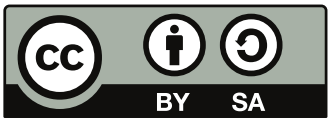
Circuits i Sistemes Lineals
Resposta freqüencial

Aniol Martí
aniol.marti@upc.edu

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Juliol de 2026

Copyright © 2026: Aniol Martí.



Aquest document està subjecte a la llicència de Reconeixement – CompartirIgual 4.0 Internacional de Creative Commons.

Índex

1 Resposta freqüencial de circuits **4**

1.1 Representació analítica d'un senyal 4
1.2 Resposta en règim permanent sinusoidal (RPS) 5
1.3 Circuit transformat fasorial 7
1.3.1 Impedàncies fasorials 8
1.4 Models sèrie/paral·lel d'immitàncies 9
1.5 Ressonància 10
1.5.1 Interpretació física 11
1.5.2 Ressonància d'un circuit complex 12
1.6 Representació gràfica de senyals sinusoidals 13
1.6.1 Oscil·lograma 13
1.6.2 Diagrama fasorial 15
1.7 Resposta d'un circuit excitat a més d'una freqüència 16
1.7.1 Espectre freqüencial 17
1.8 Resposta d'un circuit a senyals periòdics 18
1.8.1 Representació espectral de senyals periòdics 19
1.9 Introducció a la resposta freqüencial 20
1.9.1 Corbes d'amplificació i desfasament 21
1.10 Filtratge 21
1.10.1 Tipus de filtres 22
1.10.2 Paràmetres d'un filtre 23
1.10.3 Filtres de primer ordre 24
1.10.4 Filtres de segon ordre 30
1.10.5 Filtre passabanda 36
1.10.6 Filtre eliminabanda 41

A Sèries de Fourier **44**

A.1 Sèrie de Fourier exponencial 44
A.2 Sèrie de Fourier trigonomètrica 45
A.3 Sèrie de Fourier harmònica 45
A.4 Interpretació dels coeficients de Fourier 46

TEMA 1

Resposta freqüencial de circuits

En aquest tema s'estudia la resposta en règim permanent[1] a un senyal sinusoidal de la forma:

$$e(t) = \beta \cos(\omega t + \theta),\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Aquesta situació tan específica demana alguns aclariments:

1. Estudiem el règim permanent perquè en la immensa majoria de circuits, el transitori dura molt poc i entrem molt aviat en règim permanent.
2. Ens interessa un senyal sinusoidal perquè la teoria de Fourier ens diu que qualsevol senyal es pot expressar com a combinació lineal de sinusoides. Per tant, la resposta d'un circuit lineal a qualsevol senyal és la combinació lineal de les respostes a senyals sinusoidals.
3. Els senyals sinusoidals apareixen en moltes aplicacions d'enginyeria, des de la generació i transmissió d'energia elèctrica fins a aplicacions de comunicacions.
4. Prenem com a referència el cosinus perquè per $\omega = 0$ i $\theta = 0$ el senyal correspon a CC. En canvi, amb un sinus caldria tenir en compte un desfasament $\theta = -\pi/2$ rad.

Utilitzant la transformada de Laplace podríem estudiar la resposta en règim permanent a l'excitació $e(t)$ de la següent forma:

- Calcular la transformada de Laplace de l'excitació.
- Multiplicar per $H(s)$ per trobar la transformada de la resposta.
- Calcular la transformada inversa a partir de la descomposició en fraccions parcials, descartant tots els termes de resposta lliure.

Aquests passos tenen certa complexitat que, en el cas concret del senyal proposat, es pot reduir utilitzant els *fasors*.

1.1 Representació analítica d'un senyal

Un fasor (mot creuat de *fase* i *vector*) és un nombre complex que representa una funció sinusoidal amb amplitud, fase i freqüència invariants en el temps. Una sinusoide genèrica amb amplitud, fase i freqüència constants és de la forma:

$$e(t) = \beta \cos(\omega t + \theta),\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Afegint-hi la part imaginària i utilitzant la fórmula d'Euler obtenim:

$$\beta \cos(\omega t + \theta) + \mathrm{j}\beta \sin(\omega t + \theta) = \beta \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \theta)} = \beta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = a_e(t),$$

[1] Tingueu en compte que perquè el règim permanent estigui ben definit cal que el circuit sigui estable.

on $a_e(t)$ és el *senyal analític* o *representació analítica* de $e(t)$ i el factor que no depèn del temps és el que anomenem *fasor* i el representem en negreta:

$$\mathbf{e} = \beta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \beta \angle \theta.$$

A partir del senyal analític es pot recuperar fàcilment el senyal original agafant-ne només la part real:

$$\boxed{e(t) = \Re[a_e(t)]}$$

Exemple 1.1

Trobeu el senyal representat pel fasor $\mathbf{x} = 5 + 8{,}66\mathrm{j}$. Suposeu que la freqüència de treball és ω.

Solució

En primer lloc calculem la forma exponencial del fasor:

$$\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\measuredangle \mathbf{x}} = 10\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} = 10\angle\frac{\pi}{3}.$$

Ara ja podem calcular fàcilment el senyal analític:

$$a_x(t) = 10\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = 10\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{3}+\omega t\right)}.$$

Per tant, el senyal original és:

$$x(t) = \Re[a_x(t)] = 10\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right).$$

1.2 Resposta en règim permanent sinusoidal (RPS)

En règim permanent, per definició, només queda la component forçada de la resposta. Això significa que podem obviar les condicions inicials del sistema, ja que només contribueix a la resposta lliure. Per tant, en el domini transformat la resposta a una excitació $e(t) = \beta\cos(\omega t + \theta)$ es pot expressar com:

$$R(s) = H(s)E(s),$$

on $H(s)$ és la funció de xarxa del circuit, $R(s)$ la resposta i $E(s) = \mathscr{L}[\beta\cos(\omega t + \theta)]$.

En lloc de seguir la via del circuit transformat, podem prendre una drecera a partir de la teoria de la secció 1.1. Fixeu-vos que si trobem la resposta a $a_e(t)$, diguem-n'hi $a_r(t)$, aleshores la resposta a $e(t)$ és $r(t) = \Re[a_r(t)]$. La transformada de Laplace del senyal analític de l'excitació és:

$$A_e(s) = \frac{\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{s - \mathrm{j}\omega}.$$

Per tant,

$$A_r(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} \cdot \frac{\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{s-\mathrm{j}\omega} = \underbrace{\frac{k_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n}}_{\text{Lliure}} + \underbrace{\frac{k}{s-\mathrm{j}\omega}}_{\text{Forçada}}.$$

Com que en règim permanent la resposta lliure s'haurà anul·lat, només ens interessa calcular el residu de la resposta forçada, k.

$$k = (s - \mathrm{j}\omega)A_r(s)_{|s=\mathrm{j}\omega} = H(s)\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}_{|s=\mathrm{j}\omega} = H(\mathrm{j}\omega)\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}.$$

Així doncs, en règim permanent,

$$A_{r_{\mathrm{RP}}}(s) = \frac{H(\mathrm{j}\omega)\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{s - \mathrm{j}\omega} = H(\mathrm{j}\omega)A_e(s).$$

Desfent la transformada obtenim el senyal analític de la resposta forçada:

$$a_{r_{\mathrm{RP}}}(t) = H(\mathrm{j}\omega)\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = H(\mathrm{j}\omega)a_e(t).$$

El desenvolupament anterior ens mostra que utilitzar el senyal analític ens algebritza la relació entrada-sortida, fins i tot en el domini temporal. Això es deu al fet que les exponencials complexes, $\beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}$, són vectors propis dels sistemes lineals, i les $H(\mathrm{j}\omega)$ són els valors propis.

Per acabar, hem d'obtenir $r_{\mathrm{RP}}(t)$ a partir del senyal analític. Expressant $H(\mathrm{j}\omega)$ en forma polar:

$$H(\mathrm{j}\omega) = |H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\measuredangle H(\mathrm{j}\omega)},$$

aleshores

$$a_{r_{\mathrm{RP}}}(t) = \beta|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta+\measuredangle H(\mathrm{j}\omega))}.$$

Finalment, prenent-ne la part real,

$$\boxed{r_{\mathrm{RP}}(t) = \beta|H(\mathrm{j}\omega)|\cos(\omega t + \theta + \measuredangle H(\mathrm{j}\omega))}$$

És a dir, la sortida té la mateixa forma i freqüència que l'entrada. Com que només ens interessa el règim permanent, d'ara en endavant cometrem l'abús de notació d'anomenar $r(t)$ a $r_{\mathrm{RP}}(t)$. En cas que sigui necessari distingir el règim permanent del transitori, s'indicarà *in situ*.

En conclusió, mitjançant la representació analítica hem trobat una manera simple de calcular la resposta en unes condicions concretes (règim permanent) a una excitació concreta (sinusoide genèrica). A la figura 1.1 representem esquemàticament aquest procés.

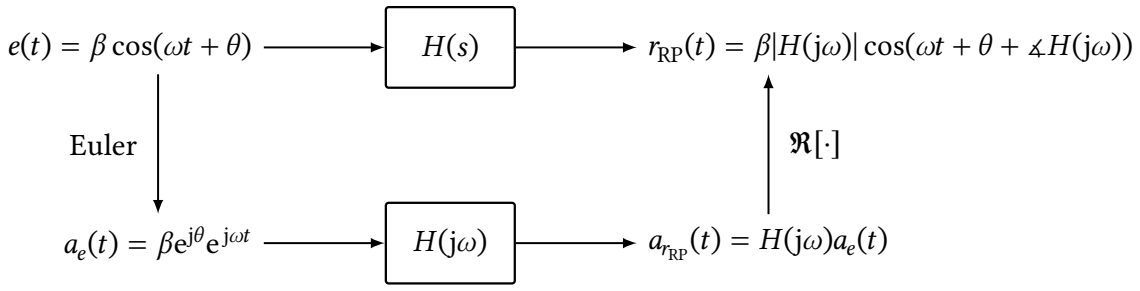


Figura 1.1: Representació del procés per trobar la resposta en RPS d'un circuit a partir de la representació analítica.

Com que β, ω i θ són paràmetres coneguts de l'excitació, per poder conèixer la resposta només ens cal calcular $H(\mathrm{j}\omega)$. La forma òbvia de fer-ho és trobar $H(s)$ i avaluar-la a $s = \mathrm{j}\omega$, però això no ens evita haver de passar pel circuit transformat de Laplace. En canvi, si aprofitem

que només volem la funció de xarxa per un cas molt particular, podem prendre de nou una drecera i calcular directament $H(\mathrm{j}\omega)$ a partir de la representació en RPS dels elements del circuit. D'aquesta transformació en diem *circuit transformat fasorial*.

Fixeu-vos que podem establir cert paral·lelisme entre el circuit transformat de Laplace i el fasorial. Per exemple, quan vam introduir la transformada de Laplace podíem algebritzar les equacions diferencials, però encara ens calia fer l'ànalisi a partir d'elles. Per evitar-ho, vam recórrer al circuit transformat de Laplace. Anàlogament, ara som capaços d'algebritzar la resposta temporal, però encara hem d'utilitzar la transformada de Laplace per trobar $H(\mathrm{j}\omega)$. Un cop "fasoritzat" el circuit també ens podrem estalviar aquest pas.

1.3 Circuit transformat fasorial

Considerem un circuit com el de la figura 1.2, amb una sola impedància.

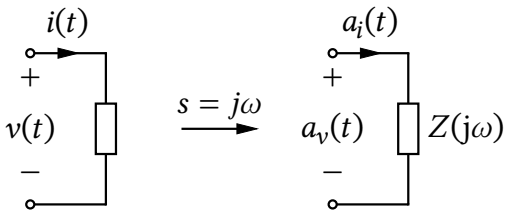


Figura 1.2: Representació d'una impedància en domini temporal i analític.

Si prenem $a_i(t)$ com a entrada i $a_v(t)$ com a sortida, aleshores la transformada de Laplace de la representació analítica de la resposta en RPS és

$$A_v(s) = H(\mathrm{j}\omega)A_i(s),$$

amb $H(\mathrm{j}\omega) = H(s)_{|s=\mathrm{j}\omega}$. D'altra banda, per la llei d'Ohm se satisfà

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)},$$

però per definició de la funció de xarxa també sabem que

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)}.$$

Així doncs, $Z(s) = H(s)$ i $Z(\mathrm{j}\omega) = H(\mathrm{j}\omega)$. Els models fasorials del resistor, l'inductor i el capacitor són:

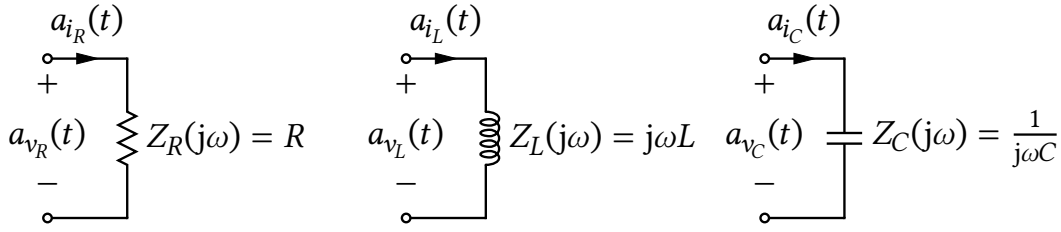


Figura 1.3: Models fasorials del resistor, l'inductor i el capacitor.

Tenint en compte que el circuit no modifica la forma ni la freqüència de l'excitació, encara podem fer una simplificació més i considerar només el fasor en lloc de la representació analítica sencera. Formalment, com que $a_v(t) = Z(\mathrm{j}\omega)a_i(t)$, aleshores:

$$\mathbf{v}\mathrm{e}^{\,\omega t} = Z(\mathrm{j}\omega)\cdot\mathbf{i}\mathrm{e}^{\,\omega t} \iff \boxed{\mathbf{v} = Z(\mathrm{j}\omega)\cdot\mathbf{i}} \tag{1.1}$$

Això ens permet modificar l'esquema de la figura 1.1 afegint-hi una nova fila que correspon al circuit transformat fasorial, tal i com es mostra a la figura 1.4.

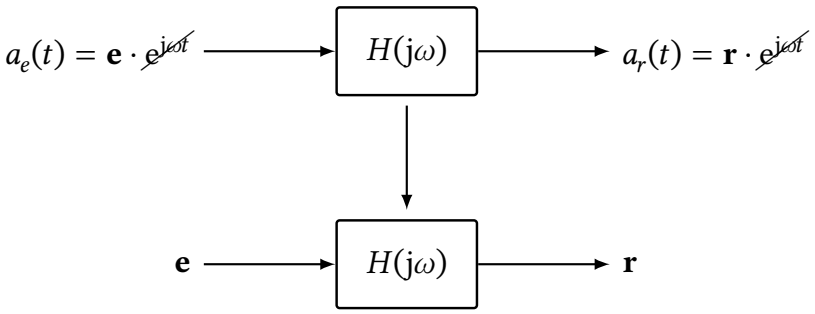


Figura 1.4: Representació esquemàtica de la "transformació" fasorial.

Recapitulant, per trobar la resposta en RPS podem seguir els següents passos:

1. Calcular la representació analítica dels diferents senyals i extreure'n el fasor:

$$e(t) = \beta\cos(\omega t + \theta) \to a_e(t) = \beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{\,\omega t} \to \mathbf{e} = \beta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \beta\angle\theta.$$

2. Trobar les impedàncies fasorials: $Z(\mathrm{j}\omega) = Z(s)_{|s=\mathrm{j}\omega}$.
3. Calcular l'amplificació i el desfasament: $|H(\mathrm{j}\omega)|$ i $\measuredangle H(\mathrm{j}\omega)$.
4. Recuperar el senyal analític i prendre'n la part real:

$$\mathbf{r} = \beta|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+\measuredangle H(\mathrm{j}\omega))} \to a_r(t) = \mathbf{r}\mathrm{e}^{\,\omega t} \to r(t) = \beta|H(\mathrm{j}\omega)|\cos(\omega t + \theta + \measuredangle H(\mathrm{j}\omega)).$$

1.3.1 Impedàncies fasorials

L'equació (1.1) en realitat en són dues: una per als mòduls i una altra per les fases:

$$|\mathbf{v}| = |Z(\mathrm{j}\omega)|\cdot|\mathbf{i}|,$$
$$\measuredangle\mathbf{v} = \measuredangle Z(\mathrm{j}\omega) + \measuredangle\mathbf{i}.$$

Aquests resultats ens mostren que, en una impedància fasorial, allò que realment importa són les relacions entre les amplituds i les fases de la tensió i el corrent. La dependència temporal no és rellevant perquè és la mateixa en les dues variables.

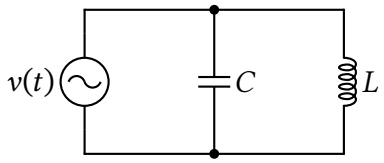
A partir de les expressions fasorials de la figura 1.3 podem deduir que en un resistor, la tensió i el corrent estan en fase, en un inductor la tensió està avançada 90° respecte el corrent, i en un capacitor la tensió està endarrerida 90° respecte el corrent. A la taula 1.1 es mostren resumides aquestes relacions.

Tipus	$Z(\mathrm{j}\omega)$	$\lvert Z\rvert$	$\measuredangle Z$
Resistor	$Z_R = R$	R	$0°$
Inductor	$Z_L = \mathrm{j}\omega L$	ωL	$90°$
Capacitor	$Z_C = \dfrac{-\mathrm{j}}{\omega C}$	$\dfrac{1}{\omega C}$	$-90°$

Taula 1.1: Taula d'impedàncies fasorials.

Exemple 1.2

Calculeu els fasors de corrent $\mathbf{i}_C$ i $\mathbf{i}_L$ del circuit:



Solució

Com que C i L estan en paral·lel, hi cau la mateixa tensió. Anomenant $\mathbf{v} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ el fasor de l'excitació:

$$\mathbf{i}_L = \frac{\mathbf{v}}{Z_L} = \frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{A}{\omega L}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{A}{\omega L}\angle\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathbf{i}_C = \frac{\mathbf{v}}{Z_C} = \frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = A\omega C\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = A\omega C\angle\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right).$$

1.4 Models sèrie/paral·lel d'immitàncies

Fins ara hem vist que un circuit dinàmic està format per una combinació de tres tipus d'impedàncies: resistives, inductives i capacitives, i que en RPS prenen els següents valors:

- Resistor: $Z_R(\omega) = R$.
- Inductor: $Z_L(\omega) = \mathrm{j}\omega L$.
- Capacitor: $Z_C(\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{-\mathrm{j}}{\omega C}$.

Com a resultat d'això, la impedància equivalent d'un circuit dinàmic en RPS és un nombre complex de la forma:

$$Z(\omega) = R(\omega) + \mathrm{j}\,X(\omega), \tag{1.2}$$

on Z és la impedància, R la resistència i X la reactància. Si un circuit presenta una reactància positiva ($X > 0$) diem que té un comportament inductiu, i si és negativa ($X < 0$) diem que té un comportament capacitiu.

L'equació (1.2) suggereix que aquesta impedància equivalent es pot modelar com una connexió en sèrie de dues impedàncies: una de real pura (resistor) de valor R i una altra d'imaginària

pura, de valor jX. Aquesta darrera es pot implementar amb un inductor si $X > 0$ o amb un capacitor si $X < 0$. El càlcul dels valors de L i C es fa resolent l'equació $X = \omega L$ o $X = \frac{-1}{\omega C}$ segons correspongui. A la figura 1.5 es mostra el circuit equivalent sèrie.

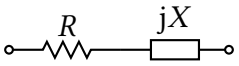


Figura 1.5: Model sèrie d'impedància.

El raonament anterior es pot fer també partint de l'admitància en lloc de la reactància:

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = G(\omega) + \mathrm{j}B(\omega), \tag{1.3}$$

on Y és l'admitància, G és la conductància i B la susceptància. És molt important destacar que la resistència del model sèrie no és la inversa de la conductància del model paral·lel, i anàlogament per la reactància i la susceptància. És a dir,

$$R \neq \frac{1}{G}, \quad X \neq \frac{1}{B}.$$

En aquest cas, si una admitància presenta una susceptància positiva ($B > 0$) diem que és capacitiva, i si la presenta negativa ($B < 0$) diem que és inductiva.

L'equació (1.3) suggereix que aquesta admitància equivalent es pot modelar com una connexió en paral·lel de dues impedàncies: una de real pura (resistor) de valor $\frac{1}{G}$ i una altra d'imaginària pura, de valor $\frac{1}{\mathrm{j}B}$. Aquesta darrera es pot implementar amb un capacitor si $B > 0$ o com un inductor si $B < 0$. El càlcul dels valors de C i L es fa resolent l'equació $B = \omega C$ o $B = \frac{-1}{\omega L}$ segons correspongui. A la figura 1.6 es mostra el circuit equivalent paral·lel.

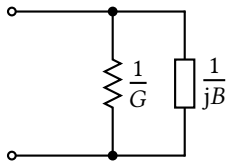


Figura 1.6: Model paral·lel d'impedància.

1.5 Ressonància

La *ressonància elèctrica* és un fenomen que es produeix quan els diferents elements reactius d'un circuit s'anul·len entre ells i la impedància (o admitància) és un nombre real. La freqüència en la qual un sistema elèctric ressona s'anomena *freqüència de ressonància.*

En un circuit hi podem tenir dos tipus d'elements reactius: inductors i capacitors, amb impedàncies:

$$Z_L(\omega) = \mathrm{j}\omega L, \quad Z_C(\omega) = \frac{-\mathrm{j}}{\omega C}.$$

Si ens hi fixem:

- Les dues són imaginàries pures.

- Tenen signes contraris.
- Mentre que el mòdul de la impedància inductiva augmenta amb la freqüència, el de la capacitiva disminueix.

Això provoca que, en algunes situacions, les dues impedàncies es puguin cancel·lar. Per veure-ho, comencem per estudiar dos casos senzills: un circuit LC sèrie i un circuit LC paral·lel.

La impedància equivalent d'un circuit LC sèrie és la suma de $Z_L(\omega)$ i $Z_C(\omega)$:

$$Z_S(\omega) = \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Igualant-la a zero i aïllant podem trobar la freqüència de ressonància:

$$\boxed{\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \tag{1.4}$$

Observeu que si la impedància és zero, el conjunt es comporta com un curtcircuit.

Pel cas paral·lel és més senzill treballar amb l'admitància que amb la impedància:

$$Y_P(\omega) = \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right),$$

d'on obtenim la mateixa expressió per ω_r que en el cas sèrie. Observeu que ara la impedància també és real però infinita. És a dir, el sistema es comporta com un circuit obert.

1.5.1 Interpretació física

Allò que més ens pot sobtar durant l'estudi de circuits reactius és l'existència d'impedàncies negatives. Tanmateix, cal recordar que en els nombres complexos un canvi de signe és equivalent a una rotació (desfasament) de 180°, i els senyals desfasats 180° es poden cancel·lar.

Reprenent els exemples LC sèrie i paral·lel, observem que en el cas sèrie el corrent que travessa els dos elements és el mateix, però les tensions que cauen en cadascun d'ells estan desfasades 180° entre sí (+90° en l'inductor i -90° en el capacitor). Per tant:

$$\mathbf{v}_\mathrm{o} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_L = \left(|\mathbf{v}_L|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} + |\mathbf{v}_C|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right) = \mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}(|\mathbf{v}_L| - |\mathbf{v}_C|) = 0.$$

És a dir,

$$|\mathbf{v}_L| = |\mathbf{v}_C| \iff |Z_L| = |Z_C|. \tag{1.5}$$

Com que la tensió de sortida és zero, la combinació es comporta com un curtcircuit, tal com havíem observat abans.

De forma semblant, en la combinació LC paral·lel la tensió que cau en cada element és la mateixa, però els corrents que circulen per cadascun estan desfasats 180° entre sí (+90° en el capacitor, -90° en l'inductor). Aleshores:

$$\mathbf{i}_\mathrm{o} = \mathbf{i}_L + \mathbf{i}_C = \mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}(|\mathbf{i}_C| - |\mathbf{i}_L|) = 0 \iff |\mathbf{i}_C| = |\mathbf{i}_L| \iff |Z_C| = |Z_L|. \tag{1.6}$$

En aquest cas la intensitat de la combinació és zero, per tant estem davant d'un circuit obert.

A la freqüència de ressonància les impedàncies o admitàncies de l'inductor i el capacitor es cancel·len de forma exacta. Ara bé, si ens situem per sobre o per sota d'aquesta freqüència de ressonància la impedància serà imaginària pura però positiva o negativa, segons el cas. La taula 1.2 ho resumeix.

Model	$\omega < \omega_r$	$\omega = \omega_r$	$\omega > \omega_r$
Sèrie	$Z_S \in \mathbb{I}^-$ (capacitor)	$Z_S = 0$ (curtcircuit)	$Z_S \in \mathbb{I}^+$ (inductor)
Paral·lel	$Z_P \in \mathbb{I}^+$ (inductor)	$Z_P = \infty$ (circuit obert)	$Z_P \in \mathbb{I}^-$ (capacitor)

Taula 1.2: Impedància equivalent dels models sèrie i paral·lel en funció de la freqüència de ressonància.

1.5.2 Ressonància d'un circuit complex

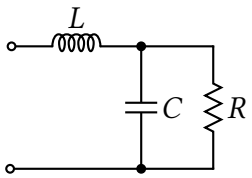
Fins ara hem vist dos casos senzills amb només dos elements reactius (un inductor i un capacitor), però els circuits tenen usualment un nombre d'elements molt superior a dos. Les interaccions entre totes les impedàncies internes poden ser molt variades, i la impedància que es veu des de l'entrada del circuit serà, en general, una quantitat complexa. Tanmateix existeix la possibilitat que a una o més freqüències concretes la impedància d'entrada d'un circuit es faci real pura perquè les parts imaginàries internes es compensin exactament. En aquest cas es diu que tot el circuit està en ressonància.

Si tenim l'esquema intern d'un circuit és possible de determinar si pot arribar a ressonar a alguna freqüència, i en cas afirmatiu calcular el seu valor. El procediment per fer-ho és:

- Calcular la impedància fasorial d'entrada del circuit, $Z(\omega)$, en funció de la freqüència, separant-la en part real i imaginària.
- Igualar la part imaginària a zero i resoldre l'equació per ω. Si l'equació té solucions (no trivials) reals, aquestes són les freqüències de ressonància.

Exemple 1.3

Calculeu les freqüències de ressonància del circuit:



Tal que $R = 1\,\text{k}\Omega$, $L = 200\,\text{mH}$, $C = 1\,\mu\text{F}$.

Solució

Calculem la impedància d'entrada del circuit separant-la en part real i imaginària:

$$Z = \text{j}\omega L + \frac{\frac{R}{\text{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\text{j}\omega C}} = \text{j}\omega L + \frac{R}{\text{j}\omega RC + 1} = \frac{R}{\omega^2 R^2 C^2 + 1} + \text{j}\left(\omega L - \frac{\omega R^2 C}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}\right).$$

Igualem la part imaginària a zero i aïllem ω:

$$\omega L = \frac{\omega R^2 C}{\omega^2 R^2 C^2 + 1} \implies \omega = \sqrt{\frac{CR^2 - L}{R^2 C^2 L}} = 2000\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}.$$

1.6 Representació gràfica de senyals sinusoidals

Un dels resultats més rellevants del desenvolupament teòric presentat a l'inici del tema és que, si excitem un circuit amb un senyal sinusoidal, la resposta també és sinusoidal i té la mateixa freqüència. Només en varien l'amplitud i la fase.

A continuació veurem dues formes alternatives de representar aquest tipus de senyals. La primera és probablement la més coneguda: la representació temporal, en què es mostra l'amplitud en funció del temps. La segona consisteix a aprofitar el concepte de fasor desenvolupat a la secció 1.1 i representar el senyal únicament mitjançant l'amplitud i la fase que el caracteritzen.

1.6.1 Oscil·lograma

Aquesta representació és la visualització clàssica de l'amplitud del senyal en funció del temps, i és la que ens mostra l'oscil·loscopi quan som al laboratori fent mesures. Per això, és imprescindible saber com interpretar i extreure informació dels oscil·logrames.

A la figura 1.7 s'hi representen dos senyals, en aquest cas dues tensions, donades per les expressions

$$v_\mathrm{g}(t) = V_\mathrm{g}\cos(2\pi f_0 t),$$
$$v_\mathrm{o}(t) = V_\mathrm{o}\cos(2\pi f_0 t + \theta).$$

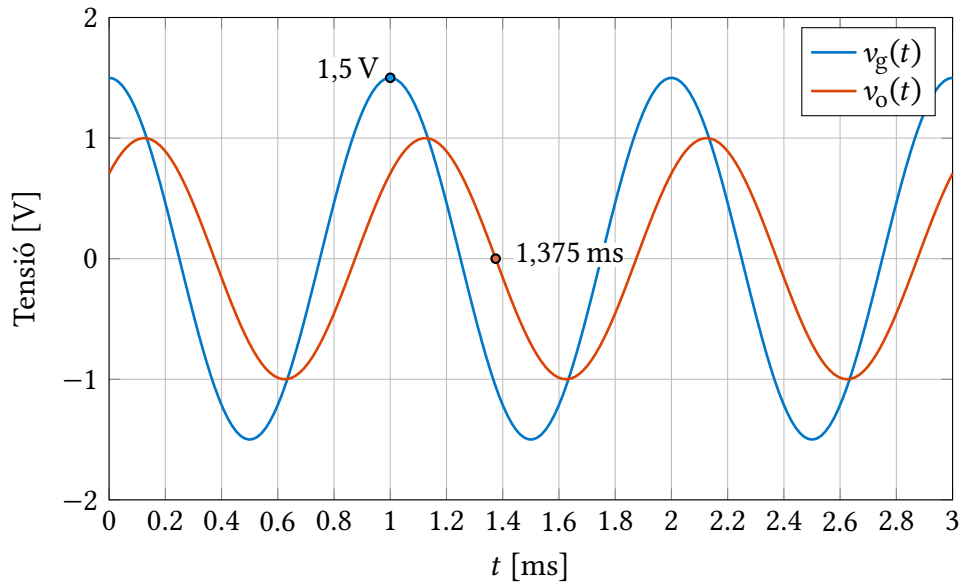


Figura 1.7: Oscil·lograma amb dos senyals sinusoidals de diferent amplitud i fase.

Si ens fixem en una de les dues corbes, per exemple $v_\mathrm{o}(t)$, podem identificar els paràmetres clau del senyal:

- Eix vertical: representa el valor instantani del senyal $v_\mathrm{o}(t)$ en cada instant de temps. El valor màxim que assoleix la corba és l'*amplitud de pic*, V_o.

- Eix horitzontal: representa el temps, t. La distància temporal entre dos pics consecutius (o dos punts equivalents de l'ona) defineix el *període*, T, que correspon a l'invers de la freqüència: $f_0 = 1/T$.
- Desplaçament horitzontal: la *fase* θ determina la posició de la corba respecte a l'origen de temps. Si $\theta > 0$, l'ona està avançada (desplaçada cap a l'esquerra); si $\theta < 0$, l'ona està retardada (desplaçada cap a la dreta).

Si a més a més aquests dos senyals corresponen a l'entrada i a la sortida d'un circuit, sovint voldrem identificar la relació de tensions i fases. És a dir, l'*amplificació* i el *defasament*:

- El quocient entre les amplituds dels senyals de sortida i d'entrada ens permet d'obtenir l'amplificació del filtre, és a dir:

$$|H(\mathrm{j}\omega_0)| = \frac{|V_\mathrm{o}|}{|V_\mathrm{g}|}.$$

  Fixeu-vos que aquesta amplificació és a una freqüència concreta, f_0. Si volem traçar una corba d'amplificació haurem de repetir el mateix procediment per diferents freqüències del senyal d'entrada, anotar els valors en una taula i després fer la gràfica corresponent amb aquests valors.

- La mesura del desplaçament temporal entre els dos senyals ens permet d'obtenir la diferència de fase entre ells i, per tant, el desfasament introduït pel filtre a aquella freqüència. Per mesurar bé aquest desplaçament temporal cal fixar-se en característiques dels senyals que siguin fàcilment observables, com ara els passos per zero. El procediment per mesurar el desfasament és:

  1. Identificar si la sortida està avançada (signe «+») o endarrerida (signe «-») respecte el senyal d'entrada.
  2. Escollir una característica visible de cada senyal. Si escolliu el pas per zero, us heu d'assegurar que els dos senyals tenen ajustat el nivell de massa (GND) al mateix punt. També, com que els senyals són cíclics, us heu d'assegurar que escolliu els punts característics més propers entre sí.
  3. Mesureu la distància temporal Δt entre els punts característics de l'entrada i la sortida respectivament. Sovint els oscil·loscopis disposen d'una eina de «cursors» que facilita molt la feina. Apliqueu el signe $\pm$ que correspongui segons el punt 1.
  4. Una vegada mesurat el retràs o avançament en segons, el càlcul del desfasament entre els senyals és una simple proporció, ja que el desfasament és a 360° com la diferència temporal és a un període del senyal:

$$\frac{\Delta\theta}{360^\circ} = \frac{\pm\Delta t}{T} \implies \Delta\theta = 360^\circ \cdot f \cdot (\pm\Delta t).$$

Tot i que els oscil·logrames són molt intuïtius per comprendre l'evolució dinàmica del senyal, esdevenen poc pràctics quan s'han de realitzar operacions matemàtiques entre diversos senyals del mateix circuit.

Exemple 1.4

Considereu un circuit lineal amb entrada $v_g(t)$ i sortida $v_o(t)$ donades per l'oscil·lograma de la figura 1.7. Trobeu la freqüència dels senyals i l'amplificació i desfasament introduïts pel circuit.

Solució

El període de $v_g(t)$ és 1 ms. Per tant, $f = 1\,\text{kHz}$. Com que el circuit és lineal, no modifica la freqüència de treball, així que el senyal de sortida també té una freqüència d'1 kHz. L'amplificació del circuit es calcula directament veient que $V_g = 1{,}5\,\text{V}$ i $V_o = 1\,\text{V}$:

$$|H(\text{j}2\pi 1000)| = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}67.$$

Finalment, per calcular el desfasament hem de tenir en compte els quatre passos anteriors:

1. La sortida està endarrerida respecte de l'entrada, per tant el desfasament és negatiu.
2. La dada que tenim és el pas per zero de la sortida, a 1,375 ms. Com que l'entrada no està desfasada, el seu pas per zero és a 1,25 ms.
3. L'increment temporal és $\Delta t = -0{,}125\,\text{ms}$.
4. El desfasament en graus és $\Delta\theta = 360° \cdot 1\,\text{kHz} \cdot (-0{,}125\,\text{ms}) = 45°$.

1.6.2 Diagrama fasorial

Un diagrama fasorial és la representació geomètrica dels senyals en forma de fasors al pla complex. Com que un fasor és un nombre complex que conté de manera compacta la informació de l'amplitud i la fase d'un senyal sinusoidal (vegeu la secció 1.1), el diagrama permet visualitzar gràficament les relacions de magnitud i els desfasaments entre les diferents tensions i corrents d'un circuit.

Per a un fasor $\mathbf{v} = V\text{e}^{\text{j}\theta} = V\angle\theta$ representat al pla complex:

- L'eix horitzontal correspon a la part real, $\Re[\mathbf{v}]$.
- L'eix vertical correspon a la part imaginària, $\Im[\mathbf{v}]$.
- La longitud del vector (el seu mòdul) correspon a l'amplitud màxima V.
- L'orientació angular (l'argument del nombre complex), mesurada respecte a l'eix real positiu en sentit antihorari, representa la fase inicial θ del senyal.

Cal destacar que aquesta representació només té sentit per a senyals a la mateixa freqüència, com ara l'entrada i la sortida d'un circuit lineal. Això ens permet estudiar les seves posicions relatives de forma estàtica i comparar-ne fàcilment les relacions magnitud-fase.

Tanmateix, el diagrama fasorial no té sentit per representar diversos senyals amb freqüències diferents. En aquest cas, els vectors girarien a velocitats diferents i les relacions geomètriques entre ells canviarien a cada instant de temps. Per a aquests casos en què coexisteixen múltiples freqüències, es recorre a la representació en el domini de la freqüència anomenada *espectre*, que s'estudiarà més endavant.

A la figura 1.8 es representen fasorialment els mateixos senyals sinusoidals que a l'oscil·lograma de la figura 1.7.

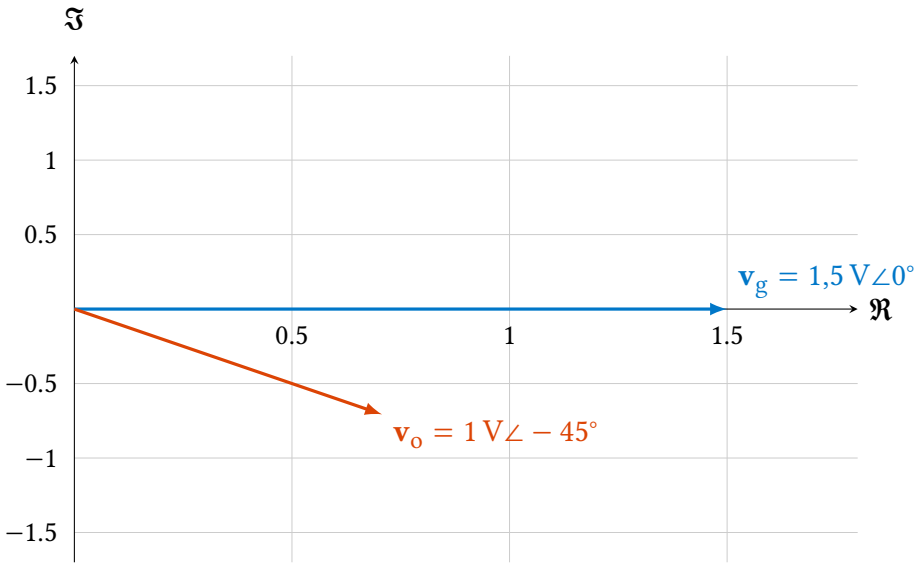


Figura 1.8: Diagrama fasorial amb dos senyals sinusoidals de diferent amplitud i fase.

Exemple 1.5

Considereu un circuit lineal amb entrada $v_g(t)$ i sortida $v_o(t)$. Si l'entrada és un senyal sinusoidal de freqüència 100 kHz, trobeu l'amplificació i el desfasament que introdueix el circuit a partir del diagrama fasorial de la figura 1.8.

Solució

A partir del diagrama fasorial, podem extreure directament els fasors en forma polar per a cadascun dels senyals del circuit:

- Fasor d'entrada: $\mathbf{v}_g = 1{,}5\,\mathrm{V}\angle 0°$.
- Fasor de sortida: $\mathbf{v}_o = 1\,\mathrm{V}\angle -45°$.

La funció de transferència del circuit a la freqüència de treball ($f_0 = 100\,\mathrm{kHz}$) es defineix com la relació entre el fasor de sortida i el fasor d'entrada:

$$H(\mathrm{j}\omega_0) = \frac{\mathbf{v}_o}{\mathbf{v}_g} = \frac{1\,\mathrm{V}\angle -45°}{1{,}5\,\mathrm{V}\angle 0°}$$

A l'hora de operar amb fasors en forma polar, dividim els seus mòduls i restem els seus angles:

- Amplificació: $|H(\mathrm{j}\omega_0)| = 0{,}67$.
- Desfasament: $\measuredangle H(\mathrm{j}\omega_0) = 45°$.

1.7 Resposta d'un circuit excitat a més d'una freqüència

Suposem ara que l'entrada és una combinació lineal de senyals sinusoidals. És a dir,

$$e(t) = \sum_k \beta_k \cos(\omega_k t + \theta_k) = \sum_k e_k(t). \tag{1.7}$$

La seva representació analítica s'obté afegint-hi la part imaginària i aplicant la fórmula d'Euler:

$$a_e(t) = \sum_k \beta_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_k} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k t} = \sum_k \mathbf{e}_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k t},$$

on $\mathbf{e}_k$ és el fasor del senyal k-èssim. Com que cada fasor està associat a una freqüència diferent no podem operar-los entre ells ni representar-los en un diagrama fasorial. Més endavant veurem una forma alternativa de representar aquest tipus de senyals, però abans ens centrarem en calcular la resposta d'un circuit excitat per un senyal com el de l'equació (1.7).

Sabem que la resposta a una única sinusoide, $e_k(t)$, és $r_k(t) = \beta_k |H(\mathrm{j}\omega_k)| \cos(\omega_k t + \theta_k + \measuredangle H(\mathrm{j}\omega_k))$. Aleshores, aplicant el principi de superposició obtenim:

$$r(t) = \sum_k r_k(t) = \sum_k \beta_k |H(\mathrm{j}\omega_k)| \cos(\omega_k t + \theta_k + \measuredangle H(\mathrm{j}\omega_k)).$$

Com no podia ser d'altra manera, la resposta també és una combinació lineal de senyals sinusoidals. Tot i així, és important destacar que el circuit afecta d'una manera diferent a cada freqüència. És a dir, $H(\mathrm{j}\omega)$ varia amb ω.

1.7.1 Espectre freqüencial

Quan un senyal està constituït per una combinació lineal de diverses funcions sinusoidals de diferents freqüències, l'anàlisi en el domini del temps (com l'oscil·lograma) pot resultar complexa i poc intuïtiva. Per aquest motiu, es recorre a la seva representació espectral o *espectre freqüencial*.

L'espectre freqüencial és una representació gràfica que mostra l'amplitud i la fase de cada component sinusoidal en funció de la seva freqüència. Es divideix en dues gràfiques:

- **Espectre d'amplitud:** representa els mòduls de cada component freqüencial.
- **Espectre de fase:** mostra el desfasament inicial de cada component respecte a una referència determinada.

Com que cada sinusoide oscil·la a només una freqüència determinada, cadascuna d'elles es correspon amb una sola línia espectral (espectre discret) tant en amplitud com en fase.

A més a més, com que el senyal de referència és el cosinus, suposarem que la fase de $\cos(\omega t)$ és zero.[2] De fet, si considerem $f = 0$, obtenim un senyal de CC de valor constant positiu, que es correspon amb una fase nul·la.

D'altra banda, utilitzant la identitat trigonomètrica del cosinus de la diferència:

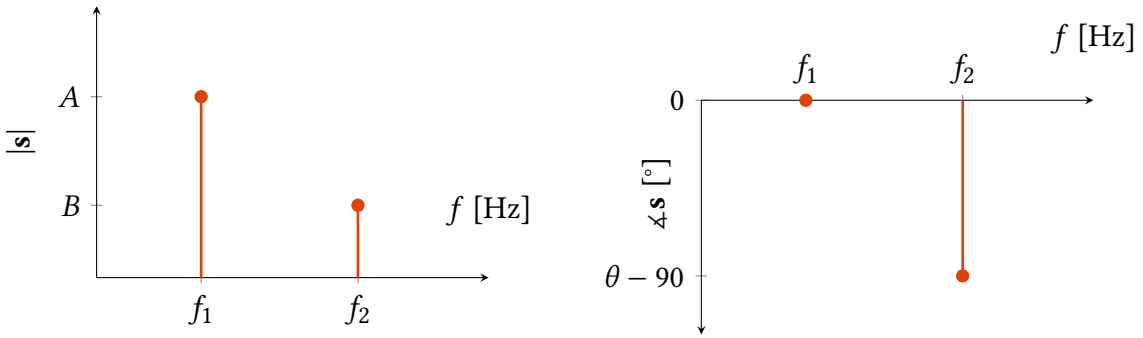
$$\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\omega t)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\omega t).$$

Així doncs, s'observa que el senyal $\sin(\omega t)$ es correspon amb un cosinus retardat un quart de cicle i, per tant, té una fase de $-\pi/2$ rad.

Per il·lustrar aquest comportament, a la figura 1.9 es representen els espectres d'amplitud i de fase del senyal

$$s(t) = A \cdot \cos(2\pi f_1 t) + B \cdot \sin(2\pi f_2 t + \theta).$$

[2] Aquest raonament es pot formalitzar analíticament a partir del desenvolupament en Sèrie de Fourier.



(a) Espectre d'amplitud.

(b) Espectre de fase.

Figura 1.9: Espectre freqüencial del senyal $s(t)$.

1.8 Resposta d'un circuit a senyals periòdics

A continuació, suposarem que el circuit està excitat per un senyal periòdic qualsevol. El teorema de Fourier ens diu que qualsevol senyal periòdic es pot expressar com una combinació lineal (generalment infinita) de senyals sinusoidals.

Així doncs, gràcies al principi de superposició, ens trobem exactament en el cas descrit a la secció 1.7: podem descompondre l'entrada, calcular la resposta del circuit per a cada component freqüencial de manera independent i, finalment, sumar totes les respostes individuals. Per tant, l'únic que ens resta per saber és com trobar la representació en *sèrie de Fourier* d'un senyal periòdic.

A l'apèndix A s'hi inclou una explicació detallada de les sèries de Fourier, però pel que fa a la seva aplicació als circuits lineals és suficient saber que, donat un senyal $x(t)$ de període $T = 1/f$, podem expressar la seva sèrie de Fourier harmònica com:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k\geq 1} A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \varphi_k\right), \tag{1.8}$$

on A_k i φ_k són els coeficients d'amplitud i fase donats per

$$A_0 = c_0, \quad A_k = 2|c_k|, \quad \varphi_k = \measuredangle c_k, \tag{1.9}$$

amb

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kt/T}\, \mathrm{d}t. \tag{1.10}$$

A continuació fem un exemple de com calcular els coeficients de la sèrie de Fourier harmònica.

Exemple 1.6

Trobeu la sèrie de Fourier circuital d'un senyal, $x(t)$, quadrat amb valor mig nul, amplitud A i període $T = 1$ s.

Solució

La forma més senzilla de calcular A_k i φ_k és trobar els coeficients c_k i llavors fer servir

Exemple 1.6 (continuació)

l'equació (1.9):

$$c_k = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kt}\,\mathrm{d}t - \int_{1/2}^1 A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & \text{k parell,} \\ \frac{2A}{\mathrm{j}k\pi}, & \text{k imparell.} \end{cases}$$

Per tant, el coeficients circuitals són

$$A_k = \begin{cases} 0, & \text{k parell,} \\ \frac{4A}{k\pi}, & \text{k imparell,} \end{cases}$$

$$\varphi_k = \begin{cases} 0, & \text{k parell,} \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{k imparell,} \end{cases}$$

i la sèrie de Fourier és

$$x(t) = \sum_{k\geq 1} \frac{4A}{\pi(2k-1)} \cos\left(2\pi(2k-1)t - \frac{\pi}{2}\right).$$

1.8.1 Representació espectral de senyals periòdics

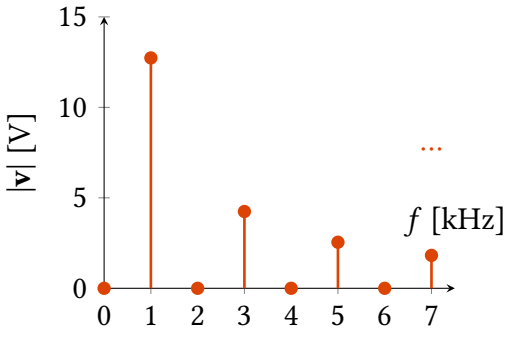
Si parem atenció a l'equació (1.8) podem observar que cada cosinus oscil·la a una freqüència $f_k = 2\pi k/T = kf$. En particular, el terme A_0 correspon a una freqüència zero, és a dir, la component de CC del senyal.

Sabent això, podem aplicar el que hem vist anteriorment a la secció 1.7.1 i representar l'espectre d'un senyal periòdic, tenint en compte que el nombre d'harmònics és infinit. Ho veurem amb un exemple.

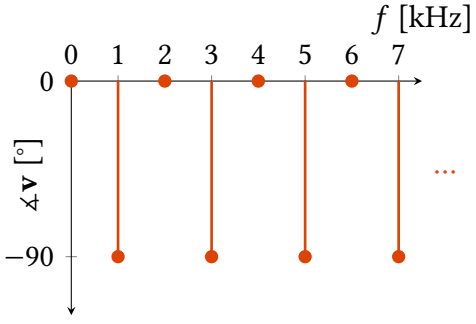
Exemple 1.7

Dibuixeu els espectres d'amplitud i fase d'un senyal, $v(t)$, quadrat amb valor mig nul, amplitud $A = 10\,\mathrm{V}$ i període $T = 1\,\mathrm{ms}$.

Solució



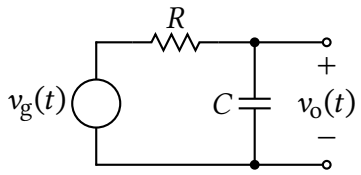
(c) Espectre d'amplitud.



(d) Espectre de fase.

1.9 Introducció a la resposta freqüencial

A la secció 1.7 hem vist que, si $H(\mathrm{j}\omega)$ no és constant, aleshores el comportament del circuit varia amb la freqüència. Per exemple, suposem que tenim un circuit com el de la figura 1.10, on $v_\mathrm{g}(t) = \cos(2\pi 10t) + \cos(2\pi 100.000t)$, $R = 16\,\mathrm{k\Omega}$ i $C = 10\,\mathrm{nF}$.



$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{6250}{s + 6250}.$$

Figura 1.10: Exemple de circuit RC i la seva funció de xarxa.

Anomenant $\omega_1 = 20\pi$ rad/s i $\omega_2 = 200.000\pi$ rad/s, la sortida en RPS és de la forma:

$$v_\mathrm{o}(t) = |H(\mathrm{j}\omega_1)| \cos(\omega_1 t + \measuredangle H(\mathrm{j}\omega_1)) + |H(\mathrm{j}\omega_2)| \cos(\omega_2 t + \measuredangle H(\mathrm{j}\omega_2)).$$

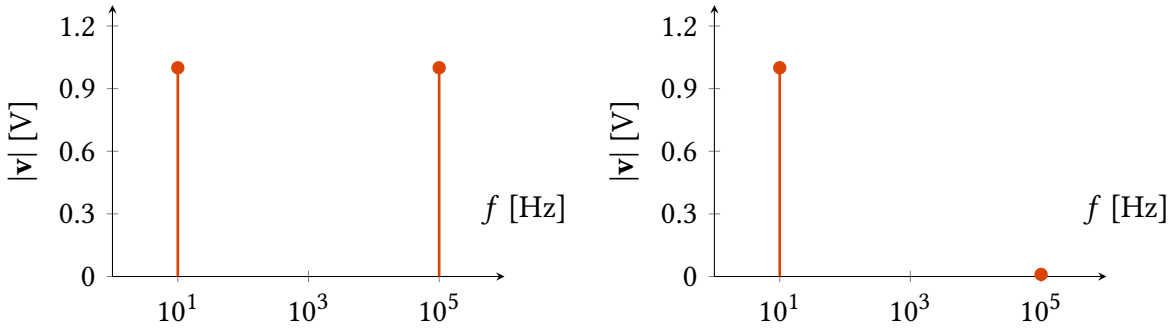
Avaluant $s = \mathrm{j}\omega_1$ i $s = \mathrm{j}\omega_2$ a la funció de xarxa obtenim:

$$|H(\mathrm{j}\omega_1)| \approx 1, \quad \measuredangle H(\mathrm{j}\omega_1) = -0{,}57° \approx 0°,$$
$$|H(\mathrm{j}\omega_2)| = 0{,}01, \quad \measuredangle H(\mathrm{j}\omega_2) = -89{,}42° \approx -90°.$$

Per tant,

$$v_\mathrm{o}(t) = \cos(2\pi 10t) + 0{,}01 \cos(2\pi 100.000t + \pi/2).$$

És a dir, el senyal de 10 Hz pràcticament s'ha vist inalterat pel circuit, mentre que el de 100 kHz s'ha vist atenuat dos ordres de magnitud i a més a més ha patit un desfasament de $-90°$. Els espectres d'amplitud de l'entrada i de la sortida es mostren a la figura 1.11, amb l'eix d'abscisses en escala logarítmica.



(a) Espectre d'entrada.

(b) Espectre de sortida.

Figura 1.11: Espectre d'amplitud d'entrada i de sortida del circuit de la figura 1.10.

L'exemple anterior ens mostra, un cop més, que $H(\mathrm{j}\omega)$ no és constant amb ω. De fet, per $\omega = 0$, $|H(\mathrm{j}\omega)| = 1$, mentre que $\lim_{\omega\to\infty} |H(\mathrm{j}\omega)| = 0$. És a dir, el circuit "deixa passar" les freqüències baixes mentre que atenua les altes.

Per veure de forma precisa aquest comportament, podem representar gràficament la resposta en freqüència, $H(\mathrm{j}\omega)$. Tanmateix, en tractar-se d'una funció complexa, cal representar-la mitjançant dues corbes: o bé part real i part imaginària, o bé mòdul i fase. A continuació estudiarem la segona caracterització, ja que ofereix una interpretació física molt més directa i intuïtiva de l'efecte del circuit sobre el senyal.

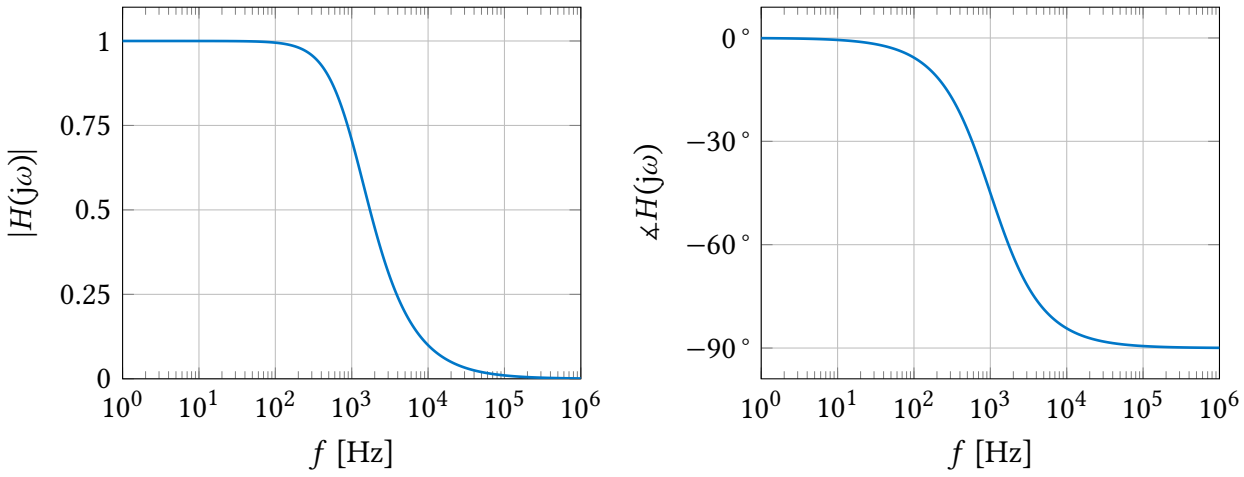
1.9.1 Corbes d'amplificació i desfasament

La representació de la resposta en freqüència mitjançant el mòdul i l'angle desglossa l'efecte del circuit sobre qualsevol component sinusoidal de l'entrada. Com que el circuit és lineal, només en varien l'amplitud i la fase, mentre que la freqüència es manté invariant, com hem vist a la secció 1.2.

A la figura 1.12 es mostren aquestes dues corbes característiques per al cas del circuit RC de la figura 1.10. Igual que en els espectres presentats a la secció 1.9, l'eix d'abscisses sovint es representa en escala logarítmica, ja que permet visualitzar còmodament un rang de freqüències molt ampli.

- **Corba d'amplificació:** representa el mòdul de la funció de xarxa, $|H(\mathrm{j}\omega)|$, en funció de la freqüència. Aquest gràfic ens indica el factor d'escala (positiu) que patirà l'amplitud del senyal d'entrada en travessar el circuit. En el cas del circuit donat, s'observa clarament com el mòdul és màxim a freqüències baixes i disminueix cap a zero a mesura que augmenta la freqüència, atenuant el senyal.
- **Corba de desfasament:** representa l'angle de la funció de xarxa, $\measuredangle H(\mathrm{j}\omega)$, en funció de la freqüència. Aquesta corba mostra el desfasament que s'introdueix entre el senyal de sortida i el d'entrada. Per al circuit RC de l'exemple, s'aprecia que el desfasament és pràcticament nul a freqüències molt baixes i progressa cap a valors negatius a alta freqüència, tendint al límit de $-90°$.

Així doncs, aquest parell de gràfiques ens permet determinar de forma simple la resposta del circuit davant qualsevol sinusoide de freqüència coneguda, simplement "llegint" el valor del mòdul i de la fase sobre les corbes.



(a) Corba d'amplificació.

(b) Corba de desfasament.

Figura 1.12: Resposta freqüencial del circuit RC de la figura 1.10.

1.10 Filtratge

Analitzant circuits en RPS hem observat que el senyal de sortida conté les mateixes freqüències que el de l'entrada, però amb amplituds i fases diferents. El procés pel qual un sistema modifica el contingut freqüencial d'un senyal amplificant algunes freqüències i atenuant-ne d'altres s'anomena *filtratge*. El sistema que efectua aquest filtratge s'anomena *filtre*.

En teoria del senyal, és habitual representar els filtres com a un pols rectangular que val zero a totes les freqüències excepte a la banda d'interès, on hi té un valor constant. Aquest filtre s'anomena *filtre ideal* i no és possible d'implementar a la pràctica, però resulta útil per la seva simplicitat.

A continuació estudiarem diferents tipus de filtres analògics i algunes de les seves possibles implementacions mitjançant circuits lineals.

1.10.1 Tipus de filtres

Tenint en compte els seus components, la naturalesa dels senyals amb què operen, la seva resposta en freqüència i el mètode de disseny emprat, els filtres es poden classificar en diversos grups.

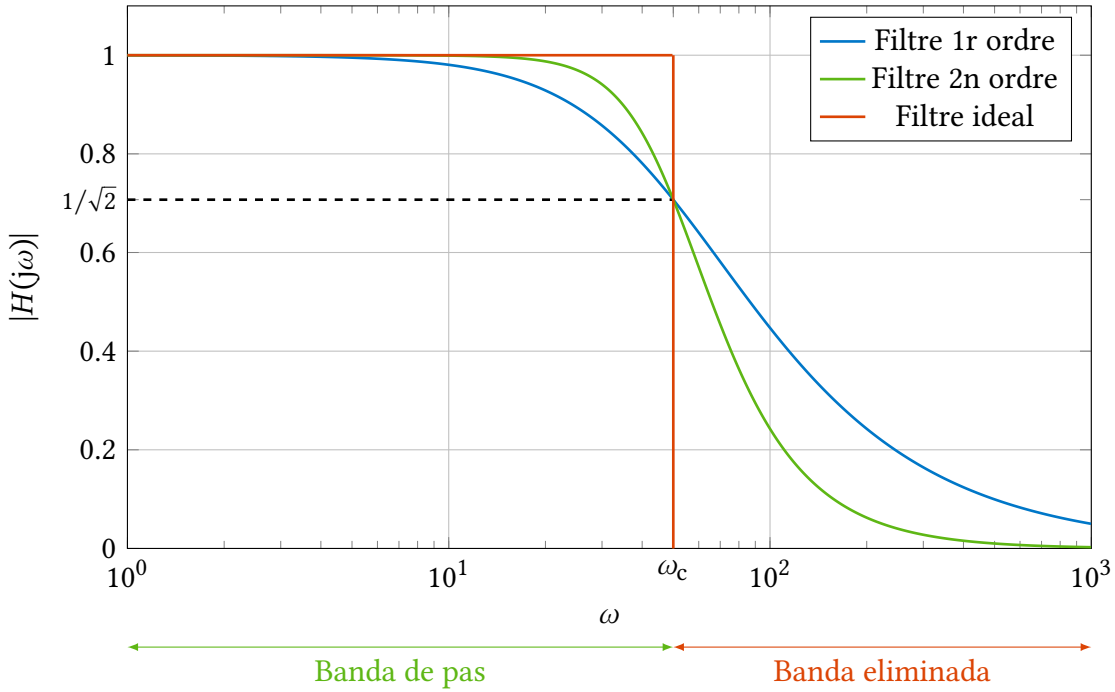


Figura 1.13: Resposta freqüencial d'un filtre passabaix.

Segons la resposta freqüencial

- Filtre passabaix: permet el pas de les freqüències més baixes i atenua les freqüències més altes.
- Filtre passaalt: permet el pas de freqüències altes i atenua les freqüències baixes.
- Filtre passatot: permet el pas de totes les freqüències, però en modifica la fase.
- Filtre passabanda: permet el pas de les components freqüencials entre dos llindars.
- Filtre eliminabanda: atenua les components freqüencials entre dos llindars.

Segons la implementació

- Filtre passiu: està format únicament per dispositius passius com resistors, inductors i capacitors. No necessita alimentació externa.

- Filtre actiu: combina elements passius (resistors i capacitors) amb elements actius (típicament AOs). Necessita alimentació externa i pot ser inestable.

Els filtres actius tenen certs avantatges respecte dels passius:

1. Facilitat de connectar cèl·lules en cascada (no hi ha efectes de càrrega).
2. Facilitat d'ajustar la impedància d'entrada.
3. Es poden implementar sense inductors i, per tant, el filtre té menys pèrdues.
4. Permeten l'amplificació de bandes freqüencials.
5. Es poden aconseguir dissenys de segon ordre on els paràmetres del filtre es poden ajustar de manera independent amb potenciòmetres diferents.

Per contra, també presenten certs inconvenients:

1. Necessiten alimentació i per tant consumeixen energia.
2. Poden saturar-se o ser inestables.
3. L'amplada de banda i el marge de freqüències útils és més baix.

Segons l'ordre

Els filtres analògics també es classifiquen en filtres de primer ordre, segon ordre, etc. segons l'ordre del circuit utilitzat per a implementar el filtre.[3] Com més gran sigui l'ordre d'un circuit, més semblant és la seva resposta freqüencial a la del filtre ideal, tal i com es mostra a la figura 1.13 per a un filtre passabaix.

1.10.2 Paràmetres d'un filtre

A partir de la figura 1.13 podem deduir que la resposta freqüencial de qualsevol tipus de filtre presenta dues regions:

- **Banda de pas:** banda de freqüències que el filtre no atenua. El filtre passabaix, passaalt i passabanda només tenen una banda de pas, mentre que l'eliminabanda en té dues.
- **Banda eliminada o atenuada:** banda de freqüències que el filtre elimina. El filtre passabaix, passaalt i de banda eliminada només tenen una banda atenuada, mentre que el filtre passabanda en té dues.

La frontera entre les dues bandes s'anomena *freqüència de tall*, i la denotem per ω_c (en rad/s) o f_c (en Hz).

Tots tres paràmetres es representen gràficament a la figura 1.13, sobre la resposta freqüencial d'un filtre passabaix. En el cas d'un filtre ideal, la definició de freqüència de tall és evident: aquella freqüència on l'amplificació passa d'un valor constant (diferent de zero) a zero. Pels filtres reals, la freqüència de tall habitualment es defineix com aquella freqüència a la qual l'amplificació és la màxima entre $\sqrt{2}$. Des d'un punt de vista físic, una amplificació de $1/\sqrt{2}$ equival a reduir la potència del senyal de sortida a la meitat respecte de l'entrada.

[3] Recordeu que l'ordre d'un circuit es defineix com el grau del denominador de la seva funció de xarxa. Aquest valor acostuma a coincidir amb el nombre d'elements dinàmics (inductors i capacitors) del circuit.

1.10.3 Filtres de primer ordre

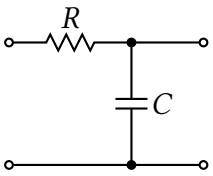
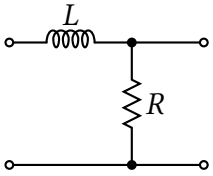
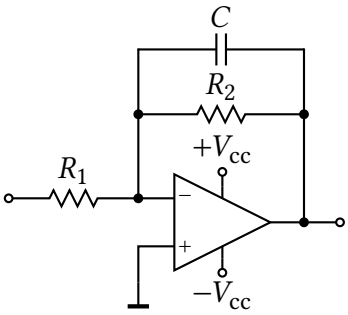
El primer tipus de filtres que estudiarem són els de primer ordre. Amb un sol element dinàmic és possible implementar filtres passabaix, passaalt i passatot, però no passabanda o eliminabanda, que han de ser com a mínim de segon ordre.

Abans de començar, convé recordar que qualsevol sistema de primer ordre té com a funció de xarxa:

$$H(s) = \frac{N(s)}{s+p}.$$

Filtre passabaix

El filtre passabaix permet el pas de freqüències baixes però no d'altes, ja que té amplificació diferent de zero per a freqüències baixes i amplificació asimptòticament zero per a freqüències altes.

Filtre passabaix RC	Filtre passabaix RL	Filtre passabaix actiu
		
$\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$	$\frac{\frac{R}{L}}{s+\frac{R}{L}}$	$\frac{-\frac{1}{R_1C}}{s+\frac{1}{R_2C}}$

Taula 1.3: Implementacions de filtres passabaix de primer ordre.

Per implementar un filtre passabaix de primer ordre considerarem les tres estructures de la taula 1.3. Les funcions de xarxa s'obtenen a partir de l'anàlisi circuital i es deixen com a exercici pel lector.

Podem observar que en tots tres casos la funció de xarxa és de la forma:

$$H(s) = \frac{k \cdot p}{s+p}, \quad H(0) = k.$$

Per tant, en RPS,

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{p \cdot H(0)}{\mathrm{j}\omega + p}.$$

Prenent-ne el mòdul i la fase,

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{p \cdot |H(0)|}{\sqrt{\omega^2 + p^2}}, \tag{1.11}$$

$$\measuredangle H(\mathrm{j}\omega) = \measuredangle H(0) - \arctan\left(\frac{\omega}{p}\right). \tag{1.12}$$

Si ara calculem la derivada de (1.11),

$$\frac{\mathrm{d}|H(\mathrm{j}\omega)|}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{p \cdot |H(0)| \cdot \omega}{(\omega^2 + p^2)^{3/2}},$$

observem que:

1. És estrictament negativa per a $\omega > 0$.
2. És zero per a $\omega = 0$.

Per tant, l'amplificació $|H(\mathrm{j}\omega)|$ és decreixent, assolint el seu valor màxim a l'origen: $|H|_{\max} = |H(0)|$.

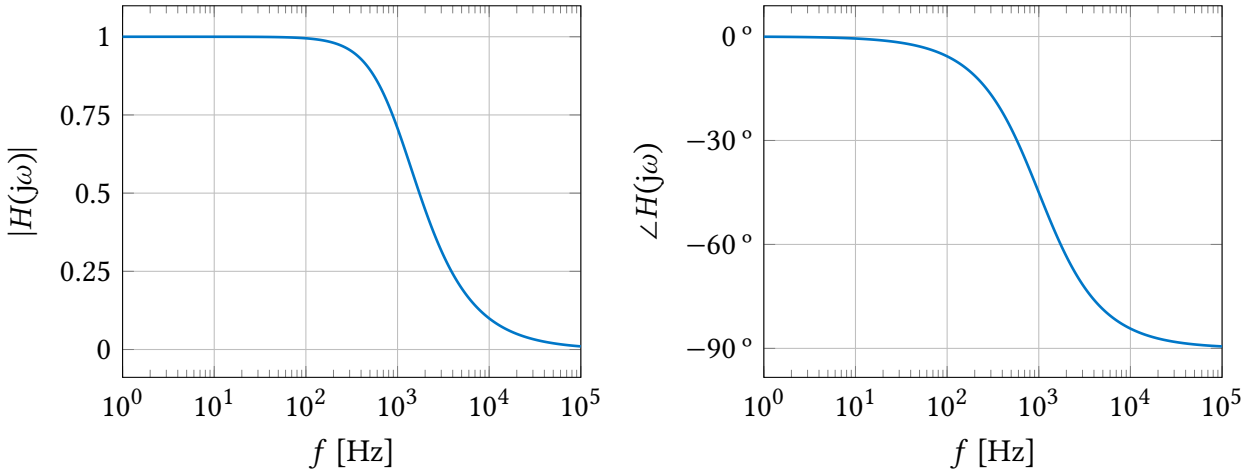
Aleshores, a la freqüència de tall,

$$|H(\mathrm{j}\omega_\mathrm{c})| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}} = \frac{p \cdot |H(0)|}{\sqrt{\omega_\mathrm{c}^2 + p^2}} \implies p = \omega_\mathrm{c}.$$

Així doncs, anomenant $f_\mathrm{c} = \frac{\omega_\mathrm{c}}{2\pi}$, podem escriure les equacions (1.11) i (1.12) com:

$$\boxed{\begin{aligned} |H(\mathrm{j}\omega)| &= \frac{|H(0)|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right)^2}} = \frac{|H(0)|}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_\mathrm{c}}\right)^2}} \\ \measuredangle H(\mathrm{j}\omega) &= \measuredangle H(0) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right) = \measuredangle H(0) - \arctan\left(\frac{f}{f_\mathrm{c}}\right) \end{aligned}}$$

Aquestes expressions es representen gràficament a la figura 1.14 per a $f_\mathrm{c} = 1\,\mathrm{kHz}$ i $H(0) = 1$.



(a) Corba d'amplificació.

(b) Corba de desfasament.

Figura 1.14: Corbes d'amplificació i desfasament d'un filtre passabaix amb $f_\mathrm{c} = 1\,\mathrm{kHz}$ i $H(0) = 1$.

A més a més, es poden utilitzar per calcular fàcilment el desfasament a la freqüència de tall i a

freqüències arbitràriament altes:

$$\measuredangle H(\mathrm{j}\omega_\mathrm{c}) = \measuredangle H(0) - \arctan(1) = \measuredangle H(0) - \frac{\pi}{4},$$
$$\lim_{\omega\to\infty} \measuredangle H(\mathrm{j}\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \measuredangle H(0) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right) = \measuredangle H(0) - \frac{\pi}{2}.$$

A la taula 1.4 s'hi resumeixen els valors d'amplificació i desfasament més rellevants.

Freqüència	Amplificació	Desfasament
$\omega = 0$	$\lvert H(0)\rvert = \lvert H\rvert_\mathrm{max}$	$\measuredangle H(0)$
$\omega = \omega_\mathrm{c} = p$	$\lvert H(0)\rvert/\sqrt{2}$	$\measuredangle H(0) - \pi/4$
$\omega \to \infty$	0	$\measuredangle H(0) - \pi/2$

Taula 1.4: Resum de la resposta freqüencial d'un filtre passabaix de primer ordre.

Exemple 1.8

Dissenyeu un filtre passabaix de primer ordre amb freqüència de tall 1 kHz, amplificació en contínua igual a 10 i amb impedància entrada de, com a mínim, 10 kΩ. Digueu a quina freqüència l'amplificació val 1.

Solució

Com que ens cal una amplificació més gran que 1 el filtre ha de ser actiu. En concret podem fer servir el filtre actiu de la taula 1.3. La funció de xarxa és:

$$H(s) = -\frac{\frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{R_2 C}} = \frac{H(0)}{s + \omega_\mathrm{c}},$$

i s'ha de satisfer $H(0) = -R_2/R_1 = -10$, $R_1 \geq 10\,\mathrm{k\Omega}$ i $\omega_\mathrm{c} = \frac{1}{R_2 C} = 2\pi 10^3$ rad/s. Escollint $C = 1\,\mathrm{nF}$, obtenim que $R_2 = 159\,\mathrm{k\Omega}$ i $R_1 = 15{,}9\,\mathrm{k\Omega}$. Finalment, per trobar a quina freqüència l'amplificació és igual a 1 podem utilitzar l'expressió:

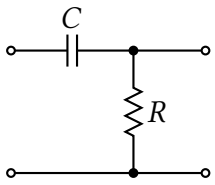
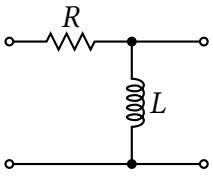
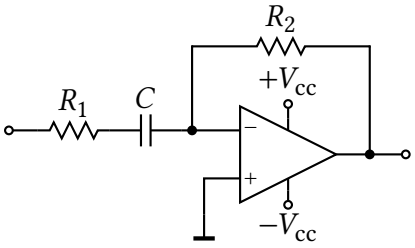
$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_\mathrm{c}}\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{1}\right)^2}} = 1 \implies f^2 + 1 = 100 \implies f = 9{,}95\,\mathrm{kHz}.$$

Filtre passaalt

El filtre passaalt té un comportament complementari al del passabaix: permet el pas de les freqüències altes però no de les baixes, ja que té una amplificació nul·la a freqüència zero. En termes de la funció de xarxa, això requereix un zero a l'origen. Si a més a més desitgem que l'amplificació sigui monòtona com amb el filtre passabaix, la funció de xarxa ha de ser de la forma:

$$H(s) = \frac{k \cdot s}{s + p}, \quad H(\infty) = k. \tag{1.13}$$

A continuació farem un desenvolupament paral·lel al que hem fet anteriorment pel filtre passabaix, però centrant-nos en les tres estructures de la taula 1.5.

Filtre passaalt RC	Filtre passaalt RL	Filtre passaalt actiu
		
$\frac{s}{s+\frac{1}{RC}}$	$\frac{s}{s+\frac{R}{L}}$	$\frac{-\frac{R_2}{R_1}s}{s+\frac{1}{R_1C}}$

Taula 1.5: Implementacions de filtres passaalt de primer ordre.

Com podem observar, les funcions de xarxa d'aquests circuits presenten l'estructura donada a (1.13). En RPS,

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathrm{j}\omega \cdot H(\infty)}{\mathrm{j}\omega + p}.$$

Si en calculem el mòdul i la fase obtenim les expressions:

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{\omega \cdot |H(\infty)|}{\sqrt{\omega^2 + p^2}}, \tag{1.14}$$

$$\measuredangle H(\mathrm{j}\omega) = \measuredangle H(\infty) - \arctan\left(\frac{\omega}{p}\right) + \frac{\pi}{2}. \tag{1.15}$$

Si analitzem $|H(\mathrm{j}\omega)|$ com hem fet amb el filtre passabaix podem observar que:

1. L'amplificació és monòtonament creixent amb ω. Per tant, $|H|_{\max} = |H(\infty)|$.
2. La freqüència de tall correspon a $\omega_\mathrm{c} = p$: $|H(\mathrm{j}p)| = \frac{|H(\infty)|}{\sqrt{2}}$.

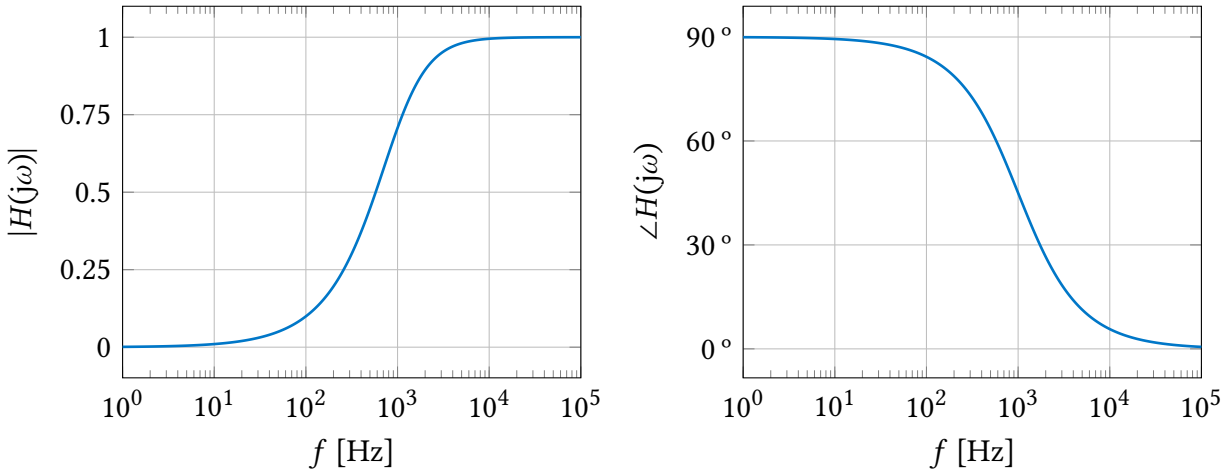
Aquestes observacions ens permeten escriure les expressions (1.14) i (1.15) com:

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{|H(\infty)|}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}\right)^2}} = \frac{|H(\infty)|}{\sqrt{1+\left(\frac{f_\mathrm{c}}{f}\right)^2}}$$

$$\measuredangle H(\mathrm{j}\omega) = \measuredangle H(\infty) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right) + \frac{\pi}{2} = \measuredangle H(\infty) - \arctan\left(\frac{f}{f_\mathrm{c}}\right) + \frac{\pi}{2}$$

La representació gràfica d'aquestes equacions per a $f_\mathrm{c} = 1\,\mathrm{kHz}$ i $H(\infty) = 1$ es mostra a la figura 1.15.

Finalment, a la taula 1.6 hi incloem els valors d'amplificació i desfasament més rellevants d'un filtre passaalt.



(a) Corba d'amplificació.

(b) Corba de desfasament.

Figura 1.15: Corbes d'amplificació i desfasament d'un filtre passaalt amb $f_c = 1$ kHz i $H(\infty) = 1$.

Freqüència	Amplificació	Desfasament
$\omega = 0$	0	$\measuredangle H(\infty) + \pi/2$
$\omega = \omega_c = p$	$\lvert H(\infty)\rvert/\sqrt{2}$	$\measuredangle H(\infty) + \pi/4$
$\omega \to \infty$	$\lvert H(\infty)\rvert = \lvert H\rvert_{\max}$	$\measuredangle H(\infty)$

Taula 1.6: Resum de la resposta freqüencial d'un filtre passaalt de primer ordre.

Filtre passatot

El darrer filtre de primer ordre que estudiarem és el passatot. Aquest tipus de filtre es caracteritza per deixar passar totes les freqüències amb la mateixa amplificació, de manera que no modifica l'amplitud del senyal. Tanmateix, sí que n'altera la fase, introduint desfasaments diferents segons la freqüència. Per aquest motiu, els filtres passatot s'utilitzen habitualment com a *equalitzadors de fase*: s'afegeixen en cascada amb un altre circuit per corregir-ne el desfasament sense alterar-ne l'amplificació.

Perquè un sistema de primer ordre tingui amplificació constant amb la freqüència, cal que el pol i el zero de la funció de xarxa tinguin el mateix mòdul. Això s'aconsegueix situant el zero al semiplà dret, just al reflex del pol respecte de l'eix imaginari:

$$H(s) = k \cdot \frac{p - s}{p + s}, \quad H(0) = k \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

D'aquesta manera, tant el numerador com el denominador tenen idèntic mòdul per a qualsevol $s = j\omega$, ja que $p - j\omega$ i $p + j\omega$ són conjugats:

$$|H(j\omega)| = |k| \cdot \frac{|p - j\omega|}{|p + j\omega|} = |k| \cdot \frac{\sqrt{p^2 + \omega^2}}{\sqrt{p^2 + \omega^2}} = |k|.$$

Per tant, l'amplificació del filtre passatot és constant i independent de la freqüència, tal com esperàvem.

Pel que fa a la fase, com que el numerador i el denominador són conjugats, els seus arguments són oposats, $\measuredangle(p - \mathrm{j}\omega) = -\measuredangle(p + \mathrm{j}\omega)$, de manera que:

$$\measuredangle H(\mathrm{j}\omega) = \measuredangle k + \measuredangle(p - \mathrm{j}\omega) - \measuredangle(p + \mathrm{j}\omega) = \measuredangle k - 2\arctan\left(\frac{\omega}{p}\right).$$

En aquest cas, definim ω_c com la freqüència on els senyals d'entrada i de sortida estan *en quadratura*. És a dir, quan presenten un desfasament de $\pm 90°$. Com que $\measuredangle k$ només pot ser 0 o π per ser $k \in \mathbb{R}$, un desfasament de $\pm 90°$ s'assoleix a $\omega = p$.

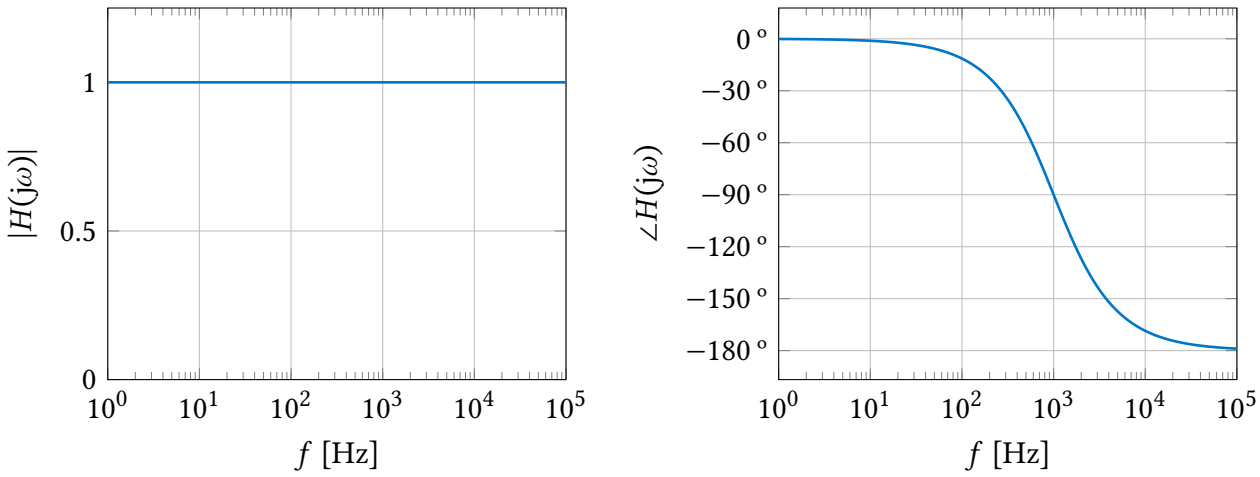
Les expressions d'amplificació i desfasament del filtre passatot de primer ordre queden:

$$\boxed{\begin{aligned} &|H(\mathrm{j}\omega)| = |k| = |H(0)| \\ &\measuredangle H(\mathrm{j}\omega) = \measuredangle H(0) - 2\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right) = \measuredangle H(0) - 2\arctan\left(\frac{f}{f_\mathrm{c}}\right) \end{aligned}} \tag{1.17}$$

Observeu que, com que l'arctangent és una funció monòtona creixent que va de 0 a $\pi/2$, el desfasament del filtre passatot decreix monòtonament des de $\measuredangle H(0)$ (a $\omega = 0$) fins a $\measuredangle H(0) - \pi$ (quan $\omega \to \infty$), passant per $\measuredangle H(0) - \pi/2$ exactament a $\omega = \omega_\mathrm{c}$. A la taula 1.7 es resumeixen aquests valors característics, i a la figura 1.16 se'n mostra la representació gràfica.

Freqüència	**Amplificació**	**Desfasament**
$\omega = 0$	$\lvert H(0)\rvert$	$\measuredangle H(0)$
$\omega = \omega_\mathrm{c} = p$	$\lvert H(0)\rvert$	$\measuredangle H(0) - \pi/2$
$\omega \to \infty$	$\lvert H(0)\rvert$	$\measuredangle H(0) - \pi$

Taula 1.7: Resum de la resposta freqüencial d'un filtre passatot de primer ordre.

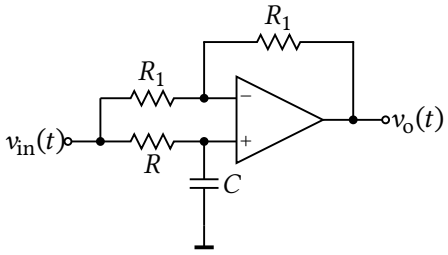
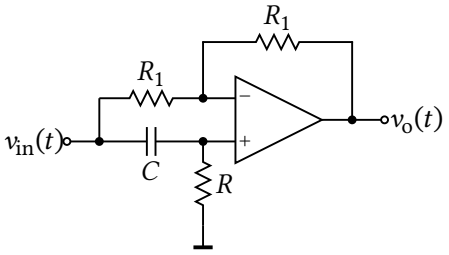


(a) Corba d'amplificació.

(b) Corba de desfasament.

Figura 1.16: Corbes d'amplificació i desfasament d'un filtre passatot amb $f_\mathrm{c} = 1\,\mathrm{kHz}$ i $H(0) = 1$.

A diferència dels filtres passabaix i passaalt, el filtre passatot no es pot implementar amb un circuit purament passiu de primer ordre, ja que cal un zero al semiplà dret. Habitualment, s'implementa amb un dels circuits actius donats a la taula 1.8, juntament amb les seves funcions de xarxa.

Filtre passatot (mitjançant passabaix)	Filtre passatot (mitjançant passaalt)
	
$-\dfrac{s-\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$	$\dfrac{s-\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$

Taula 1.8: Implementacions de filtres passatot de primer ordre.

Exemple 1.9

Un filtre passatot de primer ordre té $\omega_c = 1000\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ i $H(0) = 1$. Calculeu el desfasament que introdueix a $f = 1000\,\text{Hz}$.

Solució

Convertint la freqüència de tall a Hz, $f_c \approx 159\,\text{Hz}$. Aplicant l'equació (1.17):

$$\measuredangle H(\text{j}2\pi 1000) = 0 - 2\arctan\left(\frac{1000}{159}\right) = -161{,}9°.$$

Observeu que l'amplitud del senyal de sortida és idèntica a la de l'entrada, ja que $|H(\text{j}\omega)| = 1$ per a qualsevol freqüència.

1.10.4 Filtres de segon ordre

Primer de tot convé recordar quina expressió té la funció de xarxa d'un circuit de segon ordre:

$$H(s) = \frac{N(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

Aquesta funció té dos pols ubicats a $s = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$. Com que per processar un senyal (en aquest cas filtrar) cal que el circuit sigui estable, se satisfà $\zeta > 0$.

Filtre passabaix

A partir de l'anàlisi de primer ordre sabem que la funció de xarxa d'un filtre passabaix de segon ordre tampoc no pot tenir zeros. Així doncs ha de ser de la forma

$$H(s) = \frac{k \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

Si calculem l'amplificació i el desfasament associats a aquesta funció de xarxa obtenim:

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{|k| \cdot \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}},$$
$$\measuredangle H(\mathrm{j}\omega) = \measuredangle k - \arctan\left(\frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

D'entrada un voldria que el màxim d'amplificació es trobi a $\omega = 0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Com que el numerador no depèn d'ω, el màxim coincidirà amb el mínim del denominador o amb els punts fora del domini (denominador nul). Per trobar els extrems del denominador podem derivar-lo respecte d'ω i igualar-ho a zero:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2 = \omega(\omega^2 - \omega_0^2(1 - 2\zeta^2)) = 0.$$

Aquesta equació només té dues solucions positives que són:

$$\omega = 0,$$
$$\omega_\mathrm{r} = \omega_0\sqrt{1 - 2\zeta^2} \leq \omega_0.$$

Fixeu-vos que el màxim a ω_r depèn de ζ i val

$$|H(\mathrm{j}\omega_\mathrm{r})| = \frac{|k|}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

Assumint que el filtre és estable i per tant $\zeta > 0$, podem distingir tres casos:

- $0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$: hi ha un màxim $|H|_\mathrm{max} = |H(\mathrm{j}\omega_\mathrm{r})|$ a ω_r, anomenat *pic de ressonància*. Com que la funció de l'amplificació no és monòtona, el filtre pot presentar fins a dues freqüències de tall:

  $$\omega_{\mathrm{c},1} = \omega_0\sqrt{1 - 2\zeta^2 - 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \omega_{\mathrm{c},2} = \omega_0\sqrt{1 - 2\zeta^2 + 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

  La primera freqüència de tall, $\omega_{\mathrm{c},1} < \omega_\mathrm{r}$, només existeix si $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 0{,}38$.

- $\zeta > 1/\sqrt{2}$: la corba d'amplificació és monòtonament decreixent, amb amplificació màxima $|H|_\mathrm{max} = |H(0)|$ a $\omega = 0$. No hi ha pic de ressonància, i per tant hi ha una sola freqüència de tall:

  $$\omega_\mathrm{c} = \omega_0\sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{(2\zeta^2 - 1)^2 + 1}}.$$

- $\zeta = 1/\sqrt{2}$: és el cas límit on $\omega_\mathrm{r} = 0$. S'anomena *filtre de Butterworth* i la banda de pas és maximalment plana. És a dir, $|H(\mathrm{j}\omega)$ té $n = 2$ derivades nul·les a l'origen. El seu diagrama de pols/zeros presenta dos pols complexos conjugats amb mòdul ω_0 i fase $\pm 135°$ ($p_{1,2} = -\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \pm \mathrm{j}\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$). A més a més, es compleix $\omega_0 = \omega_\mathrm{c}$ i l'amplificació màxima és $|H|_\mathrm{max} = |H(0)|$ a $\omega = 0$.

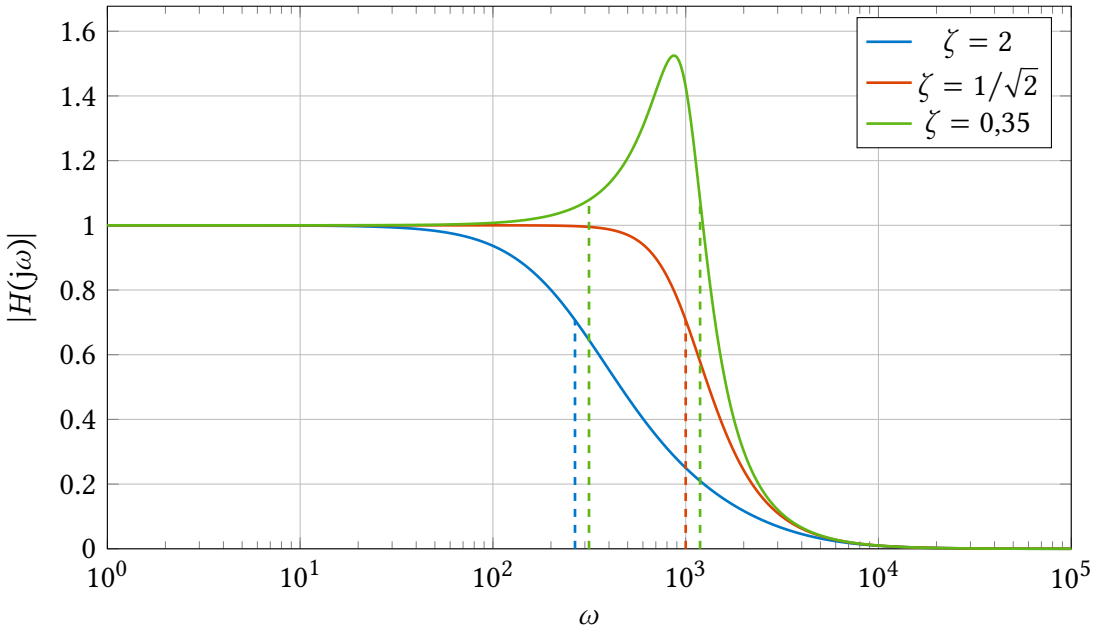


Figura 1.17: Corbes d'amplificació d'un filtre passabaix de segon ordre per a diferents valors de ζ. Les freqüències de tall s'indiquen amb línies discontínues.

A la figura 1.17 s'hi representen diverses corbes d'amplificació per a diferents valors de ζ, considerant $k = 1$ i $\omega_0 = 1\,\text{kHz}$.

Com podeu comprovar, el filtre de Butterworth és considerablement més senzill. A part de no tenir pic de ressonància, característica que compleixen els filtres amb $\zeta \geq 1/\sqrt{2}$, satisfà $\omega_0 = \omega_c$, de tal manera que la freqüència de tall apareix explícitament a la funció de xarxa:

$$H(s) = H(0)\frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}.$$

Les equacions d'amplificació i desfasament resultants són:

$$|H(j\omega)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}} = \frac{|H(0)|}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^4}}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \measuredangle k - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}\omega/\omega_c}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right) = \measuredangle k - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}f/f_c}{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}\right)$$

Exemple 1.10

Donat el circuit de la figura 1.18, raoneu quin tipus de filtre implementa, indiqueu-ne l'ordre i trobeu el valor de R per tal que implementi un filtre de Butterworth.

Exemple 1.10 (continuació)

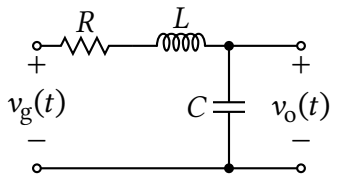


Figura 1.18: Filtre RLC.

Solució

A baixes freqüències, l'inductor es comporta com un curtcircuit i el capacitor com a un circuit obert, per tant $v_o(t) = v_g(t)$. En canvi, a freqüències altes, l'inductor es comporta com un circuit obert i el capacitor com un curtcircuit. Per tant, $v_o(t) = 0$. En conclusió, es tracta d'un filtre passabaix.
La funció de xarxa del circuit donat és

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}.$$

El denominador és un polinomi de segon grau, per tant el filtre és de segon ordre.
Per tal que implementi un filtre de Butterworth s'ha de satisfer $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Identificant termes veiem que $k = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ i $2\zeta\omega_0 = \frac{R}{L}$. Així doncs,

$$2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{L} \implies R = \sqrt{\frac{2L}{C}}.$$

Filtre passaalt

Seguint el mateix raonament que amb el filtre passaalt de primer ordre, sabem que l'amplificació d'un filtre passaalt de segon ordre ha de ser zero a l'origen i màxima quan $\omega \to \infty$.[4] Amb un zero a l'origen podem satisfer la primera condició, però aleshores l'amplificació també seria zero quan $\omega \to \infty$. Així doncs, per tenir amplificació nul·la en contínua i amplificació màxima a alta freqüència, la funció de xarxa ha de tenir un doble zero a l'origen:

$$H(s) = \frac{k \cdot s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad H(\infty) = k.$$

L'amplificació i el desfasament associats són:

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{|k| \cdot \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}},$$
$$\measuredangle H(\mathrm{j}\omega) = \measuredangle k + \pi - \arctan\left(\frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

[4] Cal tenir en compte que la presència de pics de ressonància pot provocar que l'amplificació màxima no sigui a infinit. Pararem atenció a aquest detall a continuació.

Podeu comprovar que $|H(0)| = 0$ i $|H(\infty)| = |k|$.

Convé notar que el filtre passaalt és, en certa manera, la imatge especular del passabaix. Efectivament, si repetim l'anàlisi feta pel passabaix, tenint en compte que ara el numerador també depèn d'ω, trobem que els màxims d'amplificació són a:

$$\begin{aligned} &\omega \to \infty, \\ &\omega_\mathrm{r} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \geq \omega_0. \end{aligned}$$

Fixeu-vos que el terme $\sqrt{1-2\zeta^2}$ també apareixia al filtre passabaix, però multiplicant a ω_0 en lloc de dividint-la.

El valor de l'amplificació a ω_r coincideix amb el del passabaix:

$$|H(\mathrm{j}\omega_\mathrm{r})| = \frac{|k|}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Assumint estabilitat ($\zeta > 0$), distingim els mateixos tres casos que amb el filtre passabaix, però ara referits al comportament a alta freqüència:

- $0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$: hi ha un *pic de ressonància* a ω_r, on $|H|_\mathrm{max} = |H(\mathrm{j}\omega_\mathrm{r})|$. Igual que amb el passabaix, poden existir fins a dues freqüències de tall, ara donades per les inverses especulars de les del cas passabaix:

  $$\omega_{\mathrm{c},1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\zeta^2+2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad \omega_{\mathrm{c},2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\zeta^2-2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}.$$

  La segona freqüència de tall, $\omega_{\mathrm{c},2} > \omega_\mathrm{r}$, només existeix si $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 0{,}38$.

- $\zeta > 1/\sqrt{2}$: l'amplificació creix monòtonament amb ω, sense pic de ressonància, i $|H|_\mathrm{max} = |H(\infty)|$. Hi ha una única freqüència de tall:

  $$\omega_\mathrm{c} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{(2\zeta^2-1)^2+1}}}.$$

- $\zeta = 1/\sqrt{2}$: cas límit sense pic de ressonància ($\omega_\mathrm{r} \to \infty$), també anomenat *filtre de Butterworth*. La banda de pas (a alta freqüència) és maximalment plana i, com en el cas passabaix, es compleix $\omega_0 = \omega_\mathrm{c}$.

Centrant-nos en el cas de Butterworth, la funció de xarxa és:

$$H(s) = H(\infty)\frac{s^2}{s^2+\sqrt{2}\omega_\mathrm{c}s+\omega_\mathrm{c}^2}.$$

Les corresponents expressions d'amplificació i desfasament, escrites de manera anàloga a les

del passabaix, són:

$$\begin{aligned} |H(\mathrm{j}\omega)| &= \frac{|H(\infty)|}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_\mathrm{c}}{\omega}\right)^4}} = \frac{|H(\infty)|}{\sqrt{1+\left(\frac{f_\mathrm{c}}{f}\right)^4}} \\ \measuredangle H(\mathrm{j}\omega) &= \measuredangle k + \pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}\omega/\omega_\mathrm{c}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}\right)^2}\right) = \measuredangle k + \pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}f/f_\mathrm{c}}{1-\left(\frac{f}{f_\mathrm{c}}\right)^2}\right) \end{aligned} \tag{1.18}$$

A la figura 1.19 es representen diverses corbes d'amplificació d'un filtre passaalt de segon ordre per a diferents valors de ζ, considerant $k = 1$ i $f_0 = 1\,\mathrm{kHz}$.

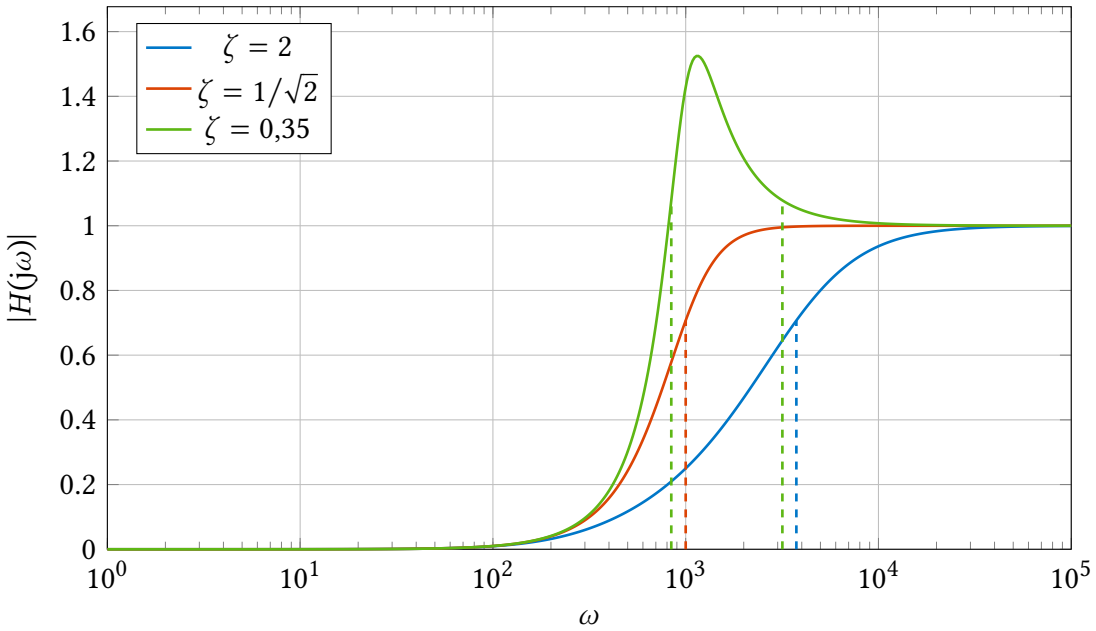


Figura 1.19: Corbes d'amplificació d'un filtre passaalt de segon ordre per a diferents valors de ζ. Les freqüències de tall s'indiquen amb línies discontínues.

Exemple 1.11

Trobeu la funció de xarxa d'un filtre de Butterworth passaalt de segon ordre amb freqüència de tall $f_\mathrm{c} = 2\,\mathrm{kHz}$ i amplificació unitat a alta freqüència, i indiqueu quina amplificació té a $f = 500\,\mathrm{Hz}$.

Solució

Com que és un filtre de Butterworth, $\omega_0 = \omega_\mathrm{c} = 2\pi \cdot 2000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, i com que $H(\infty) = 1$:

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot 2000\, s + (2\pi\cdot 2000)^2}.$$

Exemple 1.11 (continuació)

L'amplificació a $f = 500\,\text{Hz}$ es calcula directament amb la fórmula de l'amplificació:

$$|H(\text{j}2\pi 500)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2000}{500}\right)^4}} = 0{,}0624.$$

Com era d'esperar, a una freqüència molt per sota de la de tall el filtre atenua fortament el senyal.

Filtre passatot

Igual que en el cas de primer ordre, un filtre passatot de segon ordre ha de tenir amplificació constant amb la freqüència, però ara alterant la fase en 360° en lloc de 180°. Per aconseguir-ho, cal que el numerador i el denominador de la funció de xarxa tinguin el mateix mòdul per a qualsevol $s = \text{j}\omega$, la qual cosa s'aconsegueix situant els zeros al semiplà dret, com a reflex dels pols respecte de l'eix imaginari:

$$H(s) = k \cdot \frac{s^2 - 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad H(0) = k \in \mathbb{R}. \tag{1.19}$$

Avaluant a $s = \text{j}\omega$ i factoritzant ω_0^2 obtenim

$$H(\text{j}\omega) = k \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \text{j}2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \text{j}2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}},$$

on veiem que el numerador i el denominador tornen a ser conjugats. Per tant, tenen el mateix mòdul i arguments oposats, de tal manera que l'amplificació i el desfasament resultants són:

$$\boxed{\begin{aligned} &|H(\text{j}\omega)| = |k| \\ &\measuredangle H(\text{j}\omega) = \measuredangle k - 2\arctan\left(\frac{2\zeta\omega/\omega_0}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right) \end{aligned}} \tag{1.20}$$

A diferència del cas de primer ordre, ara el desfasament fa una volta completa. És a dir, comença a $\measuredangle k$ quan $\omega = 0$ i acaba a $\measuredangle k - 2\pi$ quan $\omega \to \infty$. A la figura 1.20 representem la corba de desfasament d'un filtre passatot de segon ordre amb $f_0 = 1\,\text{kHz}$, $\zeta = 0{,}5$ i $k = 1$.

1.10.5 Filtre passabanda

En aquesta secció es presenten els filtres passabanda. Com s'ha comentat anteriorment, l'ordre mínim d'aquest tipus de filtres és dos i, de fet, ens centrarem exclusivament en aquest cas. Tot i això, hem decidit dedicar una secció específica tant als filtres passabanda com als eliminabanda, separada de la resta de filtres de segon ordre, ja que requereixen una anàlisi més detallada.

Els filtres passabanda, com indica el seu nom, es caracteritzen per deixar passar un determinat rang de freqüències i atenuar les que són fora de la banda. A partir d'aquesta definició podem

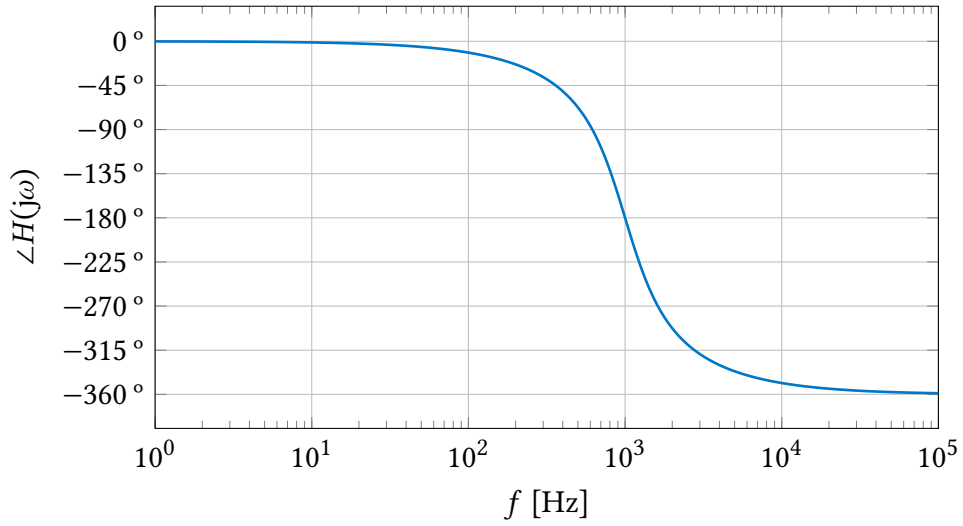


Figura 1.20: Corba de desfasament d'un filtre passatot de segon ordre amb $f_0 = 1\,\text{kHz}$ i $\zeta = 0{,}5$.

intuir que un filtre passabanda presenta dues freqüències de tall, ω_{c_1} i ω_{c_2}, i una freqüència central ω_0. També és lògic pensar que com més estreta sigui la banda de pas millor serà la qualitat del filtre. La banda de pas també s'anomena *amplada de banda* i es defineix com:

$$\boxed{\text{BW} = \omega_{c_2} - \omega_{c_1}} \tag{1.21}$$

Tot i així, l'amplada de banda no és suficient per indicar la qualitat del filtre, ja que un filtre amb $\text{BW} = 100\,\text{Hz}$ al voltant de $f_0 = 200\,\text{Hz}$ té una qualitat molt baixa, mentre que un filtre amb la mateixa BW però centrat a $f_0 = 10\,\text{kHz}$ té una qualitat molt elevada. Per aquest motiu, el *factor de qualitat* del filtre té en compte la freqüència central i ve donat per:

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\text{BW}}} \tag{1.22}$$

Observeu que aquest factor és adimensional.

Exemple 1.12

Calculeu el factor de qualitat d'un filtre amb $\text{BW} = 100\,\text{Hz}$ i $f_0 = 200\,\text{Hz}$ i d'un filtre amb $\text{BW} = 100\,\text{Hz}$ i $f_0 = 10\,\text{kHz}$.

Solució

Primer de tot cal veure que el factor Q es pot calcular tant amb freqüències angulars com amb freqüències lineals. Així doncs, el factor de qualitat del primer filtre és:

$$Q_1 = \frac{200}{100} = 2.$$

En canvi, el segon filtre té un factor de qualitat molt més gran:

$$Q_2 = \frac{10.000}{100} = 100.$$

Funcions de transferència, amplificació i desfasament

Per definició de filtre passabanda, la seva funció de xarxa ha de complir que $|H(0)| = \lim_{s\to\infty}|H(s)| = 0$. En base a això, podem definir la *funció passabanda canònica* com:

$$H(s) = k\frac{2\zeta\omega_0 s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{k}{\frac{s^2+\omega_0^2}{2\zeta\omega_0 s} + 1}.$$

La seva resposta en freqüència ve donada per:

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{k}{1 - \mathrm{j}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\zeta\omega_0\omega}}.$$

Per tant, la funció d'amplificació és:

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{|k|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\zeta\omega_0\omega}\right)^2}}.$$

Aquesta funció té un sol màxim a $\omega = \omega_0$, que precisament és la freqüència central o freqüència de ressonància. A aquesta freqüència tenim $|H|_{\max} = |H(\mathrm{j}\omega_0)| = |k|$. A més a més, l'amplificació val zero quan $\omega = 0$ o $\omega \to \infty$. També podem calcular fàcilment les freqüències de tall utilitzant:

$$|H(\mathrm{j}\omega_{c_1})| = |H(\mathrm{j}\omega_{c_2})| = \frac{|H(\mathrm{j}\omega_0)|}{\sqrt{2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}},$$

d'on n'obtenim les dues freqüències de tall:

$$\omega_{c_1} = \omega_0\left(\sqrt{1+\zeta^2} - \zeta\right),$$
$$\omega_{c_2} = \omega_0\left(\sqrt{1+\zeta^2} + \zeta\right).$$

Si les restem podem trobar l'amplada de banda:

$$\mathrm{BW} = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = 2\zeta\omega_0,$$

i multiplicant-les veiem que coincideixen amb la freqüència central al quadrat:

$$\omega_{c_1}\omega_{c_2} = \omega_0^2.$$

Utilitzant aquestes relacions, podem escriure el factor de qualitat en funció de ζ:

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\mathrm{BW}} = \frac{1}{2\zeta}} \tag{1.23}$$

D'aquesta manera, la funció de xarxa en termes dels paràmetres del filtre Q i ω_0 ve donada per:

$$\boxed{H(s) = k \cdot \frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}} \tag{1.24}$$

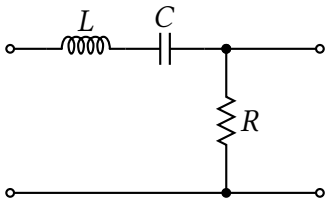
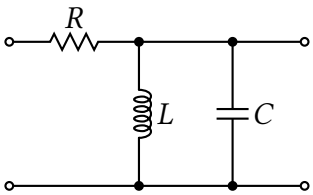
Mentre que l'amplificació i el desfasament prenen la forma:

$$\boxed{\begin{aligned} |H(\mathrm{j}\omega)| &= \frac{|k|}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \\ \measuredangle H(\mathrm{j}\omega) &= \measuredangle k - \arctan\left(Q\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \end{aligned}} \tag{1.25}$$

A partir d'aquestes expressions es desprèn que un filtre passabanda té tres paràmetres: la freqüència central ω_0, el factor de qualitat Q i l'amplificació màxima k.

Implementacions

La implementació passiva més senzilla d'un filtre passabanda és el circuit RLC. Segons com es disposin els tres elements, obtenim dues topologies dual, que es mostren a la taula 1.9.

Filtre passabanda LC-R	Filtre passabanda R-LC
	
$\dfrac{\frac{R}{L}s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$	$\dfrac{\frac{1}{RC}s}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}}$

Taula 1.9: Implementacions passives d'un filtre passabanda de segon ordre.

En ambdós casos $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ i $k = 1$, però el factor de qualitat depèn de la topologia:

- Cas LC-R (sèrie): $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Augmentar R redueix la selectivitat del filtre.
- Cas R-LC (paral·lel): $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$. Augmentar R n'incrementa la selectivitat.

Com veurem a continuació, les no idealitats de les bobines limiten el factor de qualitat del filtre. Per evitar-ho, a la pràctica és habitual recórrer a implementacions actives, com poden ser les estructures *multiple feedback* o *Sallen–Key*.

Inductors no ideals

Quan anem a una botiga a comprar un inductor, no ens donen mai una inductància ideal sinó que normalment ens donaran una bobina, que es pot modelar com una inductància de valor L_S en sèrie amb una resistència de valor R_S. La impedància d'aquesta bobina és $Z_B(\omega) = R_S + \mathrm{j}\omega L_S$.

Es pot proposar un factor de qualitat de la bobina Q_B com un índex objectiu que permeti de comparar bobines entre sí, i que prengui un valor més elevat com més elevada sigui la part de la impedància desitjada (reactiva) davant de la no desitjada (resistiva):

$$Q_B = \frac{\omega L_S}{R_S}. \tag{1.26}$$

A banda del model en sèrie també es podria trobar un model equivalent de la bobina amb dos elements en paral·lel: una resistència de valor R_P i una inductància de valor L_P. Només cal partir de l'admitància en lloc de la impedància:

$$Y_B = \frac{1}{R_S + \mathrm{j}\omega L_S} = \frac{R_S}{R_S^2 + \omega^2 L_S^2} + \mathrm{j}\frac{-\omega L_S}{R_S^2 + \omega^2 L_S^2}.$$

Manipulant aquesta expressió podem expressar els paràmetres del model paral·lel en funció dels del model sèrie i del factor de qualitat de la bobina:

$$R_P = \frac{R_S^2 + \omega^2 L_S^2}{R_S} = R_S \cdot \left(1 + \frac{\omega^2 L_S^2}{R_S^2}\right) = R_S \cdot \left(1 + Q_B^2\right) \approx R_S Q_B^2, \tag{1.27}$$

$$L_P = \frac{R_S^2 + \omega^2 L_S^2}{\omega^2 L_S} = L_S \cdot \left(\frac{R_S^2}{\omega^2 L_S^2} + 1\right) = L_S \cdot \left(1 + \frac{1}{Q_B^2}\right) \approx L_S. \tag{1.28}$$

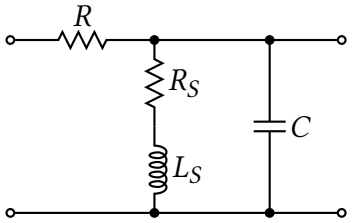
Els valors aproximats són quan el factor de qualitat de la bobina és elevat ($Q_B > 10$).

En usar el model equivalent paral·lel, hem de ser conscients que aquest no és un model estàtic, en què els valors de R_P i L_P siguin sempre els mateixos. Si ens fixem en les expressions, veurem que els valors de R_P i L_P depenen de la freqüència (com, de fet, hi depèn el propi Q_B). Això no sol ser un problema, perquè en general nosaltres usem aquest model paral·lel per predir el comportament del filtre passabanda al voltant del punt d'amplificació màxima, però no podrem fer prediccions fiables en freqüències allunyades del màxim sense recalcular els valors del model equivalent paral·lel en aquells altres punts.

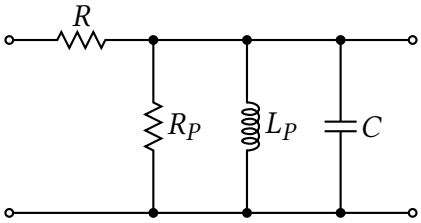
Filtre passabanda amb bobines

A la pràctica, els filtres passabanda s'implementen amb bobines i no inductors, per tant difereixen del filtre passabanda proposat anteriorment. En aquesta secció veurem com es veuen modificat els paràmetres d'un filtre R-LC quan s'utilitza un inductor no ideal. El cas LC-R s'analitza de forma similar i es deixa com a exercici al lector.

El models sèrie i paral·lel del filtre que estudiarem són els que es mostren a la figura següent:



(a) Filtre passabanda R-LC amb bobina no ideal.



(b) Circuit anterior amb el model paral·lel.

En el cas ideal, el filtre té els següents paràmetres:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_S C}}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}, \tag{1.29}$$

$$|H|_{\mathrm{màx}} = 1, \tag{1.30}$$

$$\mathrm{BW} = \frac{1}{RC}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}. \tag{1.31}$$

És fàcil comprovar que el factor de qualitat és:

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L_S}}. \tag{1.32}$$

Vegem ara com es modifiquen aquests paràmetres quan hi introduïm la no idealitat de la bobina. Comencem per la freqüència central. Definint $R_T = R \| R_P$:

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L_P C}} = \frac{1}{\sqrt{L_S\left(1 + \frac{1}{Q_B^2}\right)C}} \approx \omega_0. \tag{1.33}$$

Així doncs, per un Q_B prou gran, la freqüència central és aproximadament la mateixa. El valor exacte, però, és lleugerament inferior.

L'amplificació màxima es troba a la freqüència de ressonància. Quan això passa, C i L_P es cancel·len mútuament i el circuit resultant és un divisor de tensió entre R i R_P. Per tant,

$$|H|'_{\text{màx}} = \frac{R_P}{R + R_P} < 1. \tag{1.34}$$

Utilitzant la R_T definida anteriorment, la nova amplada de banda ve donada per:

$$\text{BW}' = \frac{1}{R_T C} > \text{BW}. \tag{1.35}$$

Per trobar el factor de qualitat desenvolupem l'expressió de R_T:

$$\frac{1}{Q'} = \frac{1}{R_T}\sqrt{\frac{L_P}{C}} = \frac{1}{R_P}\sqrt{\frac{L_P}{C}} + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L_P}{C}} \approx \frac{1}{Q_B} + \frac{1}{Q} \implies Q' = Q \| Q_B. \tag{1.36}$$

Aquesta última equació és rellevant, ja que ens diu que no podem aconseguir un filtre R-LC amb un factor de qualitat superior al factor de qualitat de la bobina.

Finalment, altres relacions útils, que s'obtenen de les anteriors, són:

$$|H|'_{\text{màx}} \approx \frac{Q_B}{Q + Q_B} = \frac{Q'}{Q}. \tag{1.37}$$

En conclusió, obtenim un filtre amb una amplificació màxima menor a la unitat (atenua) i una amplada de banda superior a la del filtre ideal.

1.10.6 Filtre eliminabanda

El filtre eliminabanda, també anomenat *notch*, té un comportament complementari al del filtre passabanda: deixa passar totes les freqüències excepte les properes a una freqüència central ω_0, que queden fortament atenuades. Igual que el filtre passabanda, es caracteritza per tres paràmetres: la freqüència central ω_0, el factor de qualitat Q i l'amplificació k a les bandes de pas, és a dir, lluny de ω_0.

Per definició de filtre eliminabanda, la seva funció de xarxa ha de complir $|H(0)| = \lim_{\omega\to\infty}|H(\mathrm{j}\omega)| = |k|$ i $H(\mathrm{j}\omega_0) = 0$. Seguint un procediment anàleg al del filtre passabanda, es pot demostrar que la funció eliminabanda de segon ordre és:

$$H(s) = k \cdot \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}. \tag{1.38}$$

Observeu que el numerador d'aquesta funció s'anul·la exactament a $s = \mathrm{j}\omega_0$, mentre que el denominador és el mateix que el d'un filtre passabanda amb la mateixa ω_0 i Q. De fet, no és casualitat que l'eliminabanda i el passabanda comparteixin denominador: la suma de les seves funcions de xarxa, quan ambdós filtres es dissenyen amb el mateix k, ω_0 i Q, és igual a k per tot ω. És a dir, l'eliminabanda és complementari al passabanda.

Avaluant l'equació (1.38) a $s = \mathrm{j}\omega$ i operant, l'amplificació i el desfasament resulten:

$$\boxed{\begin{aligned} |H(\mathrm{j}\omega)| &= \frac{|k|}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}} = \frac{|k|}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}}} \\ \measuredangle H(\mathrm{j}\omega) &= \measuredangle k - \arctan\left(\frac{1}{Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right) = \measuredangle k - \arctan\left(\frac{1}{Q\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}\right) \end{aligned}} \tag{1.39}$$

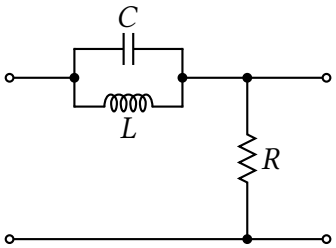
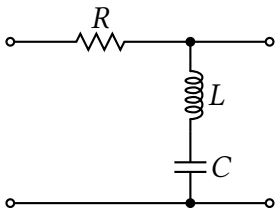
Les freqüències de tall es defineixen com aquelles a les quals l'amplificació val $|k|/\sqrt{2}$, és a dir, on la potència de sortida es redueix a la meitat respecte de la banda de pas. Com que el denominador de (1.38) coincideix amb el del passabanda, les freqüències de tall també hi coincideixen:

$$\omega_{c_1} = \omega_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q}\right), \quad \omega_{c_2} = \omega_0\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q}\right),$$

i l'amplada de banda eliminada és $\mathrm{BW} = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = \omega_0/Q$, exactament la mateixa expressió que la de l'amplada de banda del passabanda equivalent. Com més gran sigui Q, més estreta i selectiva és la banda que se suprimeix.

Implementacions

L'alternativa passiva més senzilla, dual de les vistes pel passabanda, són els circuit RLC de la taula 1.10. La ressonància entre L i C a ω_0 provoca que, o bé el corrent a la sortida sigui zero, o bé quedi curtcircuitada i no hi caigui tensió.

Eliminabanda LC-R	Eliminabanda R-LC
	
$\frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$	$\frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$

Taula 1.10: Implementacions passives d'un filtre eliminabanda de segon ordre.

APÈNDIX A

Sèries de Fourier

La *sèrie de Fourier* és una eina que permet expressar una funció periòdica com a combinació lineal de sinusoides. Això ens permet aplicar tota la teoria de règim permanent sinusoidal (RPS) a qualsevol senyal periòdic, ja que gràcies al teorema de superposició obtenim que la resposta d'un circuit lineal a un senyal periòdic qualsevol és una combinació lineal de respostes a senyals sinusoidals.

En aquest apèndix es presenta la teoria bàsica de les sèries de Fourier per a aquells estudiants que no les hagin estudiat en assignatures de matemàtiques o que, simplement, en vulguin repassar els conceptes.

A.1 Sèrie de Fourier exponencial

Donada una funció periòdica $x(t)$ de període $T = 1/f$, la seva sèrie de Fourier (exponencial) ve donada per:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kt/T}, \tag{A.1}$$

on c_k són els *coeficients de Fourier*:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kt/T} \, \mathrm{d}t. \tag{A.2}$$

Observeu que si $x(t)$ és una funció real, es compleix que $c_{-k} = c_k^*$.

Una pregunta natural a fer-se és què ha de complir la funció $x(t)$ per satisfer l'equació (A.1). Des del punt de vista matemàtic, caldria comprovar que se satisfan les *condicions de Dirichlet*, però afortunadament, qualsevol senyal físic satisfà aquestes condicions, així que no ens n'haurem de preocupar.

Per acabar, donem dues interpretacions prou interessants de la sèrie de Fourier. En primer lloc, les funcions

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kt/T}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

són una base ortogonal de l'espai vectorial $L^2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)$ de funcions de quadrat integrable en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Així doncs, podem interpretar la sèrie de Fourier com una *descomposició ortogonal* de $x(t)$. D'altra banda, l'equació (A.2) ens fa pensar en l'expressió d'una transformada de Fourier, i de fet ho és.[1] Els coeficients de Fourier són *l'espectre* de $x(t)$, és a dir, representen el senyal en el domini de la freqüència. Aleshores, la sèrie de Fourier de l'equació (A.1) es pot interpretar com una *transformada de Fourier inversa*.

[1] Si no coneixeu la transformada de Fourier podeu consultar [1], però no us preocupeu: els continguts d'aquest apèndix van més enllà dels objectius de l'assignatura.

A.2 Sèrie de Fourier trigonomètrica

Sovint, la sèrie de Fourier no es dona en forma exponencial, sinó que es dona en funció de sinus i cosinus i s'anomena *sèrie de Fourier trigonomètrica*. Per obtenir-la, només cal aplicar la fórmula d'Euler a l'equació (A.1):

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cos\Big(\frac{2\pi kt}{T}\Big) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}\, c_k \sin\Big(\frac{2\pi kt}{T}\Big) \\ &= c_0 + \sum_{k\geq 1} (c_k + c_{-k}) \cos\Big(\frac{2\pi kt}{T}\Big) + \sum_{k\geq 1} \mathrm{j}(c_k - c_{-k}) \sin\Big(\frac{2\pi kt}{T}\Big) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1} a_k \cos\Big(\frac{2\pi kt}{T}\Big) + \sum_{k\geq 1} b_k \sin\Big(\frac{2\pi kt}{T}\Big), \end{aligned} \tag{A.3}$$

on a_k i b_k són els *coeficients de Fourier trigonomètrics*:

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos\Big(\frac{2\pi kt}{T}\Big) \, \mathrm{d}t, \tag{A.4}$$

$$b_k = \mathrm{j}(c_k - c_{-k}) = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin\Big(\frac{2\pi kt}{T}\Big) \, \mathrm{d}t. \tag{A.5}$$

Es pot demostrar que les funcions

$$1, \ \cos\Big(\frac{2\pi kt}{T}\Big), \ \sin\Big(\frac{2\pi kt}{T}\Big) \quad (k \geq 1)$$

són una base ortogonal de $L^2\Big(\Big[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\Big]\Big)$, per tant podem fer la mateixa interpretació de descomposició ortogonal que abans.

A.3 Sèrie de Fourier harmònica

La darrera expressió de la sèrie de Fourier que introduïm és l'*harmònica* o *circuital*. La principal motivació és que quan observem un senyal a l'oscil·loscopi no veiem ni exponencials complexes ni dos senyals (un sinus i un cosinus), sinó que veiem un sol cosinus desfasat. Aleshores, la sèrie de Fourier harmònica (o circuital) d'un senyal $x(t)$ és:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k\geq 1} A_k \cos\Big(\frac{2\pi kt}{T} + \varphi_k\Big), \tag{A.6}$$

on A_k i φ_k són els coeficients de Fourier:

$$A_0 = c_0, \quad A_k = 2|c_k|, \quad \varphi_k = \measuredangle c_k. \tag{A.7}$$

Per trobar-la, partim dels sumands la sèrie de Fourier trigonomètrica de l'equació (A.3) i anomenem $y = 2\pi kt/T$:

$$a_k \cos(y) + b_k \sin(y) = A_k \cos(y)\cos(\varphi_k) - A_k \sin(y)\sin(\varphi_k).$$

Igualant termes:

$$\begin{cases} A_k \cos(\varphi_k) = a_k, \\ A_k \sin(\varphi_k) = -b_k, \end{cases}$$

d'on obtenim que el coeficient de la fase val

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) = \arctan(c_k) = \measuredangle c_k, \quad k \geq 1, \tag{A.8}$$

i l'amplitud val

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2|c_k|, \quad k \geq 1. \tag{A.9}$$

El cas A_0 és especial ja que incorpora la informació de fase. A la pràctica, això signfica que pot ser positiu o negatiu, ja que $c_0 \in \mathbb{R}$.

A.4 Interpretació dels coeficients de Fourier

Una de les interpretacions que hem donat de la sèrie de Fourier és la de transformada inversa de Fourier, on els coeficients de Fourier representen el senyal en el domini de la freqüència. Podem fer dues observacions:

- El nombre de coeficients de Fourier és infinit però numerable, per tant la transformada de Fourier d'un senyal periòdic és discreta.
- Cada coeficient de Fourier c_k indica la component del senyal a la freqüència kf.

En particular, c_0 correspon al valor mitjà del senyal (component CC) i els $|c_k|$, $\measuredangle c_k$ ($k \neq 0$) són l'espectre d'amplitud i de fase a kf, respectivament.

Bibliografia

[1] R. J. Beerends, H. G. ter Morsche, J. C. van den Berg i E. M. van de Vrie, *Fourier and Laplace transforms*. Cambridge, Regne Unit: Cambridge University Press, 2003, ISBN: 978-0-511-67510-2.

[2] J. A. Martínez Carrascal, O. Muñoz Medina i A. Pérez Navarro, *Teoria de circuits*. Barcelona, Espanya: Universitat Oberta de Catalunya, 2010, ISBN: 978-84-693-4277-0.

[3] D. E. Johnson, J. R. Johnson i H. P. Moore, *A handbook of active filters*. Englewood Cliffs, EUA: Prentice-Hall, 1980, ISBN: 978-0-13-372409-7.

[4] R. E. Thomas, A. J. Rosa i G. J. Toussaint, *The analysis and design of linear circuits*, 8a ed. Hoboken, EUA: Wiley, 2016, ISBN: 978-1-119-23538-5.

[5] O. Mas, *Circuits i Sistemes Lineals: Quadern de classe*, 2025.