Análisis multiescala de una transición laminar de material compuesto discretizada en elementos tipo shell

Treball Final de Master

Facultat de Nàutica de Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya

Treball realitzat per:
Francesc Turon Pujol

Dirigit per:
Xavier Martinez García

Màster en Enginyeria Naval i Oceànica
Barcelona, 10/10/2019
Departament de Ciències i Enginyeria Naval

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

Agraïments

"Els primeres als quals estic eternament agraït per infinitat de motius són la meva família; gràcies a ells no m'ha faltat mai de res i he pogut estudiar sempre el que m'ha agradat dedicant-hi plenament tot el meu temps. Si no fos pel seu suport incondicional molt provablement no hauria arribat fins el punt on sóc ara i potser no hauria començat mai ni ta sols a escriure aquest treball.

Del món acadèmic i tambe professional vull agraïr especialment al Dr. Xavier Martinez i al Dr. Fermin Otero, per tot el temps que m'han dedicat tant en el meus estudis a la Facultat de Nàutica com al CIMNE, on he tingut la sort de formar part d'un projecte d'investigació al seu costat.

Finalment vull agrair als meus amics i companys tant de l'institut com els que he fet durant els anys a la Facultat de Nàutica per procurar-me temps d'esbarjo durant les èpoques de més feina per aclarir les idees, mantenir les forces i la constància."

Resumen

En este trabajo se propone una metodología para el estudio de transiciones entre laminados en estructuras planas de material compuesto. La técnica desarrollada se basa en los análisis multi-escala para desarrollar un procedimiento multi-modelo. Con ésta, se trabaja con un macro y un micro modelo, como hace un multi-escala, pero éstos modelos no respetan la condición de periodicidad y la diferenciación en el tamaño de escala, entre ambos modelos.

Este nuevo enfoque tiene como objetivo principal el estudio de grandes estructuras geométricamente planas que debido a su complejidad no puedan ser simuladas con elementos superficiales. Y que, debido a su tamaño, su análisis mediante elementos sólidos sea extremadamente costoso. En el mundo naval este tipo de estructuras es muy común, ya que tanto los cascos como las cubiertas son el resultado de la unión de numerosas superficies lisas que podrían ser discretizadas en elementos lámina.

Sin contar el capitulo introductorio, el trabajo está dividido en tres capítulos. El primero de ellos es una introducción a los pilares sobre los que se erige el trabajo: la teoría clásica de láminas de Kirchhoff y Reissner-Mindlin, la teoría clásica de laminados y el campo de desplazamientos a aplicar en las condiciones de contorno del micro-modelo para realizar la homogeneización del mismo.

El segundo capítulo consiste en la verificación de la homogeneización propuesta en el capítulo anterior. Para ello se comparan los resultados del ensayo de una probeta al usar la teoría clásica de laminados con los resultados al usar el análisis multi-escala fruto de la homogeneización del micro-modelo correspondiente al laminado. Se estudian dos laminados, uno mas complejo que el otro.

Para finalizar, el último capítulo consiste en usar las herramientas previamente desarrolladas para estudiar una transición entre dos laminados. La transición propuesta es simple pero sirve para observar la existencia o no de los fenómenos de periodicidad y diferenciación entre escalas durante la homogeneización.

Resumen

This paper proposes a methodology for the study of transitions between laminates in flat structures of composite material. The technique developed is based on multi-scale analysis to develop a multi-model procedure. Working with a macro and a micro model, as a multi-scale does, but these models do not respect the condition of periodicity and the differentiation in scale size, between both models.

This new approach has as its main objective the study of large geometrically flat structures that due to their complexity cannot be simulated with surface elements. And , due to its size, its analysis with solid elements is extremely expensive. In the naval world this type of structures is very common, since both the hulls and the covers are the result of the union of numerous smooth surfaces that could be discretized in sheet elements.

Not counting the introductory chapter, the work is divided into three chapters. The first one is an introduction to the pillars on which the work is erected: the classical Kirchhoff and Reissner-Mindlin sheet theory, the classical laminate theory and the field of displacements to be applied in the contour conditions of the micro- model to perform the homogenization of it.

The second chapter consists of the verification of the homogenization proposed in the previous chapter. For this, the test results of a test sample are compared when using the classical laminate theory with the results when using the multi-scale analysis resulting from the homogenization of the micro-model corresponding to the laminate. Two laminates are studied, one more complex than the other.

Finally, the last chapter consists in using the previously developed tools to study a transition between two laminates. The proposed transition is simple, but it serves to observe the existence or not of the phenomena of periodicity and differentiation between scales during homogenization.

Índice general

Índex de taules IV

Índex de figures V

1. Introducción 1

2. Homogeneización del micro modelo 9

2.1. Macro-mecánica 9

2.1.1. Formulación de las tensiones en el plano 10

2.1.2. Formulación de los momentos debidos a la flexión. . . . 11

2.1.3. Cortantes fuera del plano. 14

2.2. Matrices constitutivas de referencia ABD y H. 17

2.3. Caracterización de un laminado multi-modelo 20

2.3.1. Campo de desplazamientos aplicado a las condiciones de contorno 20

2.3.2. Aplicación del campo de desplazamiento al micro modelo 29

2.4. Obtención de la matriz **ABC** y **H** a partir del micro-modelo. . 30

3. Validación de la homogeneización multiescala **35**

3.1. Material isótropo 35

3.2. Material anisótropo 42

4. Estudio de una transición **51**

4.1. Estudio y comparación 51

4.1.1. Modelo según la TCL 55

4.1.2. Modelo multi-escalar 56

4.2. Estudio y comparación de los resultados 57

4.2.1. Comparación de los resultados en deformaciones 58

4.2.2. Comparación del estado tensional 61

5. Conclusiones **67**

A. Homogeneización del laminado de aluminio de diez milímetros de espesor **69**

B. Homogenizacion del laminado multi-capa de material compuesto y diez milímetros de espesor **75**

C. Homogeneización de la transición entre laminados de distinto espesor **81**

Bibliografia **93**

Índex de taules

3.1. Propiedades del aluminio 36

3.2. Propiedades de la fibra 43

3.3. Propiedades de la matriz 43

3.4. Propiedades del compuesto según la teoría clásica de mezclas . 44

3.5. Propiedades del compuesto según la teoría de mezclas SP . . 45

4.1. Numero elementos y nodos con los respectivos tiempos de calcula para cada uno de los tres modelos 57

Índice de figuras

1.1. Ejemplo de un cuerpo solido mallado con elementos volumétricos hexaédricos. 2

1.2. Malla necesaria para captar la micro-estructura dentro de una macro-estructura. 3

1.3. Ejemplo de mallado con elementos hexaédricos. 5

1.4. RVE junto a uno de sus estados tensionales. 5

2.1. Representación de las deformaciones debidas al momento. . . . 12

2.2. Representación de las deformaciones reales debidas al momento [17]. 15

2.3. Efecto de la deformación ϵ_x sobre un micro-modelo. 22

2.4. Campo de deformaciones ϵ_{xy} 23

2.5. Efecto de la deformación ϵ_{xy} sobre un micro-modelo. 24

2.6. Efecto de la curvatura κ_x sobre un micro-modelo. 27

2.7. Efecto de la torsión κ_{xy} sobre un micro-modelo. 29

2.8. Caras externas de un micro-modelo. 32

3.1. Micro-modelo usado para el laminado de aluminio 37

3.2. Desplazamientos en la dirección X de la probeta de aluminio sometida a tracción 39

3.3. Desplazamientos en la dirección Y de la probeta de aluminio sometida a tracción 39

3.4. Desplazamientos total en la probeta de aluminio sometida a flexión 40

3.5. Giro θ_x registrado en la probeta de aluminio sometida a flexión 41

3.6. Micro-modelo 42

3.7. Desplazamientos en la dirección Z de la probeta de laminada sometida a tracción 47

3.8. Desplazamientos en la dirección Z de la probeta de laminada sometida a tracción 48

3.9. Tensiones [MPa] en el la matriz de la capa inferior en un elemento del micro-modelos del laminado 49

3.10. Tensiones [MPa] en la fibra de vidrio de la capa inferior en un elemento del micro-modelos del laminado 49

3.11. Tensiones [MPa] en el la matriz de la capa superior en un elemento del micro-modelos del laminado 50

3.12. Tensiones [MPa] en la fibra de vidrio en un elemento del micro-modelos del laminado 50

4.1. Micro-modelo mallado de la transición. 52

4.2. Condiciones de contorno en el micro-modelo. 53

4.3. Modelo volumétrico de la probeta con una ampliación en la zona de la transición. 54

4.4. Desplazamientos en la dirección Z de la probeta de laminada sometida a tracción 55

4.5. Desplazamientos en la dirección Z de la probeta de laminada sometida a tracción 56

4.6. Desplazamientos en la dirección Z de la probeta volumétrica sometida a tracción 58

4.7. Deflexión a lo largo de la probeta en los distintos modelos . . 59

4.8. Giro registrado en la zona de transición. 59

4.9. Desplazamientos en la dirección Z de la probeta de laminada sometida a tracción (Deformación real, no escalada) 60

4.10. Tensiones [MPa] en la dirección X en el modelo volumétrico . 61

4.11. Tensiones [MPa] en la dirección Z en el modelo volumétrico . 62

4.12. Tensiones [MPa] cortantes en el plano XZ del modelo volumétrico 62

4.13. Tensiones [MPa] en la dirección X en el modelo volumétrico . 63

4.14. Tensiones [MPa] en la dirección Z en el modelo volumétrico . 63

4.15. Tensiones [MPa] cortantes en el plano XZ del modelo volumétrico 64

4.16. Tensiones [MPa] en la dirección X en el modelo volumétrico . 65

4.17. Tensiones [MPa] en la dirección Z en el modelo volumétrico . 65

4.18. Tensiones [MPa] cortantes en el plano XZ del modelo volumétrico 65

A.1. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_x = 0{,}01$ 70

A.2. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_{xy} = 0{,}01$ 71

A.3. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\kappa_x = 0{,}01$ 72

A.4. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\kappa_{xy} = 0{,}01$ 73

B.1. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_x = 0{,}01$ 76

B.2. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_y = 0{,}01$ 76

B.3. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_x = 0{,}01$ 77

B.4. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_{xy} = 0{,}01$ 77

B.5. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_{yz} = 0{,}01$ 78

B.6. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del laminado aplicando un campo de deformaciones $\kappa_x = 0{,}01$ 78

B.7. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\kappa_y = 0{,}01$ 79

B.8. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\kappa_{xy} = 0{,}01$ 79

C.1. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\epsilon_x = 0{,}01$ 83

C.2. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\epsilon_y = 0{,}01$ 85

C.3. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\epsilon_{xy} = 0{,}01$ 86

C.4. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\epsilon_{xz} = 0{,}01$ 87

C.5. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\epsilon_{yx} = 0{,}01$ 88

C.6. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\kappa_x = 0{,}01$ 90

C.7. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\kappa_y = 0{,}01$ 92

C.8. Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\kappa_{xy} = 0{,}01$ 93

Capítulo 1

Introducción

El análisis estructural es la rama de la ingeniería que trata de predecir el comportamiento de las estructuras al aplicarles una carga, obteniendo sus esfuerzos internos, deformaciones y tensiones. Una de las herramientas disponibles para anticiparse al comportamiento de las estructuras es el análisis por elementos finitos, siendo uno de los métodos que mas ha avanzado en los últimos años, gracias a la rápida evolución de los equipos informáticos con los que se lleva a cabo. El análisis por elementos finitos es muy versátil y puede aplicarse a todo tipo de estructuras ya sean edificaciones, maquinaria, vehículos, embarcaciones, etc...

Este método se basa en la discretización o división de la estructura o objeto que va a ser estudiado en un número finito de entidades geométricas que conocemos como elementos. Dependiendo de la forma del cuerpo que queramos estudiar lo representaremos mediante volúmenes, superficies o lineas para a continuación dividirlos dando lugar a los elementos: volumétricos, superficiales o lineales respectivamente [16] [21].

Si por ejemplo trabajamos con una celosía hecha de esbeltas vigas podemos optar por representar cada una de las vigas con una simple linea y discretizarla dando lugar a elementos de barras haciendo que cada uno de ellos se comporte como parte de una viga. Si por lo contrario trabajamos con una forma mas plana hecha con planchas, como pueden ser el casco de un buque o una ala de avión, probablemente la mejor opción sea usar elementos superficiales que simulen láminas del material en cuestión.

El objetivo final a la hora de elegir una topología de elementos u otra es el ahorro de estos minimizando el desperdicio al discretizar formas geométricas, que pueden ser resumidas definiendo un grado de libertad adicional dentro de cada uno de los elementos. Por grados de libertad entendemos las deformaciones o curvaturas a las que podemos someter los elementos y que van desde una simple deformación axial, debido a una tracción o una compresión, a una curvatura o torsión causada por un momento. Al unir todas las aristas y vértices de los elementos obtenemos lo que conocemos como malla y que puede verse representada en la Figura 1.1.

Hay elementos de formas muy diversas, por ejemplo, dentro de los superficiales tenemos: elementos de forma triangular, cuadrada, hexagonal, etc... Al unir los nodos de cada uno de los elemento obtenemos lo que conocemos como malla. En cada uno de los elementos definimos una ecuación constitutiva que relaciona la variación de forma de estos con un estado tensional. Si esta relación es lineal o directamente proporcional estaremos simulando un comportamiento perfectamente elástico donde no hay deformaciones permanentes.

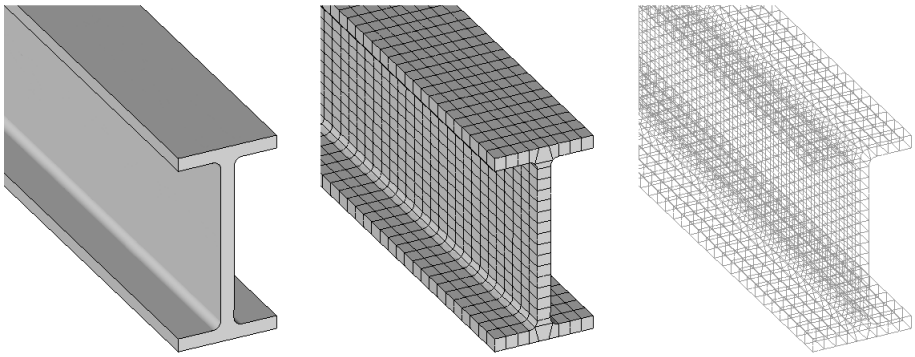


Figura 1.1: Ejemplo de un cuerpo solido mallado con elementos volumétricos hexaédricos.

En principio, cuanto mas grande sea la estructura y mas precisión se requiera en los resultados mas elementos necesitará nuestra malla. Con la potencia de cálculo de los ordenadores actuales es posible realizar simulaciones de estructuras que estén discretizadas en un número relativamente elevado de elementos. Pero sigue sin ser suficiente si la estructura a estudiar

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

es de material compuesto y pretendemos definir una malla que sea lo suficientemente fina como para captar la geometría de las fibras y de la matriz (conocidos de ahora en adelante como materiales simples dentro del material compuesto) al mismo tiempo que la forma de la estructura.

Por material compuesto entendemos un material fruto de la unión de dos o mas materiales simples en el que tendremos siempre uno encargado de dotar de rigidez a la estructura y que normalmente tiene forma de hilo o fibra, y otro que hace de base o matriz, encargado de mantener en su sitio las fibras a la vez que les transmite las cargas. Estos materiales son muy livianos pero tienen una rigidez excepcional, de ahí su uso cada vez mas frecuente tanto en el mundo de la competición como en el mercado general. El diámetro de una fibra es del orden de los 10 micrómetros [1], por lo que si el cuerpo estudiado mide del orden de 1 metro, el número de elementos necesarios estará fuera de control. Debido a este salto en el orden de magnitud normalmente usamos los términos de micro y macro estructura que puede verse ejemplificado en la Figura 1.2. En esta figura las fibras están colocadas de forma simple, extendidas a lo largo del cuerpo siguiendo una única dirección, pero pueden llegar a estar entrecruzadas formando patrones y tejidos muy diversos.

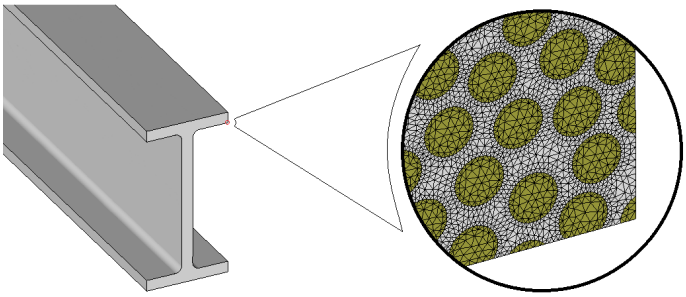


Figura 1.2: Malla necesaria para captar la micro-estructura dentro de una macro-estructura.

Por ese motivo se han desarrollado distintas metodologías que simulan los materiales compuestos, agrupando o homogeneizando las fibras y la matriz, y reproduciendo el comportamiento de ambos a la vez en un solo elemento con el ahorro que ello supone. El primer gran grupo de estas teorías son las formulaciones fenomenológicas, que consideran la distribución volumétrica y las propiedades de fibra y matriz para definir unas nuevas propiedades

anisótropas que caractericen el comportamiento del compuesto. Este método tiene algunas deficiencias al simular compuestos con micro-estructuras complejas, ya que no son capaces de reproducir los fenómenos que aparecen en la interacción fibra-matriz, especialmente en el régimen no lineal, puesto que solo están basados en una ponderación participativa. Sin embargo son incluso capaces de homogeneizar distintas capas de compuestos con distinta orientación o composición en un mismo elemento. Una evolución a este enfoque es la teoría de mezclas Serie-Paralelo, que proporcionan el comportamiento del compuesto a partir de las ecuaciones constitutivas de sus componentes y permite estudiarlos por separado.

También tenemos los métodos de homogeneización a múltiples escalas, en los cuales, mediante la extrapolación del comportamiento de un volumen representativo (**RVE**) de la micro-estructura del compuesto predecimos el comportamiento de la macro-estructura. El modelo 3D del *RVE* incluye todos los materiales simples del compuesto, así como su estructura y geometría. El comportamiento característico que define el micro-modelo se obtiene al empezar la simulación aplicando un conjunto de condiciones de contorno y estudiando los esfuerzos resultantes. Una vez tenemos su comportamiento lo extrapolamos a cada uno de los elementos del macro-modelo y por último, con el estado deformacional de los elementos del macro-modelo podemos, si así lo deseamos, bajar otra vez a la micro-escala y aplicarlo al micro-modelo para obtener la representación de su estado tensional. Esto nos permite ver en todo momento en que estado tensional se encuentra el micro-modelo correspondiente a su elemento en el macro-modelo y detectar las zonas críticas donde se originará el daño del micro-modelo que terminará por ser fatal en el macro-modelo.

La mayor ventaja de este procedimiento es que permite capturar y estudiar el comportamiento de la macro-estructuras, teniendo en cuenta las singularidades a nivel microscópico, obteniendo las interacciones fibra-matriz al detalle, pero sin necesitar una malla gigantesca en el macro-modelo ya que en la reducida malla del *RVE* englobamos toda la casuística del compuesto [18] [12]. También sirve para analizar el comportamiento estructural una vez alcanzado el limite elástico en alguno de los materiales simples, y simular modos de falla complejos como la delaminación. Para realizar este tipo de estudios no lineales es necesario ir subiendo y bajando entre escalas en un proceso iterativo relativamente costoso. Pero si por ejemplo solo nos interesa el régimen lineal bastar con homogeneizar el RVE una vez para captar su comportamiento elástico, ya que todos los estados tensionales serán directamente proporcionales a este.

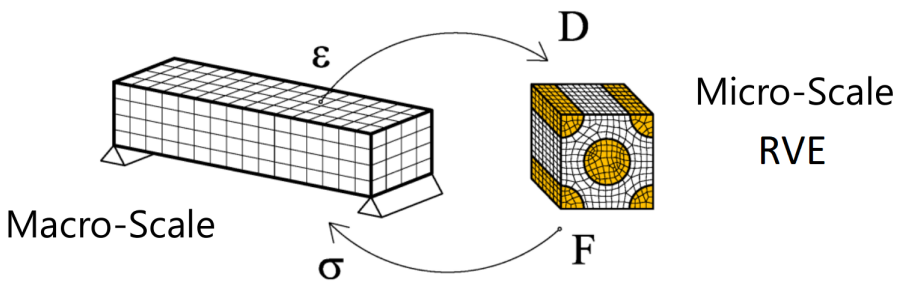


Figura 1.3: Ejemplo de mallado con elementos hexaédricos.

Actualmente, la teoría multiescala se usa para acoplar macro-modelos discretizados en elementos volumétricos con micro-modelos también discretizados con este tipo de elementos en el estudio de cuerpos sólidos hechos con materiales compuestos [19], pero en este trabajo se va un poco más allá. En primer lugar se propone unir diferentes tipologías de elementos, micro-modelos volumétricos y macro-modelos superficiales, donde el micro-modelo respresenta no solo un material compuesto, con sus fibras y matrices, sino que reproduce todo un laminado con varias capas. Los laminados, en estructuras de alto rendimiento, están formados por un cúmulo de láminas o capas las cuales no tienen porqué tener ni la misma orientación ni incluso el mismo compuesto.

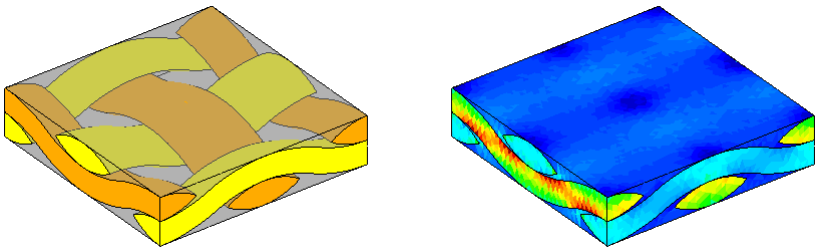


Figura 1.4: RVE junto a uno de sus estados tensionales.

Por este motivo, actualmente, si intentamos simular un laminado de material compuesto usando elementos volumétricos con alguno de los métodos

explicados anteriormente, seguiremos necesitando varios elementos al espesor para cada una de las láminas. Además, en los laminados aparecen momentos que generen una deformaciones, y por lo tanto también unas tensiones, distintas en las láminas de la cara superior y inferior del laminado, haciendo mas imprescindibles la discretización en la dirección del espesor ya que cuanto más fina sea la malla en esa dirección más precisa será la variación capturada. Al final la malla necesaria termina siendo muy grande ya que las dimensiones longitudinales de una estructura plana son mucho más grandes que su espesor, y los elementos han de respetar unas proporciones mínimas para funcionar correctamente, no pudiendo ser ni demasiado alargados ni planos. En resumen, los modelos volumétricos que representan laminados o transiciones terminan siendo extremadamente costosos en número de elementos, si se busca un gran nivel de detalle, y lograr simplificarlos todos en un solo elemento superficial abre la puerta al estudio de estructuras mucho más grandes y con una mayor precisión.

Es cierto que existen formulaciones que agrupan todas las láminas en un solo elemento superficial dándoles los grados de libertad necesarios para tener en cuenta los efectos de los momentos. Sin embargo estas teorías son formulaciones que terminan simplificando lo que ocurre realmente, perdiendo información por el camino. Como ocurre, por ejemplo, en el caso de las transiciones ya que no es posible estudiar laminados no paralelos entre ellos o que pierden la continuidad en un cierto punto. Es por eso que en este trabajo se va un paso mas allá y no solo se realiza el estudio de estructuras superficiales en las que los laminados definidos no sufren variaciones, sino que también se predice el comportamiento de zonas de transición entre diferentes laminados. Estas transiciones se están volviendo más comunes en las estructuras y perfiles que se desarrollan con materiales compuestos ya que estas son cada vez mas complejas.

Por estos motivos el objetivo de este trabajo es desarrollar e implementar un método de homogeneización multi-escalar para la resolución de estructuras geométricamente planas, discretizadas con elementos tipo *shell* (superficiales), a partir de un *RVE* solido definido por elementos volumétricos. Se trabaja en todo momento en el estudio de su comportamiento mecánico dentro del régimen lineal, pero pensando también en su futura aplicación para regímenes no lineales. La implementación de este nuevo procedimiento requiere resolver algún contratiempo, como la pérdida de las condiciones de periodicidad en algunas regiones, o la pérdida de condición de separación de escalas, conceptos básicos en los que se basa el actual procedimiento de homogeneización multi-escalar.

Por ahora los materiales compuestos de las láminas definidas dentro del micro-modelo del laminado se simularán con la teoría de mezclas Serie-Paralelo, pero dentro de la metodología propuesta cabe la posibilidad de realizar un estudio multi-escalar de doble nivel. Éste consistiría en homogeneizar el *RVE* de los materiales compuestos, para a continuación en el segundo nivel, usar su comportamiento característico en el micro-modelo del laminado. Que a su vez es homogeneizado para usarlo en el estudio del macro-modelo realizado con elementos superficiales.

Capítulo 2

Homogeneización del micro modelo

En este primer capítulo se expone la teoría sobre la que se basa la homogeneización usada para obtener las propiedades constitutivas del micro modelo. Para llevar a cabo esta homogeneización hay que tener en cuenta la formulación usada en el cálculo de elementos finitos con elementos tipo lámina, es decir, la cinemática usada en los elementos del macro modelo y la matriz constitutiva con la que trabajan. Para representar el estado flexional de las placas se usan la teorías de Kirchhoff y Reissner-Mindlin que se resumirán a continuación en el primer capítulo.

2.1. Macro-mecánica

El estudio del macro-modelo se realiza con elementos lineales y cuadráticos de tipo lámina de forma triangular y rectangulares. Dependiendo de que carga apliquemos en cada simulación usaremos unos u otros ya que todos ellos tienen un rendimiento distinto capturando la deformación de la estructura según la carga impuesta [17]. . Sin embargo, en los distintos ensayos que se realizaran se trabaja con probetas de tamaño reducido por lo que el número total de elementos no supone un problema, a pesar de garantizar una alta densidad de éstos.

Las deformaciones de la lámina a lo largo de su espesor se pueden separar en tres, las deformaciones debidas a las tensiones en el plano, las deformaciones debidas a los momentos y las deformaciones debidas a los cortantes perpendiculares al plano.

2.1.1. Formulación de las tensiones en el plano

Un elemento está sujeto a tensiones en el plano cuando la tensión en una de sus direcciones es mucho menor que las otras dos. Generalmente esto ocurre en los cuerpos geométricamente planos en las que una de las dimensiones también es muy pequeña en comparación con las otras, como es el caso de la placas.

El campo de desplazamientos puede dividirse en los desplazamientos en la dirección x y y siendo estas las direcciones que definen el plano del elemento, y son perpendiculares entre ellas. Este campo de deformaciones omite las deformaciones en la dirección z perpendicular al plano y por lo tanto también sus tensiones.

$$u(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

Usando el campo de desplazamientos anterior y siguiendo la teoría de deformaciones infinitesimales las deformaciones en un plano de dos dimensiones se obtienen con las siguientes derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \epsilon_x(x,y,z) &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y(x,y,z) &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy}(x,y,z) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Donde tenemos en cuenta la variación de la posición en los ejes principal de coordenadas x y y, nombrados u y v, respecto estos mismos ejes, pero también esta misma variación de posición respecto al eje perpendicular.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

Siguiendo la ley de Hoke la relación tensión-deformaciones es $\sigma = D \cdot \epsilon$. Donde D es la matriz de rigidez que relaciona las deformaciones de la superficie media en el plano con sus tensiones. Esta matriz tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Las tensiones generalizadas en la lámina se definen como el axil que actual sobre el espesor total de la misma, t, y se pueden obtener integrando la tensión de las distintas capas a lo largo del espesor, tal como se muestra en la ecuación 2.4

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} dz \tag{2.4}$$

N_x, N_y y N_{xy} pasan a ser tensiones longitudinales que en sistema internacional son Newtons por metro $[N/m]$.

2.1.2. Formulación de los momentos debidos a la flexión.

En la sección anterior se han tenido en cuenta las deformaciones paralelas al plano de la línea media así como las tensiones que éstas generan. Sin embargo hay que tener en cuenta también las deformaciones en la dirección perpendicular al plano y los giros que aparecen debido a las curvaturas que se generan.

Para obtener las tensiones debidas a la flexión es necesario saber la geometría resultante una vez se ha producido la deformación. Siguiendo la teoría de placas de Kirchhoff hacemos varias suposiciones [2] que nos permiten obtener el campo de desplazamientos, paso previo al cálculo de las tensiones.

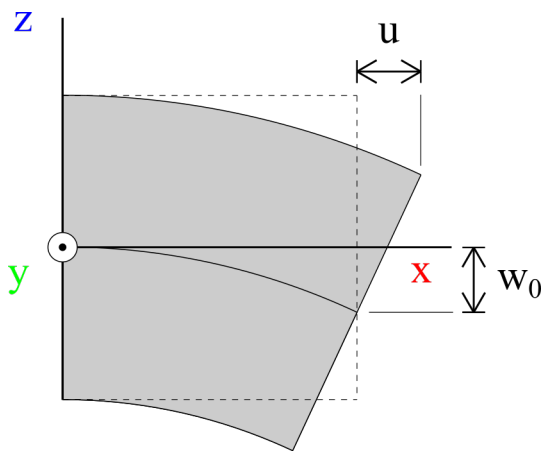


Figura 2.1: Representación de las deformaciones debidas al momento.

- Las lineas perpendiculares a la superficie neutra permanecen perpendiculares a esta una vez deformada.
- Los puntos de la superficie media solo sufren desplazamientos en la dirección z.
- Todos los puntos inicialmente situados en una perpendicular de la superficie media sufren la misma deformación por flexión.
- Las tensiones en la dirección z, σ_z, son despreciables.

Es importante tener en cuenta desde un primer momento que estas suposiciones son simplificaciones de la deformación que se da en la realidad. La tercera y cuarta suposición supondrán una problema mas adelante a la hora de aplicar flexiones al micro-modelo.

Teniendo en cuenta las cuatro suposiciones anteriores y la Ilustración 2.1 que las representan obtenemos los desplazamientos en cada uno de los ejes.

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= -z \cdot \theta_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= -z \cdot \theta_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{2.5}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

Los giros θ_x y θ_y representan la variación de w en función de las coordenadas x o y respectivamente. Representando esta relación en forma de derivada obtenemos las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \theta_y &= \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Usando la definición de deformación de las ecuaciones 2.2 del apartado anterior calculamos la deformación generada por los giros.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} &&= -z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} &&= -z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &&= -z \cdot \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

En estas ecuaciones resultantes aparecen las derivadas parciales de los giros respecto x y y. Estos términos son conocidos como curvaturas y representa la variación del giro θ a lo largo de x o y.

Usando las ecuaciones 2.7 y sustituyendo las expresiones de los giros de las ecuaciones 2,6 definimos las curvaturas. En caso de ser constante las curvaturas puras κ_x y κ_y puede ser calculada como la inversa del radio de la circunferencia que describen.

$$\begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{1}{r_x} \\ \kappa_y &= -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{1}{r_y} \\ \kappa_{xy} &= -\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) = -2 \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Para unos valores constantes de κ_x, κ_y y κ_{xy} podemos escribir las ecuaciones iniciales del campo de desplazamiento debido a la flexión 2.5 de forma abreviada.

$$\begin{aligned} \epsilon_x(x,y,z) &= z \cdot \kappa_x \\ \epsilon_y(x,y,z) &= z \cdot \kappa_y \\ \gamma_{xy}(x,y,z) &= z \cdot \kappa_{xy} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Análogamente al apartado anterior la forma general del vector de tensiones generadas por la flexión, y que tiene en cuenta el espesor, se obtiene con la siguiente integral, donde t es el espesor y z la distancia respecto a la línea media perpendicular al plano. La matriz de rigidez sigue siendo la matriz D 2.3 definida previamente.

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} z\boldsymbol{\sigma} dz \tag{2.10}$$

M_x, M_y y M_{xy} son momentos longitudinales que en sistema internacional tienen como unidades $[\frac{N \cdot m}{m}]$.

2.1.3. Cortantes fuera del plano.

Hasta este punto se ha seguido la teoría de placas de Kirchoff, es decir, se ha supuesto que las lineas normales al plano permanecen perpendiculares a él una vez deformado (2.1) omitiendo así los cortantes en direcciones perpendiculares. Sin embargo esta simplificación no es del todo cierta, especialmente en el estudio de placas gruesas. Los laminados de materiales compuestos no suelen ser especialmente gruesos pero el efecto de los cortantes que aparecen son importantes por pequeños que sean [14].

En la imagen 2.2 [17] se representa como los cortantes perpendiculares al plano estan afectando las deformaciones a lo largo del espesor. Puede apreciarse como la deformación real se aleja de la línea ortonormal al plano, supuesta como referencia en la teoría de Kirchhoff y además la silueta real

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

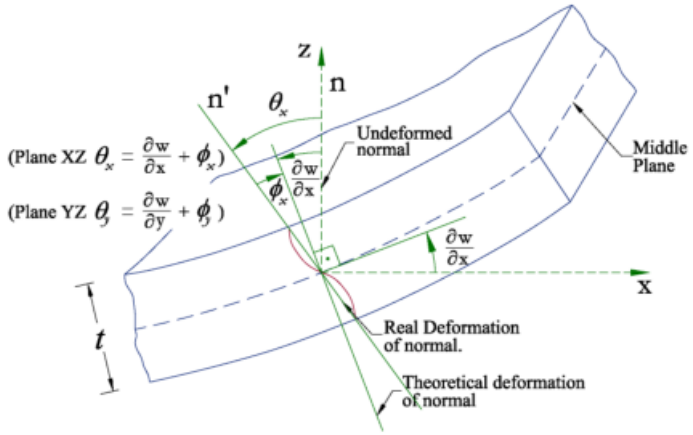


Figura 2.2: Representación de las deformaciones reales debidas al momento [17].

no es recta sino que es ligeramente curva. La teoría Reissner-Mindlin sigue suponiendo que las lineas normales al plano son rectas una vez deformadas pero ya no tienen porque ser perpendiculares a él.

La teoría de placas de Reissner-Mindlin introduce el concepto de cortante fuera del plano en las direcciones yz y xz como la suma de dos factores:

$$\begin{aligned} \gamma_{yz}(x,y,z) &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{xz}(x,y,z) &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \tag{2.11}$$

La primera derivada parcial en ambas fórmulas, $\frac{\partial w}{\partial y}$ y $\frac{\partial w}{\partial x}$, hace referencia al giro de la placa debido a la deformación por flexión previamente introducida. Los siguientes términos, $\frac{\partial v}{\partial z}$ y $\frac{\partial u}{\partial z}$, introducen el cortante puro que existe en ambos planos.

Ahora el giro respecto la línea perpendicular al plano antes de deformarse ya no vendrá definido solo por la deformación por flexión como se había supuesto anteriormente (2.6), sino que se tendrá en cuenta el giro debido al

cortante puro, representando con la letra ϕ.

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \theta_y &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \end{aligned} \tag{2.12}$$

Usando las ecuaciones anteriores 2.12 y 2.11 juntamente con la Figura 2.2, donde se ve claramente el paralelepípedo resultante una vez ha tenido lugar la deformación, podemos hacer una igualación.

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}(x,y,z) &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -\phi_x \\ \gamma_{yz}(x,y,z) &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_y \end{aligned} \tag{2.13}$$

El resultado nos indica que los giros ϕ_x y ϕ_y son unicamente debidos a los cortantes.

Las deformaciones totales que sufre la lámina se describen teniendo en cuenta la deformación del plano medio, así como los giros de dicho plano y los cortantes fuera de él, quedando la parte original de deformaciones en el plano ϵ_b y la nueva ϵ_s con las deformaciones de los cortantes fuera de él.

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \cdot \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_b \\ \epsilon_s \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

La relación tensiones-deformaciones incluye la matriz de rigidez al cor-

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

tante G a continuación de la matriz D definida en la ecuación 2.3.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_b \\ ... \\ \sigma_s \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{G} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_b \\ ... \\ \epsilon_s \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} d_{11} & d_{12} & d_{16} & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{26} & 0 & 0 \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & g_{44} & g_{54} \\ 0 & 0 & 0 & g_{45} & g_{55} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right] \tag{2.15}$$

La forma general del vector de tensiones queda de la siguiente forma.

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_b \\ ... \\ \hat{\sigma}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ ... \\ Q_y \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} z\sigma_x \\ z\sigma_y \\ z\tau_{xy} \\ ... \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} z\sigma_b \\ ... \\ \sigma_s \end{bmatrix} dz \tag{2.16}$$

2.2. Matrices constitutivas de referencia ABD y H.

El comportamiento global del laminado viene descrito por sus matrices constitutivas ABD y H, estando estas, en función del comportamiento individual de las láminas que conforman el laminado. Cada una de las láminas influye en el comportamiento global del laminado con su situación respecto la línea neutra dentro del mismo laminado y el comportamiento individual de la lamina [3].

El comportamiento de la lámina esta representado por sus matrices de rigidez Q y Q^*, previamente definidas con las letras Dy G respectivamente. Como ya se ha explicado anteriormente, al ser el espesor de las láminas muy pequeño podemos despreciar las tensiones en la dirección z y escribir la relación tensión deformación en el plano es por eso que nos referimos a la

matriz Q como matriz reducida de rigidez. La matriz Q^* representa la rigidez interlaminar de la lamina.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$
$$\begin{bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{bmatrix}$$

Los valores dentro de las matrices Q y Q^* están en función de las propiedades del material que compone la lamina, es decir, sus módulos de rigidez y sus coeficientes de Poisson. A continuación se muestran los valores para cada uno de ellos. En caso de tratarse de un material compuesto con fibras longitudinales estas se orientaran en la dirección del modulo E_1 o E_2 para que Q_{16} y Q_{26} sean cero.

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1/\Delta \\ Q_{12} &= Q_{21} = \nu_{12}E_1/\Delta \\ Q_{22} &= E_2/\Delta \\ Q_{66} &= G_{12} \\ Q^*_{44} &= G_{23} \\ Q^*_{55} &= G_{13} \\ \Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} \end{aligned} \tag{2.18}$$

En el caso de que las láminas tengan una orientación propia es necesario rotarlas.

Teniendo el comportamiento de cada una de las láminas dentro del laminado es necesario definir la matriz constitutiva para todo el laminado. Esta matriz es la matriz ABD y está separada en 4 partes, dos de las cuales son iguales.

La primera submatriz dentro de la matriz ABD es la matriz A, conocida como matriz de rigidez dentro del plano que relaciona las deformaciones en el plano $epsilon_x, epsilon_y, \gamma_{xy}$ con las tensiones longitudinales N_x, N_y, N_{xy}.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

La submatriz D, nombrada matriz de rigidez a la flexión relaciona las curvaturas $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ con los momentos lineales M_x, M_y, M_{xy}

La submatriz B, relaciona las deformaciones en el plano con la aparición de momentos y las curvaturas con las tensiones en el plano.

Por ultimo la submatriz H relaciona los esfuerzos cortantes fuera del plano γ_4 y γ_4 con los esfuerzos cortantes V_x y V_y.

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & D \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$\begin{bmatrix} Nx \\ Ny \\ Nxy \\ Mx \\ My \\ Mxy \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

$$\begin{bmatrix} Nyz \\ Nxz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

Las fórmulas usadas para el cálculo de A, B, D y H son las siguientes. Donde k es el indice la capa o lamina, t el espesor y z la distancia de la

lámina respecto la línea neutra.

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^{N}(Q_{ij})_k(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N}(Q_{ij})_k t_k; i,j = 1,2,6 \\
B_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(Q_{ij})_k(z_k^2 - z_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^{N}(Q_{ij})_k t_k z_k; i,j = 1,2,6 \\
C_{ij} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N}(Q_{ij})_k(z_k^3 - z_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^{N}(Q_{ij})_k\left(t_k z_k^2 + \frac{t_k^3}{12}\right); i,j = 1,2,6 \\
H_{ij} &= \frac{5}{4}\sum_{k=1}^{N}(Q_{ij})_k\left[t_k - \frac{4}{t^2}\left(t_k z_k^2 + \frac{t_k^3}{12}\right)\right]; i,j = 4,5
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

De esta forma unimos las cuatro matrices A, B, D y H a las que se ha llegado en los apartados anteriores en dos matrices gracias a la matriz de rigidez en el plano Q.

2.3. Caracterización de un laminado multi-modelo

En este apartado se explica en profundidad el proceso seguido para obtener la matriz constitutiva equivalente de un micro-modelo. Primero se exponen las condiciones de contorno usadas para cada uno de los modos de deformación existentes y a continuación se explica el proceso seguido para obtener los esfuerzos resultantes en estas mismas condiciones de contorno.

2.3.1. Campo de desplazamientos aplicado a las condiciones de contorno

Para obtener cada una de las componentes dentro de la matriz constitutiva mediante el estudio del micro-modelo necesitamos imponer estados deformacionales puros con el objetivo de ver qué esfuerzos y momentos se

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

generan. Una vez se tienen los esfuerzos y momentos resultantes las componentes de la matriz pueden ser aisladas, como se verá mas adelante.

El primer paso pues es calcular el campo de desplazamientos total a imponer a las condiciones de contorno del micro-modelo en función de las deformaciones. Este campo se obtiene gracias a la definición misma de cada una de las deformaciones, aislando los desplazamientos en cada una de ellas.

El resultado obtenido es el siguiente y en los subapartados que hay a continuación se muestran los pasos seguidos para llegar a cada una de las participaciones dentro de los desplazamientos totales.

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \epsilon_x \cdot x + \frac{\gamma_{xy} \cdot y}{2} + \kappa_x \cdot x \cdot z + \frac{\kappa_{xy} \cdot x \cdot y \cdot z}{2} + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \cdot z \\ v(x,y,z) &= \epsilon_y \cdot y + \frac{\gamma_{xy} \cdot x}{2} + \kappa_y \cdot y \cdot z + \frac{\kappa_{xy} \cdot x \cdot y \cdot z}{2} + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot z \\ w(x,y) &= -\frac{\kappa_x \cdot x^2}{2} - \frac{\kappa_y \cdot y^2}{2} - \frac{\kappa_{xy} \cdot x \cdot y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot y \end{aligned} \tag{2.22}$$

Deformación ϵ_x y ϵ_y

Partiendo de la fórmula de la deformación ϵ_x, previamente definida 2.9, podemos aislar el desplazamiento en la dirección x representado por la componente u [10].

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ u &= \int \epsilon_x dx \\ u &= \epsilon_x \cdot x \end{aligned} \tag{2.23}$$

Análogamente, obtenemos el campo de desplazamiento v, que representa

los desplazamientos en la dirección y.

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ v &= \int \epsilon_y dy \\ v &= \epsilon_y \cdot y \end{aligned} \tag{2.24}$$

En la Figura 2.3 que se muestra a continuación, se representa el efecto del campo de desplazamiento u sobre una geometría genérica.

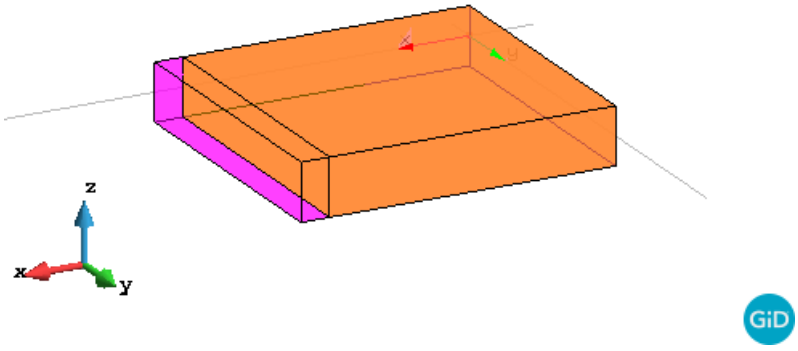


Figura 2.3: Efecto de la deformación ϵ_x sobre un micro-modelo.

Cortante ϵ_{xy} (γ_{xy}) en el plano

Usando la ecuación de la deformación ϵ_{xy}, definida en 2.9, vemos como γ es la suma de la variación de la posición de x respecto y mas la variación de y respecto x en un punto. Estas variaciones $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$ también pueden ser interpretadas como ángulos de deflexión. En la Figura 2.4 se muestra una representación gráfica de este concepto.

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.25}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

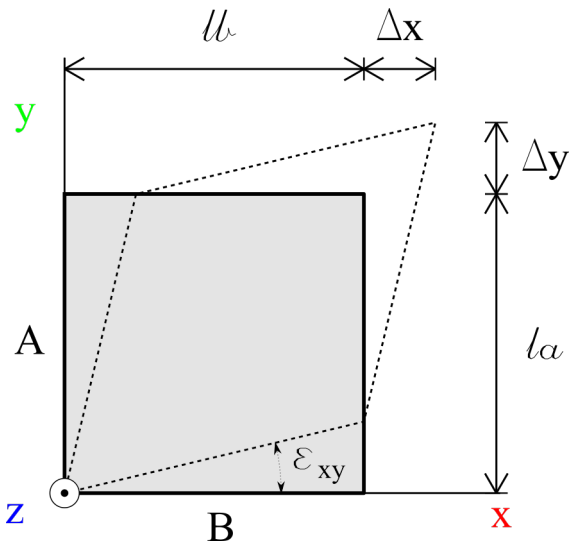


Figura 2.4: Campo de deformaciones ϵ_{xy}

Suponiendo que ambas variaciones son iguales, y por lo tanto también el ángulo que describen, obtenemos la ecuación 2.26 para la variación $\frac{\partial u}{\partial y}$. De la que es posible aislar el desplazamiento u.

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{xy}}{2} &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ u &= \frac{1}{2}\int \gamma_{xy} \cdot dy \\ u &= \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot y \end{aligned} \tag{2.26}$$

Realizando el mismo procedimiento para la variación $\frac{\partial v}{\partial x}$ obtenemos el

desplazamiento v.

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{xy}}{2} &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ v &= \frac{1}{2}\int \gamma_{xy} \cdot dx \\ v &= \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot x \end{aligned} \tag{2.27}$$

En la Figura 2.5 que se muestra a continuación puede verse un ejemplo de la aplicación del campo de desplazamiento calculado.

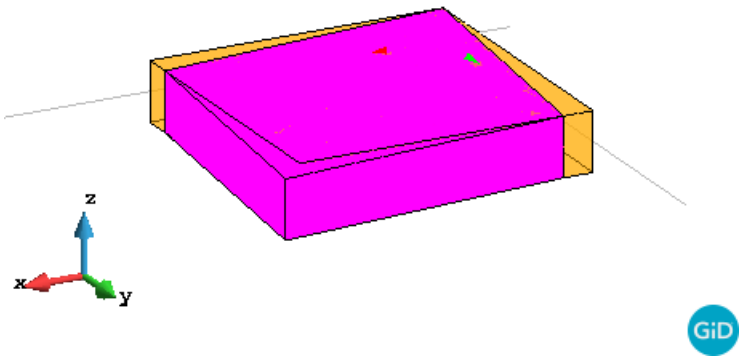


Figura 2.5: Efecto de la deformación ϵ_{xy} sobre un micro-modelo.

Cortantes ϵ_{xz} (γ_{xz}) y ϵ_{yz} (γ_{yz}), perpendiculares al plano

De igual forma que se ha calculado el campo de deformaciones debido al cortante ϵ_{xy} es posible calcular los cortantes ϵ_{xz} y ϵ_{yz} fuera de él. Partiendo esta vez con las fórmulas de las deformaciones previamente definidas 2.28.

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}(x,y,z) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz}(x,y,z) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.28}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

Como en 2.3.1 al imponer que ambas variaciones dentro de la ecuación $\gamma_{xz}(x, y, z)$ sean equivalentes conseguimos aislar u y w.

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \cdot z \\ w &= \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \cdot x \end{aligned} \tag{2.29}$$

Este procedimiento es también válido para la ecuación $\gamma_{yz}(x, y, z)$ con la que obtenemos los desplazamientos y y w.

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot z \\ w &= \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot y \end{aligned} \tag{2.30}$$

Curvaturas κ_x y κ_y

Al inicio del apartado 2.1.2, se han enumerado las suposiciones hechas sobre la geometría deformada una vez aplicado el giro. A continuación, siguiendo esas suposiciones, se han obtenido las deformaciones u y v correspondientes y que se vuelven a mostrar a continuación.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z \cdot \theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z \cdot \theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot \kappa_x \\ u &= \int \kappa_x \cdot z \cdot dx = \kappa_x \cdot z \cdot x \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = z \cdot \kappa_y \\
v &= \int \kappa_y \cdot z \cdot dy = \kappa_y \cdot z \cdot y
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

El desplazamiento w en la dirección z generado por el giro κ_x se puede obtener aislando w en la propia ecuación κ_x.

$$
\begin{aligned}
\kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
w(x,y) &= -\int\int \kappa_x \cdot dx \cdot dx = -\frac{\kappa_x \cdot x^2}{2}
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

De igual forma se calcula la contribución al desplazamiento w de la curvatura κ_y.

$$
\begin{aligned}
\kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
w(x,y) &= -\int\int \kappa_x \cdot dx \cdot dx = -\frac{\kappa_x \cdot x^2}{2}
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

En la Figura 2.6 se muestra un cuerpo sometido a una deformación κ_x.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

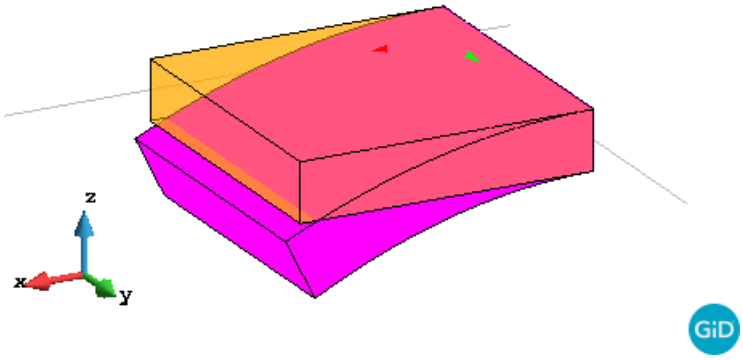


Figura 2.6: Efecto de la curvatura κ_x sobre un micro-modelo.

Curvaturas o torsión κ_{xy}

La torsión, o κ_{xy} es una deformación que genera una tensión cortante variante a lo largo del espesor. Este cortante en el plano XY varia de un valor positivo a uno negativo, es decir, cambia de dirección, teniendo el cero en la línea media del laminado [20].

Empezamos con la definición de la tensión cortante γ_{xy} y la definición de la torsión κ_{xy}, ambas en el plano XY.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.36}$$

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \tag{2.37}$$

La variación de cortante σ_{xy} a lo largo del espesor es lineal y puede ser representado en forma de ecuación de la siguiente forma:

$$\gamma_{xy}(z) = -z \cdot \kappa_{xy} \tag{2.38}$$

Substituyendo 2.36 a 2.38 y haciendo siguiendo los mismos pasos que en el apartado anterior 2.3.1, donde se han calculado los campos de desplazamiento debido a tensiones cortantes, se obtienen los desplazamientos u y v debidos a la torsión.

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \cdot \kappa_{xy} = -z \cdot \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-z \cdot \kappa_{xy}}{2} \\ u &= -\frac{1}{2} \int \kappa_{xy} \cdot z \cdot dy = -\frac{\kappa_{xy} \cdot y \cdot z}{2} \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-z \cdot \kappa_{xy}}{2} \\ v &= -\frac{1}{2} \int \kappa_{xy} \cdot z \cdot dx = -\frac{\kappa_{xy} \cdot x \cdot z}{2} \end{aligned} \tag{2.41}$$

Finalmente la deformación por flexión se consigue aislándola en la definición de curvatura κ_{xy} ya definida en la ecuación 2.8 de forma muy parecida a la que se ha seguido para las curvaturas κ_x y κ_y.

$$\begin{aligned} \kappa_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \\ w(x,y) &= -\frac{1}{2} \int \int \kappa_{xy} \cdot dx \cdot dy = -\frac{\kappa_{xy} \cdot x \cdot y}{2} \end{aligned} \tag{2.42}$$

Un ejemplo de la deformación obtenida fruto de la torsión sobre un modelo genérico puede verse en la Figura 2.7 que se muestra a continuación.

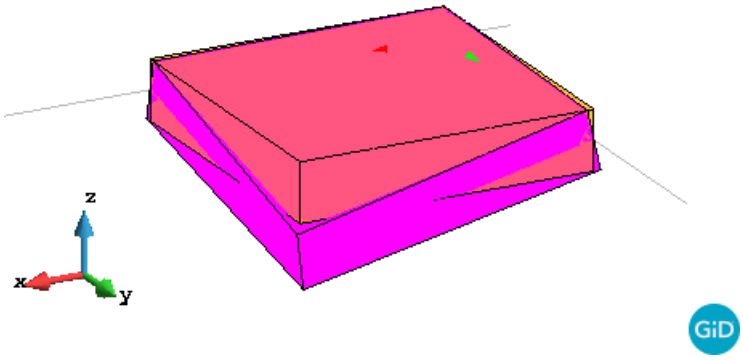


Figura 2.7: Efecto de la torsión κ_{xy} sobre un micro-modelo.

2.3.2. Aplicación del campo de desplazamiento al micro modelo

Teniendo el campo de desplazamientos correspondiente a cada una de las deformaciones y curvaturas solo hace falta aplicarlo a las caras externas del micro-modelo pero es aquí donde haber seguido la teoría de placas de Kirchhoff junto con sus suposiciones puede generar algún problema.

La cuarta suposición hace referencia a las tensiones perpendiculares al plano, y por lo tanto también a las deformaciones en esta misma dirección, despreciando su valor y por ende igualándolas a cero. Esta suposición no es ningún problema si se trabaja con la Teoría Clásica de Laminas, que se explica en el apartado que viene a continuación, ya que la matriz constitutiva con la que trabaja no tiene en cuenta ni la interacción entre capas ni los Módulos de Poisson que relacionan deformaciones en el plano XY con deformaciones perpendiculares a él.

No obstante, en el micro-modelo trabajamos con elementos volumétricos de tres dimensiones cuyas matrices constitutivas definen el comportamiento en cada una de ellas y los relacionan mediante los módulos de Poisson. Por lo que las deformaciones en el plano si afectaran la geometría en la dirección del espesor comprimiendo el laminado en esa dirección al generarse una tracción y expandiéndolo si al generar una compresión.

Para evitar estas deformación parasitaria en la dirección del espesor que no hemos tenido en cuenta al calcular el campo de desplazamientos nos vemos obligados a modificar las propiedades de los materiales que hay en el micro-modelo dándoles unos módulos de Poisson XZ y YZ igual a cero [6] [8] [11].

2.4. Obtención de la matriz ABC y H a partir del micro-modelo.

Como ya se ha explicado al inicio de del apartado 2.3 al imponer un estado deformacional puro intentamos obtener las reacciones debidas solo a esta situación con el objetivo de rellenar la matriz constitutiva del micro modelo en cuestión.

A modo de ejemplo a continuación se desarrolla el cálculo matricial resultante al imponer una deformación ϵ_x distinta a cero.

Partiendo de la ecuación 2.20 igualamos a cero todas las deformaciones menos la deformación en dirección x, ϵ_x, para a continuación, obtener la relación de los esfuerzos en los contornos del micro-modelo con la deformación aplicada y la componente correspondiente dentro de la matriz constitutiva [13].

$$\begin{bmatrix} Nx \\ Ny \\ Nxy \\ Mx \\ My \\ Mxy \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

$$
\begin{aligned}
N_x &= A_{11} \cdot \epsilon_x \\
N_x &= A_{12} \cdot \epsilon_x \\
N_{xy} &= A_{16} \cdot \epsilon_x \\
M_x &= B_{11} \cdot \epsilon_x \\
M_x &= B_{12} \cdot \epsilon_x \\
M_{xy} &= B_{16} \cdot \epsilon_x
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Aislando las variables que forman la matriz constitutiva obtenemos una ecuación para cada una de ellas.

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{N_x}{\epsilon_x} \\
A_{12} &= \frac{N_y}{\epsilon_y} \\
A_{16} &= \frac{N_{xy}}{\epsilon_{xy}} \\
B_{11} &= \frac{M_x}{\epsilon_x} \\
B_{12} &= \frac{M_y}{\epsilon_y} \\
B_{16} &= \frac{M_{xy}}{\epsilon_{xy}}
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Los momentos y esfuerzos lineales N y M se calculan mediante las resistencias registradas en las caras del contorno y las dimensiones geométricas del micro modelo. En la Figura 2.8 adjunta a continuación se representan las dimensiones genéricas de un micro-modelo y superficies de contorno.

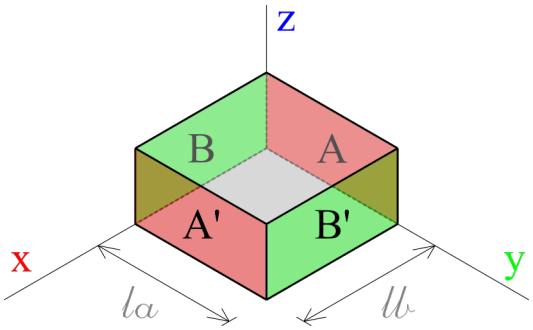


Figura 2.8: Caras externas de un micro-modelo.

Usando la misma nomenclatura que en la Figura 2.8 las fórmulas

$$
\begin{aligned}
N_x &= \frac{\sum F_\perp A}{l_a} \\
N_y &= \frac{\sum F_\perp B}{l_b} \\
N_{xy} &= \frac{\sum F_\parallel A + \sum F_\parallel B}{l_a + l_b} \\
M_x &= \frac{\sum (F_\perp A \cdot z)}{l_a} \\
M_y &= \frac{\sum (F_\perp B \cdot z)}{l_b} \\
M_{xy} &= \frac{\sum (F_\parallel A \cdot z) + \sum (F_\parallel B \cdot z)}{l_a + l_b} \\
N_{xz} &= \frac{\sum F_\parallel A + \sum F_\parallel C}{l_a + t} \\
N_{yz} &= \frac{\sum F_\parallel B + \sum F_\parallel C}{l_b + t}
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

$F_\perp$ y $F_\parallel$ son las fuerzas perpendiculares o paralelas a los nodos de las caras A o B respectivamente. l_a y l_b son las longitudes de las caras A y B. En la siguiente figura se representan las distintas variables antes citadas.

Este proceso se realiza de forma automatizada con un script. Su funcionamiento es simple pero es de gran ayuda ya que de forma automática se generan los documentos de cálculo, se ejecutan con PLCd y se analizan los resultados. Para realizar el proceso solo es necesario generar un documento

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

de cálculo básico y especificar la lista de nodos que forman parte de las caras exteriores del micro-modelo, donde se imponen los desplazamientos. El resultado es una tabla con las fuerzas y momentos en las direcciones X, Y y Z en las caras superficiales.

Capítulo 3

Validación de la homogeneización multiescala

Para poner a prueba la homogeneización propuesta en el capítulo anterior se estudiaran dos laminados y sus respectivos micro-modelos sometiéndolos a distintos esfuerzos. Para cada uno de los laminados se compararan las matrices constitutivas obtenidas mediante le teoría clásica de láminas y las obtenidas mediante el estudio del micro-modelo.

En primer lugar se estudiará un laminado de una sola lámina formada por un material isótropo, en este caso, aluminio. Una vez verificados los resultados se procederá a repetir el proceso pero definiendo, esta vez, un laminado ortótropo con dos capas. Las capas consistirán en un material compuesto de fibras unidireccionales pero con distinta orientación.

3.1. Material isótropo

Empezamos calculando las matrices Q, ABD y H relativas a una lámina de aluminio usando la teoría clásica de láminas (**TCL**) explicada previamente en el capítulo anterior 2.2. El espesor de la lámina, en este apartado y en el siguiente, será de 10 milímetros.

Al usar un material con propiedades isótropas como el aluminio y una sola

capa, no habrá acoplamiento entre las tensiones de membrana en la dirección X y Y y los momentos generados en estos mismos ejes por lo que la matriz B estará completamente vacía. Las matrices A y D por su parte no generaran acoplamiento entre axiales y cortantes dentro del mismo plano.

En la tabla que se muestra a continuación se pueden ver las propiedades isótropas del aluminio.

Propiedades del aluminio	
E [MPa]	72400
G [MPa]	27218
ν	0.33

Tabla 3.1: Propiedades del aluminio

El módulo de elasticidad transversal G se ha calculando usando la fórmula que relaciona el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν.

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \tag{3.1}$$

La matriz de rigidez reducida en el plano Q y la matriz Q^* de rigidez interlaminar para el aluminio son las siguientes:

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} 81248 & 26812 & 0 \\ 26812 & 81248 & 0 \\ 0 & 0 & 27218 \end{bmatrix} \\ Q^* &= \begin{bmatrix} 27218 & 0 \\ 0 & 27218 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Tras calcular las matrices Q y Q^* procedemos a calcular las matrices ABD y H relativas al laminado de 10 milímetros de espesor, usando las fórmulas previamente introducidas en el apartado 2.2. Las matrices resultan-

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

tes se muestran a continuación.

$$ABD = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 812479 & 268118 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 268118 & 812479 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 272180 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6770658 & 2234317 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2234317 & 6770658 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2268170 \end{array}\right] \tag{3.3}$$

$$H = \begin{bmatrix} 226817 & 0 \\ 0 & 226817 \end{bmatrix}$$

El siguiente paso es obtener estas mismas matrices pero a partir del estudio del micro-modelo. El micro-modelo en cuestión es un simple cubo con una longitud y anchura igual a su altura, que se corresponde con su espesor.

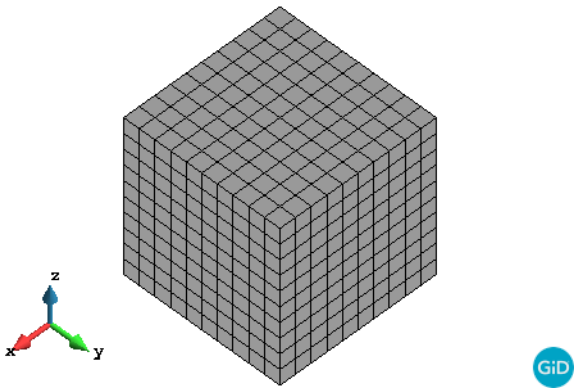


Figura 3.1: Micro-modelo usado para el laminado de aluminio

Aplicando el proceso de homogeneización presentado para cada una de las deformaciones y estudiando a posteriori las reacciones resultantes rellenamos la matriz de rigidez del laminado. En el Anexo A se muestran los estados

tensionales mas relevantes de entre todos los obtenidos.

$$ABD = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 812479 & 268118 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 268118 & 812479 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 272180 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6770658 & 2234317 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2234317 & 6770658 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2268170 \end{array}\right] \tag{3.4}$$

$$H = \begin{bmatrix} 272180 & 0 \\ 0 & 272180 \end{bmatrix}$$

Al hacer una comparación directa entre los resultados obtenidos usando la teoría clásica de láminas y el estudio del micro modelo vemos como las matrices de rigidez son casi idénticas. Solo se aprecia una pequeña variación en la matriz Q^*, siendo la rigidez calculada usando el micro-modelo ligeramente superior.

$$Error.ABD = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1{,}000 & 1{,}000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}000 & 1{,}000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1{,}000 & 1{,}000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}000 & 1{,}000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}000 \end{array}\right] \tag{3.5}$$

$$Error.H = \begin{bmatrix} 1{,}200 & 0 \\ 0 & 1{,}200 \end{bmatrix}$$

Por último, usando las distintas matrices ABD y H se analiza una probeta de 1200 por 100 milímetros. El análisis de esta probeta nos sirve para comparar la deformación resultante y las reacciones obtenidas en las condiciones de contorno.

En primer lugar realizamos un ensayo a tracción pura imponiendo un desplazamiento del 0,1 % de la longitud total. Los resultados son exactamente los mismos al usar tanto la matriz ABD y H (3.3) calculada con la TCL como la matriz ABD y H (3.4) calculada con el estudio del micro-modelo.

Los desplazamientos obtenidos a lo largo de la probeta son los siguientes:

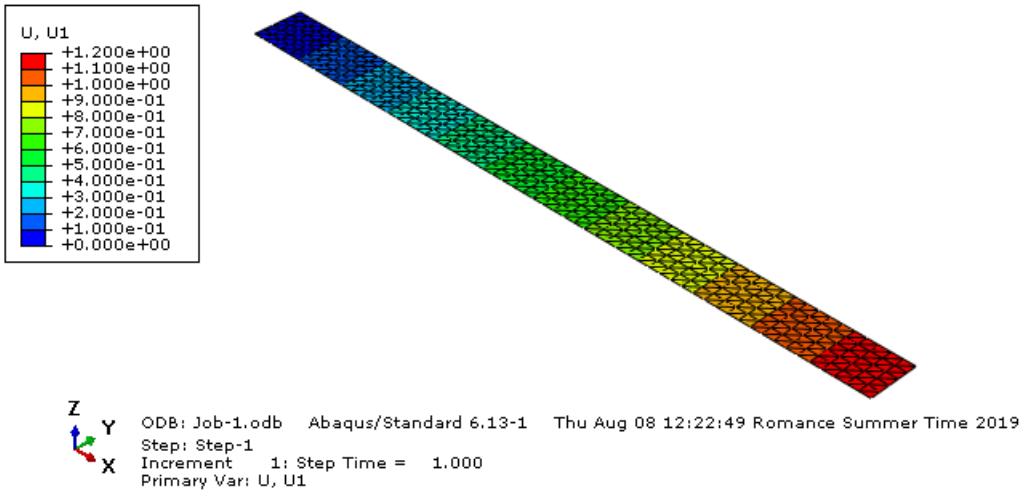


Figura 3.2: Desplazamientos en la dirección X de la probeta de aluminio sometida a tracción

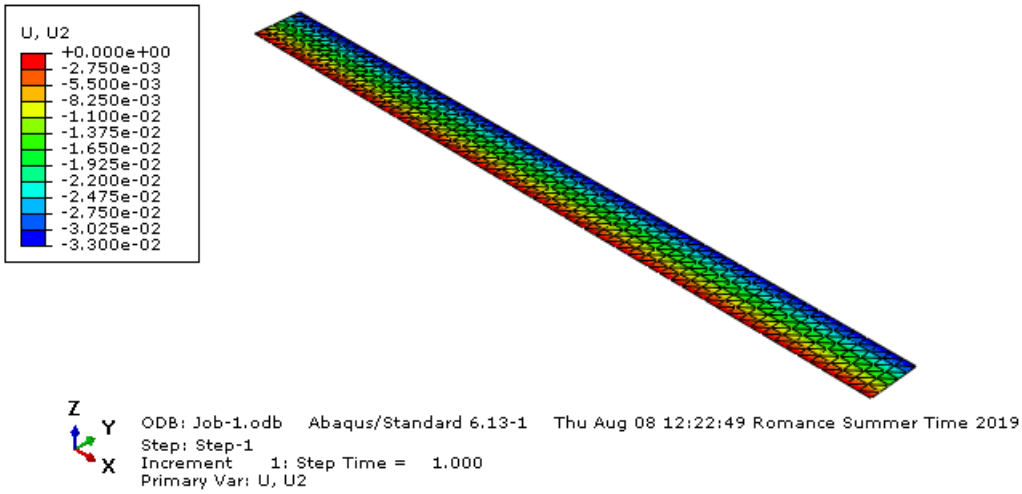


Figura 3.3: Desplazamientos en la dirección Y de la probeta de aluminio sometida a tracción

Las reacciones registradas a los extremos de la probeta también coinciden en ambos casos. En total suman 72400N por extremo, o lo que es lo mismo, 724 N/mm. No existe diferencia alguna entre los resultados obtenidos porque las matrices ABD son exactamente iguales y las pequeñas variaciones que existen en la matriz H no tienen efecto en las tensiones generadas al aplicar una tracción o un cortante en el plano.

En el segundo ensayo se somete la probeta a una flexión pura. Los estados deformacionales obtenidos siguen siendo las mismos tanto al usar la matriz ABD y H (3.3) calculada con la TCL como la matriz ABD y H (3.4) calculada con el estudio del micro-modelo.

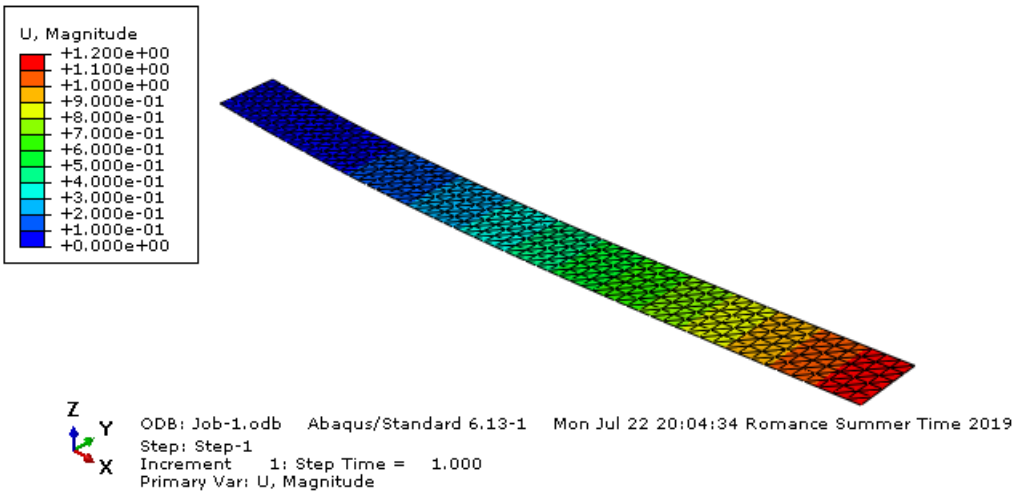


Figura 3.4: Desplazamientos total en la probeta de aluminio sometida a flexión

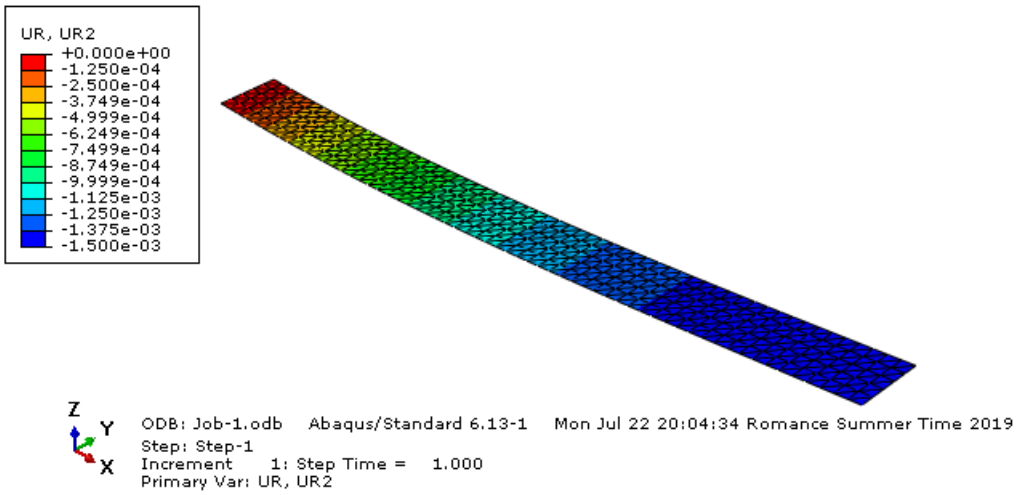


Figura 3.5: Giro θ_x registrado en la probeta de aluminio sometida a flexión

Donde sí aparece una variación de alrededor el cinco por ciento es en las reacciones registradas en el extremo empotrado. La fuerza registrada en el eje Z es ligeramente mayor en el cálculo realizado con la matriz constitutiva procedente del micro-modelo. Esta variación esta directamente relacionada con las diferencias que existen en los valores dentro de la matriz H.

3.2. Material anisótropo

El segundo laminado estudiado es un poco mas complejo que el primero y nos sirve para poner a prueba el método de homogeneización propuesto. El laminado tiene un espesor total de 10 milímetros y esta formado por dos láminas, o capas, de material compuesto unidireccional. Una de 6.5 milímetros de espesor con las fibras orientadas en la dirección del eje X y otra de 3.5 milímetros de espesor con las fibras orientadas en la dirección del eje Y. A continuación puede verse el micro-modelo del laminado descrito.

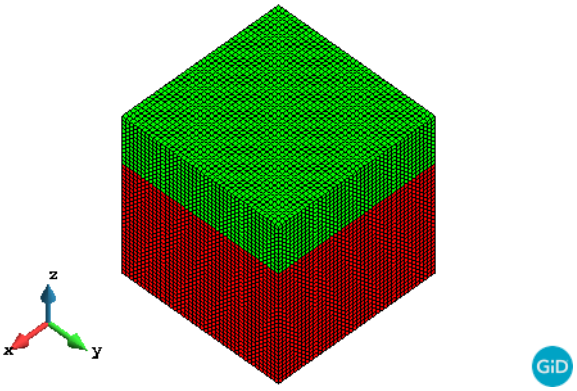


Figura 3.6: Micro-modelo

Al igual que en el estudio anterior empezamos calculando la rigidez del laminado usando la *TCL*. No obstante para calcular la matriz constitutiva usando la *TCL* son necesarias las propiedades del compuesto. Estas se calculan usando la teoría clásica de mezclas (**TCM**), en su versión en paralelo y en serie, por lo que es necesario saber las propiedades de los materiales simples, matriz y fibra, que forman parte del compuesto.

En la Tablas 3.3 y 3.2 pueden verse las propiedades de los materiales simples siendo los dos isótropos.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

Propiedades de la fibra de vidrio	
E [MPa]	84400
G [MPa]	34309
ν	0.23

Tabla 3.2: Propiedades de la fibra

Propiedades de la matriz epoxy	
E [MPa]	4670
G [MPa]	1692
ν	0.38

Tabla 3.3: Propiedades de la matriz

Con las propiedades de los materiales simples, la rigidez de un material compuesto unidireccional viene dada por las relaciones de las Ecuaciones 3.6 [2]. Las propiedades resultantes del laminado se adjuntan en la Tabla 3.2.

$$
\begin{aligned}
E_{11} &= E_m k_m + E_f k_f \\
E_{22} &= \left(\frac{k_m}{E_m} + \frac{k_f}{E_f}\right)^{-1} \\
\nu_{12} &= \nu_m k_m + \nu_f k_f \\
\nu_{21} &= \nu_{12}\frac{E_{11}}{E_{12}} \\
G_{12} &= \left(\frac{k_m}{G_m} + \frac{k_f}{G_f}\right)^{-1} \\
G_{23} &= G_{23} = G_m \frac{V_f + \eta_4(1 - V_f)}{\eta_4(1 - V_f) + V_f G_m / G_f} \\
\eta_4 &= \frac{3 - 4\nu_m + G_m/G_f}{4(1 - \nu_m)}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Propiedades del compuesto	
E_1 [MPa]	44535
E_2 [MPa]	8850
ν_{12}	0.305
ν_{21}	0.061
G_{12} [MPa]	3225
G_{23} [MPa]	4107

Tabla 3.4: Propiedades del compuesto según la teoría clásica de mezclas

Con la propiedades mecánicas del compuesto ya se pueden calcular las matrices Q y Q' para a continuación obtener las matrices ABD y H.

$$Q = \begin{bmatrix} 45374 & 2750 & 0 \\ 2750 & 9017 & 0 \\ 0 & 0 & 3225 \end{bmatrix} \qquad Q^* = \begin{bmatrix} 4107 & 0 \\ 0 & 3225 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

$$ABD = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 326689 & 27502 & 0 & -413559 & 0 & 0 \\ 27502 & 217419 & 0 & 0 & 413559 & 0 \\ 0 & 0 & 32250 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -413559 & 0 & 0 & 2307185 & 229182 & 0 \\ 0 & 413559 & 0 & 229182 & 2225382 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 268751 \end{array}\right] \tag{3.8}$$

$$H = \begin{bmatrix} 32157 & 0 \\ 0 & 28947 \end{bmatrix}$$

Para el estudio del micro-modelo no se obtienen las propiedades del compuesto usando la TCM sino que se usa la teoría de mezclas Serie-Paralelo. Esta teoría trabaja a nivel constitutivo, mezclando las matrices de rigidez de cada uno de los materiales simples que forman parte del compuesto, y

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

obteniendo el comportamiento global de éste, dadas las participaciones volumétricas de fibra y matriz y la dirección de las fibras. Según la dirección en la que apliquemos la carga, se genera un estado de isotensión o de isodeformación a nivel contitutivo en cada uno de los materiales simples [15].

Usamos la teoría de mezclas Serie-Paralelo porque nos permite captar el estado tensional así como la rotura o plastificación de cada uno de los materiales simples por separado. En este estudio preliminar, pero, nos centraremos en el rango elástico.

Para el presente laminado, la teoría de mezclas se ha aplicado definiendo un comportamiento en serie en la dirección de la fibra y un comportamiento en paralelo en el resto de direcciones. Las propiedades elásticas del compuesto resultantes son las que se muestran en la Tabla 3.5. Éstas son muy semejantes a las propiedades mostradas en la Tabla .

Propiedades del compuesto	
E_1 [MPa]	44535
E_2 [MPa]	10070
E_3 [MPa]	8850
ν_{12} [MPa]	0.305
ν_{21} [MPa]	0.061
G [MPa]	3225

Tabla 3.5: Propiedades del compuesto según la teoría de mezclas SP

Se aprecian ligeras diferencias entre los valores de rigidez en plano, resultantes de usar la teoría clásica de mezclas a la teoría Serie-Paralelo. Esta variación se refleja en la matrices constitutivas ABD y H, como veremos a continuación.

Usando la técnica de homogeneización descrita en el Capítulo 2 del micromodelo y cuyos resultados se muestran en el Anexo B obtenemos la matriz de rigidez que puede verse a continuación en la Ecuación 3.9.

En los estados tensionales resultantes adjuntos en Anexo se pueden apreciar las variaciones de tensiones debidas a la existencia de dos compuestos con distinta rigidez. En la Figura B.6, donde se ven las tensiones en la dirección x y y generadas al aplicar una curvatura, vemos como en la línea neutra (punto medio del espesor) las tensiones permanecen iguales a cero.

En la matriz siguiente, se muestran los errores relativos, para cada uno de los valores de la matriz ABD y de la matriz H, al comprar los resultados obtenidos con cada una de las formulaciones

$$Error.ABD = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 349302 & 31373 & 0 & -369659 & 0 & 0 \\ 31373 & 208480 & 0 & 0 & 369659 & 0 \\ 0 & 0 & 32250 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -369659 & 0 & 0 & 2418140 & 261443 & 0 \\ 0 & 369659 & 0 & 261443 & 2230377 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 368751 \end{array}\right]$$

$$Error.H = \begin{bmatrix} 32250 & 0 \\ 0 & 32250 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Al hacer una comparación directa entre los resultados obtenidos, usando la teoría clásica de láminas, y el estudio del micro modelo vemos como las matrices de rigidez muestran pequeñas variaciones en la matriz.

$$ABD = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1{,}070 & 1{,}141 & 0 & 0{,}894 & 0 & 0 \\ 1{,}141 & 0{,}959 & 0 & 0 & 0{,}894 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0{,}894 & 0 & 0 & 1{,}048 & 1{,}141 & 0 \\ 0 & 0{,}894 & 0 & 1{,}141 & 1{,}002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}000 \end{array}\right] \tag{3.10}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1{,}003 & 0 \\ 0 & 1{,}114 \end{bmatrix}$$

Estas variaciones son debidas a pequeñas diferencias que ya teníamos en el estudio del apartado anterior pero a las que hay que sumar las originadas por el cálculo de rigidez cortante realizado con la teoría Serie-Paralelo. Para el

cálculo del laminado unidireccional solo se ha definido la dirección de la fibra como dirección con comportamiento en paralelo. Esta configuración es la que resulta en una mejor aproximación al comportamiento real de un laminado unidireccional pero da como resultado una rigidez cortante igual a los tres planos, cosa que no termina de ser del todo cierta.

Para comparar las matrices obtenidas realizamos el mismo ensayo a tracción que se ha realizado en el apartado anterior. Usando la misma probeta aplicamos una tracción, imponiendo un desplazamiento en uno de sus extremos en la dirección X igual al uno por ciento de su longitud total. Como era de esperar se genera una deformación por flexión a lo largo de toda la pieza debido a los valores dentro de la matriz B que acoplan tracciones y compresiones con las curvaturas en el plano.

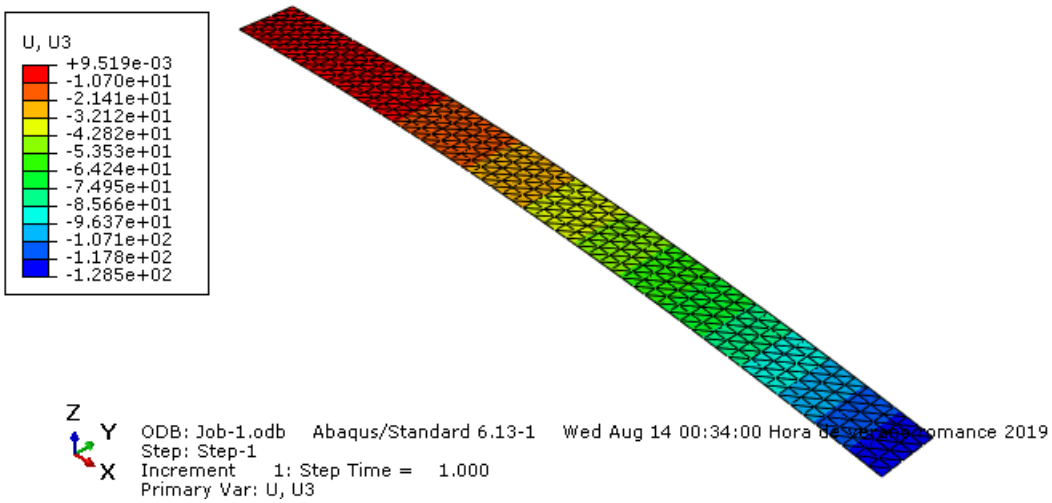


Figura 3.7: Desplazamientos en la dirección Z de la probeta de laminada sometida a tracción

Al existir diferencias entre las matrices obtenidas al usar ambas metodologías el valor registrado de esta deformación por flexión no será exactamente el mismo. Para el ensayo en el que usamos la matriz ABD obtenida al usar la TCL el valor máximo alcanza los 128.5 milímetros. Este valor se queda en 109.3 milímetros al usar la matriz ABD procedente de la homogeneización. En ambos casos la distribución de la deformación por flexión sigue el mismo patrón.

Si observamos los esfuerzos generados en las condiciones de contorno apre-

ciamos también pequeñas variaciones. A tracción los esfuerzo generados son de 24900 y 28790 Newtons al usar la TCL y la homogeneización multiescalar respectivamente.

Tanto en los valores de la deformación por flexión como en los esfuerzos registrados, la variación es de alrededor el diez por ciento, aproximadamente la misma variación que vemos de media entre los valores de ambas matrices constitutivas 3.10. Pero la ventaja de usar el análisis multi-escalar reside en que, con el estado deformacional de un elemento del macro-modelo, podemos analizar las tensiones del laminado en esa ubicación mediante su micro-modelo [5]. Por ejemplo, si nos centramos en el laminado del elemento indicado en la Figura 3.8, podemos saber su estado deformacional a partir de los desplazamientos registrados en los nodos. Una vez calculada la deformación podemos aplicarla sobre el micro-modelo imponiendo el campo de desplazamientos necesario sobre sus caras exteriores, usando las Ecuaciones 2.22.

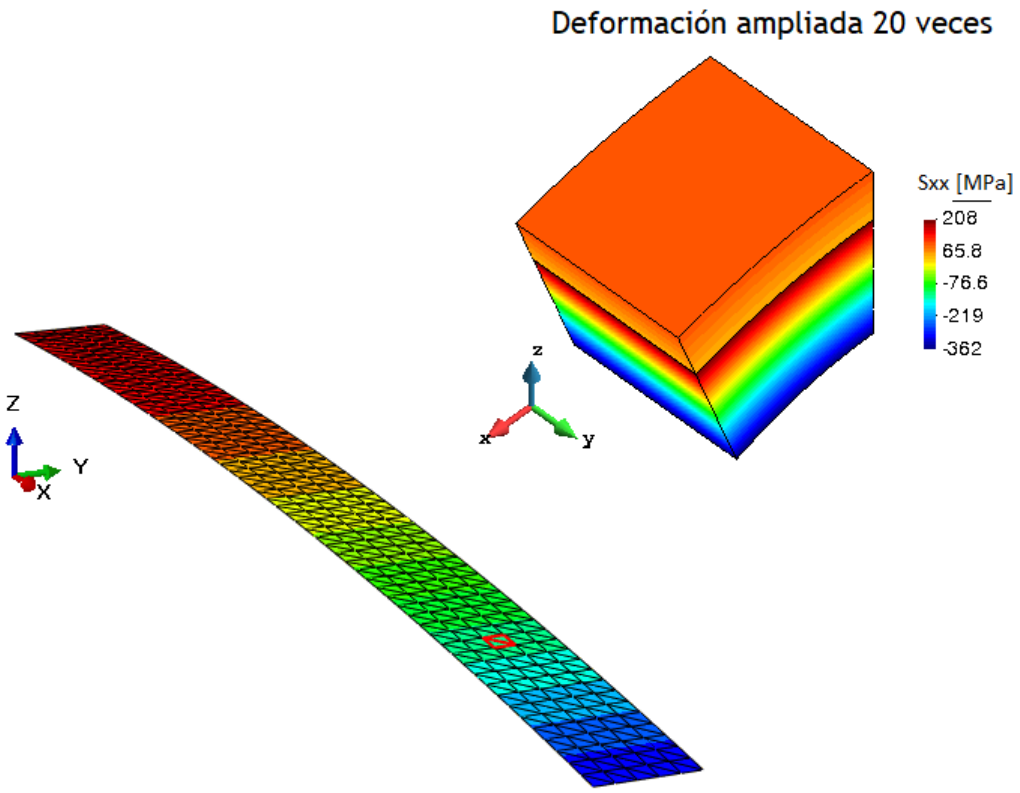
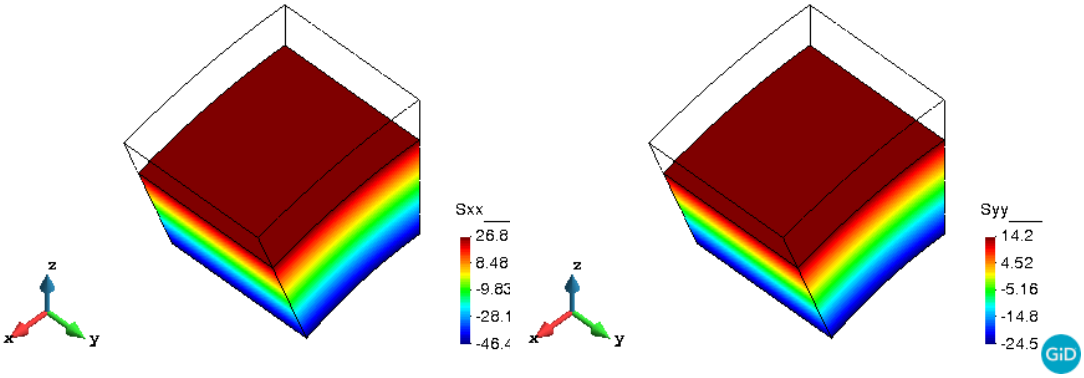


Figura 3.8: Desplazamientos en la dirección Z de la probeta de laminada sometida a tracción

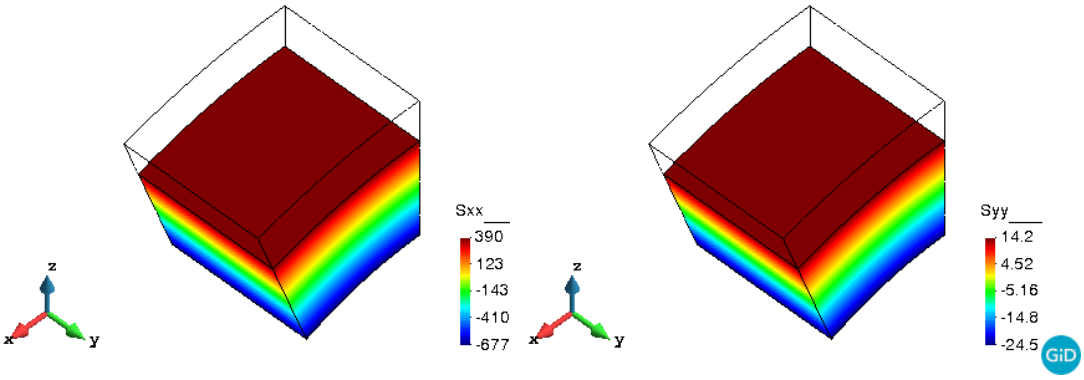
Al usar la teoría de mezclas Serie-Paralelo obtenemos las tensiones de fibra y matriz por separado en las distintas direcciones. Si representamos las tensiones mas relevantes podemos apreciar el comportamiento que caracteriza esta teoría. Un estado de isotensión en fibra y matriz en la dirección perpendiculares las fibras y un estado de isodeformacion en fibra y matriz en la dirección de las fibras.

A continuación se muestran las tensiones, en las direcciones X e Y, en fibra y matriz de las capas superiores e inferiores del laminado.



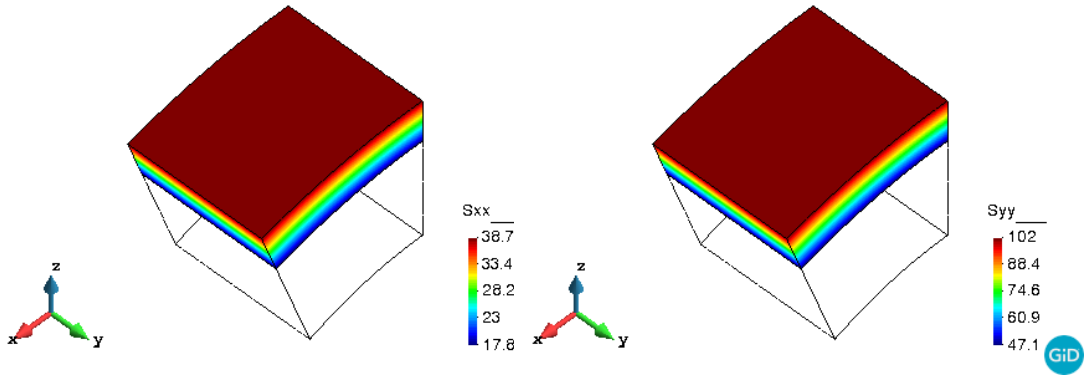
(a) Tensión σ_x (b) Tensión σ_y

Figura 3.9: Tensiones [MPa] en el la matriz de la capa inferior en un elemento del micro-modelos del laminado



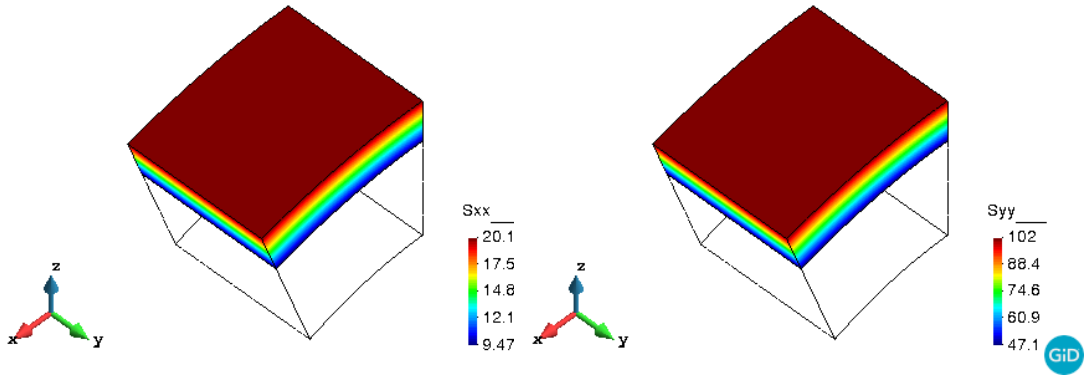
(a) Tensión σ_x (b) Tensión σ_y

Figura 3.10: Tensiones [MPa] en la fibra de vidrio de la capa inferior en un elemento del micro-modelos del laminado



(a) Tensión σ_x (b) Tensión σ_y

Figura 3.11: Tensiones [MPa] en el la matriz de la capa superior en un elemento del micro-modelos del laminado



(a) Tensión σ_x (b) Tensión σ_y

Figura 3.12: Tensiones [MPa] en la fibra de vidrio en un elemento del micro-modelos del laminado

Este control total sobre el estado tensional de los materiales simples permite capturar roturas que empiezan por afectar solo uno de los materiales, como por ejemplo la denominación.

La homogenizacion ha funcionado con unos resultados muy parecidos a los obtenidos con la TCM pero aportando las ventajas del calculo multi-escalar, sentando las bases para su implementación en el estudio de transiciones que se realiza en el siguiente y último Capítulo.

Capítulo 4

Estudio de una transición

En este cuarto y último capítulo se estudia la transición entre dos laminados de distinto espesor. Se tienen en cuenta los resultados previamente obtenidos, así como las particularidades que aparecen en la geometría de una transición. Las singularidades que más afectan al realizar el estudio y que no se daban en los laminados uniformes del capítulo anterior son la pérdida de periodicidad y de diferenciación entre escalas, no solo en la dirección del espesor, sino que también en la dirección perpendicular a la transición. A continuación, se propone y se pone a prueba una solución efectiva que tiene en cuenta las características de una transición sin perder todas las ventajas propias de un estudio multi-escala.

4.1. Estudio y comparación

La transición laminar estudiada es muy simple geométricamente. El espesor de los dos laminados unidos se reduce de nueve capas a cinco teniendo todas las capas el mismo grosor. Las capas permanecen paralelas entre ellas a lo largo de toda la transición, pero son cortadas a distintas longitudes describiendo una escalera en la cara superior del laminado.

En la Figura 4.1, que se muestra a continuación, puede verse el micromodelo usado para obtener las propiedades constitutivas de la transición. Pueden apreciarse dos grupos de capas o láminas que al igual que en el

modelo anisótropo del capítulo anterior consisten en un material compuesto unidireccional. Estas capas tienen las fibras orientadas perpendicularmente entre ellas, las capas de color rojo tienen las fibras orientadas en la dirección del eje X y las capas en color verde tienen las fibras orientadas en la dirección Y.

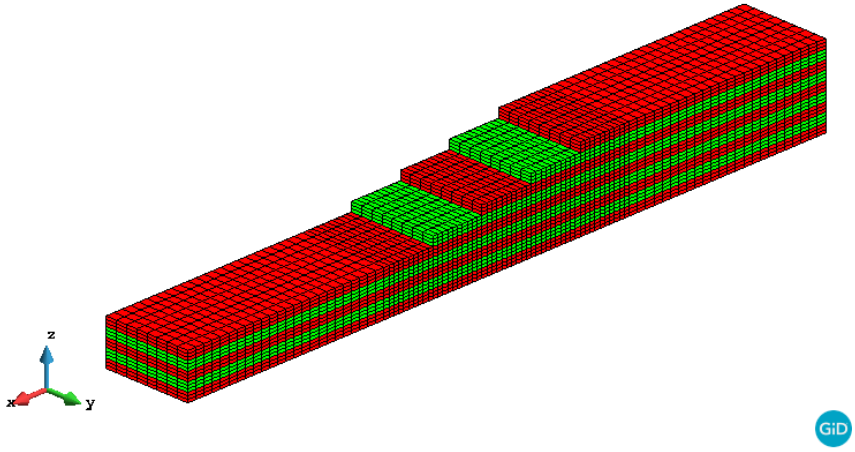


Figura 4.1: Micro-modelo mallado de la transición.

El micro-modelo tiene aproximadamente 80.000 elementos hexaédricos cuadráticos y se dispone de tres elementos en la dirección del espesor en cada una de las nueve capas. La longitud en la que tiene lugar la transición es de 18 milímetros debido a que cada escalón mide seis milímetros de largo, sin embargo, la longitud total del micro-modelo es de 78 milímetros ya que se deja un amplio margen antes y después de la transición para que la tensiones que allí aparezcan no se vean afectadas por las condiciones de contorno que se aplican a inicio y final del micro modelo en la dirección X.

En esta dirección, la X, del actual micro-modelo no existe periodicidad geométrica ni tampoco diferenciación de escalas respecto al macro-modelo. Esto nos obliga a adoptar algunas modificaciones en el proceso de homogeneización. Previamente, al trabajar con un laminado uniforme, podíamos aplicar el campo de desplazamiento en todas las caras exteriores del micro-modelo, ahora, debido a las tensiones que aparecen entra laminas observamos como se producen desplazamientos perpendiculares al plano que hay que respetar. Por este motivo las únicas caras sobre las que podemos imponer desplazamientos o restricciones en la dirección Z son las caras pintadas de color amarillo en Figura 4.2.

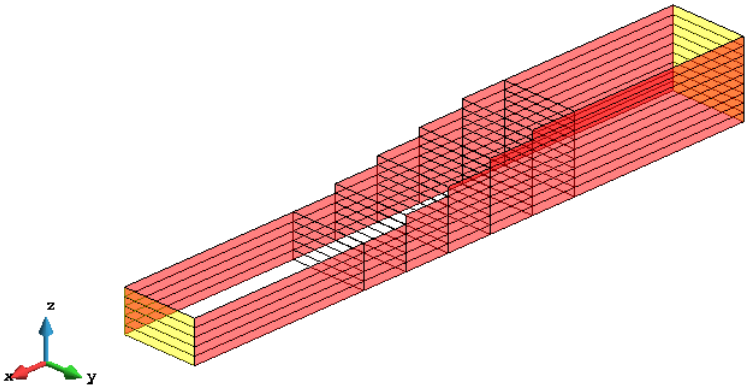


Figura 4.2: Condiciones de contorno en el micro-modelo.

Las otras caras, de color rojo, se dejan libres en la dirección del espesor y tan solo se les impone la condición de periodicidad entre ellas que deben de cumplir en todos los estados deformacionales. Al imponer deformaciones que desplazan directamente los nodos de estas caras, como puede ser la deformación ϵ_y, aplicamos los desplazamientos necesarios omitiendo los desplazamientos en la dirección Z. Las caras superior e inferior no están sujetas a ninguna restricción ni desplazamiento.

En el Anexo C pueden verse los estados tensionales más relevantes generados durante el proceso de aplicación de los distintos campos de desplazamientos sobre el micro-modelo. En ellos se ve como las tensiones en la dirección del eje Z no son iguales a cero. Esto entra en contradicción con las suposiciones realizadas inicialmente al plantear el estudio de laminados siguiendo la teoría de placas de Kirchhoff. La premisa inicial era que las tensiones y deformaciones en la dirección del espesor debidas a las deformaciones o a las curvaturas que pudieran aparecer en el plano eran despreciables. Por ese motivo se igualaban a cero los Módulos de Poisson XZ, YZ, ZX y ZY y hasta ahora los micro-modelos ensayados cumplían esta premisa. Sin embargo, ahora vemos como ya no es así y sí aparecen tensiones en esa dirección debido a las interacciones entre capas.

Para poner a prueba el comportamiento de una transición es necesario definir una gran estructura en la que la transición sea solo una pequeña parte. Por ese motivo, la comprobación se realiza en una probeta con una longitud total muy superior a la longitud del micro-modelo. La carga generada es una tracción en la dirección X en forma de desplazamiento impuesto sobre

uno de los extremos, al mismo tiempo que se le bloquea a este extremo su desplazamiento hacia arriba o hacia abajo. En los laterales se impone condición de simetría en la dirección Y por lo que el giro en Y pasa a ser despreciable.

El modelo volumétrico de referencia de la probeta descrita se malla con un elevado número de elementos hexaédricos de orden superior por lo que su costo computacional será también muy elevado. Sin embargo, el objetivo de este modelo es conseguir que su comportamiento sea lo más parecido al comportamiento que podríamos esperar en un modelo real ya que servirá como referencia para los análisis realizados con elementos superficiales. En la Figura 4.3 se muestra el modelo final así como una representación de sus condiciones de contorno. En la Tabla 4.1 que se muestra en el siguiente apartado se compara el número de elementos de entre los distintos modelos.

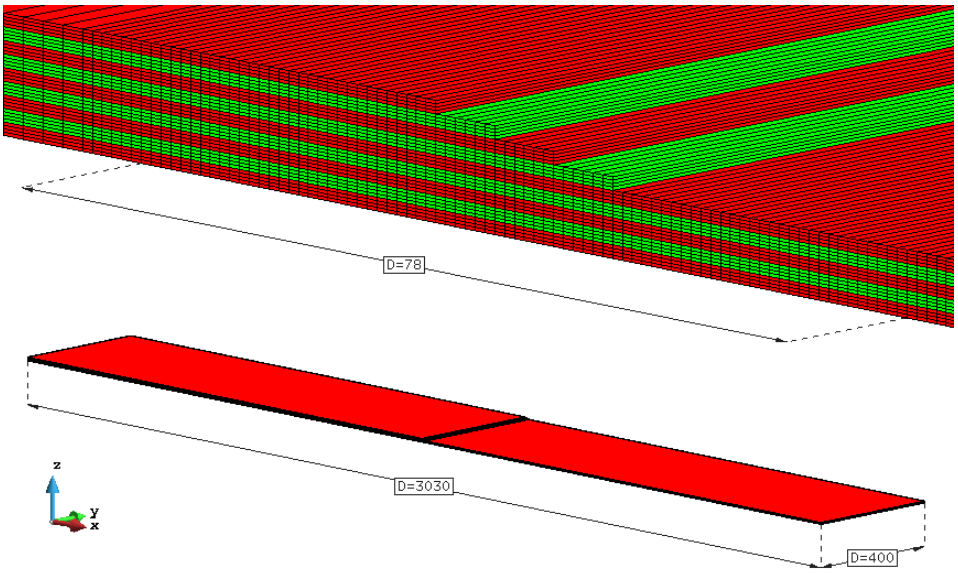


Figura 4.3: Modelo volumétrico de la probeta con una ampliación en la zona de la transición.

El siguiente paso es definir esta misma probeta, pero con elementos superficiales. Se realizarán dos modelos, uno que utiliza la teoría clásica de láminas, y otro en el que se utiliza el procedimiento multi-escala desarrollado. Una vez analizada la probeta mediante las tres metodologías se compararán los resultados obtenidos. Estos pasos se realizan a continuación en los siguientes apartados y sub-apartados.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

4.1.1. Modelo según la TCL

Tratándose de una transición relativamente simple, en que las capas son siempre paralelas entre ellas, podemos estudiarla como la unión consecutiva de varios laminados y por lo tanto calcular las matrices de rigidez Q, ABD y H de cada una de las secciones usando la teoría clásica de láminas.

El modelo superficial tiene las mismas medidas que el modelo volumétrico, pero ahora usamos elementos rectangulares de orden superior para generar su malla. El tamaño medio de los elementos usados es igual a la longitud del micro-modelo ya que una malla análoga se usará en el próximo modelo multi-escalar. La diferencia entre ambos modelos superficiales reside, aparte de en las matrices constitutivas usadas, en el elemento de transición. Basándonos en la Figura 4.1 es fácil ver que serán necesarios un total de cinco laminados. Dos para representar el laminado anterior y posterior a la transición y otros tres para que definir los laminados intermedios. Es por este motivo por el que dividimos el elemento de transición en cinco de más pequeños, como puede verse en la Figura adjunta 4.4.

El cálculo de las matrices constitutivas se hace siguiendo los mismos pasos que en el apartado 3.2.

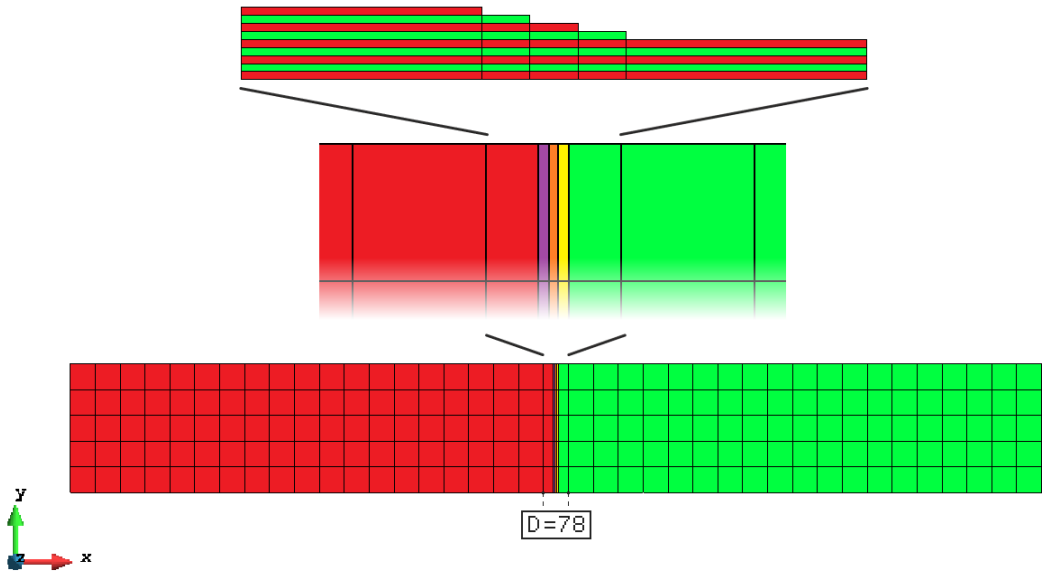


Figura 4.4: Desplazamientos en la dirección Z de la probeta de laminada sometida a tracción

Sin embargo, sea cual sea la deformación resultante en la línea neutra respecto la deformación obtenida en el modelo volumétrico, las tensiones que obtendremos capa por capa en el modelo superficial en la transición y cerca de ella no coincidirán nunca con las que se generen en nuestro modelo volumétrico. Usando la TCL las tensiones en cada una de las capas se obtienen multiplicando el vector deformaciones y curvaturas por la matriz constitutiva del laminado en ese mismo punto. A la práctica esto se traduce en que, en las inmediaciones de una irregularidad, como puede ser el final o inicio de una capa, no sea posible capturar la concentración de las tensiones hacia las capas que tienen continuidad a lo largo del modelo pues la tensión se reparte entre todas y cada una de las capas terminen abruptamente o no. Por lo tanto, perdiendo la información necesaria para captar, entre otros, la delaminación debida a la transición.

4.1.2. Modelo multi-escalar

El macro-modelo de la probeta usado en el estudio multi-escalar es exactamente igual que el usado en el apartado anterior con una sola diferencia, en este modelo solo usamos un elemento en la zona de transición. Este elemento representa el micro-modelo respetando su longitud real en la dirección X, es decir su longitud.

Esto reduce ligeramente el tamaño de la malla respecto la anteriormente usada y representada en la Figura 4.4 ya que antes dividíamos el elemento de transición entre cinco para representar cada uno de los laminados que allí aparecían. El macro-modelo y su malla pueden verse en la Figura 4.5 que se muestra a continuación donde la transición está representada por la hilera de elementos de color magenta.

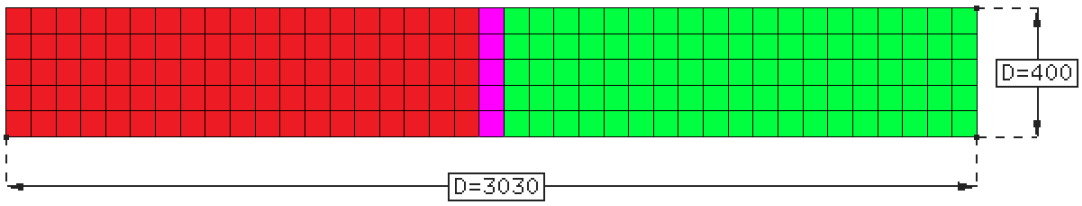


Figura 4.5: Desplazamientos en la dirección Z de la probeta de laminada sometida a tracción

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

4.2. Estudio y comparación de los resultados

Del análisis de las distintas probetas obtenemos resultados a nivel macroscópico y microscópico parecidos, pero no idénticos y que vale la pena comparar.

La primera diferencia que hay que remarcar es la variación en el tiempo de cálculo entre los tres modelos. En la Tabla 4.1 se muestra el tiempo necesario para realizar cada una de las simulación usando el mismo procesador así como información relativa a la malla para cada uno de los modelos.

Modelo	Num. Elem.	Num. Nodos	Cálculo [seg]
Volumétrico [C3D20]	81720	384253	219
TCL [S8R]	225	776	13
Multi-escalar [S8R]	195	674	12

Tabla 4.1: Numero elementos y nodos con los respectivos tiempos de calcula para cada uno de los tres modelos

El tiempo de cálculo del modelo volumétrico supera con creces el tiempo necesario para los modelos superficiales. Cabe recordar que este es uno de los principales motivos por el que se opta por el cálculo multi-escalar ya que con un tiempo de cálculo análogo al de las simulaciones con elementos superficiales conseguimos reproducir los estados tensionales correspondientes a modelos volumétricos.

4.2.1. Comparación de los resultados en deformaciones

La tracción impuesta sobre la probeta se aplica imponiendo un desplazamiento en la dirección X en uno de los extremos de la misma, pero a su vez se restringe el movimiento de este extremo en la dirección del eje Z, esto genera una curvatura asimétrica en zona central. Los distintos laminados y su zona de transición generan distintos momentos al verse sometidos a tracción por lo que el giro que describen varia a lo largo de la probeta. En la Figura 4.6 puede verse la geometría del modelo volumétrico una vez deformada.

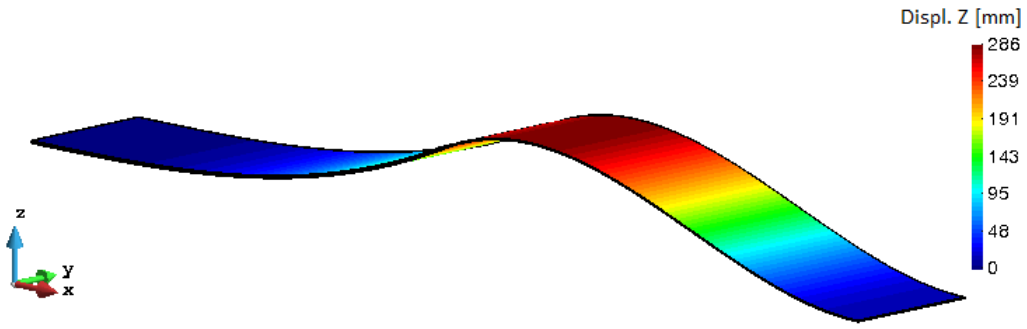


Figura 4.6: Desplazamientos en la dirección Z de la probeta volumétrica sometida a tracción

La deformación resultante es muy pronunciada debida a la gran carga impuesta siendo la deformación por flexión máxima de alrededor 30 centímetros. A pesar de que podemos estar ligeramente alejados de la deformación real que adoptaría la estructura, ya que con deformación tan significativas entramos dentro del rango de grandes deformaciones, los resultados nos servirán para realizar una comparativa entre los tres modelos usados, el volumétrico, el superficial definido con la TCL y el superficial definido usando el proceso multi-modelo propuesto. Si representamos la deformación por flexión registrada en los tres modelos a lo largo de la longitud de la probeta obtenemos la gráfica representada en la Figura 4.7 que se muestra a continuación.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

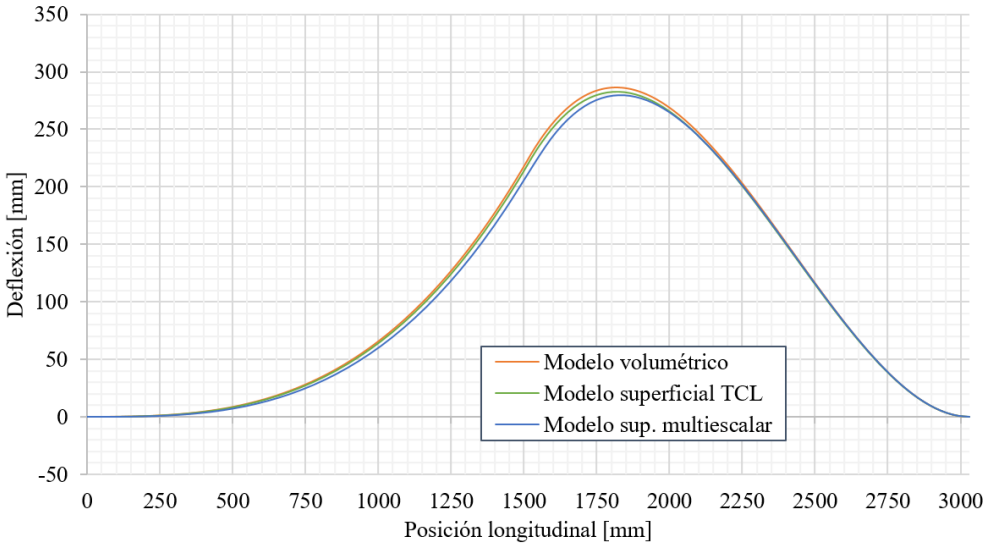


Figura 4.7: Deflexión a lo largo de la probeta en los distintos modelos

En los tres modelos registramos una deformación por flexión muy parecida y a simple vista podría parecer que no hay diferencias entre los tres estados deformacionales resultantes. Así, que para apreciar más al detalle que esta ocurriendo en las probetas, representamos el giro registrado en los nodos de las dos probetas superficiales y calculamos el giro de la línea neutra del modelo volumétrico.

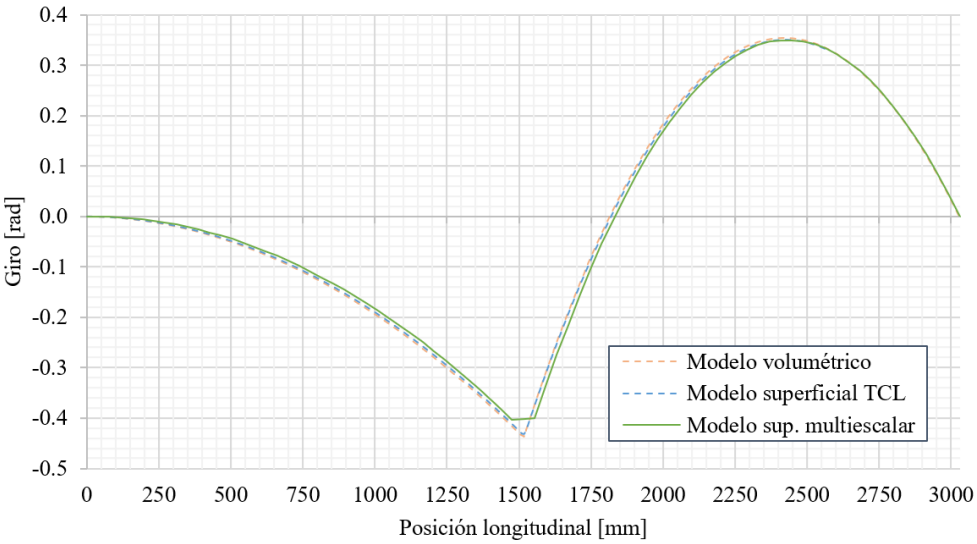


Figura 4.8: Giro registrado en la zona de transición.

En esta nueva Figura 4.8 vemos un comportamiento general también muy parecido pero con algunas variaciones entre modelos. Estas están concentradas justamente en la zona de transición y acercándonos un poco podemos diferenciar con mayor facilidad que ocurre en esta zona crítica (Figura 4.9).

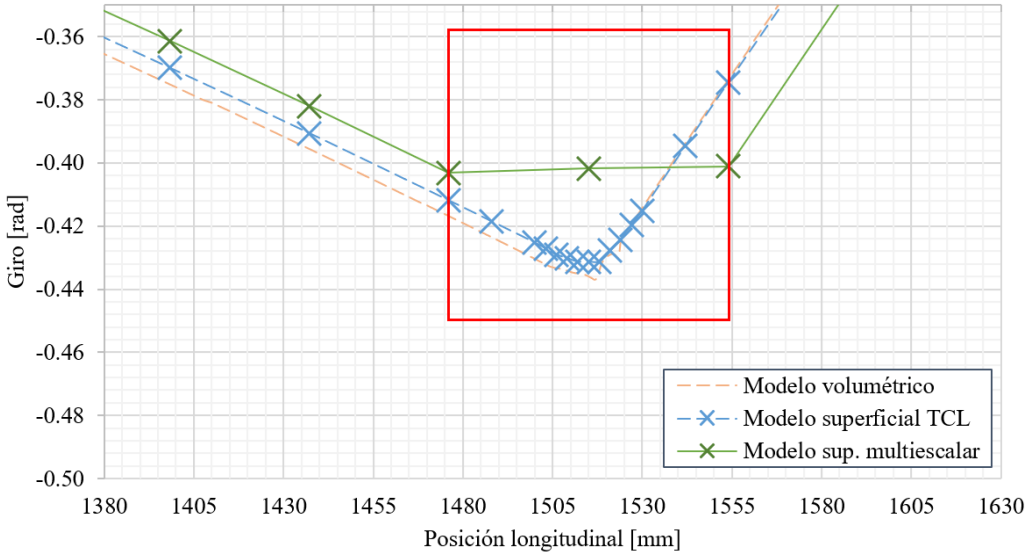


Figura 4.9: Desplazamientos en la dirección Z de la probeta de laminada sometida a tracción (Deformación real, no escalada)

El cuadrado rojo de la Figura 4.9 delimita el elemento de transición usado en el modelo multi-escalar de 78 milímetros de longitud, la misma longitud que el micro-modelo. Al tratarse de un elemento de orden superior éste tiene un total de tres nodos en sus aristas laterales, justamente los tres que vemos representados con cruces en la gráfica. Esta zona también se corresponde con el conjunto de 5 elementos usados en el modelo superficial definido con la TCL para discretizar la transición. Vemos como justamente este modelo tienen un comportamiento muy parecido llegando al modelo volumétrico, especialmente a la derecha de la transición.

Sin embargo, no se da esta similitud en el modelo multi-escalar, donde el giro registrado dentro del elemento de transición es casi constante y no fluctúa de la misma forma que lo hacen los otros dos modelos.

Esto ocurre porque tanto en el modelo volumétrico como en el modelo definido con la TCL tenemos varios elementos con sus respectivos nodos que si

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

siguen la silueta cambiante de la zona de transición. En cambio, en el modelo multi-escalar solo tenemos un elemento al que asignamos la rigidez fruto de la homogeneización del micro-modelo. Es decir, toda la malla deformada del micro-modelo queda promediada y representada por una rigidez global que aplicamos a lo largo de toda la zona de transición, en este caso, representada por un elemento. Esto diluye por completo las deformaciones localizadas y alterando también la deformación global de la estructura en el macro-modelo.

4.2.2. Comparación del estado tensional

Gracias, de nuevo, al modelo volumétrico sabemos exactamente en qué estado tensional se encuentran las distintas capas del laminado, incluida la transición. En el caso que nos ocupa las tensiones más representativas son: las que van en la dirección del eje X, ya que nos muestran las cargas en la dirección en la que aplicamos la tracción, y las tensiones en la dirección del eje Z juntamente con las tensiones cortantes en el plano XZ, ambas, principales causantes de la delaminación. En las tres Figuras que se adjuntan a continuación pueden verse los citados estados tensionales en el modelo volumétrico de referencia.

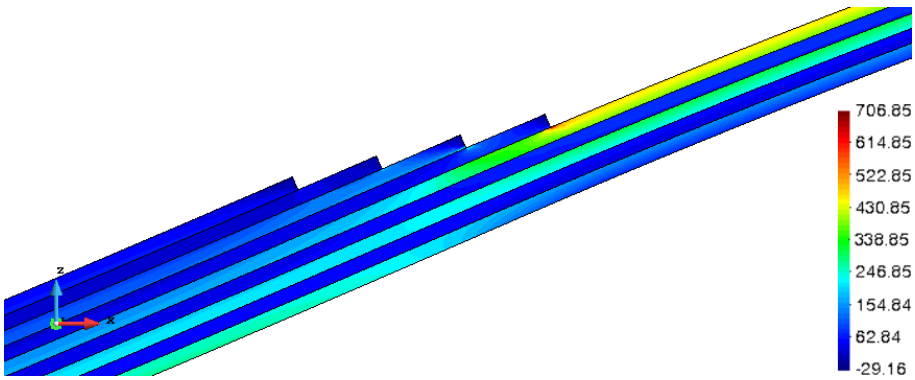


Figura 4.10: Tensiones [MPa] en la dirección X en el modelo volumétrico

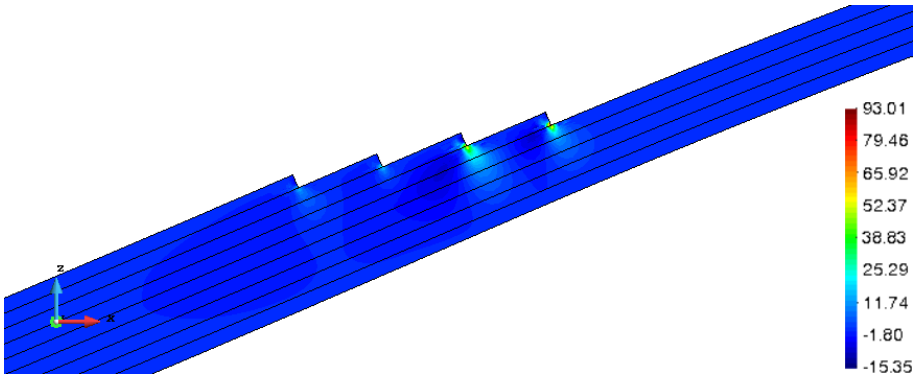


Figura 4.11: Tensiones [MPa] en la dirección Z en el modelo volumétrico

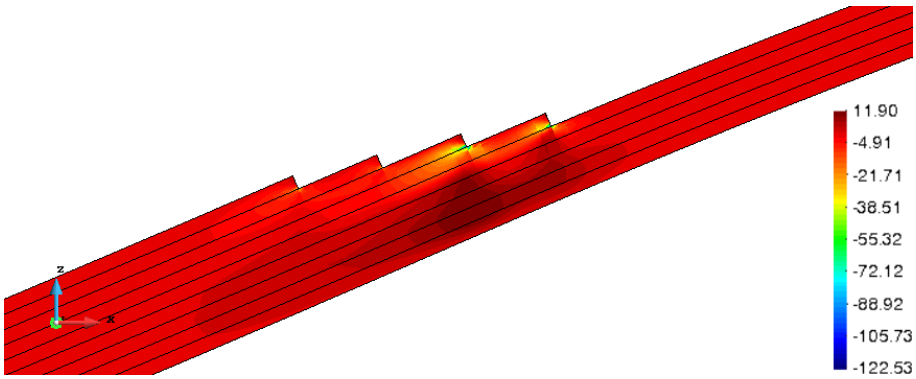


Figura 4.12: Tensiones [MPa] cortantes en el plano XZ del modelo volumétrico

En la zona de transición las tensiones en la dirección X son más elevadas en las láminas no cortadas con las fibras orientadas hacia este mismo eje debido a la alta rigidez de estas. Por lo contrario, las láminas que si terminan abruptamente apenas sufren tracción y la poca que experimentan es debida al efecto cohesivo que existe entre capas. Es esta misma transmisión de tracción es lo que origina concentración de tensiones en la dirección Z, y los cortantes en el plano XZ, localizados justo en las esquinas interiores de los escalones descritos por la transición.

Sabiendo que distribución de tensiones se produce en el modelo de referencia comprobaremos si en el micro-modelo correspondiente al elemento de transición se dan unas tensiones iguales o por lo menos parecidas. Este cambio de escala se realiza aplicando los giros registrados en los extremos

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

del elemento del macro-modelo a las caras análogas del micro-modelo. En la dirección Y perpendicular a las caras donde aplicamos los giros no existe curvatura ya que el giro en esta dirección es cero y ambas caras permanecen paralelas.

De antemano ya sabemos que la deformación obtenida en el macro-modelo multi-escalar distaba bastante de la deformación en el modelo de referencia cosa que generaba unos giros distintos. Al aplicarlos al micro-modelo, juntamente con la deformación en la dirección X, obtenemos la siguiente distribución de tensiones.

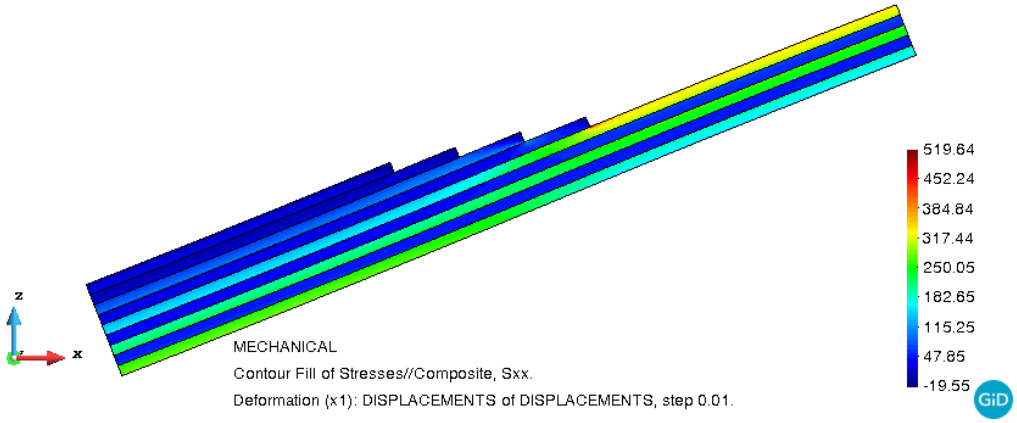


Figura 4.13: Tensiones [MPa] en la dirección X en el modelo volumétrico

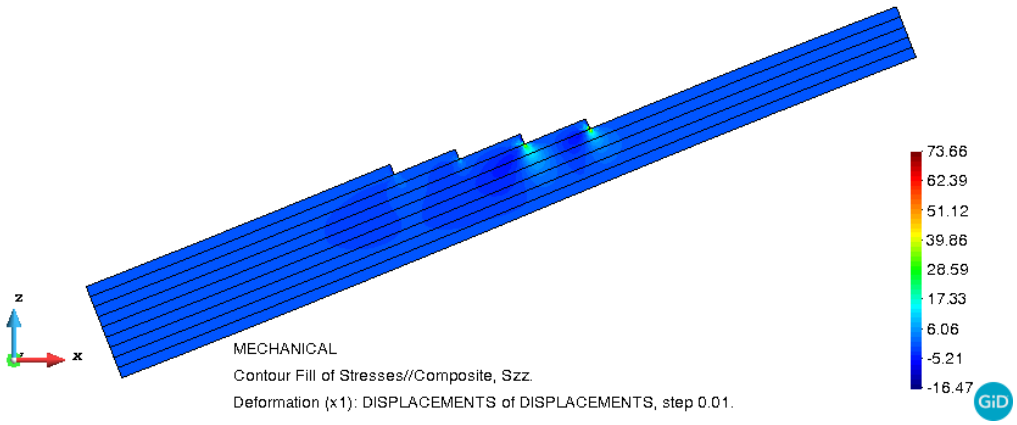


Figura 4.14: Tensiones [MPa] en la dirección Z en el modelo volumétrico

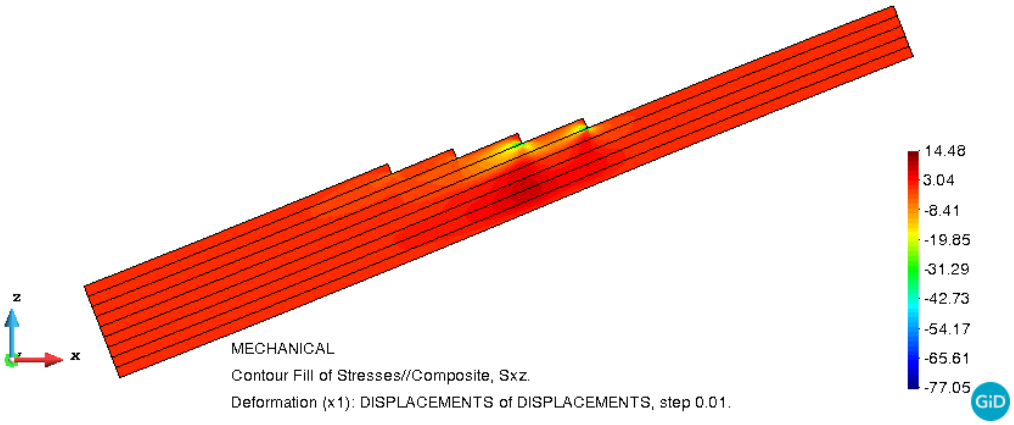


Figura 4.15: Tensiones [MPa] cortantes en el plano XZ del modelo volumétrico

La comparación de las tensiones obtenidas en el micro-modelo con las tensiones obtenidas en el modelo volumetrico muestra una gran similitud en el patrón de las mismas, pero no sus valores máximos y mínimos. Esto es debido a que los giros aplicados en el multi-modelo son prácticamente iguales a ambos lados del micro-modelo y por lo tanto la curvatura fruto de la variación entre ambos es extremadamente pequeña. Consiguientemente las tensiones que nos aparecen en el micro-modelo son debidas principalmente a la deformación ϵ_x que si tiene un valor similar al del modelo de referencia.

Sin embargo si usamos directamente los giros registrados en el modelo volumétrico de referencia y los aplicamos en el micro-modelo obtenemos unas tensiones con unos valores máximos y mínimos casi idénticos como puede verse en las Figuras 4.10, 4.11 y 4.12 mostradas a continuación.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

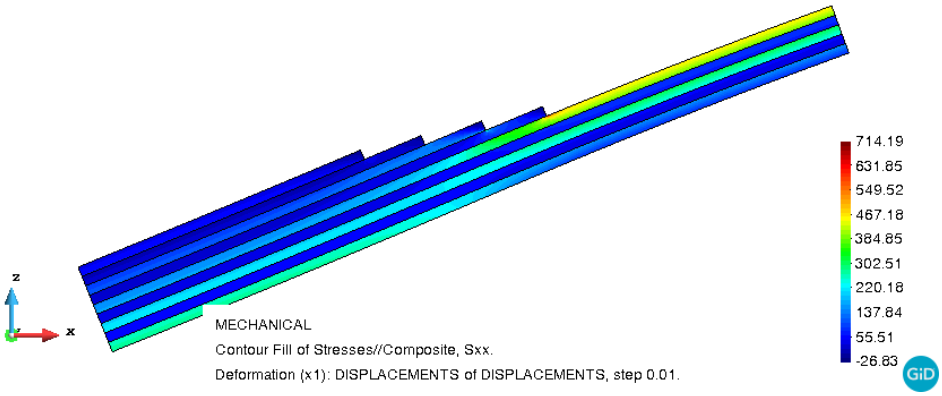


Figura 4.16: Tensiones [MPa] en la dirección X en el modelo volumétrico

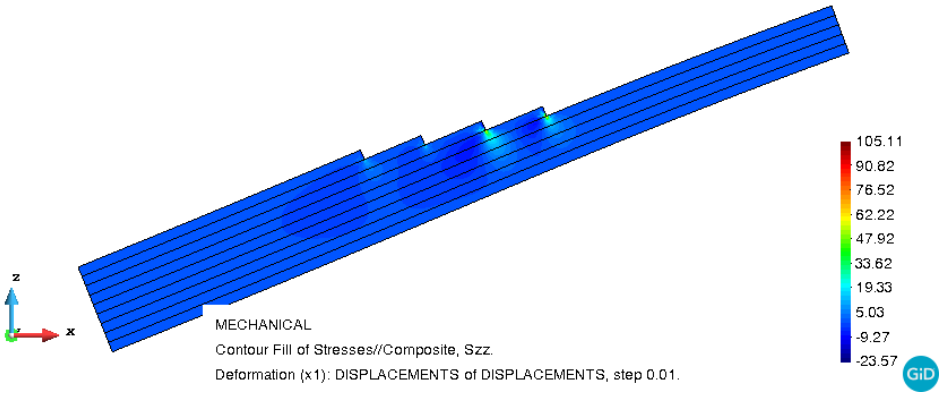


Figura 4.17: Tensiones [MPa] en la dirección Z en el modelo volumétrico

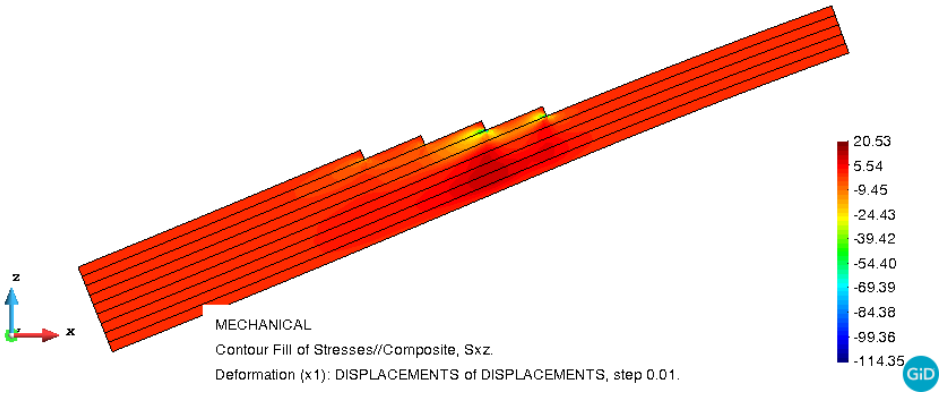


Figura 4.18: Tensiones [MPa] cortantes en el plano XZ del modelo volumétrico

Este resultado nos permite concluir que si se obtuviese una mejor representación de los giros en el multi-modelo, que se podría obtener aplicando elementos de alto orden en la simulación del modelo macro, de modo que capturen mejor la curvatura existente, el procedimiento multi-modelo desarrollado puede proporcionar resultados prácticamente idénticos a los proporcionados por un modelo volumétrico.

Finalmente, indicar que no se han mostrado resultados del modelo que utiliza la TCL en este apartado ya que la discretización que hace de la estructura este modelo no permite obtener las tensiones mostradas. Este tipo de modelos es capaz de proporcionar las tensiones en las distintas capas del laminado, pero no las tensiones producidas por la interacción entre las distintas capas.

Capítulo 5

Conclusiones

En primer lugar, podemos afirmar que el método de homogeneización propuesto en el Capítulo 2 en el que usamos el campo de desplazamientos basado en las teorías de Kircchoff y Midline-Reissner funciona correctamente. Este campo impone sobre el micro-modelo un estado deformacional análogo al experimentado por los elementos superficiales del macro-modelo y que respeta las suposiciones de ambos autores dando lugar, en el micro-modelo, a unas reacciones que reflejan una rigidez estructural muy parecida a la rigidez laminar calculada con la Teoría Clásica de Laminas. Esto se ve claramente reflejado en las deformaciones y las reacciones de las probetas ensayadas en las simulaciones del Capítulo 3.

Sin embargo, donde de verdad vamos más allá respecto los resultados que pueden obtenerse aplicando la Teoría Clásica de Laminas es en el estudio de las transiciones, mediante la modificando el proceso de homogeneización usado en los laminados uniformes. La modificación propuesta mezcla el análisis multi-escalar y el análisis multi-modelo y da las libertades de movimiento suficientes y necesarias para evitar tensiones parasitarias, permitiendo al mismo tiempo que se desarrollen las interacciones entra laminas que dan lugar a las zonas críticas y de posible rotura. Algunas de estas tensiones pueden verse en los resultados del Capítulo 4. Donde, aplicando los giros y deformaciones del modelo de referencia al micro-modelo obtenemos un estado tensional casi idéntico, confirmando que la rigidez obtenida en la homogeneización representa el global de la transición y puede substituir todo el micro-modelo. A pesar de obtener casi los mismos resultados el ahorro de costo computacional es notorio y llega a reducirse unas veinte veces, como puede verse al comparar

el tiempo de la simulaciones volumétrica con los tiempos de las simulaciones superficiales, adjuntos en la tabla 4.1.

No obstante, queda por mejorar la deformación del elemento de transición en el macro-modelo superficial, dándole la posibilidad de adoptar una deformación menos uniforme y que se acerque más a la que vemos en el modelo volumétrico de referencia [7] [4]. Reduciendo, de esta forma, el impacto del elemento de transición sobre la deformación global de la estructura y por ende obteniendo unas tensiones más precisas al analizar el micro-modelo. Este nivel de deformación irregular y atípica propia de las transiciones podría lograrse usando un elemento de orden superior calibrado expresamente para cada micro-modelo estudiado.

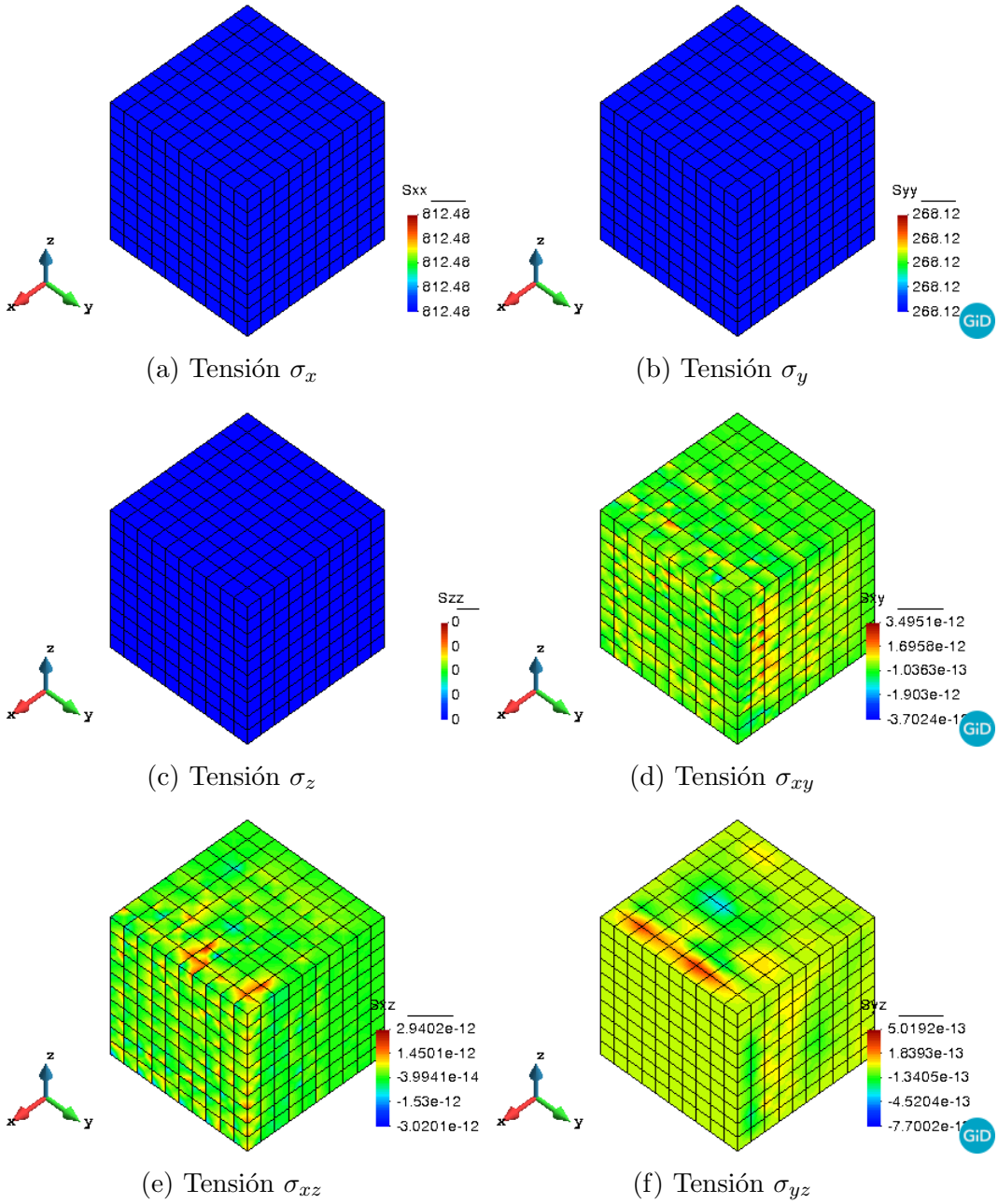
Finalmente, sería muy interesante realizar estudios usando materiales con leyes de plasticidad o daño y analizar el comportamiento de toda la estructura al sufrir, por ejemplo, una delaminación en los elementos de transición. Finalmente, si pudiera ser, comprobar los resultados de las simulaciones con ensayos experimentales.

Apéndice A

Homogeneización del laminado de aluminio de diez milímetros de espesor

Micro-modelos resultantes de la aplicación de las deformaciones necesarias para realizar la homogeneización del laminado usado en el apartado 3.1.

Deformación ϵ_x



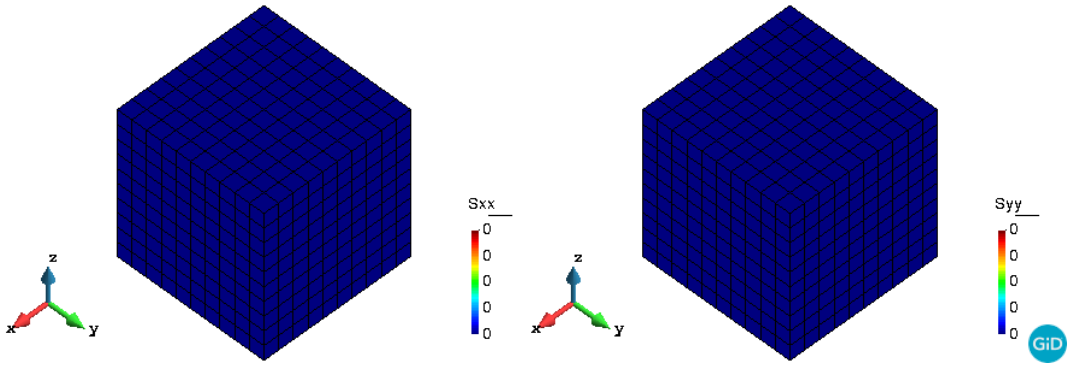
(a) Tensión σ_x (b) Tensión σ_y

(c) Tensión σ_z (d) Tensión σ_{xy}

(e) Tensión σ_{xz} (f) Tensión σ_{yz}

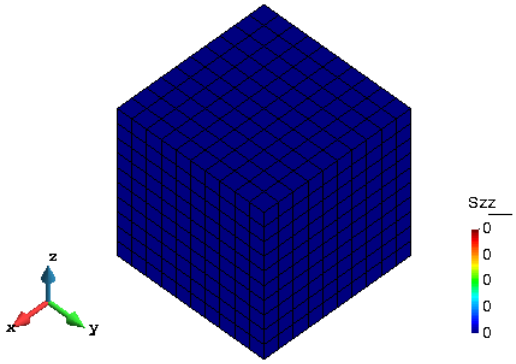
Figura A.1: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_x = 0{,}01$

Deformación ϵ_{xy}

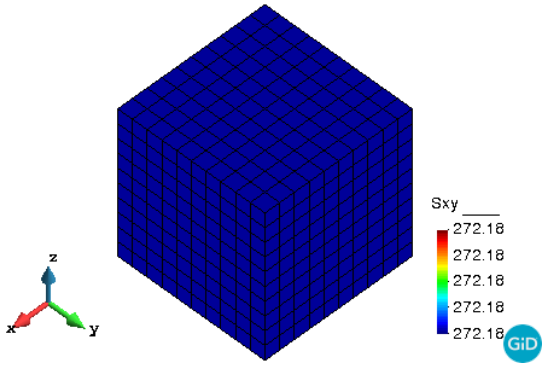


(a) Tensión σ_x

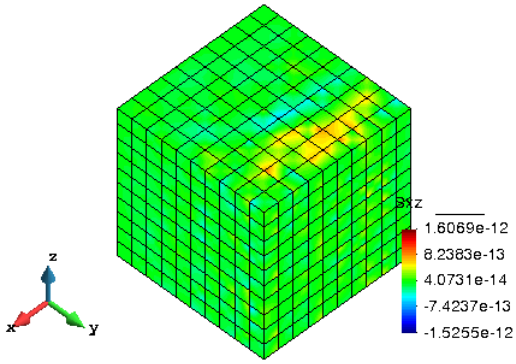
(b) Tensión σ_y



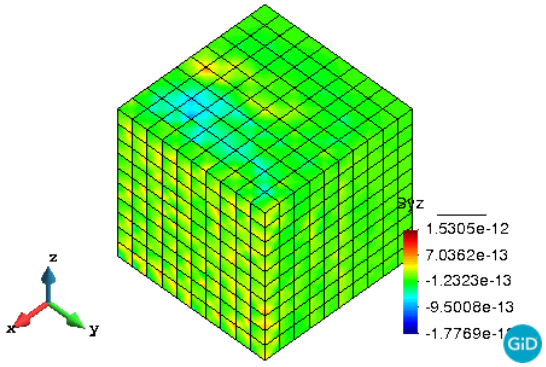
(c) Tensión σ_z



(d) Tensión σ_{xy}



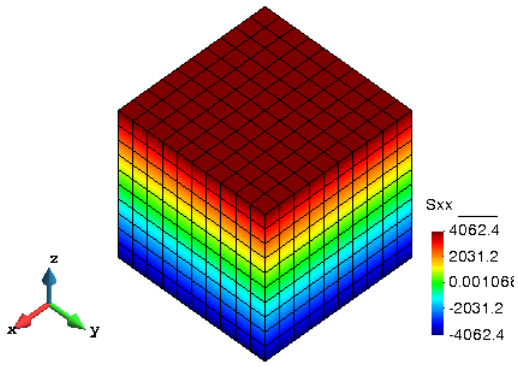
(e) Tensión σ_{xz}



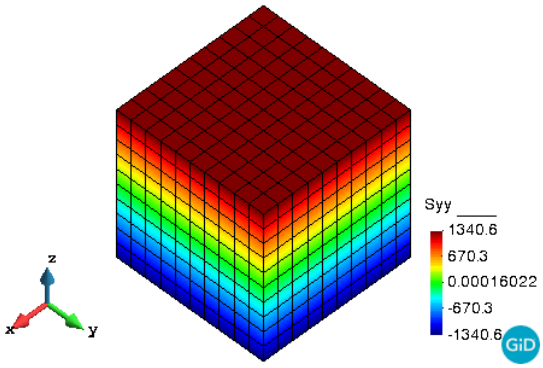
(f) Tensión σ_{yz}

Figura A.2: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_{xy} = 0{,}01$

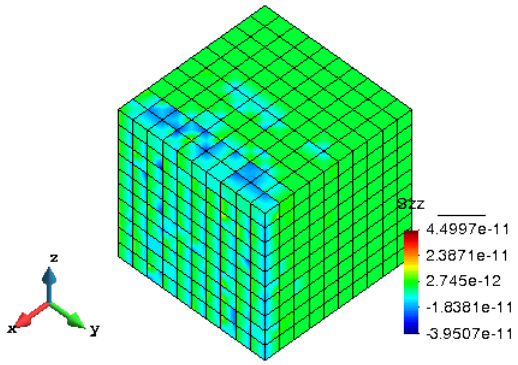
Deformación κ_{xx}



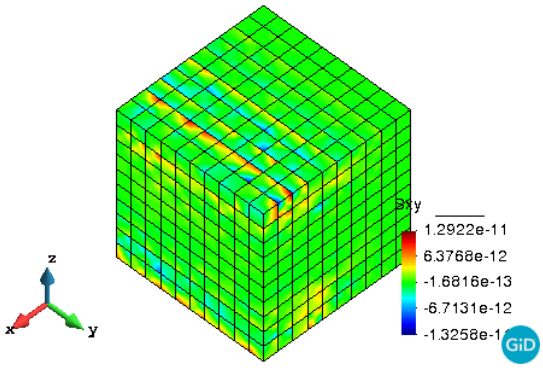
(a) Tensión σ_x



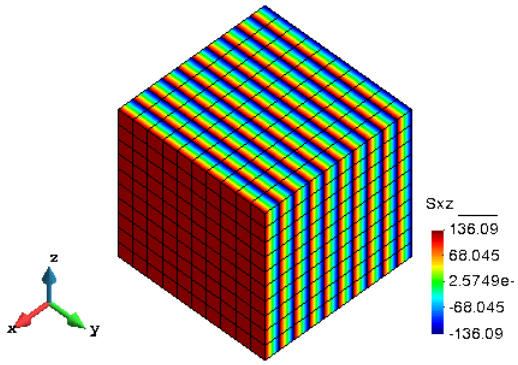
(b) Tensión σ_y



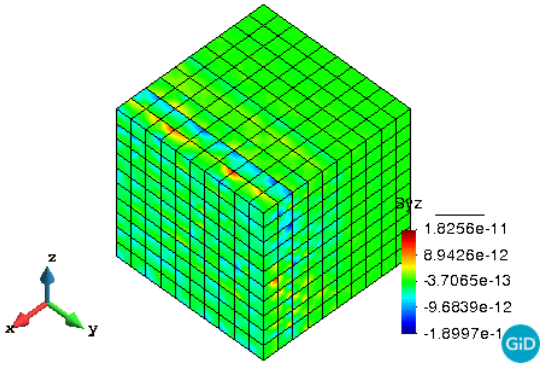
(c) Tensión σ_z



(d) Tensión σ_{xy}



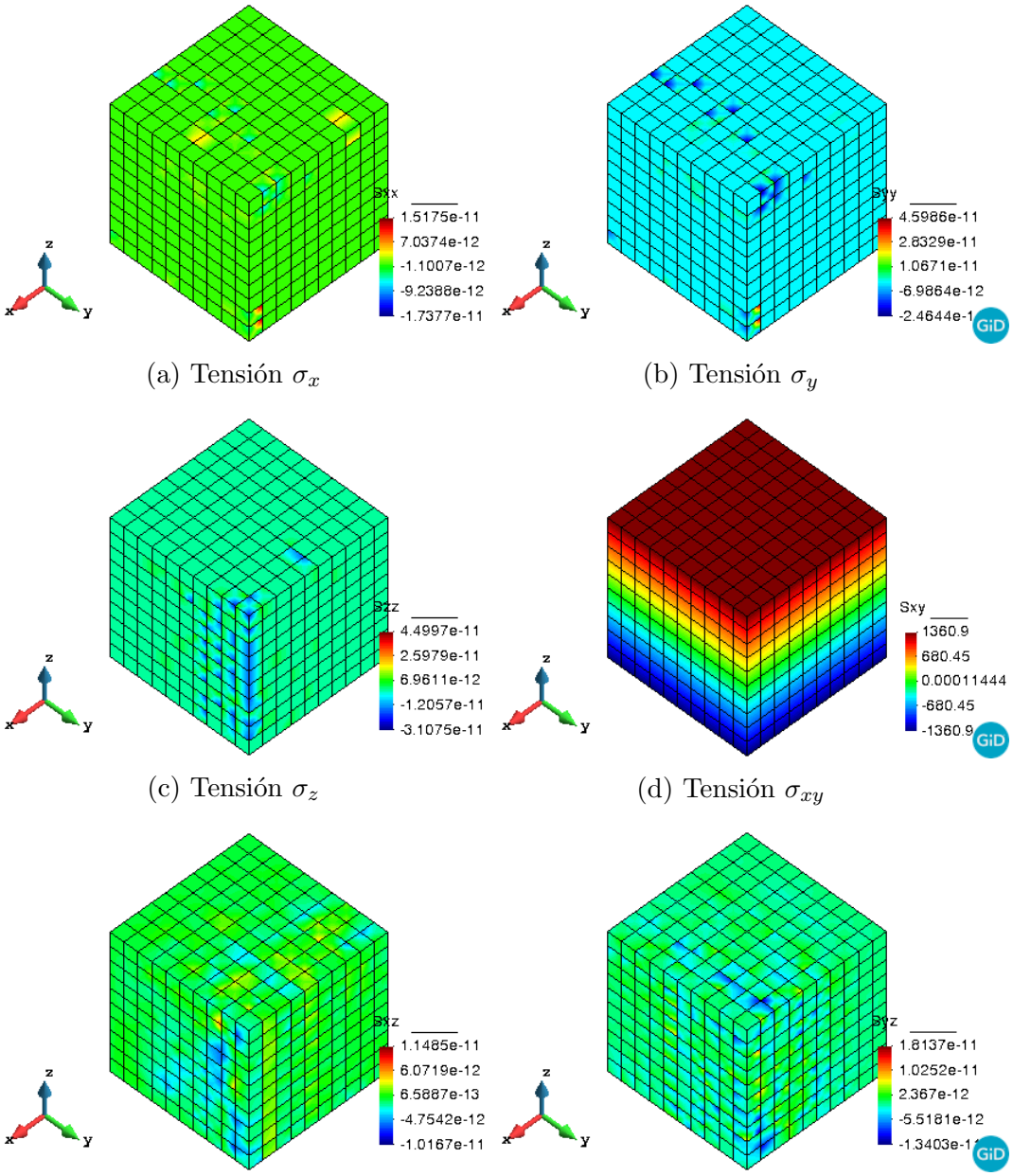
(e) Tensión σ_{xz}



(f) Tensión σ_{yz}

Figura A.3: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\kappa_x = 0{,}01$

Deformación κ_{xy}



(a) Tensión σ_x (b) Tensión σ_y

(c) Tensión σ_z (d) Tensión σ_{xy}

(e) Tensión σ_{xz} (f) Tensión σ_{yz}

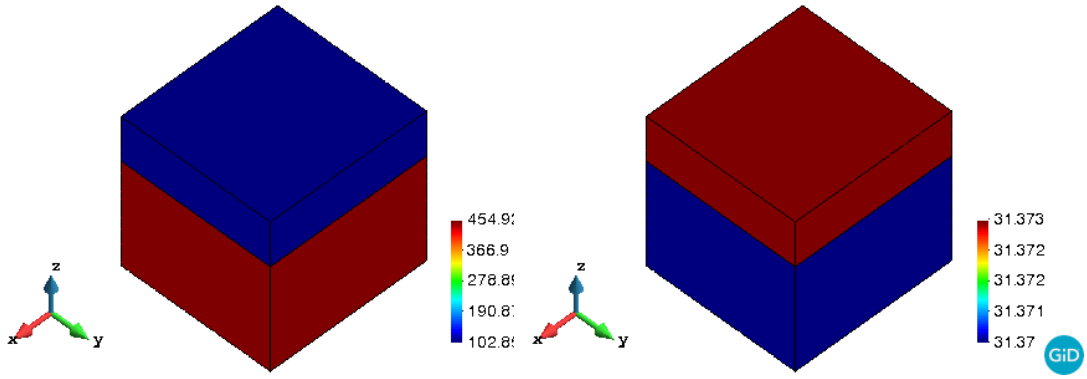
Figura A.4: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\kappa_{xy} = 0{,}01$

Apéndice B

Homogenizacion del laminado multi-capa de material compuesto y diez milímetros de espesor

Micro-modelos resultantes de la aplicación de las deformaciones necesarias para realizar la homogeneización del laminado usado en el apartado 3.2. Se han omitido las figuras correspondientes a tensiones en las direcciones iguales a cero.

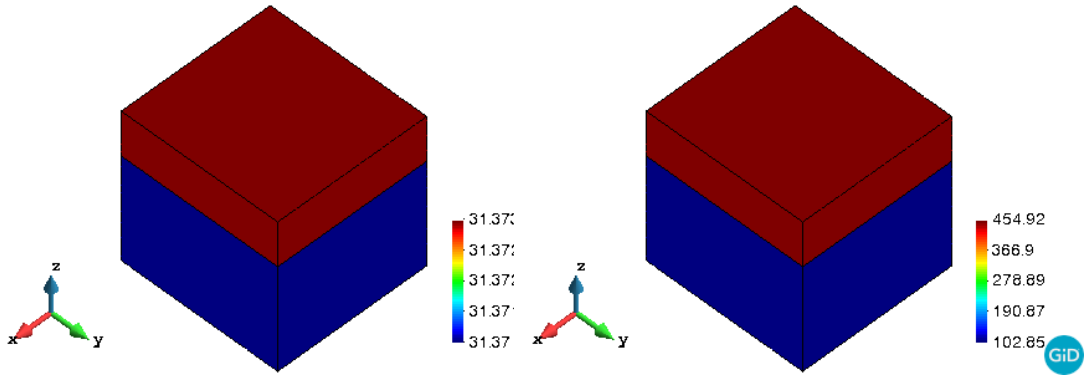
Deformación ϵ_x



(a) Tensión σ_x (b) Tensión σ_y

Figura B.1: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_x = 0{,}01$

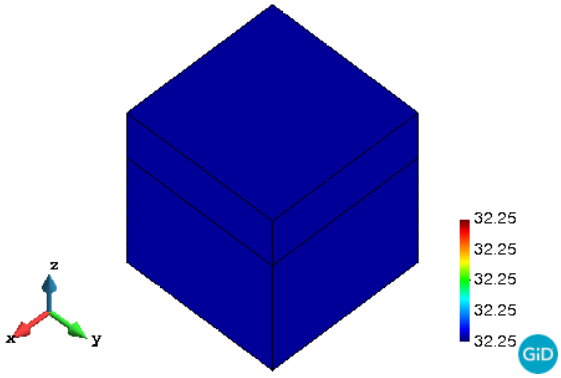
Deformación ϵ_y



(a) Tensión σ_x (b) Tensión σ_y

Figura B.2: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_y = 0{,}01$

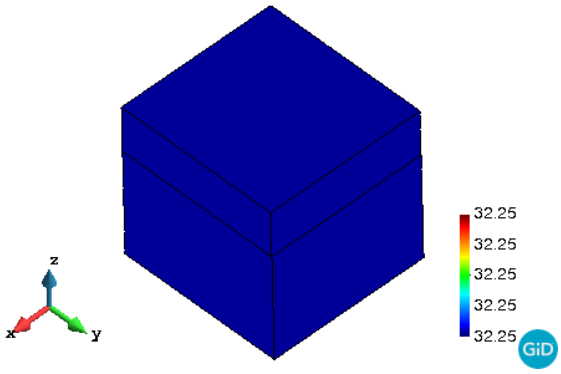
Deformación ϵ_{xy}



(a) Tensión σ_x

Figura B.3: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_x = 0{,}01$

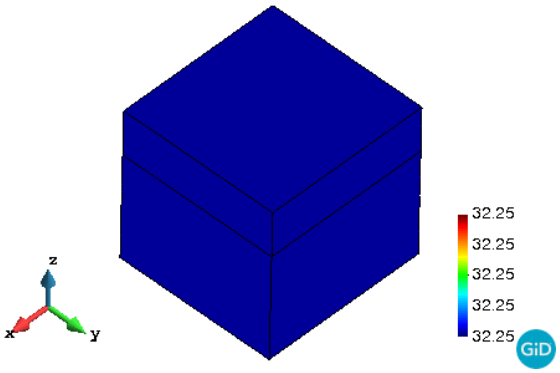
Deformación ϵ_{xz}



(a) Tensión σ_x

Figura B.4: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_{xy} = 0{,}01$

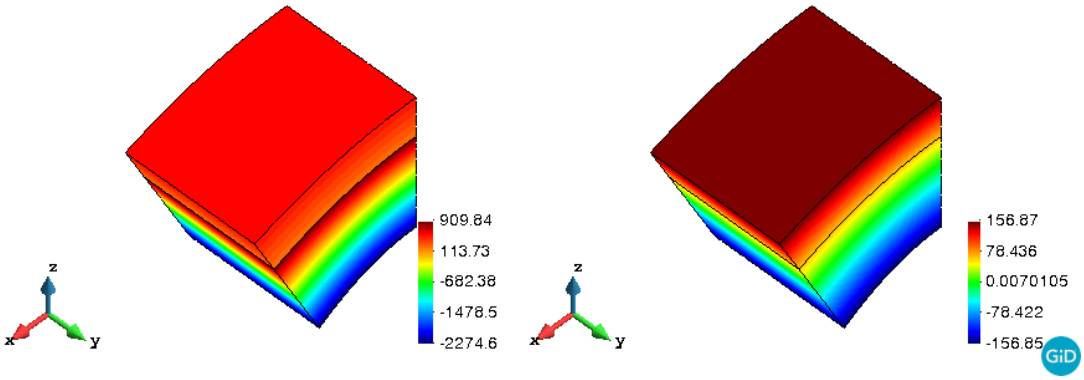
Deformación ϵ_{yz}



(a) Tensión σ_x

Figura B.5: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\epsilon_{yz} = 0{,}01$

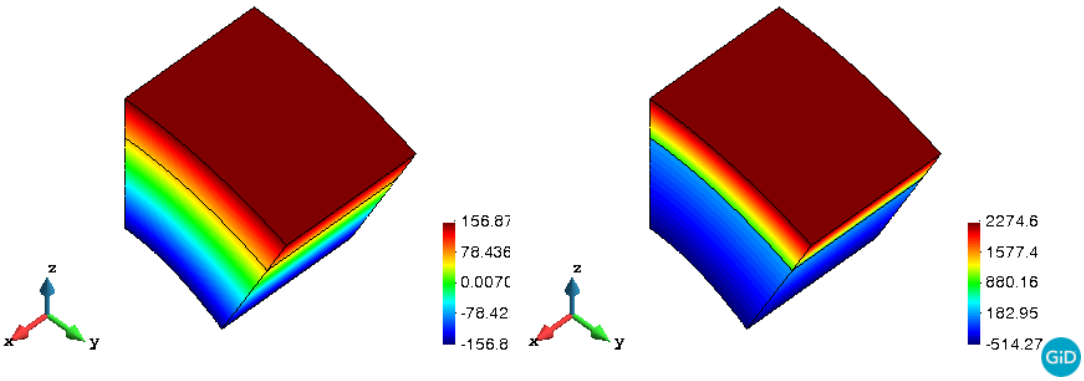
Deformación κ_x



(a) Tensión σ_x (b) Tensión σ_y

Figura B.6: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del laminado aplicando un campo de deformaciones $\kappa_x = 0{,}01$

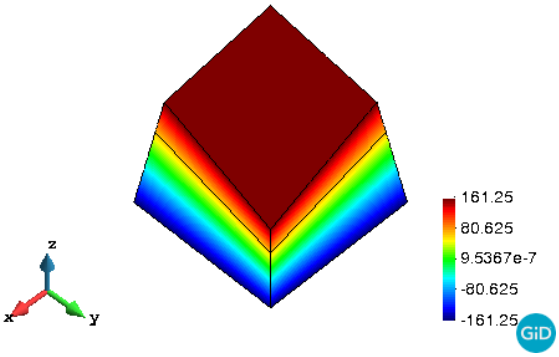
Deformación κ_y



(a) Tensión σ_x (b) Tensión σ_y

Figura B.7: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\kappa_y = 0{,}01$

Deformación κ_{xy}



(a) Tensión σ_{xy}

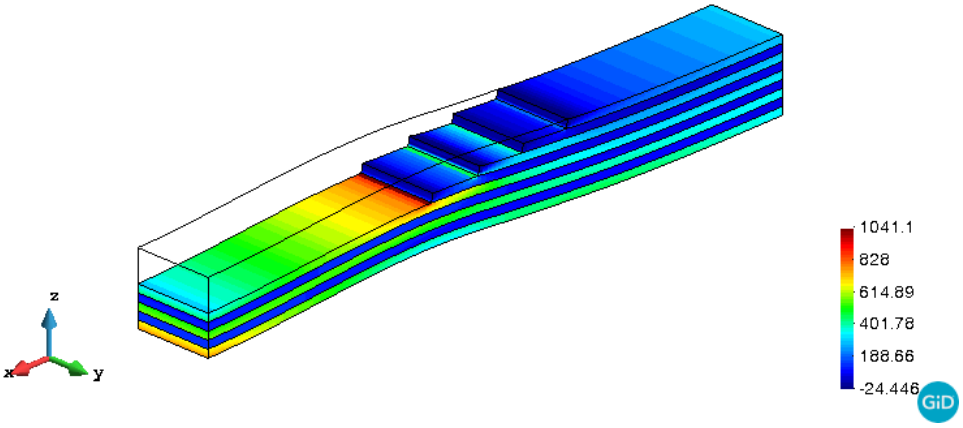
Figura B.8: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de desplazamiento $\kappa_{xy} = 0{,}01$

Apéndice C

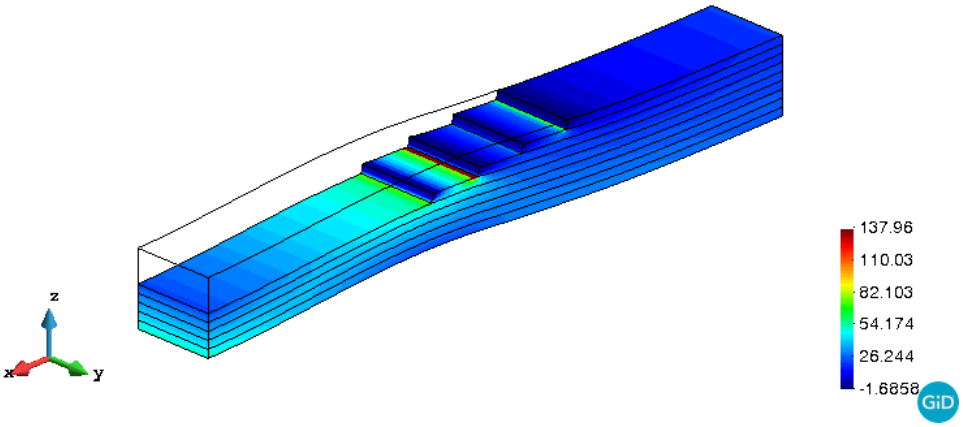
Homogeneización de la transición entre laminados de distinto espesor

Micro-modelos resultantes de la aplicación de las deformaciones necesarias para realizar la homogeneización del laminado usado en el Capítulo 4.

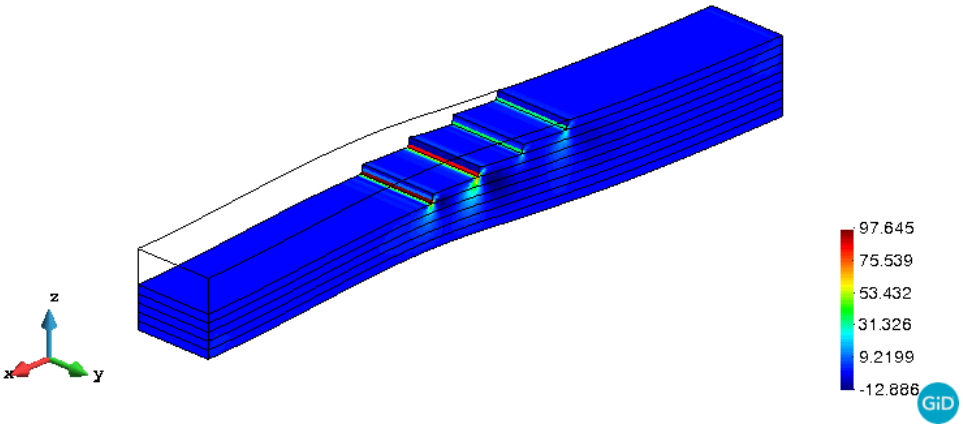
Deformación ϵ_x



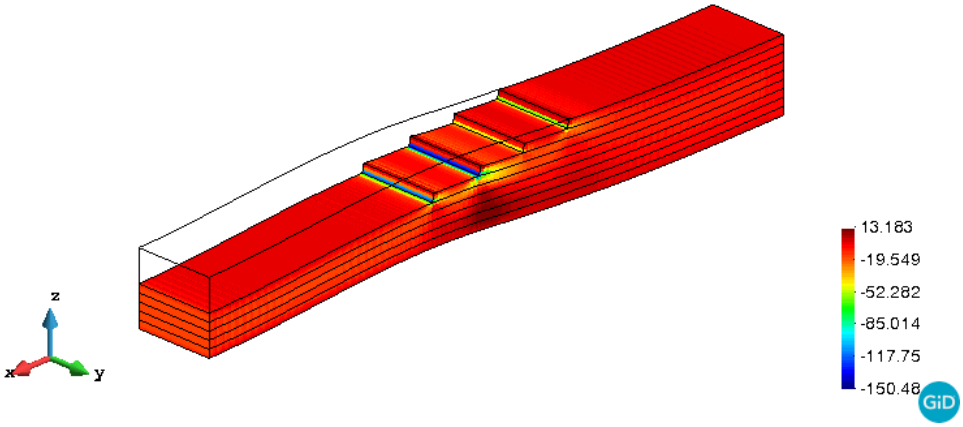
(a) Tensión σ_x



(b) Tensión σ_y



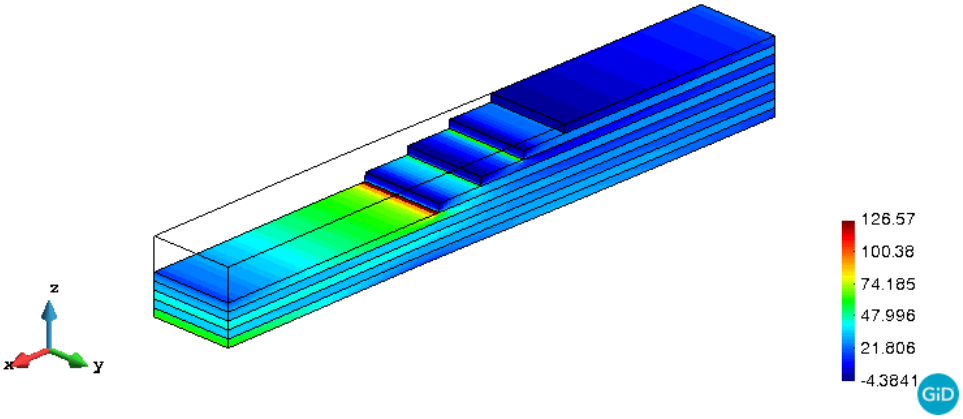
(c) Tensión σ_x



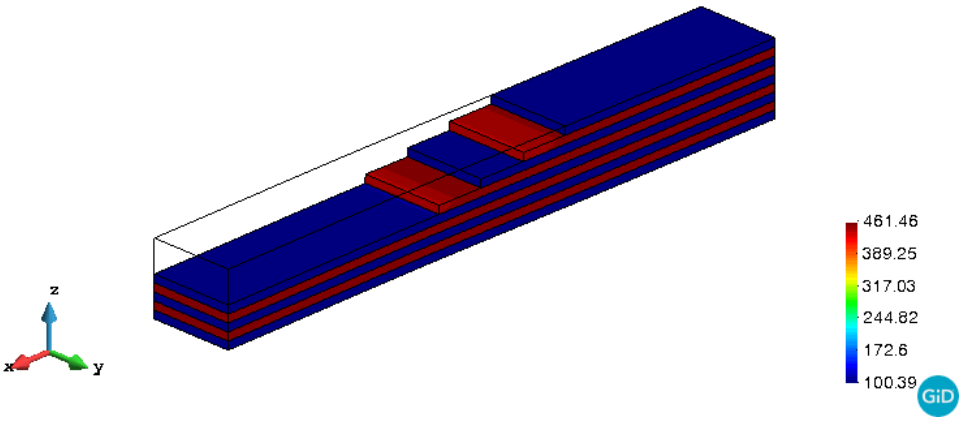
(d) Tensión σ_y

Figura C.1: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\epsilon_x = 0{,}01$

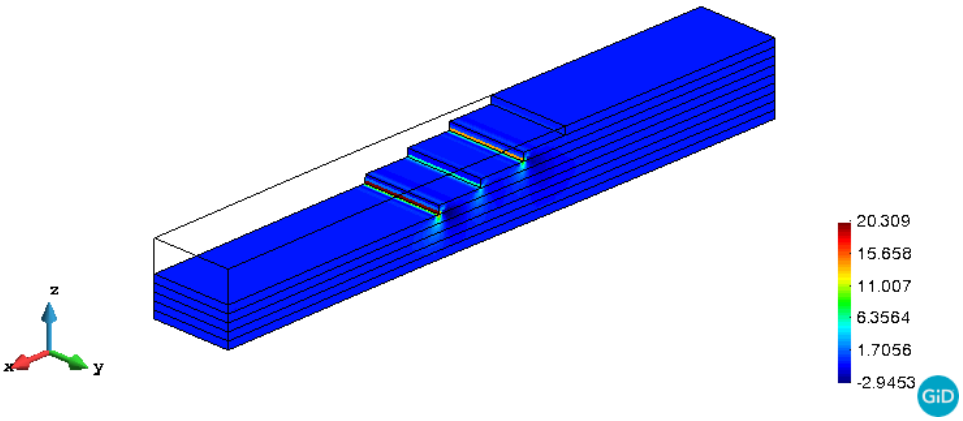
Deformación ϵ_y



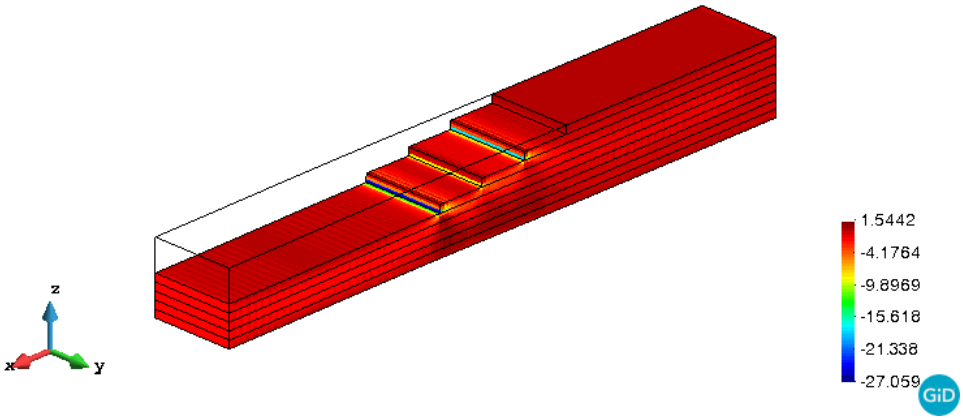
(a) Tensión σ_x



(b) Tensión σ_y



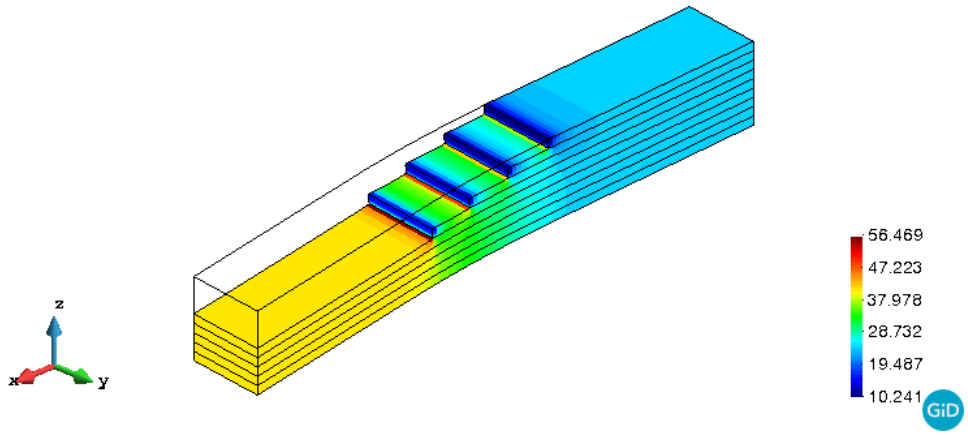
(c) Tensión σ_x



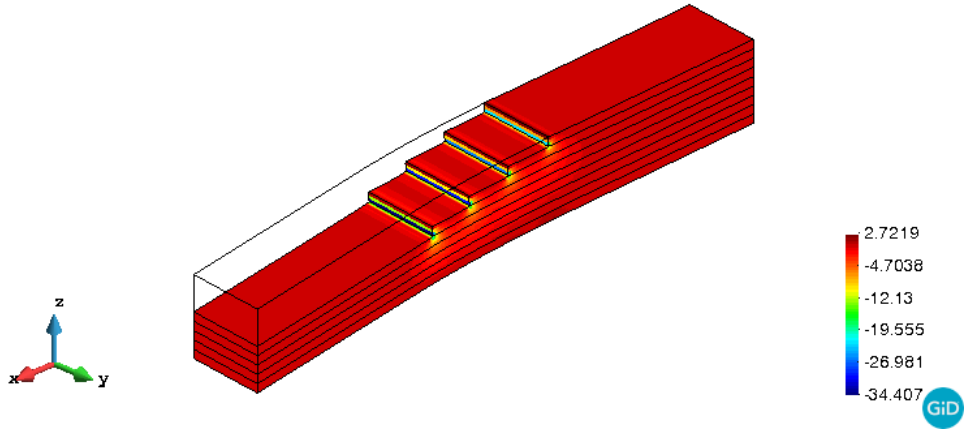
(d) Tensión σ_y

Figura C.2: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\epsilon_y = 0{,}01$

Deformación ϵ_{xy}



(a) Tensión σ_x

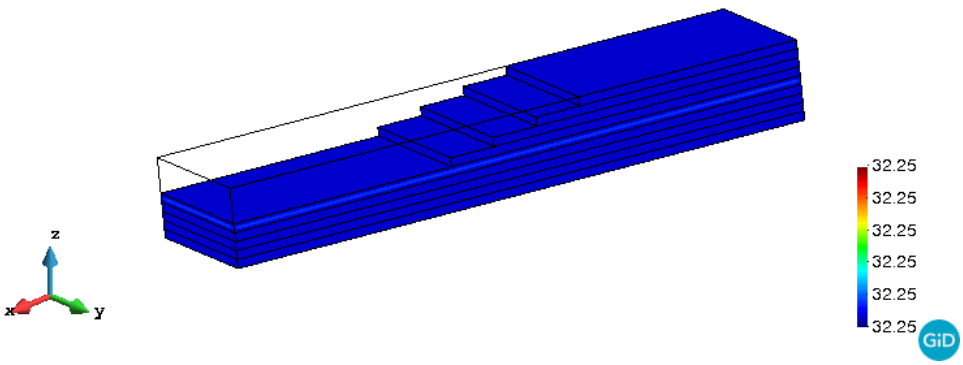


(b) Tensión σ_y

Figura C.3: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\epsilon_{xy} = 0{,}01$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

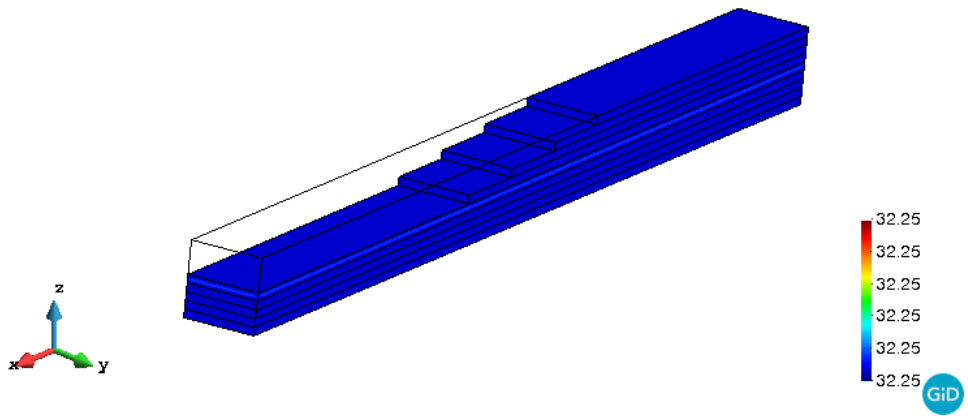
Deformación ϵ_{xz}



(a) Tensión σ_x

Figura C.4: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\epsilon_{xz} = 0{,}01$

Deformación ϵ_{yz}

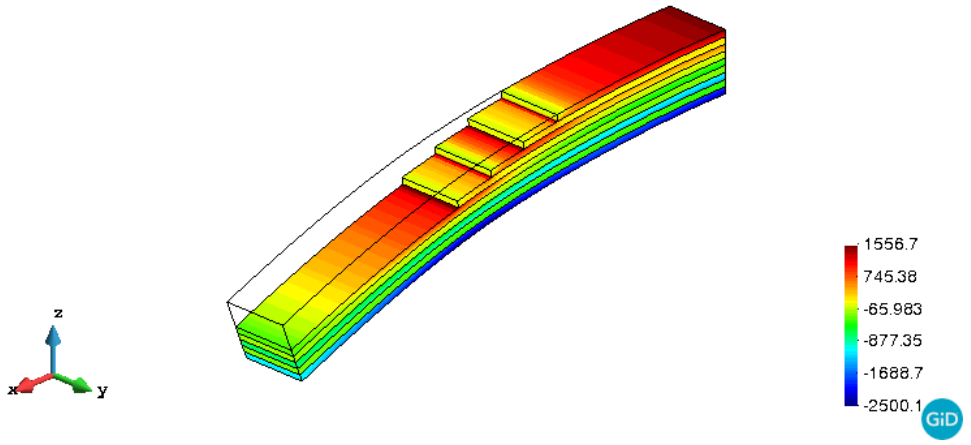


(a) Tensión σ_x

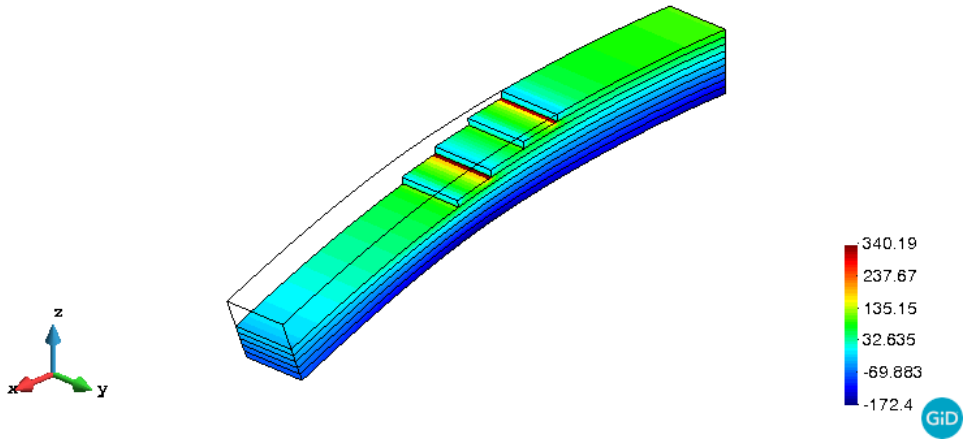
Figura C.5: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\epsilon_{yx} = 0{,}01$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Nàutica de Barcelona

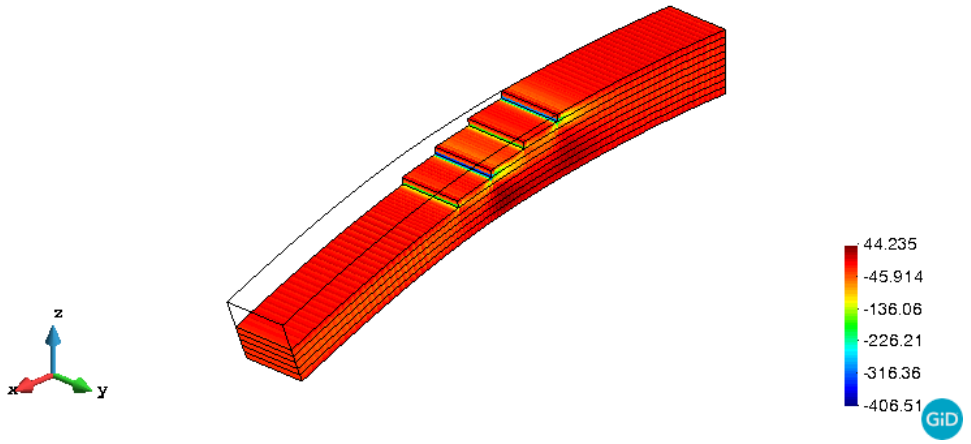
Deformación κ_x



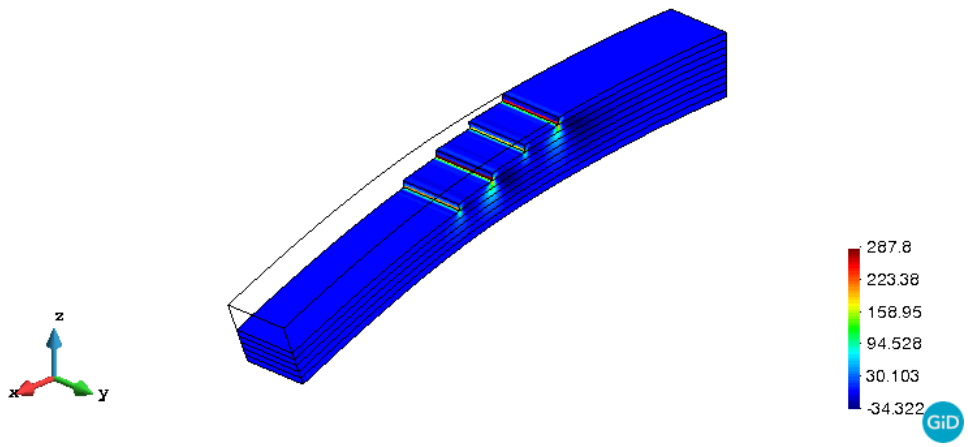
(a) Tensión σ_x



(b) Tensión σ_y



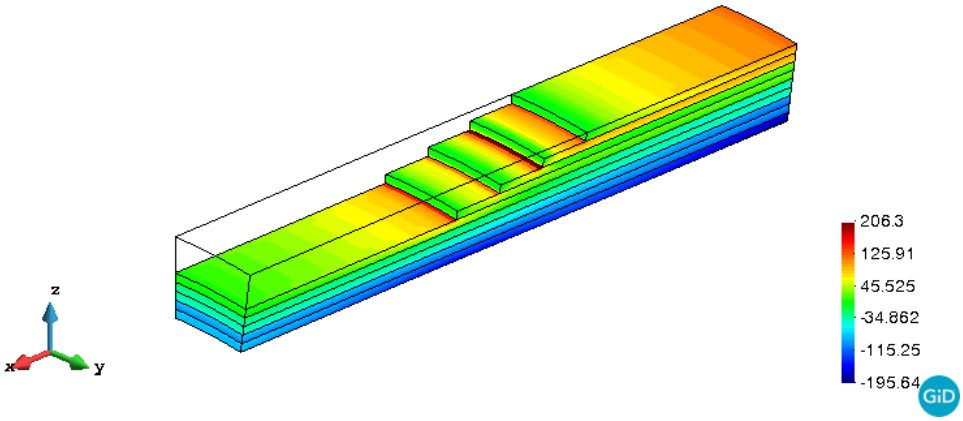
(c) Tensión σ_x



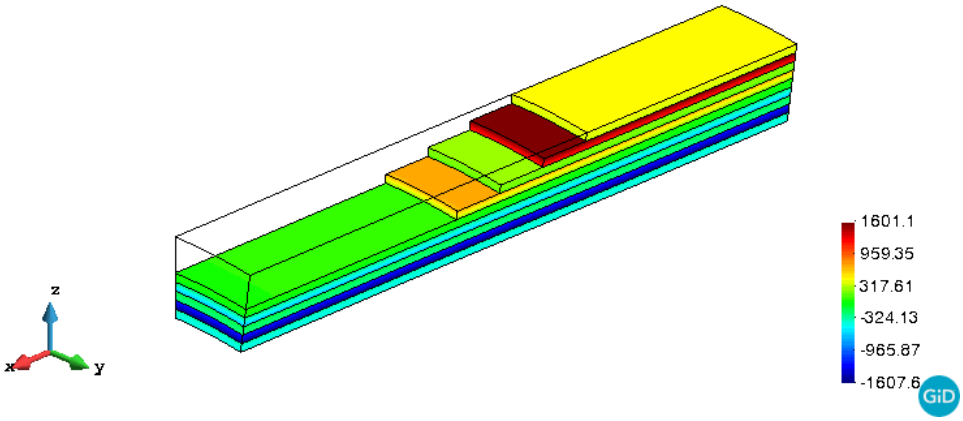
(d) Tensión σ_y

Figura C.6: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\kappa_x = 0{,}01$

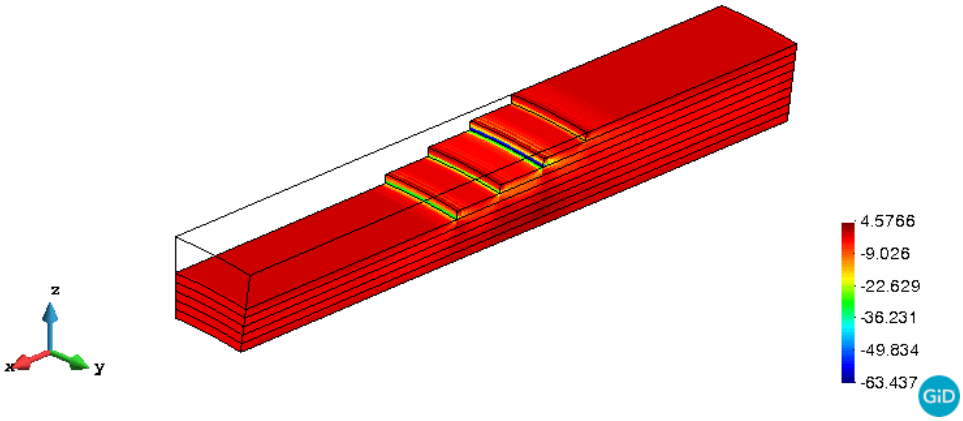
Deformación κ_y



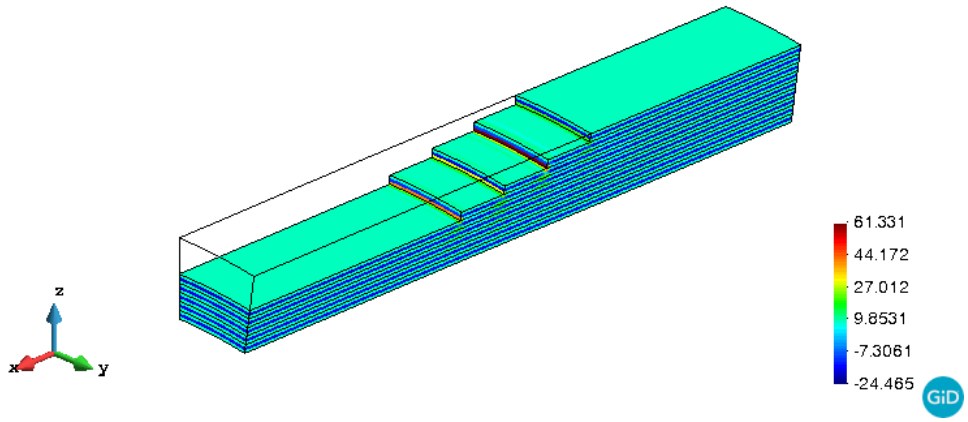
(a) Tensión σ_x



(b) Tensión σ_y



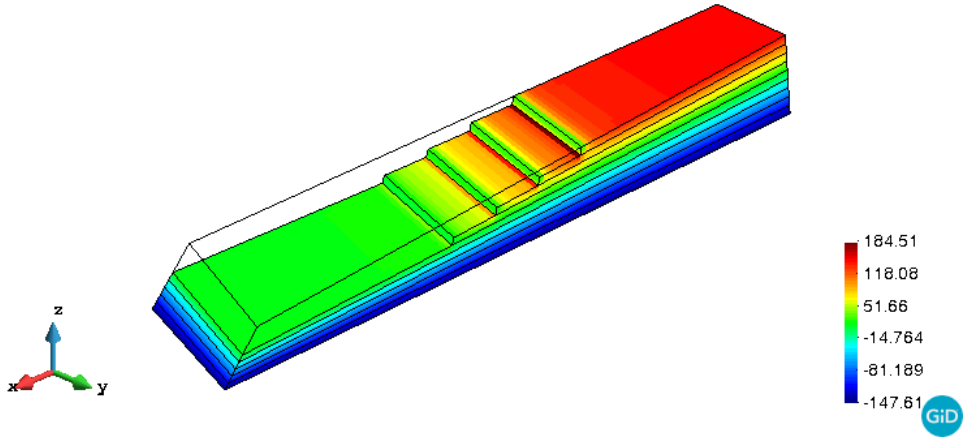
(c) Tensión τ_{xz}



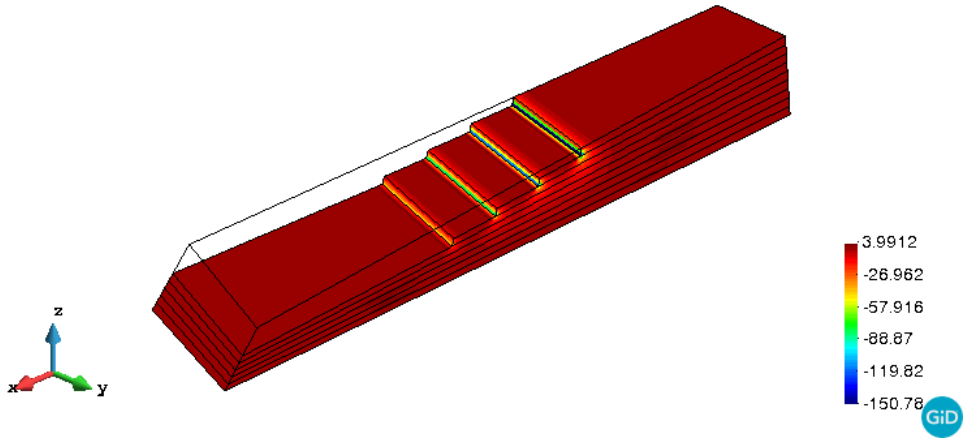
(d) Tensión σ_z

Figura C.7: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\kappa_y = 0{,}01$

Deformación κ_{xy}



(a) Tensión σ_x



(b) Tensión σ_y

Figura C.8: Tensiones [MPa] en el micro-modelos del aluminio aplicando un campo de deformaciones $\kappa_{xy} = 0{,}01$

Bibliografía

[1] Martin Alberto. Introduction of Fibre Reinforced Polymers Polymers and Composites: Concepts, Properties and Processes. In *Fiber Reinforced Polymers - The Technology Applied for Concrete Repair*. 2013.

[2] Ever J Barbero. Introduction to Composite Materials Design. *CRC Press*, 2011.

[3] Ever J. Barbero. *Finite Element Analysis of Composite Materials Using ANSYS®*. 2018.

[4] Manfred Bischoff and Ekkehard Ramm. On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 2000.

[5] E. W C Coenen, V. G. Kouznetsova, and M. G D Geers. A multi-scale computational strategy for structured thin sheets. *International Journal of Material Forming*, 2008.

[6] Yu Cong, Saeid Nezamabadi, Hamid Zahrouni, and Julien Yvonnet. Multiscale computational homogenization of heterogeneous shells at small strains with extensions to finite displacements and buckling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015.

[7] Carlos G. Dávila. Solid-to-shell transition elements for the computation of interlaminar stresses. *Computing Systems in Engineering*, 1994.

[8] M. G.D. Geers, E. W.C. Coenen, and V. G. Kouznetsova. Multi-scale computational homogenization of structured thin sheets. In *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2007.

[9] F. Gruttmann and W. Wagner. A coupled two-scale shell model with applications to layered structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013.

[10] D. Hartung, C. Sickinger, and L. Herbeck. A simple homogenization method for a flat periodic plate structure. In *Computational Fluid and Solid Mechanics 2003*. 2003.

[11] Cécile E. Helfen and Stefan Diebels. Computational homogenisation of composite plates: Consideration of the thickness change with a modified projection strategy. *Computers and Mathematics with Applications*, 2014.

[12] V. Kouznetsova, W. A.M. Brekelmans, and F. P.T. Baaijens. Approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. *Computational Mechanics*, 2001.

[13] H. M.Y.C. Mallikarachchi and S. Pellegrino. Quasi-static folding and deployment of ultrathin composite tape-spring hinges. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2011.

[14] Xavier Martínez, Sergio Oller, and Ever Barbero. Study of delamination in composites by using the serial/parallel mixing theory and a damage formulation. In *Computational Methods in Applied Sciences*, 2008.

[15] Xavier Martinez, Fernando Rastellini, Sergio Oller, Fernando Flores, and Eugenio Oñate. Computationally optimized formulation for the simulation of composite materials and delamination failures. *Composites Part B: Engineering*, 2011.

[16] Eugenio Oñate. *Structural analysis with the finite element method: linear statics: v.1: Basis and solids*, volume 47. 2013.

[17] Eugenio Oñate. Structural Analysis with the Finite Element Method Linear Statics Volume 2. Beams, Plates and Shells. In *Springer*. 2013.

[18] Fermin Otero, Sergio Oller, and Xavier Martinez. Multiscale Computational Homogenization: Review and Proposal of a New Enhanced-First-Order Method. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2018.

[19] Fermin Otero, Sergio Oller, and Xavier Martinez. Multiscale Computational Homogenization: Review and Proposal of a New Enhanced-First-Order Method. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2018.

[20] Handbuch Struktur. Handbuch struktur berechnung 63512-01. (April 1971), 1976.

[21] King Hay Yang. *Basic finite element method as applied to injury biomechanics*. 2017.