo
Tipo pájaro		-Buena maniobrabilidad -Poco consumo energético	-Mecánica compleja -Control complejo
Tipo insecto		-Buena maniobrabilidad -Compacto	-Mecánica compleja -Control complejo

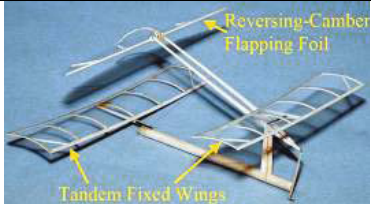
Tipo pez		-Movilidad multimodo -Aerodinámica eficiente	-Control complejo Mala maniobrabilidad
----------	---	---	---

Tabla 1.2: Ventajas y Desventajas de los UAV

Si nos fijamos en las características de funcionamiento, se puede hacer una pequeña comparación de los vehículos de despegue vertical según sus características de funcionamiento [2], mostrado en la tabla 1.3.

Característica	A	B	C	D	E	F	G	H
Consumo potencia	2	2	2	2	1	4	3	3
Control	1	1	4	2	3	3	2	1
Carga útil / Volumen	2	2	4	3	3	1	2	1
Maniobrabilidad	4	2	2	3	3	1	3	3
Simplicidad mecánica	1	3	3	1	4	4	1	1
Complejidad aerodinámica	1	1	1	1	4	3	1	1
Vuelo a baja velocidad	4	3	4	3	4	4	2	2
Vuelo a alta velocidad	2	4	1	2	3	1	3	3
Miniaturización	2	3	4	2	3	1	2	4
Supervivencia	1	3	3	1	1	3	2	3
Vuelo Estacionario	4	4	4	4	4	3	1	2
TOTAL	24	28	32	24	33	28	22	24

Tabla 1.3: Comparación vehículo de despegue vertical

Con A rotor único, B rotor axial, C rotor coaxial, D rotor tandem, E cuadricóptero, F dirigible, G tipo pájaro y H tipo insecto.
(1: Malo, 4: Muy bueno)

Comparando todas las características se comprueba que globalmente las mejores características se obtienen en el rotor coaxial y el cuadricóptero, siendo el último el que será estudiado en este trabajo.

1.2. Cuadricópteros

El cuadricóptero (o quadrotor), es una aeronave que se eleva y se desplaza por la acción cuatro rotores instalados al final de un marco en forma de cruz. El control se logra variando la velocidad angular de cada uno de los cuatro motores.

1.2.1. Historia

El primer cuadricóptero de la historia fue creado a comienzos del siglo 20 por un científico francés llamado Charles Richet, el cuál creó un pequeño cuadricóptero no pilotado que no tuvo éxito en volar. Este hecho inspiró a un alumno de Richet, Louis Bregét, a experimentar con aeronaves con rotores, llegando a crear el primer cuadricóptero pilotado de la historia, el cuadricóptero Bregét-Richet, que se observa en la figura 1.2.

Tenía un motor Antoinette de 8 cilindros de 40 HP que controlaba cuatro rotores, que a su vez tenían hélices de cuatro palas. Para mover las hélices se usaba un simple sistema de poleas. La estructura estaba hecha de tubos de acero para soportar el peso del conjunto motor, rotores y sistema de poleas.

El primer vuelo fue hecho en Douai, Francia, el año 1907 y se elevó una altura de un metro y medio.

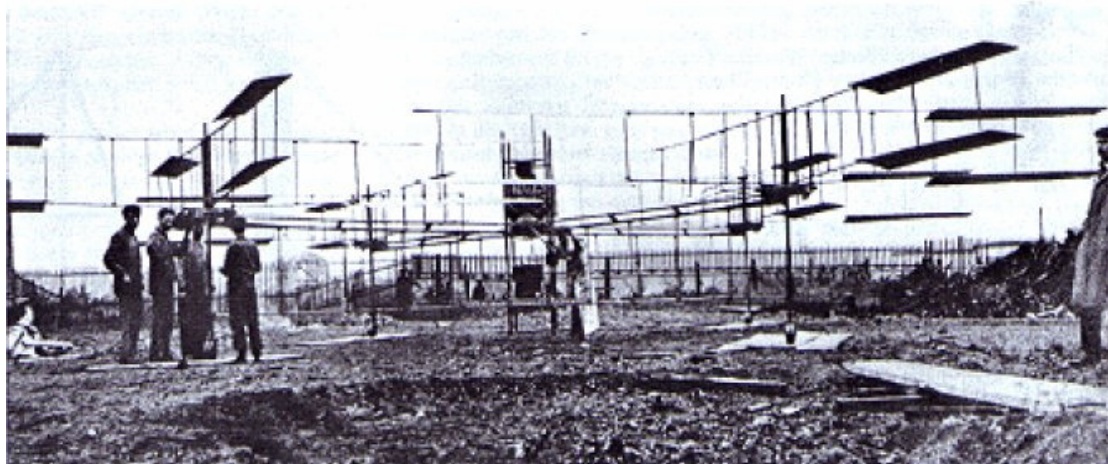


Figura 1.2: Bregét-Richet Giroplano N°1

Posteriormente en 1956 se crea un prototipo, llamado Convertawings Modelo A, pensado para uso civil y militar. El diseño tenía dos motores que controlaban cuatro rotores. No tenía rotor de cola, ya que usaba la diferencia en las velocidades de giro para lograr el desplazamiento. La figura 1.3 muestra una imagen del vehículo.

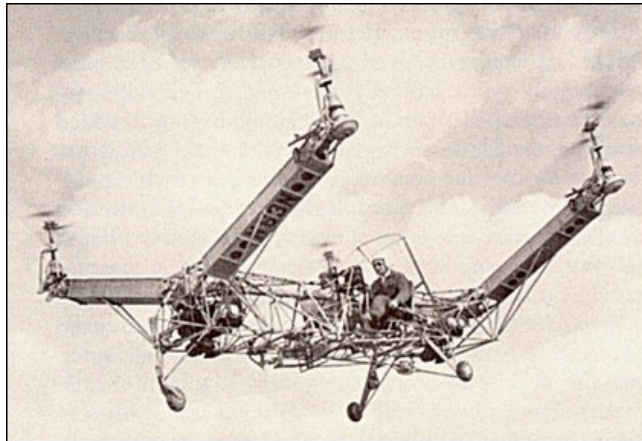


Figura 1.3: Convertawings Modelo A

A finales de los años 90 la empresa de helicópteros Bell y Boeing trabajaron conjuntamente en el desarrollo del Quad Tiltrotor. Es un cuadricóptero de despegue horizontal capaz de modificar la dirección de sus cuatro rotores, llamados *proptores*, hacia delante para tener un vuelo vertical como un avión convencional. La figura 1.4 muestra sus dos modalidades de funcionamiento.



Figura 1.4: Quad Tiltrotor

Actualmente, solo se está desarrollando el Quad Tiltrotor como cuadricóptero tripulado, el resto de vehículos de estas características son no tripulados y de dimensiones mucho más reducidas.

1.2.2. Cuadricópteros UAV

Es la nueva generación de cuadricópteros, que utiliza mayoritariamente la energía eléctrica de una batería, además de usar sistemas de control y sensores electrónicos para estabilizar al vehículo.

La principal ventaja que tienen sobre los helicópteros convencionales es que no necesitan de un sistema mecánico para variar el disco del rotor para desplazarse, si no que con solo variar la velocidad angular de uno de sus rotores ya se desliza.

Los cuadricópteros, como todos los vehículos voladores, tienen tres grados de libertad guiñada, inclinación y bamboleo. Todos estos movimientos se muestran en la figura 1.5.

Movimiento de guiñada (yaw)

Se refiere al movimiento cuando el vehículo gira sobre su eje vertical. El cuadricóptero logra este movimiento aumentando (o disminuyendo) por igual la potencia de giro de rotores 1 y 3 y disminuyendo (o aumentando) en igual magnitud los motores 2 y 4. Al disminuir esta potencia aumenta el par motor creando un giro contrario a las hélices que están rotando con mayor potencia. Las potencias de giro deben variar equilibradas para mantener el vehículo estacionario en el aire, es decir, la fuerza total constante.

Este movimiento está definido por el ángulo de giro ψ .

Movimiento de inclinación (pitch)

Es el movimiento que permite el movimiento hacia adelante y atrás. El vehículo mantiene la potencia en el rotor 1 que es opuesto al sentido deseado, reduce al mínimo la del rotor 3 y deja los otros dos a potencia media, así la sustentación del rotor 1 hace que el vehículo se incline a favor del sentido deseado y se desplace.

Este movimiento está definido por el ángulo de giro θ .

Movimiento de bamboleo (roll)

Es cuando el vehículo se mueve a la izquierda o derecha. Usa el mismo principio que el de inclinación, pero lateralmente.

Este movimiento está definido por el ángulo de giro ϕ .

La combinación de los tres movimientos mencionados son los que hacen maniobrar al cuadricóptero libremente. La figura 1.5 muestra gráficamente estos movimientos y sus respectivos ángulos.

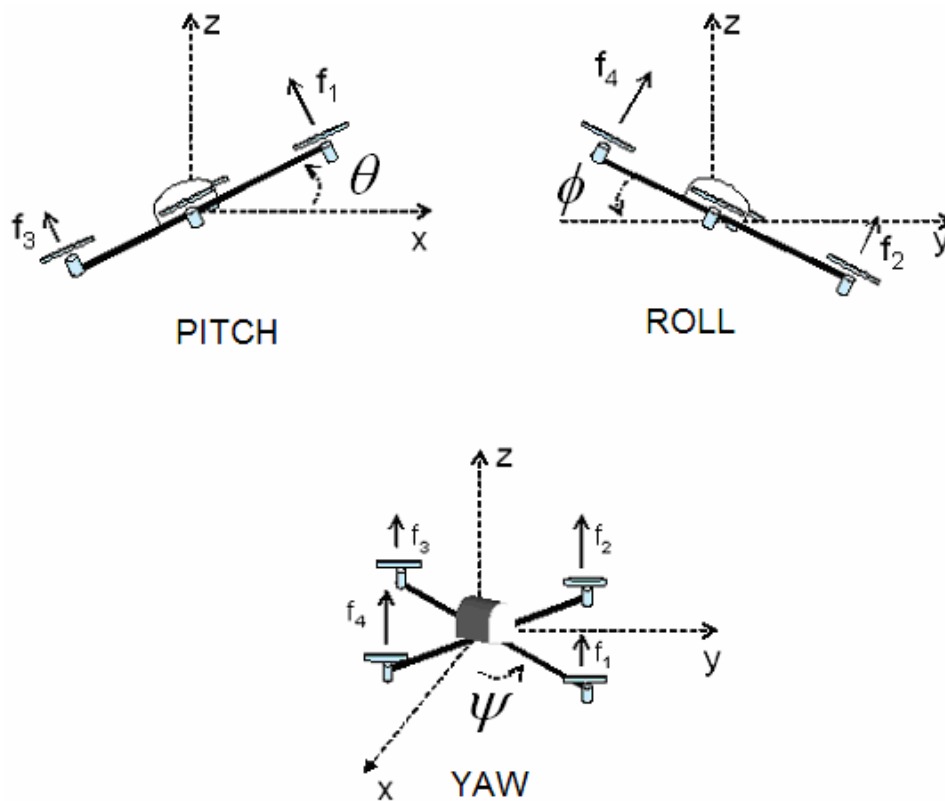


Figura 1.5: Descripción de los grados de libertad

El control de los movimientos yaw, pitch y roll se realiza con el sistema de navegación. El **objetivo** de este trabajo es encontrar las expresiones matemáticas que permitan modelar el comportamiento del quadricóptero en el espacio. Los modelos matemáticos desarrollados serán simulados estudiándose el efecto de las limitaciones y cambios en la planta, controladores y sistemas sensores de medida.

Se espera que con éste modelo se pueda, en un futuro, controlar un vehículo quadricóptero para vuelos autónomos.

CAPÍTULO 2. DINÁMICA EN UNA DIMENSIÓN

2.1. Dinámica de un unirotor

2.1.1. Introducción

En el análisis de la dinámica de cualquier vehículo, se debe tener en consideración un estudio desde el concepto más básico para llegar a la estructura total. Es por eso que antes de trabajar con el cuadricóptero por completo, se comenzará analizando un vehículo con un solo rotor, o unirotor, y luego se escalará al vehículo total.

2.1.2. Análisis del funcionamiento de un motor

Un motor es una máquina que transforma la energía almacenada en trabajo. Esta energía proviene de la explosión de combustible, de energía química almacenada en una batería o de alguna otra fuente.

Existen diferentes tipos de motores:

- Térmicos: de combustión interna o externa.
- Eléctricos: el trabajo viene entregado debido a una corriente eléctrica.

En este trabajo se enfocará el estudio en motores eléctrico de corriente continua, ya que son los que llevan mayoritariamente las micro aeronaves (MAVs).

2.1.2.1 Motores eléctricos de corriente continua

Es un tipo de motor que ha de garantizar arranques frecuentes, variaciones de velocidad y frenado.

Su principio de funcionamiento se basa en el giro del rotor, que es un electroimán que gira en torno a un eje y al que transmite el trabajo. Al electroimán se le transmite una corriente a través de unas escobillas para generar un campo magnético variable según la corriente eléctrica entrante. El rotor tiene alrededor un imán permanente de campo magnético fijo, el cual interactúa con el electroimán y genera el movimiento circular del motor.

En la figura 2.1 se puede observar un esquema de un motor eléctrico y sus diferentes piezas.



Figura 2.1: Esquema partes de motor

Sus características más importantes son el par motor, la velocidad de giro y la potencia, que se explican a continuación.

2.1.2.2 Par motor

El PAR motor (conocido también como momento de fuerza, torque, torca o momento) es la fuerza que ejerce un motor en cada giro. Físicamente, el PAR, se define como el producto vectorial de la fuerza ejercida multiplicada por un vector directo, o también conocido como brazo. La ecuación vectorial es [3]:

$$\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{d} \quad (2.1)$$

Donde:

τ : PAR

F : Fuerza ejercida

d : Largo del brazo

Ahora bien, para calcular la fuerza, se debe analizar la fuerza de Lorentz, en la que una carga que se mueve por un campo magnético siente una fuerza perpendicular al campo según la regla de la mano derecha, figura 2.2, la que se desglosa de la manera siguiente:

Pulgar sigue el sentido de la corriente
Índice sigue el sentido del campo magnético
Corazón es el sentido de la Fuerza de Lorentz

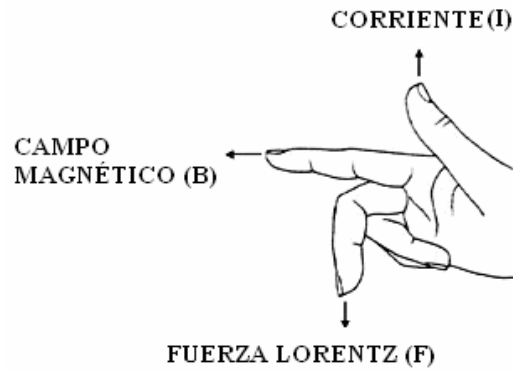


Figura 2.2: Regla mano Derecha

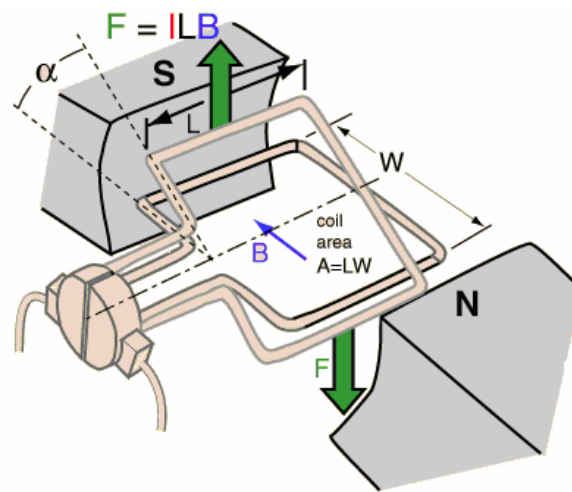


Figura 2.3: Esquema PAR motor

Finalmente, considerando la figura 2.3, el PAR motor, en función de la corriente, se calcula de la siguiente manera [4]:

$$\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{d} = Fd \sin \alpha \quad (2.2)$$

$$\tau = ILB \frac{W}{2} \sin \alpha 2brazos = ILBW \sin \alpha \quad (2.3)$$

$$\tau = I\phi \quad (2.4)$$

Donde:

I : Corriente

B : Campo Magnético

W : Longitud superior espira

L : Longitud lateral espira

ϕ : Flujo magnético ($\phi = BA = BLW$)

La expresión $\sin \alpha$ de la ecuación (2.2) y (2.3) aparece debido a la transformación de producto vectorial a escalar.

Se debe tener en consideración las características individuales de cada motor como el número de polos, armadura y conductores. Estos datos se mantienen constantes durante la vida del motor, así que solo se le agregará una constante de diseño a la fórmula del PAR.

$$\tau = K_d I \phi \quad (2.5)$$

Donde K_d es la constante de diseño del motor.

2.1.2.3 Velocidad de giro

La velocidad de de giro debe ser considerada en sus dos formas, velocidad de giro en vacío, que es el motor girando sin carga, y velocidad de giro con carga [5].

La velocidad de giro con carga es:

$$S = \frac{V - IR}{K_d \phi} \quad (2.6)$$

Donde:

S : revoluciones por minuto (vueltas por minuto)

V : Tensión en la armadura del motor

I : Corriente armadura

R : Resistencia armadura

Las unidades de esta ecuación son en revoluciones por minuto, por lo que si se transforma a radianes por segundos (SI) queda:

$$\omega = \frac{2\pi(V - IR)}{60K_d \phi} \quad (2.7)$$

Donde:

ω : Velocidad angular

Cuando es en vacío la ecuación se simplifica al no aparecer el término corriente y resistencia en la armadura.

$$\omega = \frac{2\pi V}{60K_d\phi} \quad (2.8)$$

2.1.2.4 Potencia

La potencia es la cantidad de fuerza ejercida en un periodo de tiempo. Para un motor está definida como el producto entre el PAR motor y la velocidad angular.

$$P = \tau\omega \quad (2.9)$$

Relacionando las ecuaciones (2.5) y (2.7) en la ecuación (2.9) finalmente se obtiene la siguiente ecuación de potencia:

$$P = \tau\omega = K_d I \phi \frac{2\pi(V - IR)}{60K_d\phi} \quad (2.10)$$

$$P = \frac{2\pi}{60} I (V - IR) \quad (2.11)$$

Donde:

P : Potencia

V : Tensión en la armadura del motor

I : Corriente armadura

R : Resistencia armadura

K_d : Constante de diseño del motor

ϕ : Flujo magnético

La ecuación (2.9) y (2.11) relaciona las potencias y las corrientes que se han de suministrar desde la fuente de energía, baterías mayormente, para conseguir una velocidad de giro concreta en el motor.

Sin embargo, para caracterizar completamente el sistema unirotor se necesita estudiar las cargas del sistema, que en este caso son las hélices.

2.1.3. Hélices

Se define como un conjunto de palas equidistantes colocadas de manera concéntrica en un eje, por el cual giran en un mismo plano. Su objetivo es generar una fuerza de tracción, transmitiendo su energía cinética a un fluido.

En un vehículo volador, las hélices son realmente una gran ala giratoria ya que tienen una forma aerodinámica, por la cual generan una sustentación.

El funcionamiento de una hélice se puede entender de una manera muy sencilla, comparándola con un tornillo, que al girar se impulsa a él mismo. Cada una de las palas de la hélice tiene un ángulo de ataque que hace que el viento relativo pase al girar la hélice. Al aumentar la velocidad de giro, la masa de aire acelerada va pasando hacia abajo y hace que la hélice “sienta” una fuerza en la dirección opuesta. Lo anterior se refiere a la tercera ley de Newton de acción y reacción.

La característica más importante de la hélice dentro de la ecuación de sustentación será la dimensión de una pala, es decir, el radio del disco generado por el giro. Además se considera el perfil de la pala y el ángulo de ataque aerodinámicamente correcto.

La sustentación es la fuerza, perpendicular a la velocidad, que mantiene a un cuerpo en vuelo. La expresión matemática está definida como [6]:

$$L = \frac{1}{2} C_L \rho A V^2 \quad (2.12)$$

Transformando la ecuación a un vehículo de ala giratoria se tiene:

$$L = \frac{1}{2} C_L \rho A V^2 \frac{R^2}{R^2} \quad (2.13)$$

$$L = \frac{1}{2} C_L \rho A \omega^2 R^2 \quad (2.14)$$

Donde:

V : Velocidad lineal

C_L : Coeficiente de sustentación (obtención experimental)

ρ : Densidad del aire (1,3 kg/m³)

ω : Velocidad angular

R : Longitud de cada una de las palas

A : Área disco rotor

La sustentación debe ser capaz de superar el peso del vehículo de masa m para elevarse o ser igual para mantenerse en vuelo estático. Se puede extraer una relación para encontrar la longitud de las palas de la hélice con la ecuación (2.14) y la segunda ley de Newton. La relación será:

$$peso = mg = \frac{1}{2} C_L \rho A \omega^2 R^2 \quad (2.15)$$

$$R \geq \left(\frac{2mg}{\rho C_L \omega^2 \pi} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.16)$$

Se debe tener en consideración que la velocidad angular debe mantenerse dentro de unos límites de trabajo propios del motor.

2.1.4. Ejemplos Comerciales

Las tablas 2.1 y 2.2 muestran las características de 2 motores y hélices comerciales. La Velocidad angular, el PAR motor, la sustentación son calculadas con las ecuaciones (2.16), (2.9), (2.14) respectivamente. El coeficiente de sustentación usado es $C_L = 1$ y la gravedad $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

DRAGANFLY V Ti	
Parámetro	Valor
Hélice (R)	0,157 metros
Potencia motor (P)	9 W
Masa (m)	0,482 kg
Batería	11,1 V 1320 mAh
Velocidad angular (ω)	61,74 – 123,5 rad/s
Par (τ)	0,15 Newton metro
Sustentación mínima (L)	4,73 Newton
Carga útil	0,482 kg

Tabla 2.1: Características Draganfly V Ti

Walkera UFO 5	
Parámetro	Valor
Hélice (R)	0,09 metros
Potencia motor (P)	8 W
Masa (m)	0,210 kg
Batería	7,4 V 800 mAh
Velocidad angular (ω)	124 – 248 rad/s
Par (τ)	0,07 Newton metro
Sustentación mínima (L)	2,1 Newton
Carga útil	0,42 kg

Tabla 2.2: Características Walkera UFO 5

2.1.5. Combinación Motor Hélice

Después de analizar las dos partes importantes de un unirotor por separado, el motor y la sustentación de la hélice, se debe hacer una combinación de ambas para encontrar la dinámica final.

$$L = \frac{1}{2} C_L \rho A \left(\frac{2\pi(V - IR)}{60K_d \phi} \right)^2 R^2 \quad (2.17)$$

$$k = \frac{1}{2} C_L \rho A R^2 \left(\frac{2\pi}{60K_d} \right)^2 \quad (2.18)$$

$$L = k \left(\frac{V - IR}{\phi} \right)^2 \quad (2.19)$$

$$L = k\omega^2 \quad (2.20)$$

La ecuación L es función general de la sustentación para un unirotor. En esta expresión se considera la fuerza vertical hacia arriba positiva y no se considera la gravedad g .

2.2. Dinámica unidimensional del cuadricóptero

2.2.1. Introducción

La dinámica de un cuadricóptero es una combinación de cuatro unirotores, aunque en este caso se pasa de movimiento de ascenso y descenso del unirotor, a la posibilidad de desplazarse en las tres dimensiones.

2.2.2. Fuerzas en un cuadricóptero

Si la fuerza de sustentación para el motor i , según la ecuación (2.20), es $L_i = k\omega_i^2$, $i = 1...4$, la fuerza de sustentación total de un vehículo cuadricóptero se define como la suma total de las fuerzas de sustentación, es decir,

$$L_T = \sum_{i=1}^4 L_i = k \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \quad (2.21)$$

La fuerza gravitacional, o peso, se define como:

$$f_g = mg \quad (2.22)$$

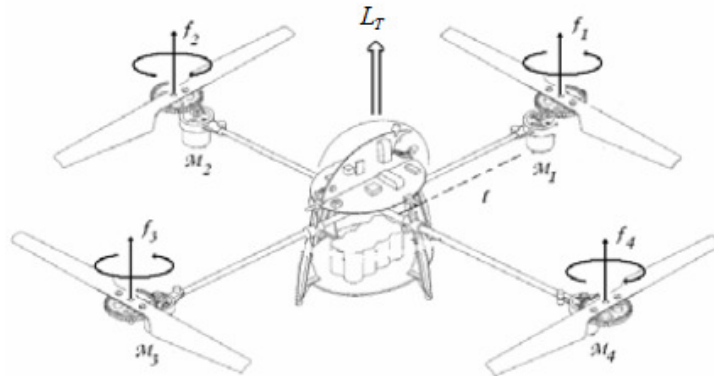


Figura 2.4: Fuerzas cuadricóptero

Como se aprecia en la figura 2.4, dos de los motores giran en sentido horario y los otros dos giran antihorario. Lo anterior se debe a que esto compensa el PAR motor y evita que el vehículo gire sobre sí mismo involuntariamente, como el helicóptero es compensado con el rotor de cola.

2.2.3. Ascenso y Descenso

Para lograr el movimiento de ascenso, mantenerse en vuelo estacionario y descender, se debe hacer variar la diferencia entre la fuerza de sustentación y la fuerza peso. Estos movimientos se logran haciendo que las velocidades angulares, de la ecuación (2.20), sean iguales para cada motor y haciendo que sus variaciones sean las mismas. Para ascender, se debe cumplir la siguiente ecuación:

$$L_T = \sum_{i=1}^4 k \omega_i^2 = 4k \omega^2 \quad (2.23)$$

$$4k \omega^2 > \left(\sum_{i=1}^4 m_i + m_{cuerpo} \right) g \quad (2.24)$$

$$4k \omega^2 > g \sum_{i=0}^4 m_T \quad (2.25)$$

Donde:

ω_i : Velocidad angular del motor i

m_i : Masa motor i y su respectiva hélice

m_{cuerpo} : Masa marco, batería y sistemas de estabilización

Una vez en el aire, para mantener un vuelo estático en el aire, la ecuación debe llegar a una igualdad para que ninguna de las fuerzas supere a la otra.

El descenso se logra haciendo que la fuerza peso sea ligeramente mayor que la fuerza de sustentación para bajar lentamente.

La matriz de la fuerza de sustentación en los tres ejes (x,y,z) es:

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_T \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Ahora bien, lo anterior es para el caso ideal, donde los cuatro motores tiene exactamente las mismas constantes y giran a las mismas velocidades angulares.

En el caso real, lo anterior no es posible, porque siempre existen ciertas variaciones en las fuerzas generadas por los motores, ya sea por que las constantes de los motores son diferentes o las velocidades angulares giran a distintas revoluciones. Estas diferencias causarían que el vehículo tuviera ciertas rotaciones en su centro de gravedad y llevaría a que se la fuerza de sustentación total tuviera una diferencia angular con el eje Z. Esta diferencia daría lugar a un desplazamiento de en el plano XY.

En el siguiente capítulo se estudiará el caso en que los motores tengan variaciones de velocidad angular, lo que traerá consigo un sistema con un movimiento de tres dimensiones.

CAPÍTULO 3. DINÁMICA EN TRES DIMENSIONES

3.1. Descripción del sistema

3.1.1. Coordenadas generalizadas

El vehículo cuadricóptero se considerará como un cuerpo sólido de masa m_T en un marco de referencia \mathcal{L} , sujeto a una fuerza total \vec{F} y a tres momentos.

La posición del centro de masa respecto a un marco inercial tiene las coordenadas $\varepsilon = (x, y, z)$ y para los ángulos de los movimientos se usarán $\eta = (\psi, \theta, \phi)$ para los respectivos movimientos de yaw, pitch y roll. Estos tres ángulos son conocidos como los tres ángulos de Euler. Son ángulos para encontrar la orientación de un sistema móvil respecto a otro fijo [7].

Las coordenadas generalizadas son:

$$q = (\varepsilon, \eta) = (x, y, z, \psi, \theta, \phi) \in R^6 \quad (3.1)$$

3.1.2. Energía Cinética de Traslación

La energía cinética de traslación es la energía que tiene un cuerpo por el solo hecho de estar en movimiento lineal. Su ecuación característica, para una partícula, está definida como [8]:

$$T_K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (3.2)$$

Para un cuerpo que está moviéndose en tres dimensiones, con un vector velocidad de tres componentes la energía cinética trasnacional será:

$$T_K = \frac{1}{2} m_T \dot{\varepsilon}^T \dot{\varepsilon} \quad (3.3)$$

Donde $\dot{\varepsilon} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ es la velocidad lineal en cada uno de los tres ejes del marco de referencia. La expresión $\dot{\varepsilon}^T \dot{\varepsilon}$ se refiere al cuadrado matricial y el punto sobre la letra significa que es su respectiva derivada.

3.1.3. Energía Cinética Rotacional

Se define a energía cinética de rotación como la energía que surge de un movimiento de rotación. Su ecuación general está definida como [8]:

$$T_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3.4)$$

Como en la anterior energía, debe ser considerado que es un cuerpo que tiene tres velocidades angulares distintas, por lo que queda:

$$T_R = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta} \quad (3.5)$$

Donde J es la matriz de inercia para la energía cinética rotacional total y $\dot{\eta} = (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ son las velocidades angulares.

3.1.4. Energía Potencial

Es la energía que se almacena en un cuerpo después de haber hecho un trabajo contra una fuerza, que en este caso es la de gravedad. Su ecuación general es [8]:

$$T_p = mgh \quad (3.6)$$

Para el vehículo, será:

$$T_p = m_T g Z \quad (3.7)$$

Donde Z es la altura a la que se encuentra el vehículo y g es la fuerza de gravedad.

3.2. Modelo Matemático

Para encontrar la fuerza total se usará el modelo de Euler–Lagrange debido a que el desarrollo matemático lo hace muy rápido. En cambio el cálculo de los

momentos se hace a través de mecánica de Newton para simplificar los cálculos.

3.2.1. Modelo Euler-Lagrange para la fuerza total

Relacionando las ecuaciones (3.3), (3.5) y (3.7) se obtiene el lagrangiano de la energía, que será:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T_K + T_R - T_P = \frac{1}{2} m_T \dot{\varepsilon}^T \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta} - mgz \quad (3.8)$$

El modelo matemático total del vehículo se obtiene de la ecuación de Euler-Lagrange de la energía con las fuerzas externas [9]. La expresión es la siguiente:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \begin{bmatrix} F_\varepsilon \\ \tau \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Donde $F_\varepsilon = M_R F$ es la fuerza de traslación, aplicada al cuadricóptero para cada una de las componentes (x, y, z) . La letra F , es la expresión (2.26), que es la fuerza que se le está aplicando al vehículo. La letra M_R es la matriz rotacional (Anexo I) que entrega la orientación del vehículo respecto de los ángulos de Euler.

Finalmente, las expresiones escalares de las fuerzas en los tres ejes (Anexo II) son:

$$m \ddot{x} = L_T \sin \psi \sin \theta \quad (3.10)$$

$$m \ddot{y} = L_T \cos \psi \sin \theta \quad (3.11)$$

$$m \ddot{z} = L_T \cos \theta - mg \quad (3.12)$$

3.2.2. Modelo Newton para los Momentos

La letra τ representa a los tres momentos que hay en el vehículo en los tres ejes. Está referido a los ángulos de yaw, pitch y roll.

Para el momento de yaw se tiene:

$$\tau_{\psi} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = \sum_{i=0}^4 \tau_i \quad (3.13)$$

Este momento se debe al momento creado por el giro de los motores. La tercera ley de Newton dice que toda acción tiene una reacción igual pero en distinto sentido. Aquí se cumple que la fuerza total de los motores genera una fuerza de giro igual pero en distinto sentido. Es por lo anterior que se colocan dos motores girando en otro sentido porque así se contrarresta esta fuerza.

Para el momento de pitch, la expresión es:

$$\tau_{\theta} = \Delta L_{1,3} l \quad (3.14)$$

Donde $\Delta L_{1,3}$ es la diferencia de fuerza de sustentación que habrá entre los motores 1 y 3 multiplicada por la distancia desde el motor hasta el centro de gravedad, es decir, se cumple la ecuación (2.1).

Para el movimiento de roll, la expresión es parecida al de pitch, pero con los otros dos motores, es decir:

$$\tau_{\phi} = \Delta L_{2,4} l \quad (3.15)$$

Combinando los tres momentos, se tiene la siguiente matriz total:

$$\tau_T = \begin{bmatrix} \tau_{\psi} \\ \tau_{\theta} \\ \tau_{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^4 \tau_i \\ \Delta L_{2,4} l \\ \Delta L_{1,3} l \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Finalmente, reescribiendo la matriz con las velocidades angulares, se obtiene:

$$\tau_T = \begin{bmatrix} \tau_{\psi} \\ \tau_{\theta} \\ \tau_{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_r (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \\ lk (\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ lk (\omega_3^2 - \omega_1^2) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Con $k_r > 0$ constante que depende de la fricción aerodinámica.

3.2.3. Planta del modelo

La planta es una representación matemática de la relación entre la entrada y la salida de un sistema. A través de esta se puede modelar el comportamiento del sistema ante algún tipo de excitación. Para llegar a esta planta se usará la transformación de Laplace, que transforma una ecuación diferencial ordinaria en una ecuación algebraica de fácil solución.

Además, para simplificar el cálculo se tomarán las siguientes consideraciones:

1. El sistema de referencia del vehículo rotará en el eje Z junto con el sistema de referencia terrestre, por lo que $\psi = 0$.
2. Los valores de θ y ϕ llegarán hasta los $\pm 10^\circ$, es decir, son ángulos pequeños. Matemáticamente se puede considerar $\cos \phi = 1$, $\cos \theta = 1$, $\sin \phi = \phi$ y $\sin \theta = \theta$.

Aplicando las simplificaciones a las ecuaciones (3.10), (3.11) y (3.12) se tiene:

$$m \ddot{x} = 0 \quad (3.18)$$

$$m \ddot{y} = L_T \ddot{\theta} \quad (3.19)$$

$$m \ddot{z} = L_T \ddot{\phi} \quad (3.20)$$

Además reordenando la ecuación (3.9), considerando ciertas constantes:

$$k_r (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) = \Omega_1 \quad (3.21)$$

$$k(\omega_2^2 - \omega_4^2) = \Omega_2 \quad (3.22)$$

$$k(\omega_3^2 - \omega_1^2) = \Omega_3 \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_Z \ddot{\psi} \\ I_Y \ddot{\theta} \\ I_X \ddot{\phi} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Entonces:

$$I_Z \ddot{\psi} = \Omega_1 \quad (3.25)$$

$$I_Y \ddot{\theta} = l\Omega_2 \quad (3.26)$$

$$I_X \ddot{\phi} = l\Omega_3 \quad (3.27)$$

Aplicando Laplace a (3.19), (3.20) y (3.27):

$$mY(s)s^2 = L_T\theta(s) \quad (3.28)$$

$$mZ(s)s^2 = L_T(s) \quad (3.29)$$

$$I_X\phi(s)s^2 = l\Omega_3(s) \quad (3.30)$$

Trabajando en el dominio de Laplace (S), las funciones de transferencia del modelo quedan:

$$H_\phi = \frac{\phi(s)}{\Omega_3(s)} = \frac{l}{I_X s^2} \quad (3.31)$$

$$H_{XY} = \frac{Y(s)}{\phi(s)} = \frac{L_T}{s^2 m} \quad (3.32)$$

$$H_Z = \frac{Z(s)}{L_T(s)} = \frac{1}{s^2 m} \quad (3.33)$$

Para la función de transferencia de XY, se considerará un vuelo de ascensión estacionaria, es decir que mantiene los movimientos del eje Z constante. De lo anterior se saca que la fuerza de sustentación debe ser igual a la de peso, entonces simplificando quedan:

$$H_\phi = \frac{l}{I_X s^2} \quad (3.34)$$

$$H_{XY} = \frac{mg}{s^2 m} = \frac{g}{s^2} \quad (3.35)$$

$$H_Z = \frac{1}{s^2 m} \quad (3.36)$$

3.3. Modelo Matemático Alternativo

3.3.1. Modelo dinámico

Se analizará también un modelo dinámico diferente [10] para hacer comparaciones en el momento de las simulaciones. Se considerará la figura 3.1 para describir el modelo.

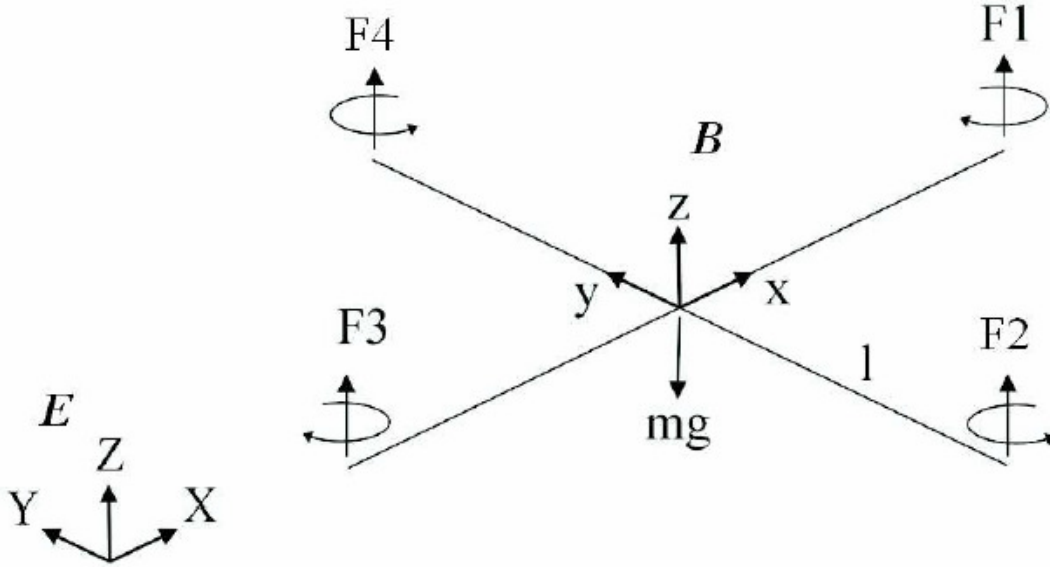


Figura 3.1: Sistema de referencia fijo y móvil

Se considerarán los ángulos de Euler: ψ ángulo rotación en Z, ϕ ángulo rotación en X y θ ángulo rotación en Y. En el sistema de referencia de la figura 8, se tienen E como sistema de referencia tierra y B sistema de referencia cuerpo.

$$F_{XYZ} \begin{cases} ma_x = (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)U_1 \\ ma_y = (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)U_1 \\ ma_z = (\cos \theta \cos \phi)U_1 - mg \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\tau_{\phi\theta\psi} \begin{cases} I_x \ddot{\phi} = \dot{\theta} \dot{\psi} (I_y - I_z) - J_R \dot{\theta} \Omega + lU_2 \\ I_y \ddot{\theta} = \dot{\phi} \dot{\psi} (I_z - I_x) + J_R \dot{\phi} \Omega + lU_3 \\ I_z \ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} (I_x - I_y) + lU_4 \end{cases} \quad (3.38)$$

Donde:

ψ : Ángulo yaw	$I_{X,Y,Z}$: momento de inercia del cuerpo
ϕ : Ángulo roll	J : Rotor de inercia
θ : Ángulo pitch	l : longitud brazo
k : coeficiente de empuje	d : coeficiente de resistencia

Ω_i : Velocidad del motor i

$U_1 = k(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$: Empuje total

$U_2 = k(\Omega_4^2 - \Omega_2^2)$: Diferencia de empuje del eje Y

$U_3 = k(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)$: Diferencia de empuje del eje X

$U_U = d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$: Diferencia de Par

$\Omega = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4$: Velocidad general de giro del motor

Simplificaciones:

1. El sistema de referencia fijado a la tierra gira solidariamente con el eje fijado en el cuerpo, respecto al eje Z. Por lo anterior $\psi = 0$.
2. Se considera que los ángulos de roll y pitch no serán mayores a 15° , por lo que se consideran ángulos pequeños. De lo anterior se tiene $\cos \phi = \cos \theta = 1$, $\sin \phi = \phi$ y $\sin \theta = \theta$.
3. En el cálculo de momento, solo se tiene en cuenta el momento creado por la diferencia de empuje de los motores. Así que se eliminan las dependencias entre ϕ, ψ, θ .

Finalmente, de las simplificaciones anteriores se sacan las ecuaciones del modelo dinámico:

$$ma_x = \theta U_1 \quad (3.39)$$

$$ma_y = -\phi U_1 \quad (3.40)$$

$$ma_z = U_1 - mg \quad (3.41)$$

$$I_X \ddot{\phi} = l U_2 \quad (3.42)$$

$$I_Y \ddot{\theta} = l U_3 \quad (3.43)$$

$$I_Z \ddot{\psi} = l U_4 \quad (3.44)$$

3.3.2. Planta del modelo dinámico

Si a las ecuaciones anteriores se les hace la transformada de Laplace se tiene:

$$mX(s)s^2 = \theta(s)U_1 \quad (3.45)$$

$$mY(s)s^2 = \phi(s)U_1 \quad (3.46)$$

$$mZ(s)s^2 = U_1 - mg \quad (3.47)$$

$$I_X\phi(s)s^2 = lU_2 \quad (3.48)$$

$$I_Y\theta(s)s^2 = lU_3 \quad (3.49)$$

$$I_Z\psi(s)s^2 = lU_4 \quad (3.50)$$

Finalmente se obtiene la planta del modelo:

Planta Z:

$$\frac{Z(s)}{(U_1 - mg)} = \frac{1}{s^2 m} \rightarrow H_Z(s) = \frac{1}{s^2 m} \quad (3.51)$$

Planta XY:

$$\frac{Y(s)}{\phi(s)} = \frac{U_1}{s^2 m} \rightarrow H_{XY} = \frac{U_1}{s^2 m} = \frac{mg}{s^2 m} = \frac{g}{s^2} \quad (3.52)$$

Planta ϕ, ψ, θ :

$$\frac{\phi(s)}{U_2} = \frac{l}{I_X s^2} \rightarrow H_{\phi\psi\theta} = \frac{l}{I_X s^2} \quad (3.53)$$

Comparando las plantas obtenidas en este trabajo, definidas en las ecuaciones (3.34), (3.35) y (3.36), se puede observar que son iguales a las del modelo alternativo citado en el subcapítulo 3.3.2, a pesar de que ambas fueron obtenidas desde dos métodos distintos. Además, en [11] se utilizó un tercer método para encontrar la planta de los sistemas y también se llega a un mismo resultado.

Ahora que ya se tienen las plantas del vehículo, es importante saber cómo van a responder a los impulsos. Por lo anterior se tiene que hacer una simulación previa y ver el comportamiento de las plantas por separado y luego combinándolas.

CAPÍTULO 4. SIMULACIÓN DE LOS MODELOS DESARROLADOS

4.1. Introducción

Para la simulación, se van a tomar las ecuaciones (3.34), (3.35) y (3.36), obtenidas en el capítulo anterior, y se insertarán en la herramienta SIMULINK de Matlab. Este programa es una plataforma multidominio y diseño basado en sistemas dinámicos y sistemas de funciones dedicadas capaz de encontrar los gráficos de estabilidad y transitorios de las funciones de transferencia.

Además se considerará una simulación en un ambiente aislado, es decir, sin viento ni fuerzas externas que esté afectando al modelo. La gravedad está considerada.

4.2. Funciones de Transferencia

La planta, o función de transferencia, como ya se explicó previamente es la relación entre la entrada y la salida de un sistema. Esta relación tiene la siguiente expresión:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) \quad (4.1)$$

Siendo $Y(s)$ la señal de salida del sistema, $R(s)$ la entrada del sistema y $G(s)$ la función de transferencia, como puede observarse en la figura 4.1.

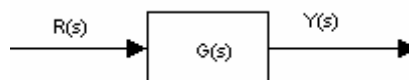


Figura 4.1: Diagrama de bloques

La figura 4.1 es conocida como función de transferencia de lazo abierto, es decir, que no hay una realimentación de la señal de salida para corregir los posibles errores. Si se quiere corregir el error de la salida se debe hacer un sistema de lazo cerrado, como el de la figura 4.2.



Figura 4.2: Sistema de lazo cerrado

En el lazo cerrado se está enviando la señal de salida al comienzo para analizar las diferencias y así, en el siguiente cálculo, entregar un valor con un error menor.

4.3. Ajuste de planta

Para la simulación se tendrán en consideración los valores de la tabla 4.1 para las variables de las funciones de transferencia [11], ya que así, aunque los criterios de diseño son distintos, se tiene una cierta referencia en la respuesta del sistema para poder comparar.

Nombre	Variable	Valor
Gravedad	g	9.81 [m/s]
Momento de inercia X	I_x	0,02 [kg m ²]
Brazo	l	1 [m]
Masa	m	2 [kg]

Tabla 4.1: Valores de constantes

En el momento de inercia se usa un valor pequeño, $I_x = 0,02$, para que la simulación del sistema tenga poca resistencia al giro, ya que este tipo de vehículos tiene una buena maniobrabilidad, es decir, se comporta bien en el movimiento.

Reemplazando en las ecuaciones:

$$H_z = \frac{1}{2s^2} \quad (4.2)$$

$$H_{xy} = \frac{9.81}{s^2} \quad (4.3)$$

$$H_\phi = \frac{1}{0.02s^2} \quad (4.4)$$

Si se toman las funciones (4.2), (4.3) y (4.4) y se simulan directamente en lazo abierto para ver cómo se comporta el sistema, se obtienen las respuestas de las figuras 4.3, 4.4, y 4.5 respectivamente.

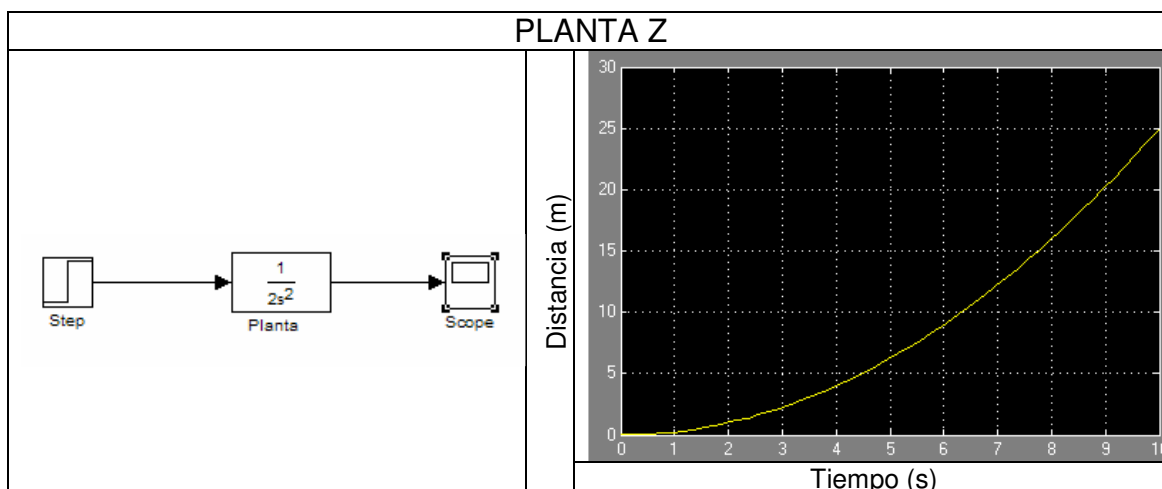


Figura 4.3: Planta Z sin controlador

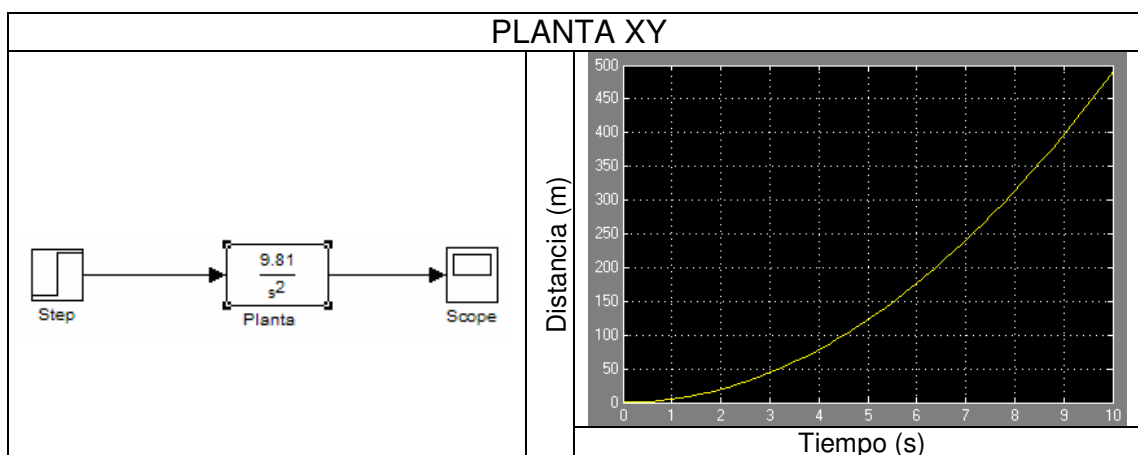


Figura 4.4: Planta XY sin controlador

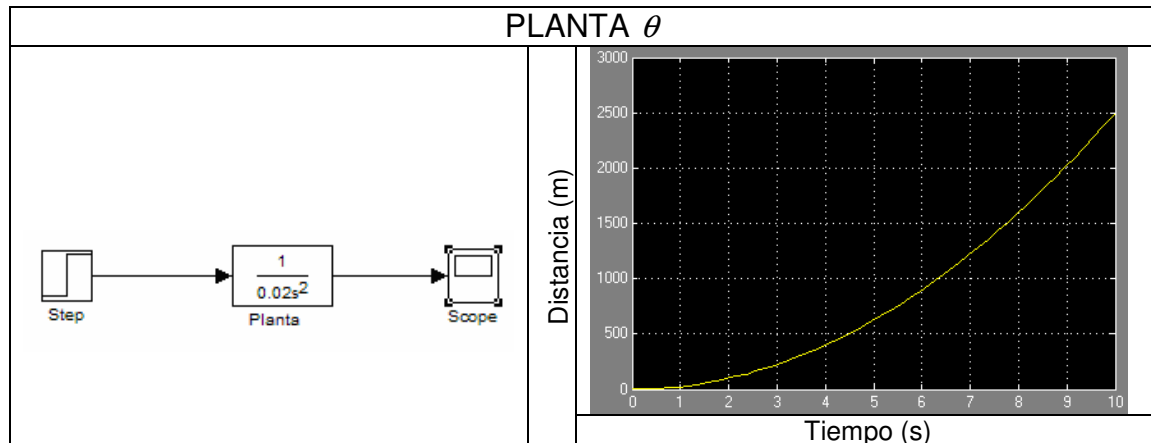


Figura 4.5: Planta θ sin controlador

Ya se puede observar en los tres casos que el sistema no llegará nunca a la estabilidad. Por lo anterior se tiene que diseñar, por ejemplo, un controlador PID para cada caso para así estabilizar el sistema y llegar a cumplir los criterios de diseño.

Se debe destacar que para todas las simulaciones realizadas en este trabajo se usará una función de escalón unitario, o en inglés *Unit step function*, ya que representa una señal que enciende en un determinado tiempo y se queda prendida indefinidamente. Esto permite tener sólo dos posibles valores, 0 o 1, de los cuales el segundo será el objetivo para la estabilización del sistema. El cambio de cualquier orden del sistema de navegación se puede interpretar como una suma de más de un escalón con tiempos de inicio diferentes.

4.4. Controladores

4.4.1. Controlador PID

Un controlador PID, que significa *Proportional-Integral-Derivative*, se refiere a un mecanismo para controlar un bucle de realimentación que principalmente corrige el error entre el valor medido y el que se quiere obtener.

Proporcional se refiere a una salida del controlador que es proporcional al error, es decir:

$$u(t) = K_p e(t) \quad (4.5)$$

Que en el dominio de Laplace será:

$$C_p(s) = K_p \quad (4.6)$$

Integral entrega una salida del controlador que es proporcional al error acumulado, entonces es un controlador lento. Su función temporal es:

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4.7)$$

Y su expresión de Laplace es:

$$C_i(s) = \frac{K_i}{s} \quad (4.8)$$

Derivativo se manifiesta cuando hay un cambio en el valor absoluto del error. Su función temporal es:

$$u(T) = K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (4.9)$$

Y la expresión en el dominio de Laplace es:

$$C_D = K_D s \quad (4.10)$$

Finalmente, un controlador PID tiene la siguiente forma:

$$G_C = K_p + \frac{K_i}{s} + K_D s \quad (4.11)$$

La tabla 4.2 muestra el comportamiento de la respuesta cuando se agregan los controladores. Se debe tener consideración de que los controladores pueden ir combinados entre ellos, por lo que dependen entre sí. Se debe considerar que si los valores de los parámetros disminuyen el comportamiento es de forma inversa.

Parámetro	Tiempo peak	Sobreimpulso M	Settling time t_s	Steady-state error (E_{SS})
P	-	+	Cambios pequeños	-
I	-	+	+	0
D	Cambios pequeños	-	-	Cambios Pequeños

Tabla 4.2: Comportamiento del sistema con controladores

Tiempo Peak (t_p): Tiempo necesario para la respuesta para llegar al primer impulso.

Sobreimpulso (M): En inglés *overshoot*, representa el valor del pico más grande de la respuesta del sistema.

Settling time (t_s): tiempo requerido para que una señal aumente y se mantenga dentro de una determinada banda de error.

Steady-State Error (E_{SS}): Diferencia entre la señal de entrada y la de salida.

La figura 4.6 muestra una gráfica sobre las características recién explicadas.

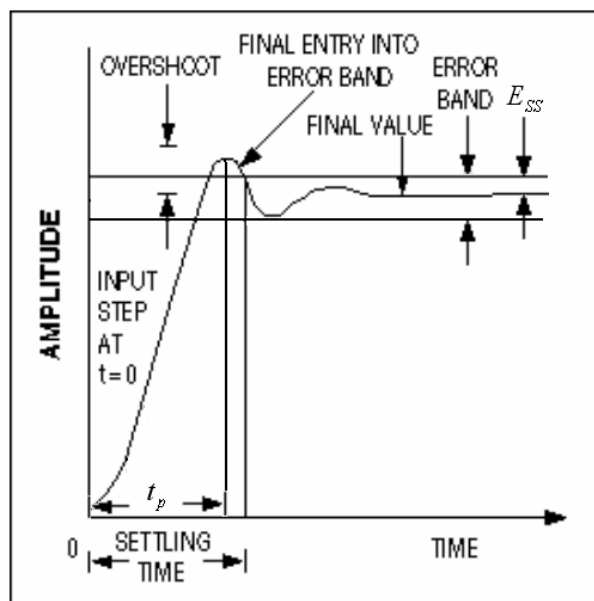


Figura 4.6: Comportamiento sistema

4.4.2. Controlador de Z

El controlador para Z se encargará de la respuesta del vehículo en el proceso de ascender. Como criterios de diseño se fijará la altura objetivo a $h = 1$ m y el tiempo aproximado de respuesta, para llegar a este valor será $t = 1$ s. Además se considerará que no haya un sobreimpulso.

La altura Z está basada en la sustentación total y el peso del vehículo, por lo que la ecuación de movimiento se puede expresar como:

$$m \ddot{z} = L_T - mg \quad (4.12)$$

$$\ddot{z} = \frac{L_T}{m} - g \quad (4.13)$$

El error puede ser considerado como la diferencia entre la altura deseada y la real:

$$e = h - z \quad (4.14)$$

$$\dot{e} = \dot{h} - \dot{z} \quad (4.15)$$

Los controladores integrales tienden a hacer el sistema más lento, así que en este caso no va a ser utilizado. Para hacer un controlador PD basado en el error se tiene:

$$\frac{L_T}{m} = K_D \dot{e}(t) + K_P e(t) - g \quad (4.16)$$

Por lo que el controlador se representa de la siguiente manera:

$$\ddot{z} = K_D \dot{e}(t) + K_P e(t) \quad (4.17)$$

Y la función de transferencia es:

$$C_{PDz} = K_D s + K_P \quad (4.18)$$

Esta función C_{PD} es el aspecto que va a tener el controlador para la planta de Z. Para el diseño se debe tener en consideración la tabla 4.2 para que se cumplan los criterios de diseño.

Ahora se comenzará con el controlador más básico, donde $K_D = 1$ y $K_P = 1$. Se debe considerar que el controlador será multiplicado por $\frac{1}{(\beta s + 1)}$ para que el numerador y el denominador sean del mismo orden y no halla error en SIMULINK. Además β es un valor muy pequeño y no afectará en la respuesta del sistema. A la hora de la implementación tampoco existirán los integradores o derivadores ideales, por lo que el factor β también aparecerá. Por ejemplo, en su implementación electrónica modelará las pérdidas resistivas.

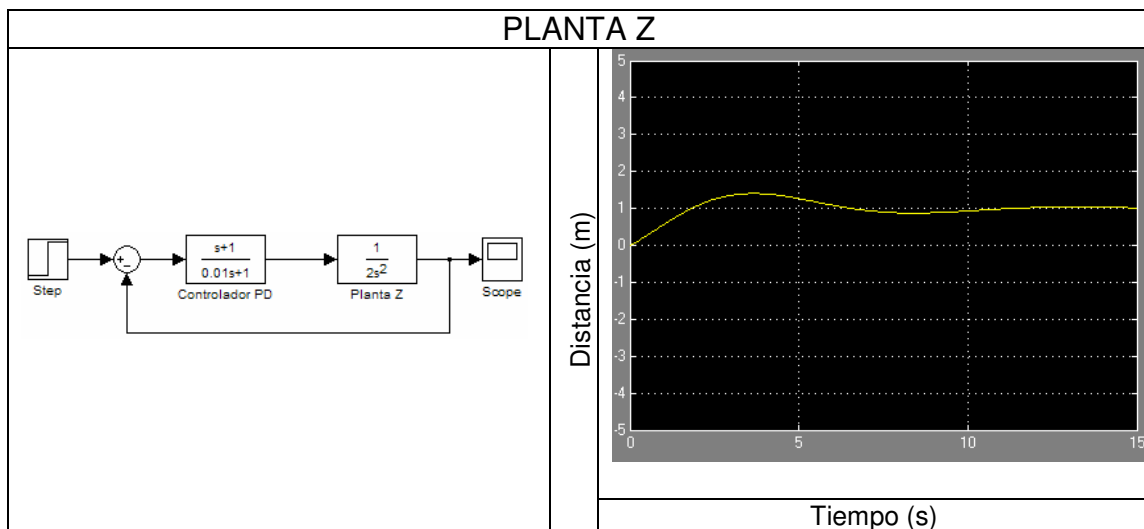


Figura 4.7: Planta Z $K_D = 1, K_P = 1$

Se observa que, en la figura 4.7, el controlador ya está cumpliendo en parte su cometido. La respuesta ya no está siendo con forma exponencial, el sistema se está estabilizando aproximadamente en los 12 s. Ahora hay que lograr que no haya el sobreimpulso que se ve en los 4 s y hay que bajar a la estabilización a 1 s ya que el sistema se puede ir a pérdida antes de estabilizarse y en la integración real caería a tierra. Lo anterior se logrará aumentando el valor del Derivativo y disminuyendo el valor del proporcional, ya que según la tabla 4.2 eso disminuirá el sobreimpulso y el tiempo de estabilización.

Usando ahora $K_D = 10$ y $K_P = 0,2$ se obtiene la siguiente gráfica.

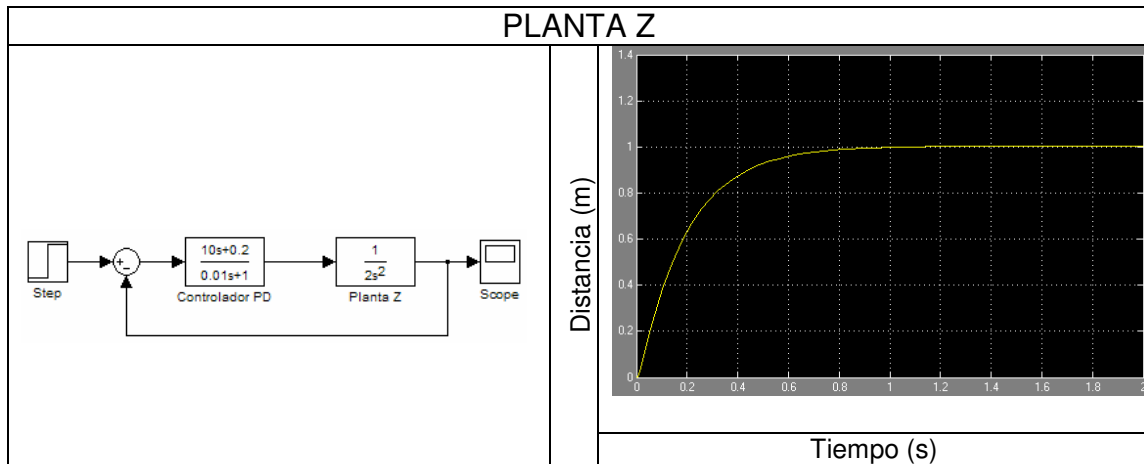


Figura 4.8: Planta Z $K_D = 10$, $K_P = 0,2$

En la figura 4.8, se entrega una respuesta como la que se desea en los criterios de diseño, se estabiliza a $t = 1$ s y el sobreimpulso es tan pequeño que pasa a ser despreciable.

Para comprobar que los valores anteriores están correctos se hará una última simulación con $K_D = 20$ y $K_P = 0,05$ para ver cuál es la respuesta del sistema si se siguiera aumentando el valor del derivativo y disminuyendo el proporcional.

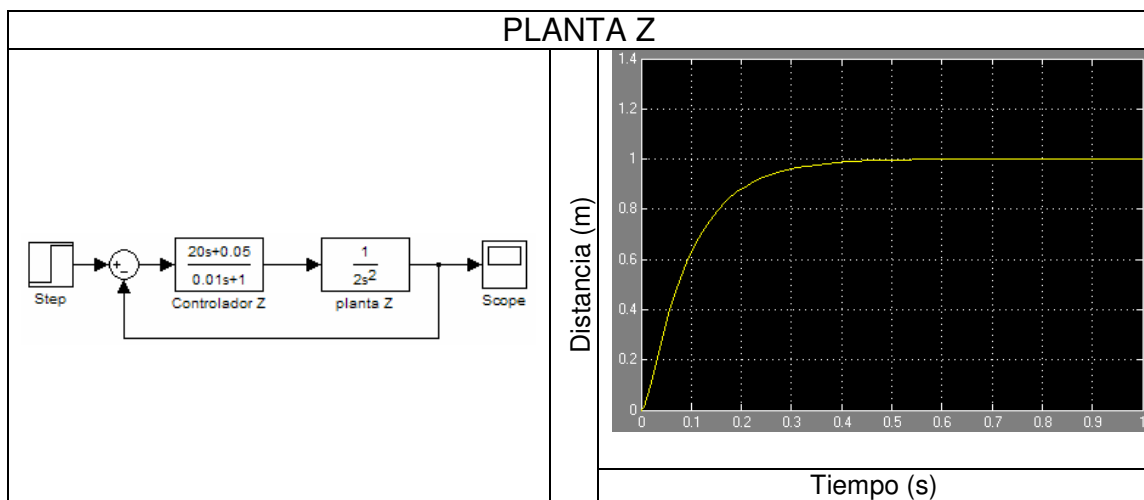


Figura 4.9: Planta Z $K_D = 100$, $K_P = 0,2$

Si bien, la respuesta de la figura 4.9 es muy buena, ya que esta llega al equilibrio del sistema en 0,5 s, pero no es el tiempo de los criterios de diseño. Por lo anterior se usan $K_D = 10$ y $K_P = 0,2$ para el controlador de la planta Z.

La planta y controlador están siendo modelados de forma ideal. En la realidad existen factores que afectarán al comportamiento de la respuesta. Una manera de observar estas variaciones es agregando un factor de error al sensor que hace la realimentación y ver cómo se comporta el controlador.

Se probarán dos posibles casos, el de un error de 1 % para ver cuanto afecta un pequeño error de medición en el comportamiento de la respuesta. Luego se ingresará un error del 10 % para observar cómo va a ser el desplazamiento con un gran error de medición.

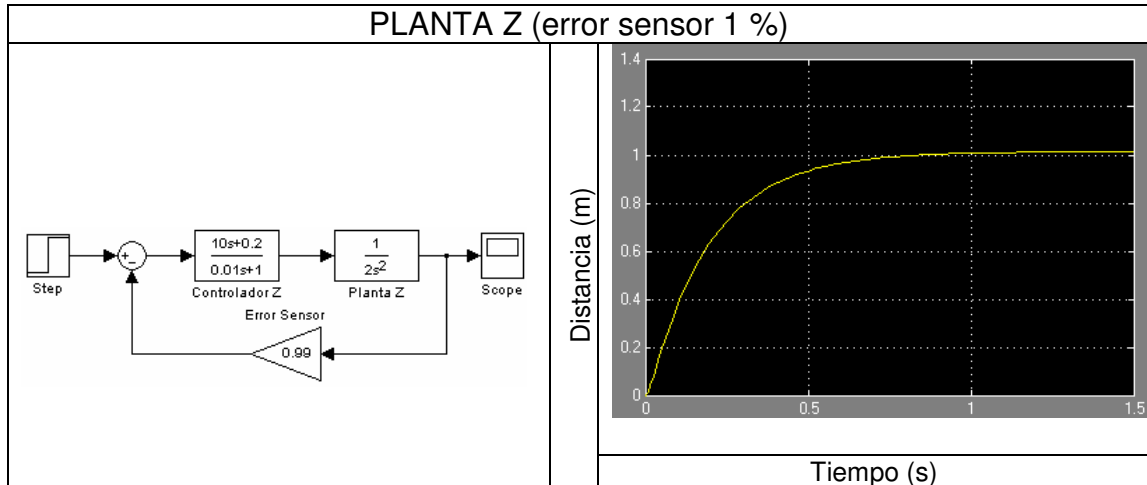


Figura 4.10: Planta Z error sensor 1 %

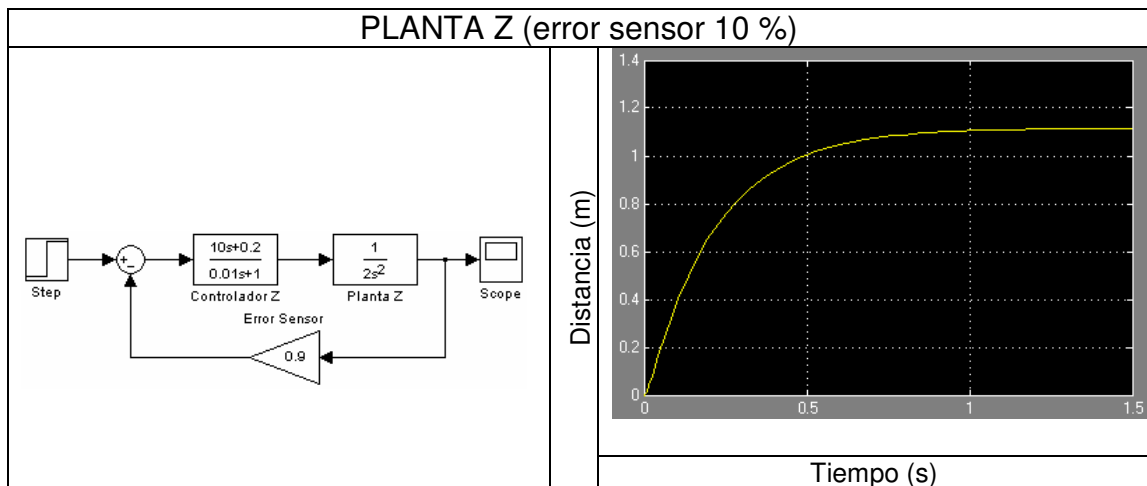


Figura 4.11: Planta Z error sensor 10 %

Se aprecia que con un error de un 1 % no llega a ser inestable como se ve en la figura 4.10. La respuesta sube muy levemente por encima de la altura deseada, pero en cambio con un error importante como es un 10 % la

respuesta de la figura 4.11 llega un poco más arriba de 1 m de altura. Lo anterior demuestra que estos errores sólo afectan a la exactitud del sistema y no a su estabilidad.

Se tendrá en cuenta cómo afecta al sistema la variación en la planta y el sensor en un capítulo posterior.

4.4.3. Controlador de XY

Este controlador se encarga de la respuesta del vehículo en el plano XY, es decir la posición en el plano, a una altura Z constante. La dinámica del cuadricóptero en las direcciones X e Y son similares, solo varían en la orientación de las mismas. Por lo anterior se va a considerar un mismo controlador para ambos. Se desea llegar a una posición de $p_y = 1$ m en $t = 1$ s.

La ecuación de la posición en Y puede ser expresada como:

$$m \ddot{y} = L_T \theta \quad (4.19)$$

$$\ddot{y} = \frac{L_T \theta}{m} \quad (4.20)$$

El error, considerando p_y como la posición deseada e Y la posición real, se define como:

$$e = p_y - y \quad (4.21)$$

$$\dot{e} = \dot{p}_y - \dot{y} \quad (4.22)$$

Al igual que en el controlador de Z no se usará un Integrador para no hacer el desplazamiento lento. Entonces el controlador se definirá como:

$$C_{PDxy} = K_D s + K_P \quad (4.23)$$

Ahora, al igual que el controlador de Z se usará con el controlador más básico, con $K_D = 1$ y $K_P = 1$. Al igual que en la planta Z, el controlador se multiplicará por $\frac{1}{(\beta s + 1)}$ para mantener el mismo orden en el numerador y denominador.

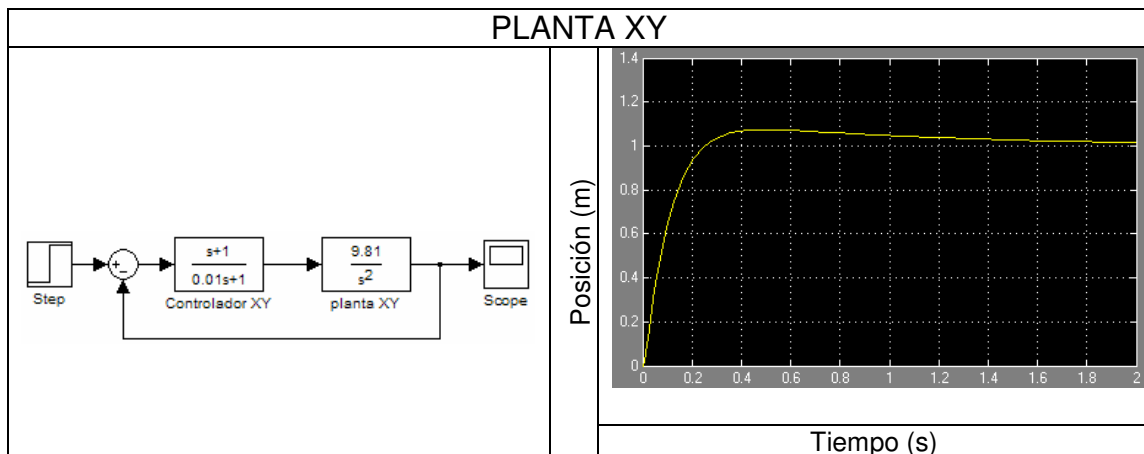


Figura 4.12: Planta XY $K_D = 1$, $K_P = 1$

La figura 4.12 muestra como hay un sobreimpulso y la respuesta se estabiliza pasados $t = 2$ s. Se debería aumentar el Derivativo para bajar el sobreimpulso.

Si se usa $K_D = 10$ y $K_P = 1$ se obtiene:

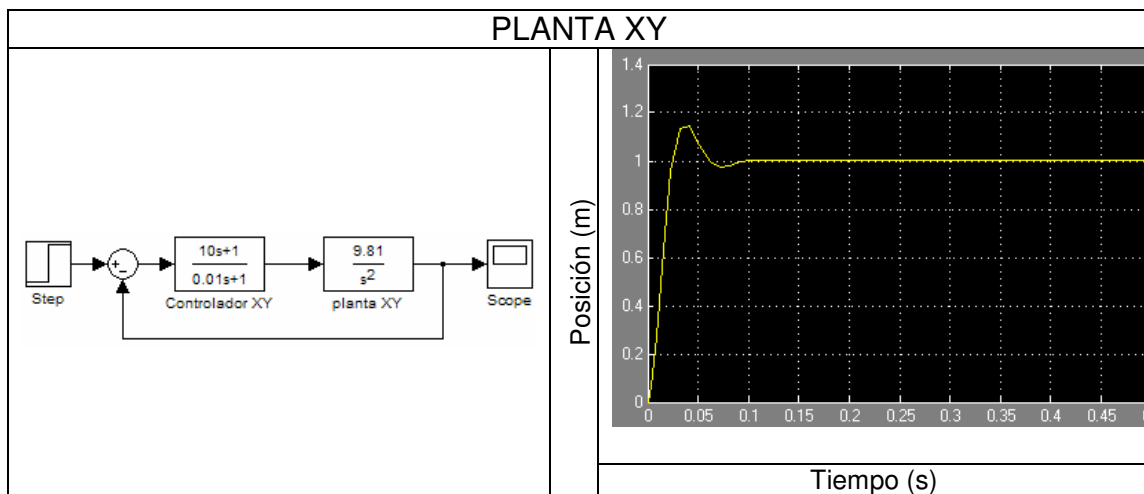


Figura 4.13: Planta XY $K_D = 10$, $K_P = 1$

Al aumentar el Derivativo, en la figura 4.13 se genera un aumento en la velocidad de respuesta y un sobreimpulso, para combatir esto es mejor disminuir bastante el proporcional para bajar el sobreimpulso y bajar el derivativo para que ambos se compensen. Usando los valores $K_D = 0.5$ y $K_P = 0.01$ se generan las gráficas:

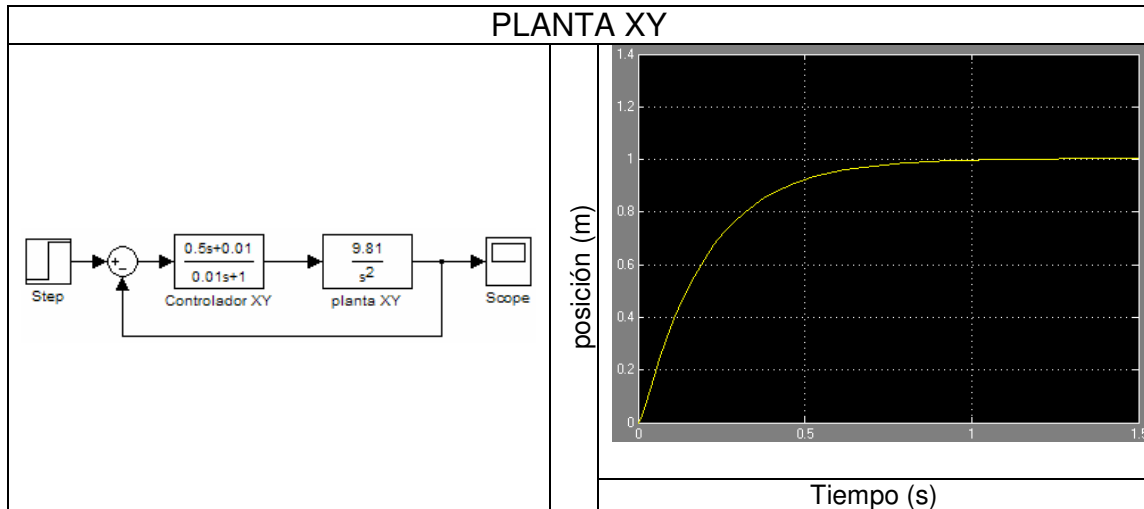


Figura 4.14: Planta XY $K_D = 0.5$, $K_P = 0,01$

La figura 4.14 ya cumple con los criterios de diseño, en que se consigue un movimiento de 1 m en $t = 1$ s. Por lo anterior se definen estos valores para la planta de XY.

Finalmente son $K_D = 0,5$ y $K_P = 0,01$ los valores.

Al igual que el controlador de Z se probará agregarle los mismos errores, de 1% y 10 %, al sensor para ver cómo va a ser su respuesta.

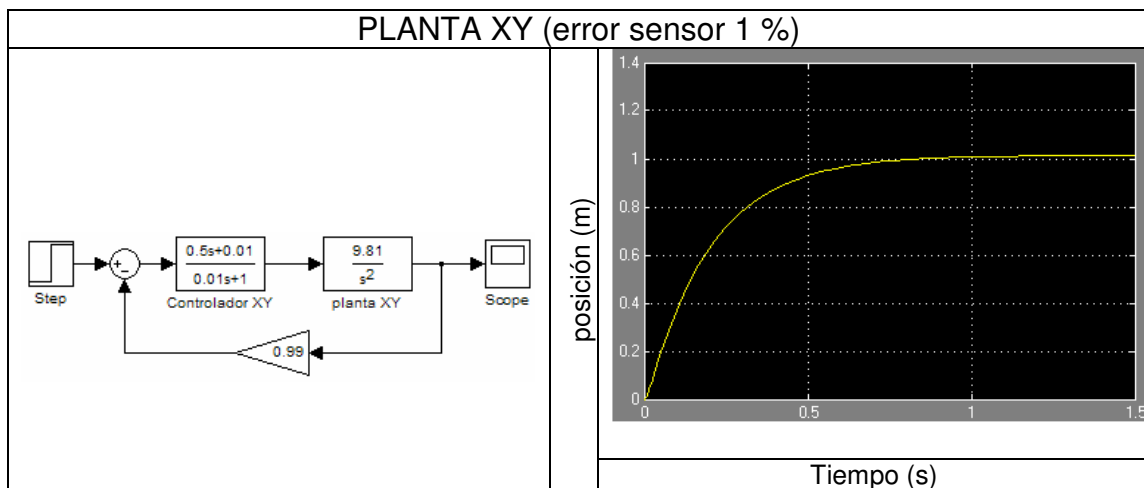


Figura 4.15: Planta XY error sensor 1 %

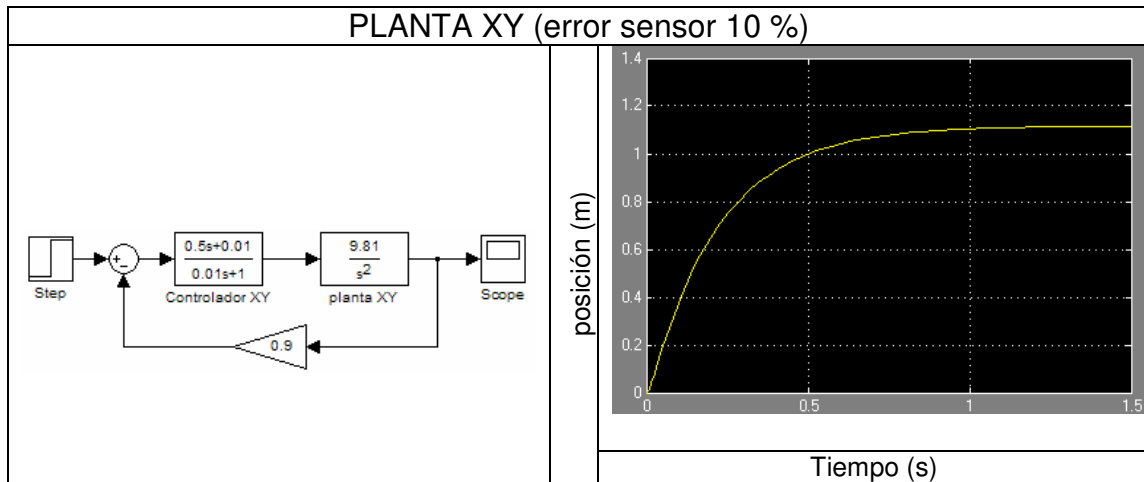


Figura 4.16: Planta XY error sensor 10 %

Con un error de 1 %, la figura 4.15 confirma que al agregar un error de medición la respuesta del sistema aumenta levemente. En cambio, si se considera un error de un 10 %, la figura 4.16 muestra un error más considerable.

4.4.4. Controlador de ϕ

Este controlador se encarga de la respuesta del sistema en el ángulo de inclinación ϕ , aunque para el ángulo θ funciona igual pero de manera frontal. Se tomará como tiempo objetivo 0,3 s ya que la variación angular debe ser rápida y muy exacta. El valor objetivo será llegar al 1, pero para llegar a los valores angulares deseados será una variación proporcional en los valores.

El error del ángulo será:

$$e = \phi_d - \phi_{real} \quad (4.24)$$

$$\dot{e} = \dot{\phi}_d - \dot{\phi}_{real} \quad (4.25)$$

El controlador de ϕ será un PD de la forma:

$$C_{PD\phi} = K_D s + K_P \quad (4.26)$$

Al igual que los casos anteriores se le agregará $\frac{1}{(\beta s + 1)}$ para mantener el equilibrio en el orden del numerador y denominador.

Considerando los valores iniciales $K_D = 1$, y $K_P = 1$ se obtiene la respuesta en la figura 25.

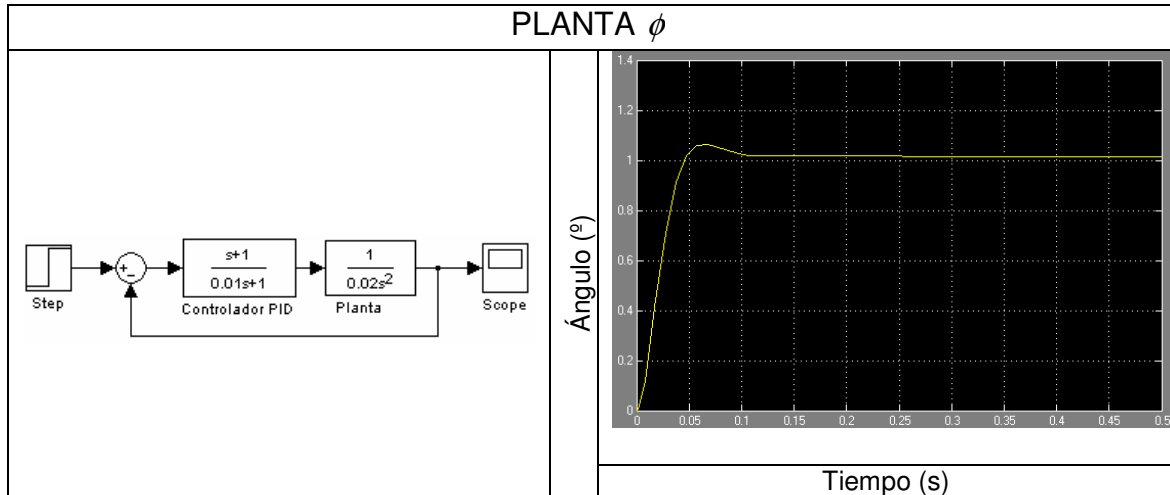


Figura 4.17: Planta ϕ $K_D = 1$, $K_P = 1$

En la figura 4.17 se ve que la respuesta es muy rápida y existe un sobreimpulso. Para esto se disminuirá el controlador proporcional para que baje el sobreimpulso. Se usarán los valores $K_D = 1$, y $K_P = 0,1$

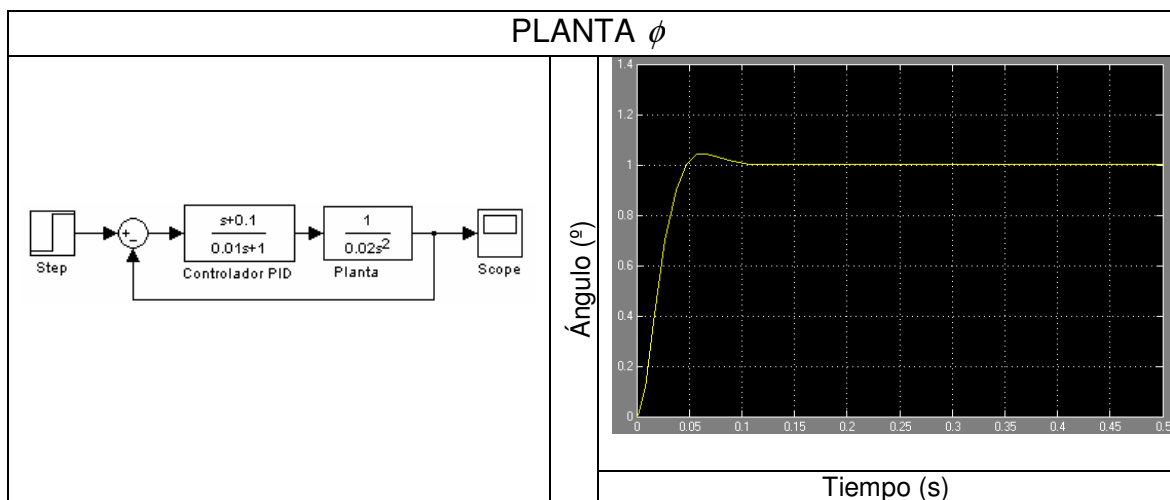


Figura 4.18: Planta ϕ $K_D = 1$, $K_P = 0,1$

De la figura 4.18 se observa que hubo una variación hacia la estabilización, pero no la deseada, así que se disminuirá aún más el controlador proporcional. Los valores serán $K_D = 1$, y $K_P = 0,01$.

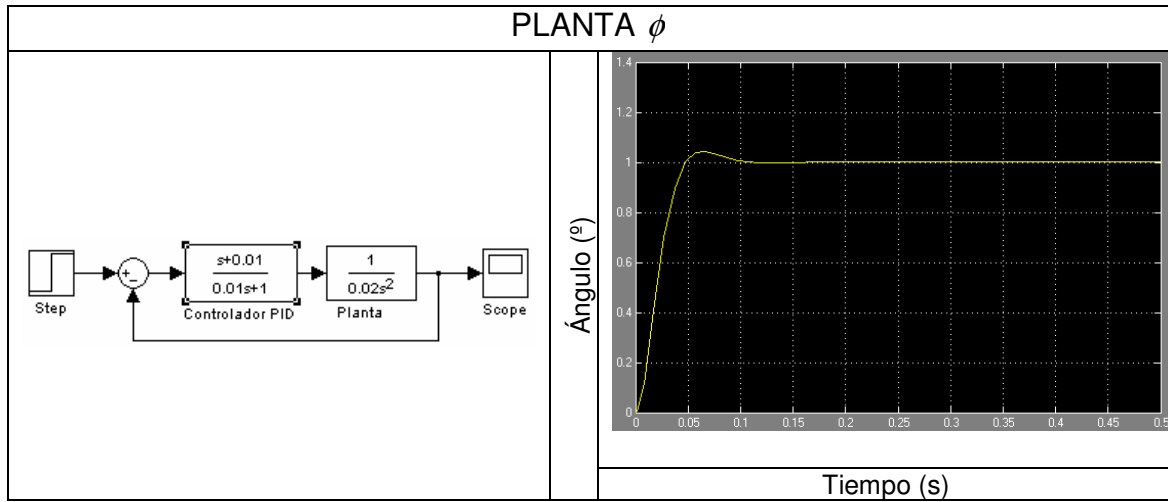


Figura 4.19: Planta ϕ $K_D = 1$, $K_P = 0,01$

En la figura 4.19 se ve que disminuye un poco el tiempo del sobreimpulso a la estabilización. Ahora se hará aumentar el controlador derivativo para disminuir el sobreimpulso. Los valores serán $K_D = 5$, y $K_P = 0,01$.

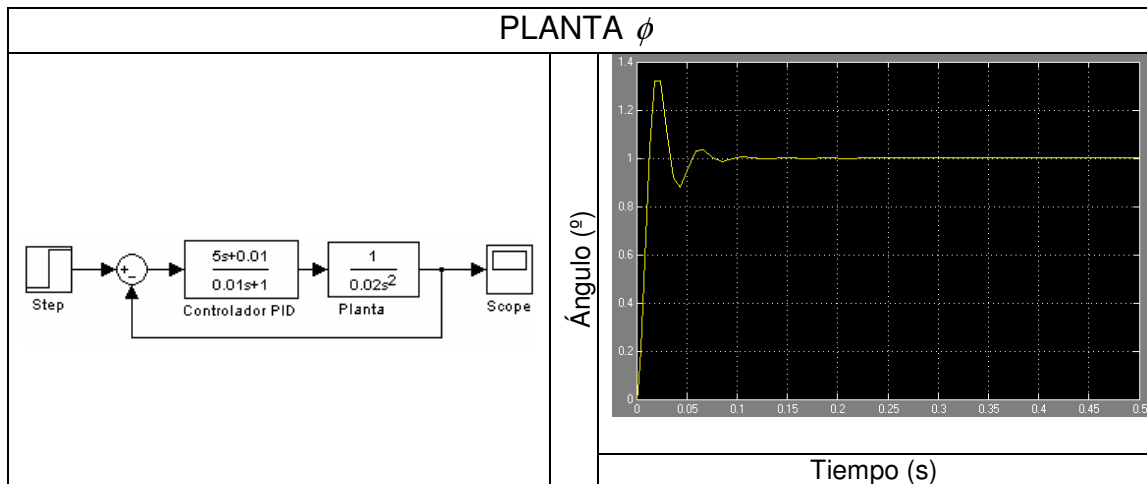


Figura 4.20: Planta ϕ $K_D = 5$, $K_P = 0,01$

Se produce una respuesta bastante peor, ya que al aumentar el controlador derivativo disminuye el tiempo de respuesta y el sistema en la figura 4.20 no es capaz de soportar cambios tan grandes y así también aumenta el sobreimpulso y se genera una inestabilidad importante.

Por lo anterior de llevará el controlador derivativo a un valor menor para bajar el tiempo de respuesta. Los valores a usar son $K_D = 0,5$, y $K_P = 0,01$.

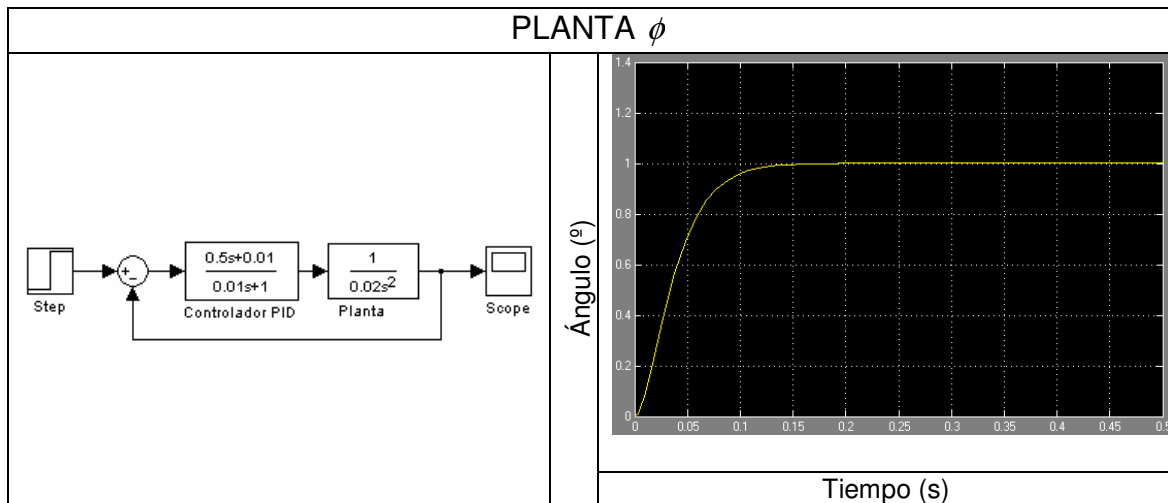


Figura 4.21: Planta ϕ $K_D = 0,5$, $K_P = 0,01$

Ya la respuesta está mucho mejor, en la figura 4.21 se consigue llegar a la estabilidad sin sobreimpulso, pero con un tiempo de estabilización de 0.15 s. Se disminuirá un poco más el controlador derivativo para llegar al tiempo objetivo. Los valores a usar son $K_D = 0,3$, y $K_P = 0,01$.

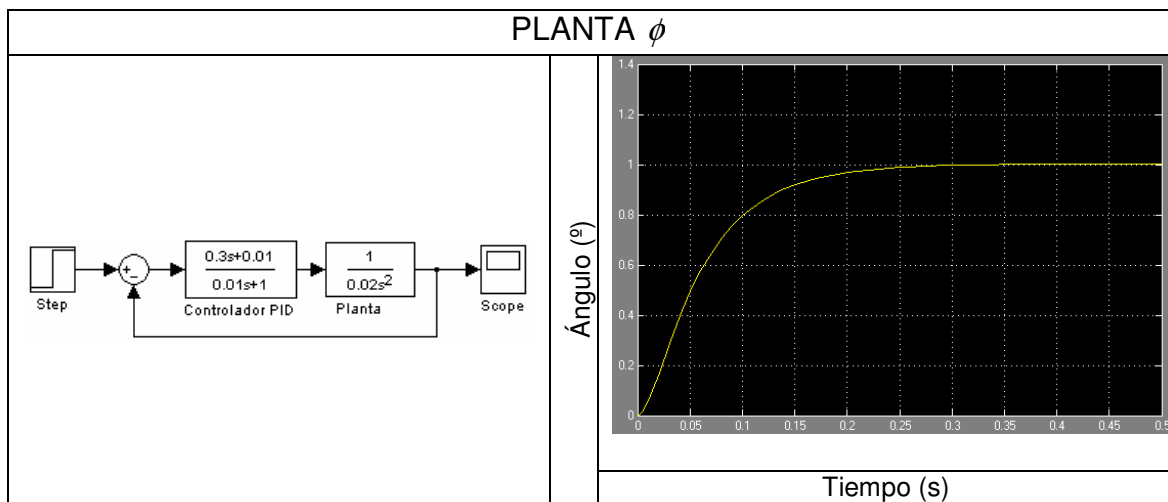


Figura 4.22: Planta ϕ $K_D = 0,3$, $K_P = 0,01$

Finalmente, como se ve en la figura 4.22, se ha conseguido el controlador que permitiera cumplir los criterios de diseño en la planta θ .

Al igual que en la planta Z y planta XY se le agregará un error al sensor de un 1 % y un 10 % para ver de qué manera afectará en la respuesta del sistema.

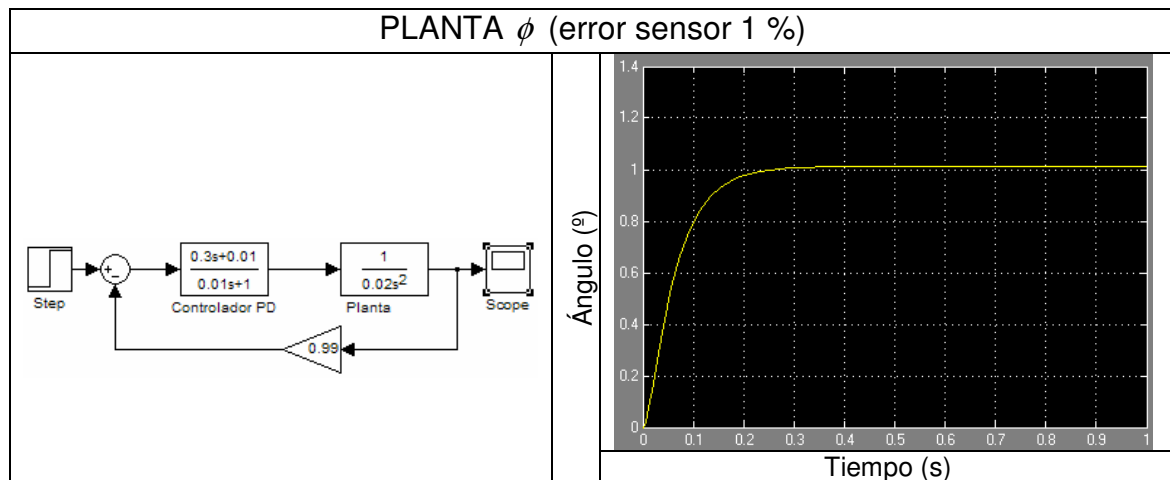


Figura 4.23: PLANTA ϕ error sensor 1 %

La figura 4.23 muestra como hay una pequeña variación en la estabilización. Esto indica que el sistema se estabilizará en un valor no deseado.

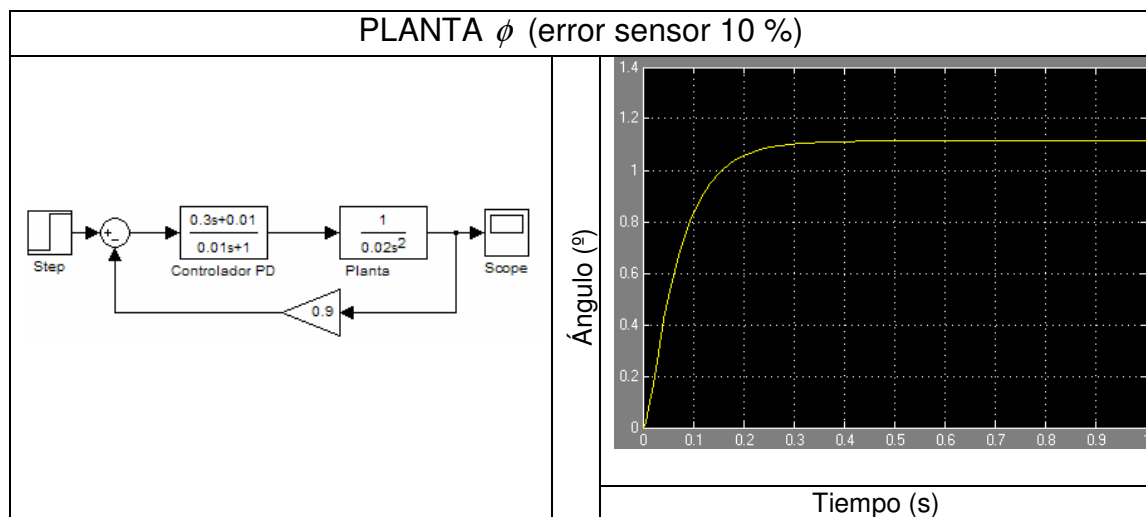


Figura 4.24: PLANTA ϕ error sensor 10 %

La variación en la estabilización tiene ya un error importante. La figura 4.24 muestra como con un error de 10 %, la respuesta llega a la estabilidad a un poco más de 1,1.

4.5. Variación sensor y planta

Los sistemas perfectos no existen. Se debe considerar variaciones en algunos de las partes del sistema para ver como se comporta el controlador diseñado. Primero se agregarán algunos retrasos en el sensor y luego, junto con los retrasos hará variar levemente la planta, variando la masa, para analizar que respuesta dará el sistema.

Este análisis se hará solo para la planta Z ya que todas las plantas tienen una respuesta relativamente parecida, entonces se puede tomar esta como una referencia de comportamiento.

El retraso en el sensor se agrega con el bloque *Transport Delay*, con los valores de análisis 1 ms, 100 ms y 1 s.

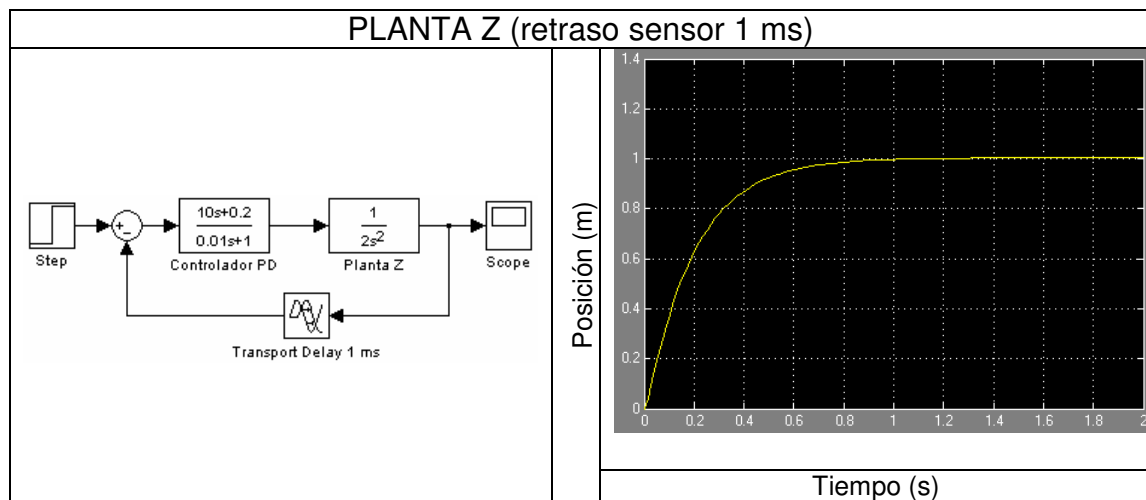


Figura 4.25: Planta Z con retraso de sensor de 1 ms

Dado un retraso tan pequeño, la figura 4.25 muestra una respuesta del sistema que no tiene una variación notoria.

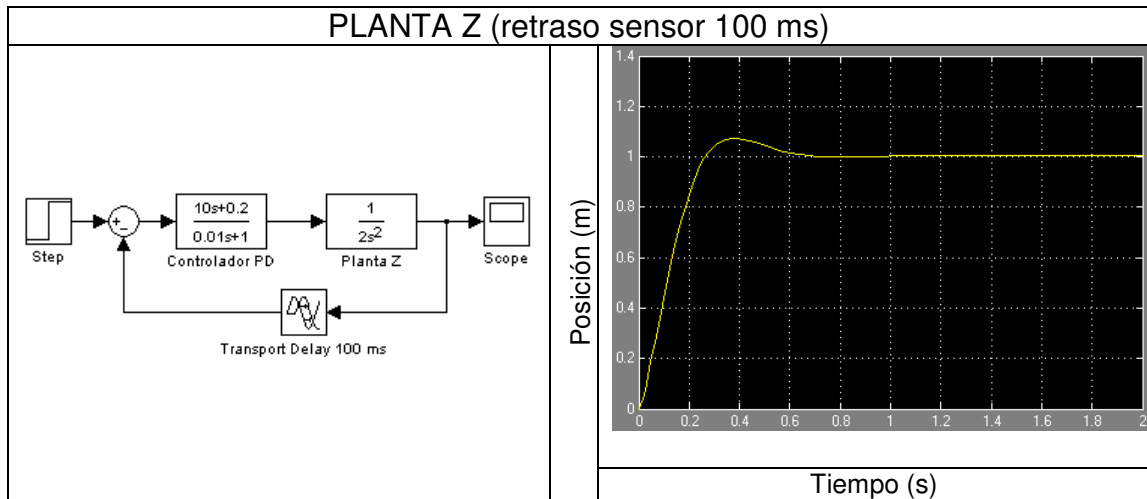


Figura 4.26: Planta Z con retraso de sensor de 100 ms

Con un retraso de 100 ms, la figura 4.26 enseña una variación muy importante. Se ve que en $t = 0,35$ s hay un sobreimpulso no deseado, pero el sistema logra estabilizarse.

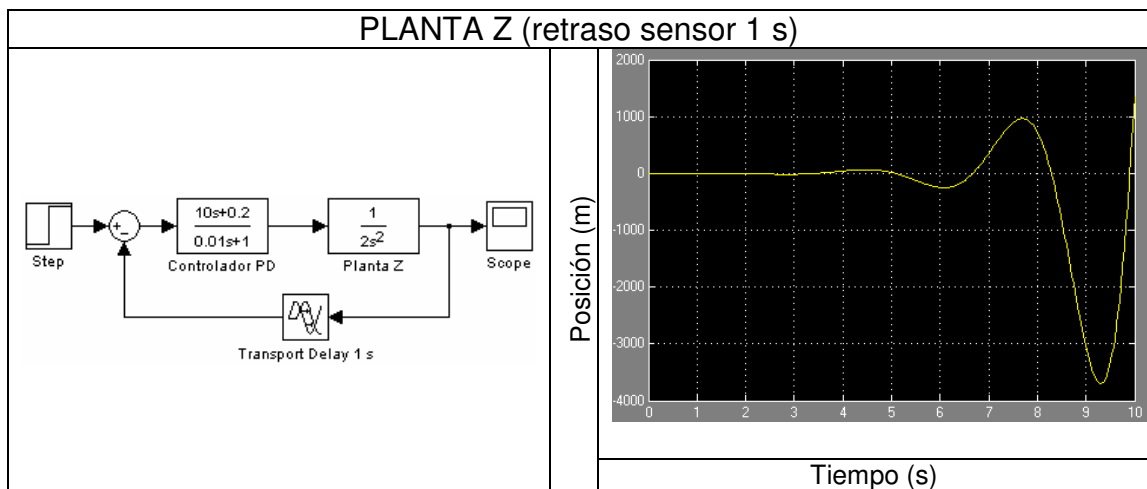


Figura 4.27: Planta Z con retraso de sensor de 1 s

La figura 4.27, con un retraso importante como es 1 s, el sistema se va totalmente a pérdida, ya que los datos necesarios para corregir los errores en la realimentación no están llegando cuando son necesarios.

Para hacer el análisis de la variación de la planta solo se considerará para los retrasos de 1 ms y 100 ms, ya que para cualquier valor mayor que 100 ms el sistema cae en inestabilidad.

Se analizará que pasa si se dobla la masa de 2 kg a 4 kg, pensando que en la realidad el vehículo cargará dispositivos, y luego se verá qué pasa si se agrega un polo.

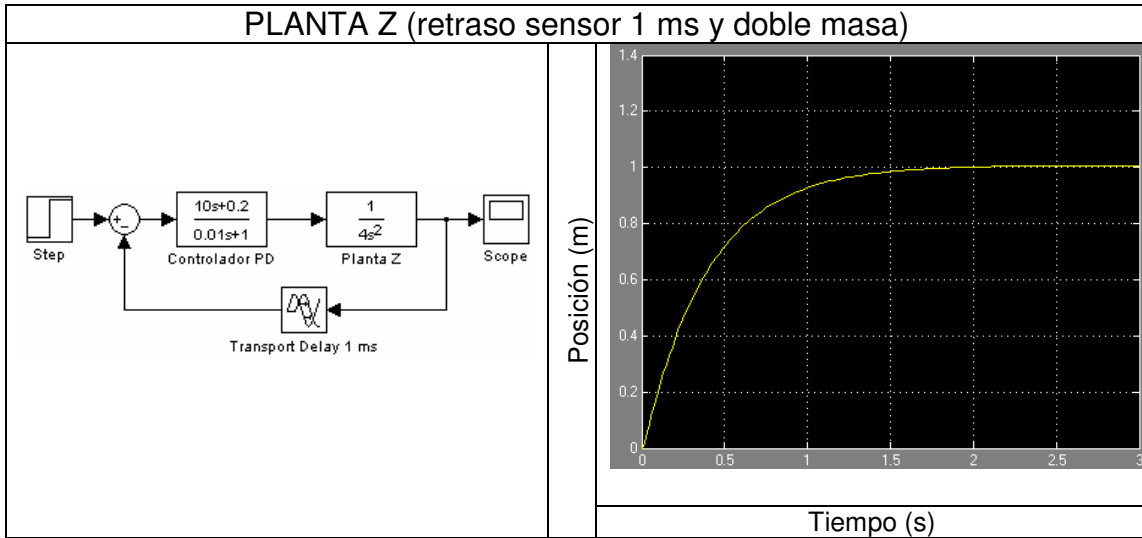


Figura 4.28: Planta Z retraso de sensor 1 ms y doble masa

A primera vista, la figura 4.28, parece que no hubiera variación alguna, pero el sistema está llegando al estado de estabilidad al doble de tiempo objetivo, es decir, $t = 2$ s.

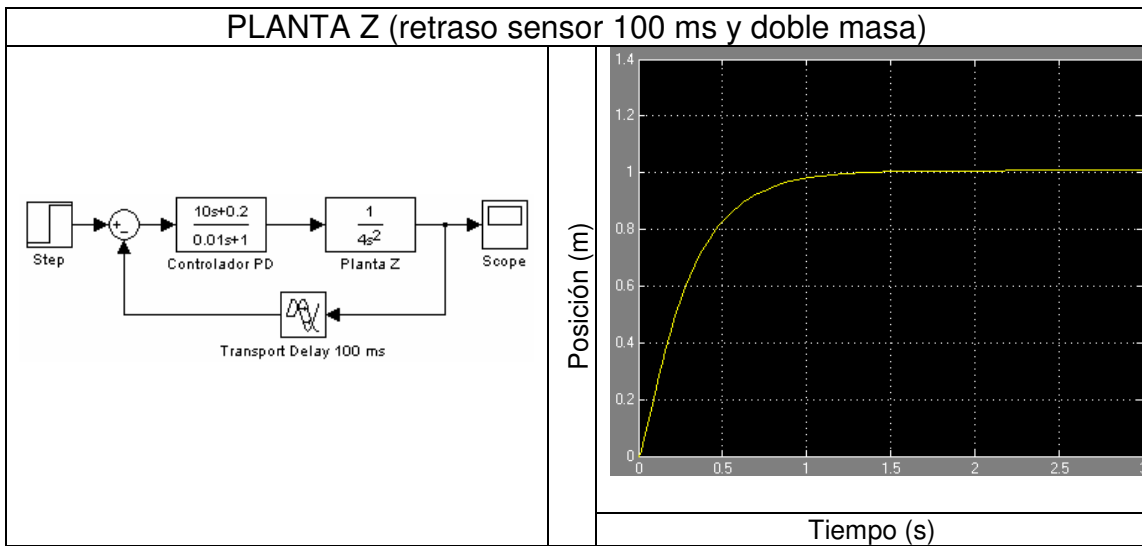


Figura 4.29: Planta Z retraso de sensor 100 ms y doble masa

Entregando los datos más tarde, la figura 4.29 muestra como el sistema se estabiliza medio segundo antes que en la figura 38, es decir, el aumento de peso está compensando levemente el retraso del sensor.

Si se usa la planta Z con la masa original y se le agrega un polo se obtienen los siguientes resultados:

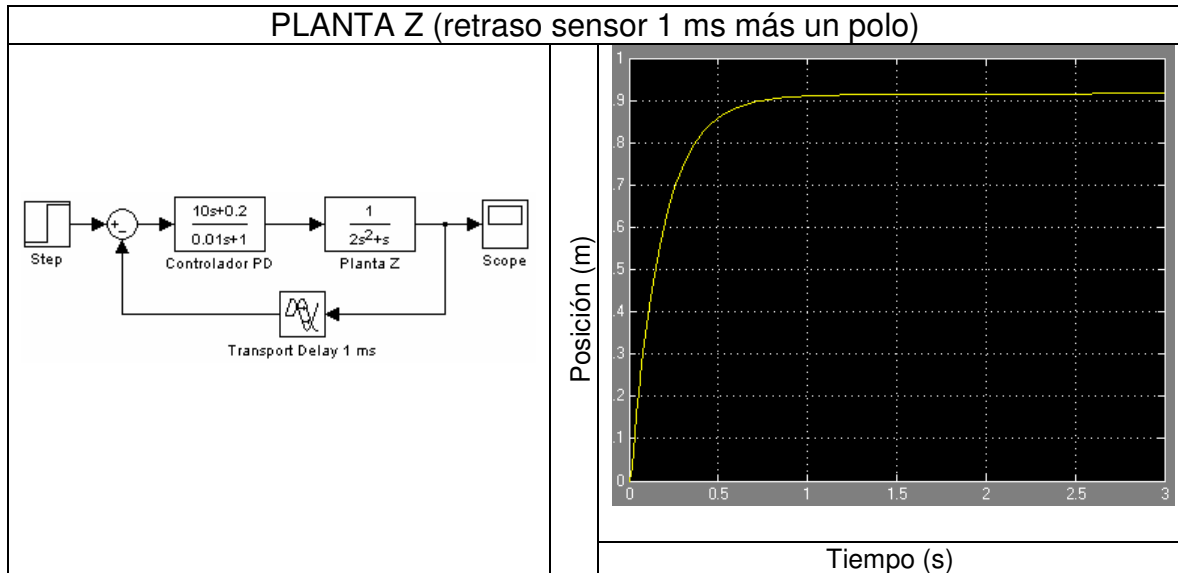


Figura 4.30: Planta Z retraso de sensor 1 ms y un polo extra

Al agregar un polo, la figura 4.30 muestra como se está generando un error de posición del sistema. Se está estabilizando en el tiempo objetivo, pero aproximadamente a una posición de 0,92 m.

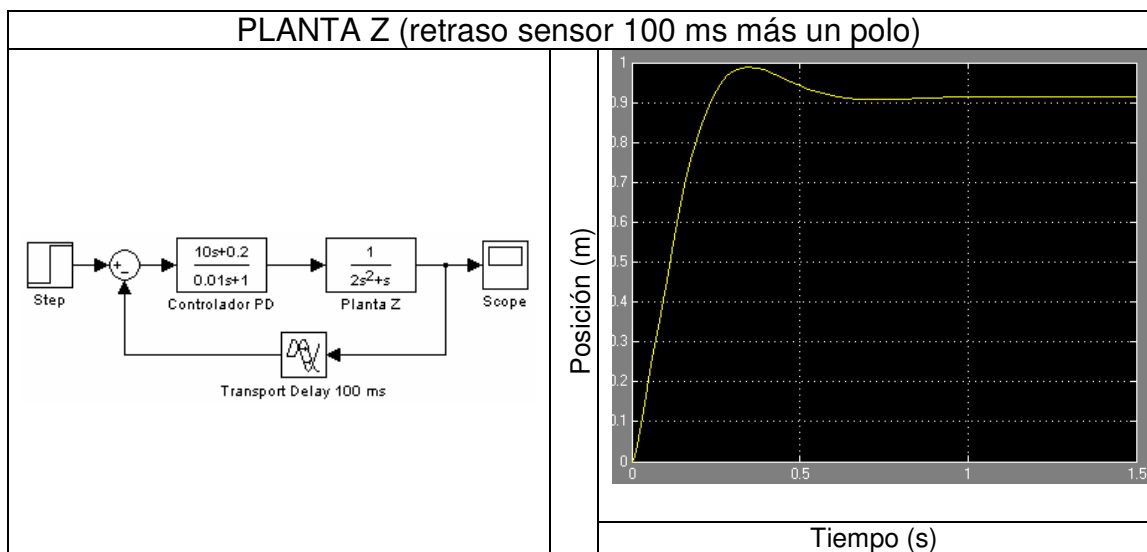


Figura 4.31: Planta Z retraso de sensor 100 ms y un polo extra

Con un retraso de 100 ms, la figura 4.31 muestra que se está generando un error de estabilización a 0,92 m, pero además hay un importante sobreimpulso que genera una pequeña inestabilidad y el sistema se está estabilizando a los 0,6 s.

Estos cambios de planta obligan al modelo a trabajar en márgenes de medida de sensor inferior a los 100 ms para tener un error compensable.

4.6. Integración controlador angular y de posición

La posición en el plano XY y el ángulo ϕ tiene una relación directa, ya que la inclinación del ángulo permite que se produzca el desplazamiento a la posición deseada. No se considera la planta y controlador de Z ya que se mantiene la altura constante.

La figura 4.32 muestra como es el diagrama de bloques del sistema:

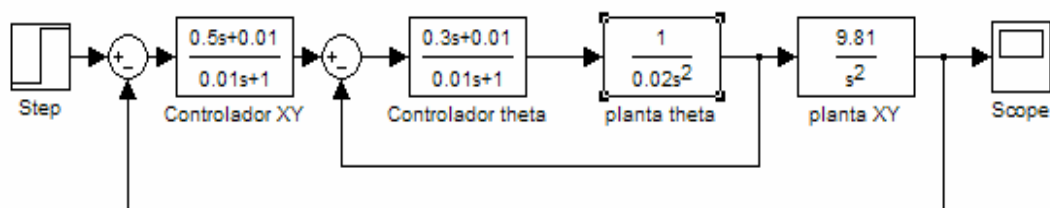


Figura 4.32: Integración controladores

El controlador de XY entrega el ángulo deseado lazo de la planta ϕ . El controlador de ϕ hace los cálculos e intenta entregar este ángulo para que finalmente se envíe la respuesta. La figura 4.33 muestra cual es la respuesta de esta integración. Se observa que el sistema es muy estable, aunque tiene un sobreimpulso muy pequeño, pero es despreciable.

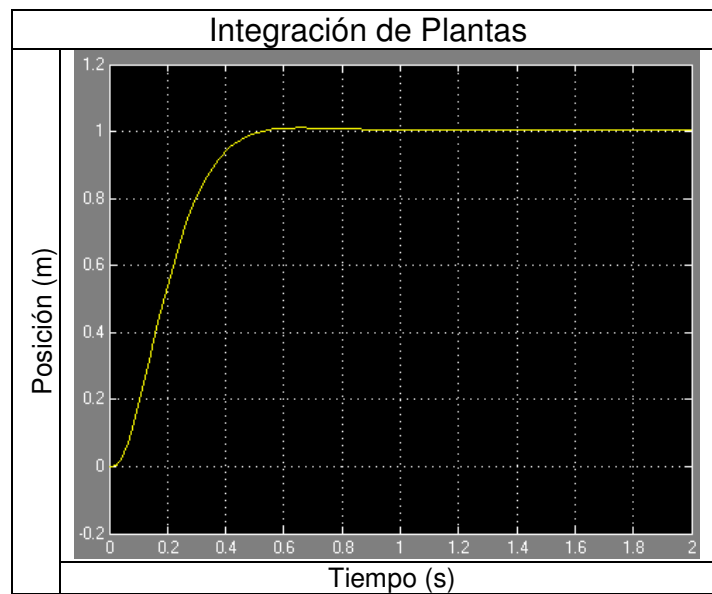


Figura 4.33: Respuesta integración controladores

El sistema tiene un comportamiento muy bueno después de pasar por los controladores, se estabiliza a los 0,6 s en la posición 1 m. Este modelo está considerando dos sensores ideales, por lo que se debe considerar trabajar con un retraso entre 1 ms y 100 ms.

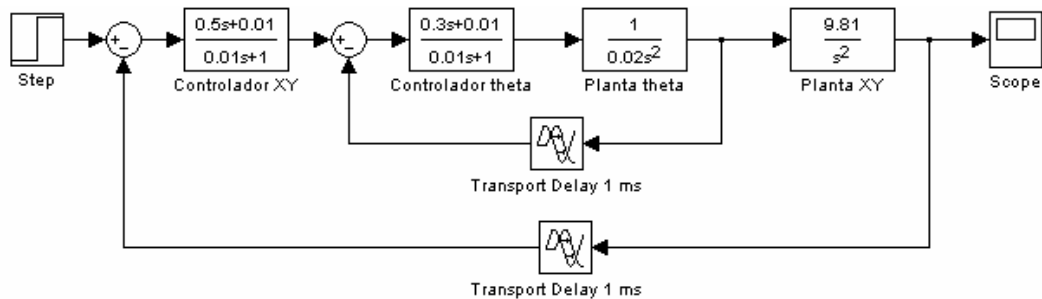


Figura 4.34: Integración controladores con retraso 1 ms

La figura 4.34 muestra el sistema con dos sensores de las mismas características y los mismos retrasos de 1 ms.

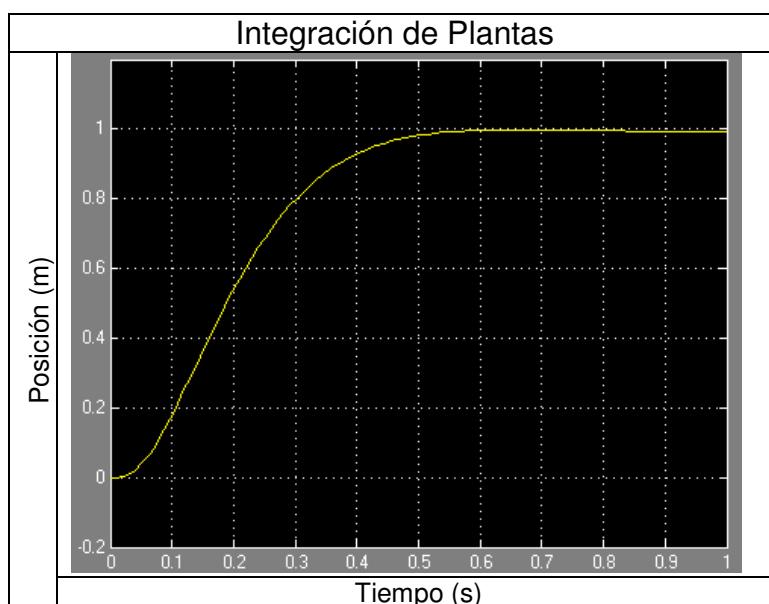


Figura 4.35: Respuesta integración controladores retraso 1 ms

El retraso de 1 ms en la realimentación muestra en la figura 4.35 que no hay cambios notables en la respuesta.

El diagrama de bloques de la figura 4.36 muestra que se cambia a un retraso de 50 ms.

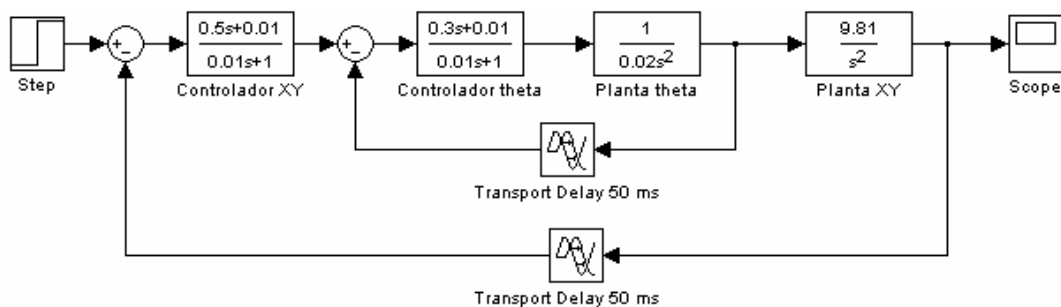


Figura 4.36: Integración controladores con retraso 50 ms

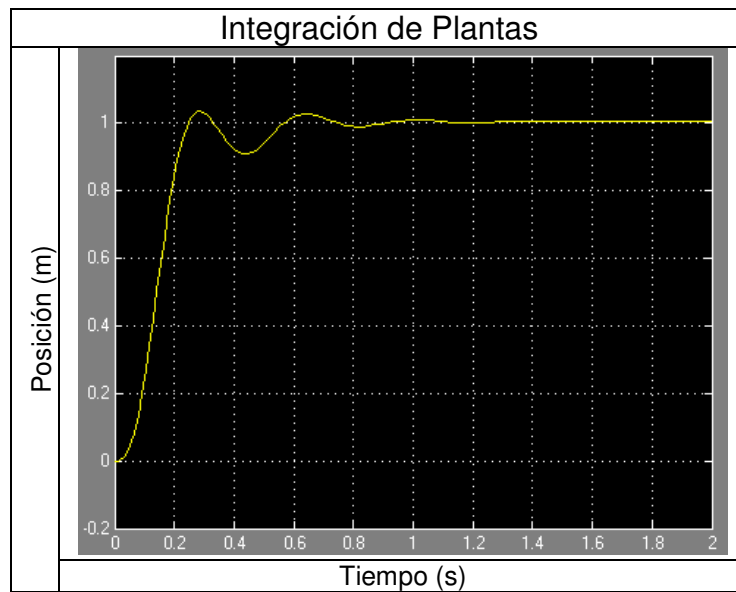


Figura 4.37: Respuesta integración controladores retraso 50 ms

El sistema de la figura 4.37 llega a la estabilidad en $t = 1,1$ s, pero pasa por un periodo de inestabilidad. Esto muestra que a medida que se aumenta el retraso, el sistema está reaccionando más tarde y le está costando estabilizar.

Finalmente con un retraso de 100 ms, cuyo diagrama de bloque es la figura 4.38, se obtiene la respuesta de la figura 4.39.

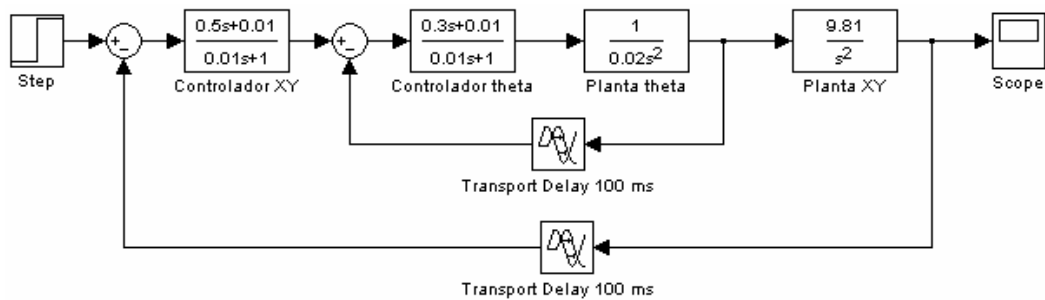


Figura 4.38: Integración controladores con retraso 100 ms

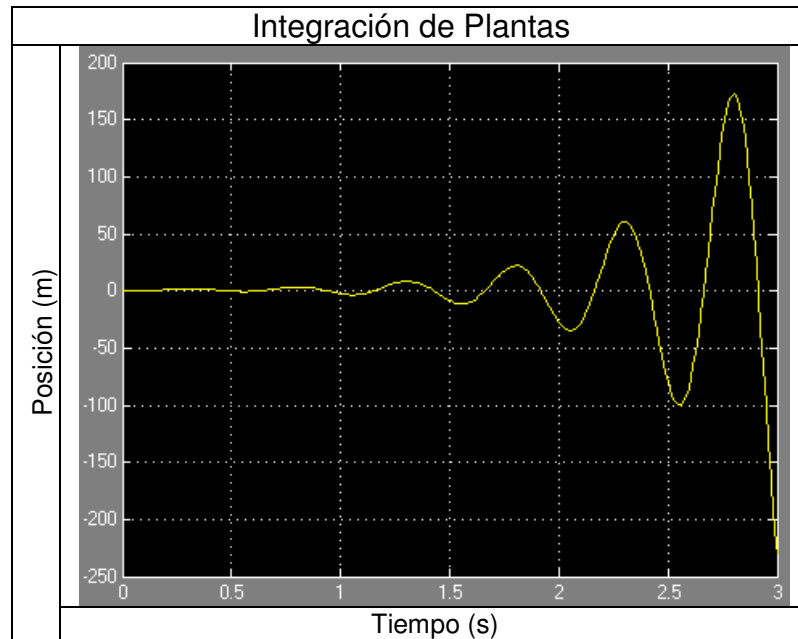


Figura 4.39: Respuesta integración controladores retraso 100 ms

La figura 4.39 muestra como con un retraso de 100 ms el sistema se va a pérdida total. Lo anterior se debe a que la señal está teniendo un doble retraso de realimentación, y el sistema no es capaz de soportarlo.

El análisis de la integración de los controladores muestra cual es la sensibilidad del sistema ante los retrasos. El sistema total no puede superar los 50 ms ya que se entra en la zona inestable y el vehículo real podría caer.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

El cuadricóptero es un vehículo aéreo no tripulado capaz de realizar tareas bastante específicas y complejas solo haciendo variar las velocidades de giro de los motores, pero a su vez su aerodinámica puede llegar a ser bastante compleja.

La bibliografía sobre los cuadricópteros es aún bastante limitada, aunque hay algunas universidades y laboratorios desarrollando importantes proyectos para hacer cuadricópteros autónomos capaces de evitar obstáculos vertical y horizontalmente.

El presente trabajo ha cumplido los objetivos previstos, ya que se han obtenido expresiones matemáticas, de dinámica y control, capaces de simular el movimiento del vehículo en una integración del movimiento en el plano XY y los ángulos de inclinación.

Se han considerado sensores ideales, pero también se agregaron factores de error para verificar como los controladores corrigen estos errores y si su funcionamiento cumplía con las expectativas de estabilidad o entraban en inestabilidad. De lo anterior se sacan unos márgenes de funcionamiento respecto a los retrasos de realimentación, que van desde 1 ms a 50 ms.

Se ha estudiado también cómo reacciona el sistema ante un aumento en la masa del vehículo, en el que se observó que al doblar la masa de la planta se dobla el tiempo de estabilización de la respuesta.

Como perspectiva de futuro se puede usar este modelo para llevar el sistema a la realidad. Se pueden desarrollar unas cuantas trayectorias para hacer un vuelo autónomo.

REFERENCIAS

- [1] <http://aln.list.ufl.edu/uav/UAVHstry.htm>, última visita 17-06-09
- [2] Kimon P. Valavanis, *Advances in Unmanned Aerial Vehicles*, Ed. Springer, 2007.
- [3] Serway, R., *Física para ciencias e Ingeniería*, Thomson Parainfo, México, 2006.
- [4] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/magnetic/motdc.html#c1>, última visita 22-06-09
- [5] Dave Polka, *Motors and Drivers: a practical technology guide*, 2003.
- [6] Carmona, A., *Aerodinámica y Actuaciones del Avión*, Thomson Parainfo, Madrid, 2007.
- [7] Marion, J., *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas*. Ed. Reverté S.A., Barcelona, 1995.
- [8] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Ed. Addison Wesley, San Francisco, 2002.
- [9] Castillo, P., *Modelling and Control of Mini-Flying Machines*, Ed. Springer, Estados Unidos, 2005.
- [10] Díaz, C. y Casas O., *Documento Interno*, UPC, 2009.
- [11] Miller, K., *Path Tracking Control for Quadrotor Helicopters*, 2008

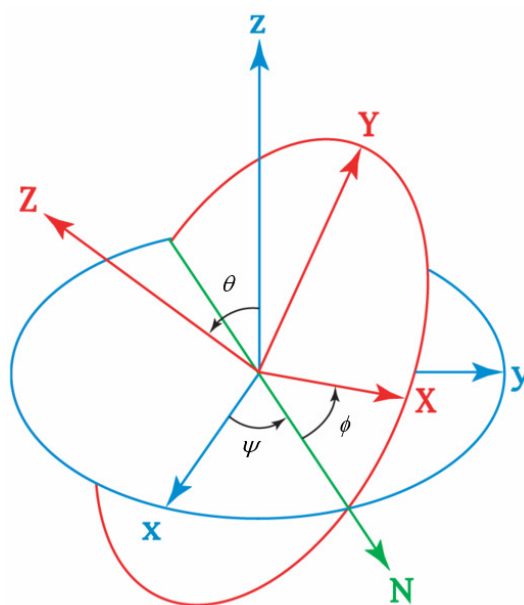
ANEXO I

La matriz de rotación es una forma de representar la orientación de un sistema de coordenadas móvil en función de otro sistema fijo.

Para esto se usan los ángulos de Euler, que tras sucesivos giros, se va desde el sistema fijo x' al x . Entonces el paso de un sistema al otro se define con la fórmula matricial:

$$x = M_R x'$$

La siguiente figura muestra los tres giros que hay en el sistema de referencia. Los ángulos (ψ, θ, ϕ) representan los movimientos de yaw, pitch y roll respectivamente.



Ángulos de Euler

A continuación se tienen las matrices de rotación de cada uno de los ángulos por separado [12]:

$$M_{R\psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$M_{R\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desarrollando $M_R = M_{R\phi} M_{R\theta} M_{R\psi}$ se tiene:

$$M_R = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 \\ -\text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\phi - \cos\theta \text{sen}\phi \text{sen}\psi & \cos\psi \text{sen}\phi + \cos\theta \cos\phi \text{sen}\psi & \text{sen}\psi \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\psi \cos\phi - \cos\theta \text{sen}\phi \cos\psi & -\text{sen}\psi \text{sen}\phi - \cos\theta \cos\phi \cos\psi & \cos\psi \text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi & -\text{sen}\theta \cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ANEXO II

Tomando las ecuaciones (3.12) y (3.17) para desarrollar el lagrangiano, se busca alcanzar los extremos de este problema minimizando la trayectoria de la acción:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{tras}}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L_{tras}}{\partial \xi} = F_{\xi}$$

$$m \ddot{\xi} + mg(\hat{k}) = F_{\xi}$$

$$m \ddot{(x, y, z)} + mg(\hat{k}) = M_R F = M_R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_t \end{bmatrix}$$

$$m \ddot{x} = L_T \sin \psi \sin \theta$$

$$m \ddot{y} = L_T \cos \psi \sin \theta$$

$$m \ddot{z} = L_T \cos \theta - mg$$

Donde:

F_{ξ} : fuerza traslacional del vehículo

M_R : Matriz rotacional (Anexo II)

F : Matriz fuerza sustentación en los tres ejes