DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA

ÀLGEBRA

Albert Avinyó

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Biblioteca
1400210400

EST
A1

FACULTAT DE DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

Títol : Apunts d'Àlgebra
Autor : Albert Avinyó
Dipòsit Legal : B.39412-1995
Imprès per : REPRO BARNA, S.L.
C/. Entença 16-18. 08015 Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

ÀLGEBRA
Curs 1995-96

Albert Avinyó
Departament de Matemàtica Aplicada II

Barcelona, setembre 1995

1. Conjunts, aplicacions i relacions

1. Donat $M = \{1, 2, 3, 4\}$, rectifiqueu les incorreccions:

$$\{3\} \in M\,; \qquad \{1,2,3,4\} \subset M\,; \qquad 4 \in \mathcal{P}(M)\,; \qquad \varnothing \in \mathcal{P}(M)\,; \qquad \{\{4\}\} \in \mathcal{P}(M)\,;$$

$$\{3,4\} \in \mathcal{P}(M)\,; \qquad \varnothing \in \{\varnothing\}\,; \qquad \{\{1\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M)).$$

2. Quins dels enunciats següents són certs?

a) $9 \in \mathbb{Z}$;

b) $9 \in \{x \,|\, x \in \mathbb{Z} \text{ i } x \leqslant 0\}$;

c) $\{a, b\} \in \{a, b\}$;

d) $\{a, b\} \subset \{a, b\}$;

e) $(\{a, b\} \cap \{b, c\}) \subset (\{a, b\} \cup \{b, c\})$.

3. Trobeu $\mathbb{Z} \smallsetminus X$ en els exemples següents:

a) $X = \{x \,|\, x \in \mathbb{Z} \text{ i } x \geqslant 0\}$;

b) $X = \{x \,|\, x \in \mathbb{Z} \text{ i } x \geqslant 4 \text{ o } x \leqslant -3\}$;

c) $X = \{x \,|\, x \in \mathbb{Z} \text{ i } 0 \leqslant x \leqslant 1\}$;

d) $X = \{x \,|\, x \in \mathbb{Z} \text{ i } x = 2n \text{ per a cert } n \in \mathbb{Z}\}$.

4. Siguin A i B dos subconjunts no buits d'un conjunt S. Proveu, les anomenades lleis de Morgan:

a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

5. Discutiu la veracitat o falsedat de la igualtat següent

$$[(A \cup B) \cap (B \cap A^c)^c] \cup [(A \cap B) \cup (A^c \cup B)^c] = A.$$

6. Simplifiqueu:

a) $A \cap (A^c \cup B)$;

b) $(A \cap B^c) \cap (A^c \cap B^c)$;

c) $[A \cap B \cap C] \cup [A^c \cup B^c \cup C^c]$;

d) $[A \cap (A^c \cup B)] \cup [B \cap (B \cup C)] \cup B$.

7. Demostreu les igualtats següents:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

b) $B \setminus A = B \setminus (B \cap A)$;

c) $A \cap (A \cup B) = A$;

8. Il·lustreu amb un diagrama de Venn el cas $A \cup D \subset B \cup D, \quad A \cap D \neq \varnothing, \quad A \setminus B \neq \varnothing$.

9. Siguin A i B disjunts i verificant $A \subset (B \cup C)$. Demostreu la igualtat

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$$

10. Proveu que el complementari de la diferència simètrica de dos conjunts és la diferència simètrica del complementari d'un d'ells amb l'altre.

11. Determineu $\mathcal{P}(A)$ quan $A = \{a, b, c, d\}$.

12. a) Si A és unitari, escriviu $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$.

b) Si E té dos elements, escriviu $\mathcal{P}(E)$ i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

13. Proveu que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$. És certa l'altra inclusió?

14. Si $\mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A))$ té 8 elements, proveu que A és unitari. És cert el recíproc?

15. És cert, en general, que $A \times B = B \times A$, sent A i B dos conjunts no buits?

16. Proveu:

a) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

c) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$.

17. Donat un conjunt finit A, indiquem per $|A|$ el nombre d'elements d'A (cardinal d'A). Siguin A, B conjunts finits, partint del fet evident que si $A \cap B = \varnothing$ aleshores es compleix $|A \cup B| = |A| + |B|$.

a) Proveu que, en general, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

b) Podeu trobar una fórmula semblant per a tres conjunts finits?

c) Una mostra de 1000 fumadors dóna els resultats següents: 850 fumen cigarrets, 200 amb pipa, 350 marihuana, 130 cigarrets i pipa, 200 cigarrets i marihuana, 30 pipa i marihuana, i només 20 les tres coses. És possible aquesta distribució?

18. En una reunió hi ha més homes que dones, més dones que beuen que homes que fumen i més dones que fumen i no beuen que homes que no beuen ni fumen. Demostreu que hi ha menys dones que no beuen ni fumen que homes que beuen i no fumen.

19. En una classe hi ha 30 alumnes que estudien, 20 que són intel·ligents, 13 que estudien i són enraonadors, 10 que són intel·ligents i no enraonadors, 24 que no són enraonadors, 7 que estudien, són enraonadors i no són intel·ligents, 9 que són enraonadors i ni estudien ni són intel·ligents, i 11 que estudien i no són enraonadors ni intel·ligents. Es demana:

a) Quants alumnes són intel·ligents, enraonadors i no estudien?

b) Quants estudien i són intel·ligents?

c) Quants ni parlen, ni estudien ni són intel·ligents?

d) Quants alumnes hi ha a la classe?

20. En una batalla molt disputada, almenys el 70% dels combatents va perdre un ull, almenys el 75% una orella, almenys el 80% un braç i almenys el 85% una cama. Quants, almenys, van perdre les quatre coses?

21. Indiqueu quines de les aplicacions següents de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ són injectives, exhaustives o bijectives:

a) $f(x) = x + 2$, b) $g(x) = 4x$,
c) $h(x) = 2x^2 + 1$, d) $t(x) = x^2 - x$.

22. Indiqueu quines de les aplicacions següents de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ són injectives, exhaustives o bijectives:

a) $f(x) = x^2$, b) $g(x) = x^3 - x$,
c) $h(x) = 2^x$, d) $t(x) = x^3$.

23. Donada $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ per $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$, calculeu $f(A)$, $f^2(A)$ i $f^{-1}(A)$ en els casos següents:

i) $A = [2, 3]$, *ii)* $A = [0, 3]$, *iii)* $A = [1, +\infty]$, *iv)* $A = (-\infty, -9)$.

24. Siguin A, B dos conjunts amb $A \neq B$. Considereu l'aplicació $f\colon A \times B \to B \times A$ definida per $f((a, b)) = (b, a)$. Demostreu que f és una bijecció.

25. Proveu que $f\colon X \to Y$ és injectiva si, i només si, existeix $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = I_X$. Proveu que $f\colon X \to Y$ és exhaustiva si, i només si, existeix $h : Y \to X$ tal que $f \circ h = I_Y$.

26. Sigui $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per $f(x) = x^3$. Existeixen g i h tals que $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ o bé $f \circ h = I_{\mathbb{R}}$?. Trobeu g i h si existeixen.

27. Sigui $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ donada per $f(n) = 2n$. Existeixen g i h tals que $g \circ f = I_{\mathbb{Z}}$ o bé $f \circ h = I_{\mathbb{Z}}$? Trobeu g i h si existeixen.

28. Siguin $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$ dues aplicacions i sigui $h = g \circ f$. Proveu:

a) f i g injectives $\Rightarrow$ h injectiva.

b) f i g exhaustives $\Rightarrow$ h exhaustiva.

c) f i g bijectives $\Rightarrow$ h bijectiva. i, a més a més, $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

d) h injectiva $\Rightarrow$ f injectiva.

e) h exhaustiva $\Rightarrow$ g exhaustiva.

f) h exhaustiva i g injectiva $\Rightarrow$ f exhaustiva.

g) h injectiva i f exhaustiva $\Rightarrow$ g injectiva.

29. Siguin $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h : Z \to T$ aplicacions tals que $g \circ f$ i $h \circ g$ són bijectives. Proveu que f , g i h són bijectives (Utilitzeu el problema anterior).

30. Sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació. Siguin $A, B \subset X$ i $C, D \subset Y$. Demostreu:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

c) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

d) $A \subset f^{-1}(f(A))$.

e) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

f) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

g) $f(f^{-1}(C)) \subset C$.

31. Amb la notació del problema anterior, si f és injectiva, a més de les propietats anteriors, es compleix:

a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

b) $A = f^{-1}(f(A))$.

32. Amb la notació del problema 31, si f és exhaustiva també es compleix

$$C \subset f(f^{-1}(C)).$$

33. Sigui A un conjunt. Definim l'aplicació $f\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ per $f(B) = A \setminus B$, per a qualsevol $B \in \mathcal{P}(A)$.

a) Demostreu que f és una bijecció.

b) Trobeu la seva inversa.

34. Es considera l'aplicació

$$\begin{aligned} \varphi\colon \{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,m\} &\longrightarrow \{1,2,\ldots,n\cdot m\} \\ (i,j) \qquad\qquad &\longrightarrow (i-1)m+j. \end{aligned}$$

a) Proveu que φ és bijectiva.

b) Doneu un algorisme per calcular l'antiimatge d'un element.

c) Calculeu $\varphi^{-1}(4843)$, en el cas $n = 130$, $m = 100$.

d) Generalitzeu φ al cas

$$\{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,m\} \times \{1,2,\ldots,r\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,n\cdot m\cdot r\}.$$

35. Es consideren a $\mathbb{N}$ les relacions donades per:

a) $x + y = 10$, b) x divideix y, c) x és menor que y.

Estudieu les seves propietats.

36. Determineu quines de les relacions següents entre nombres enters són reflexives, simètriques i transitives:

a) $a \sim b \Leftrightarrow a < b$.

b) $a \sim b \Leftrightarrow a - b < 2$.

c) $a \sim b \Leftrightarrow b$ és multiple d'a.

d) $a \sim b \Leftrightarrow ab > 0$ o $a = b = 0$.

37. En el conjunt dels segments del pla, es defineix la relació: *dos segments estan relacionats quan pertanyen a la mateixa recta.* Estudieu aquesta relació.

38. Sigui A un conjunt no buit i R la relació definida a $\mathcal{P}(A)$ per

$$A_1 \, R \, A_2 \Longleftrightarrow A_1 \triangle A_2 \neq \emptyset.$$

Demostreu que aquesta relació és simètrica i no reflexiva.

39. *Teorema:* tota relació simètrica i transitiva també és reflexiva.

Demostració: Si $x \sim y$, per la simètrica tenim que $y \sim x$. Per la transitiva $x \sim y$ i $y \sim x$, i, per tant, $x \sim x$.

Sabeu trobar el parany de tot això? Us pot ajudar, comprovar que a $\mathbb{Z}$ la relació $a \sim b \Leftrightarrow ab > 0$ és simètrica i transitiva, però no és reflexiva.

40. A $MAT(n,\mathbb{R})$ definim la relació $A \sim B \Leftrightarrow AB = BA, \quad \forall A, B \in MAT(n,\mathbb{R})$. És una relació d'equivalència?

41. Es defineix a $\mathbb{Z}$ la relació $a \sim b \Leftrightarrow 2a + b = \dot{3}$.

a) Proveu que és d'equivalència i trobeu $\mathbb{Z}/\sim$.

b) Comproveu que la relació $a \sim_s b \Leftrightarrow a - b = \dot{3}$ és la mateixa que $\sim$.

c) Feu el mateix problema amb la relació $4a + b = \dot{5}$.

42. Al conjunt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es defineix la relació $(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$. Proveu que és d'equivalència i descriviu el quocient $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$.

43. Es considera l'aplicació $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x,y) = \log x - \log y.$$

Estudieu la relació d'equivalència associada a f, doneu una interpretació geomètrica de les classes d'equivalència i descriviu la descomposició canònica de f.

44. Sigui A un conjunt diferent del buit i $f : A \to A$ una aplicació.

a) Si $f^{\to} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ està definida per $f^{\to}(X) = \{f(x) : x \in X\}, \forall X \in \mathcal{P}(A)$, demostreu que $X_1 \subset X_2$ implica que $f^{\to}(X_1) \subset f^{\to}(X_2)$.

b) Sobre A es defineix la relació d'equivalència $a \sim b \iff f(a) = f(b), \quad \forall a, b \in A$. Demostreu que si $[a] = \{a\}, \quad \forall a \in A$ aleshores f és injectiva.

45. Trobeu la descomposició canònica de l'aplicació $f\colon A \to B$ donada per $f(x) = x^2$, on $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ i $B = \{0,1,2,3,4,5\}$.

46. En el conjunt $\mathbb{C}$ dels nombres complexos es defineix la relació:

$$a + bi \preceq c + di \iff a < c \quad \vee \quad (a = c \ \wedge \ b \leqslant d).$$

Proveu que és d'ordre. És d'ordre total?

47. Proveu que un conjunt finit totalment ordenat és un conjunt ben ordenat.

48. Al conjunt $\mathbb{N}$ es defineix la relació $x \sim y \Leftrightarrow [\frac{x}{2}] = [\frac{y}{2}]$, on $[\cdot]$ significa la part entera.

a) Estudieu-ne les propietats.

b) Feu el mateix al conjunt $\mathbb{R}$.

49. Sigui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el subconjunt del plà dels punts amb coordenades enteres. En aquest conjunt es defineix la relació

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow a - c = \dot{2} \text{ i } b - d = \dot{3}.$$

a) Proveu que és d'equivalència.

b) Calculeu el nombre de classes.

c) Busqueu un representant de cada classe a distància mínima de l'origen.

50. Sigui A un conjunt i $S \subset A$. Considereu la funció $\chi_s \colon A \to \{0, 1\}$ definida per

$$\chi_s(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \in A \setminus S; \\ 1, & \text{si } a \in S. \end{cases}$$

Definiu ara l'aplicació $\sigma \colon \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}^A$ del conjunt de parts de A al conjunt de totes les aplicacions de A a $\{0, 1\}$ posant $\sigma(S) = \chi_s$ per a qualsevol $S \in \mathcal{P}(A)$. Proveu que $\mathcal{P}(A)$ i $\{0, 1\}^A$ són equipotents, és a dir, que σ és bijectiva.

51. Demostreu la fórmula per sumar un progressió geomètrica de raó $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

52. Demostreu que les fórmules següents es verifiquen per a tot $n \geqslant 1$:

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

53. Demostreu que la fórmula $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(2n+1)^2}{8}$ val per a $n+1$ si val per a n. Per quins valors de n és vàlida?

54. Demostreu la igualtat $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + (n-1)(n-1)! = n!$, per a tot $n > 1$.

55. Demostreu la igualtat $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, per a tot $n \geq 1$.

56. Si a i n són enters positius, demostreu que $(1+a)^n \geq 1 + na$.

57. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ són nombres reals positius, demostreu que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2, \quad n \geq 1.$$

58. Demostreu que $n(n^2+5)$ és un múltiple de 6 per a tot n natural.

59. Demostreu que per a tot $n \geq 2$ es compleix el següent

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

60. Demostreu la igualtat següent

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n} k, \quad n \geq 1.$$

61. Demostreu les desigualtats següents:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2, \quad n \geq 2.$$

62. Demostreu que per a tot $n \geq 0$, $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ és un múltiple de 17.

63. Demosteu que per a tot $n \geq 0$, $3^{3n+3} - 26n - 27$ és un múltiple de 169.

64. Demostreu que $e^n \geq n + 1$ per a tot n natural.

65. Siguin α i β dos nombres reals tals que el polinomi $x^2 - \alpha x - \beta$ tingui dues arrels diferents que designarem per r i s. Sigui ara u_n la successió definida per $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ i $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}$ per a tot $n \geq 2$. Demostreu que

$$u_n = \frac{r^n - s^n}{r - s}.$$

66. Donats dos nombres reals a i b positius demostreu que

$$a^{n-1}b \leq (n-1)a^n + b^n, \quad \text{per a tot } n \geq 1.$$

Indicació: distingiu els casos $a \leq b$ i $b \leq a$.

67. Es defineix la successió x_n mitjançant

$$x_0 = 0,$$
$$x_n = ax_{n-1} + na^n,$$

on a és un nombre real fix. Trobeu una expressió pel terme general x_n i demostreu que l'expressió trobada cumpleix efectivament les condicions.

68. Considereu la proposició $p(n)$: "$n^2 + 5n + 1$ és parell".

a) Demostreu $p(n) \Longrightarrow p(n+1)$ per tot natural n.

b) Trobeu els valors de n per als quals és certa $p(n)$.

69. Definim $b_0 = b_1 = 1$, $b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$ per $n \geq 2$.

a) Demostreu que b_n és senar per $n \geq 0$.

b) Per quins valors de n es compleix $b_n < 6b_{n-2}$?

70. Definim $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ per $n \geq 3$. Demostreu que $a_n \leq (\frac{4}{3})^n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.

2. Anàlisi combinatòria

1. En una classe 32 dels estudiants són nois. Si cada noi coneix cinc de les noies de la classe i cada noia coneix vuit dels nois, quantes noies hi ha a la classe?

2. És possible trobar una col·lecció de subconjunts de $\{1, 2, \ldots, 8\}$ de forma que cada un tingui tres elements i cada element de $\{1, 2, \ldots, 8\}$ pertanyi a cinc d'aquests subconjunts?

3. Es tenen nou subconjunts diferents de $\{1, 2, \ldots, 12\}$ de cardinal vuit cadascun d'ells. Si cada element de $\{1, 2, \ldots, 12\}$ pertany exactament a r dels subconjunts, quin és el valor de r? És possible trobar nou subconjunts de $\{1, 2, \ldots, 12\}$ de cardinal set, de manera que cada element de $\{1, 2, \ldots, 12\}$ pertanyi exactament a un mateix nombre de subconjunts?

4. Suposem que prenem cinc punts de l'interior d'un triangle equilàter de codtat 1. Proveu que com mínim hi ha un parell de punts que disten com a molt $1/2$.

5. Proveu que si prenem deu punts de l'interior d'un triangle equilàter de costat 1, com a mínim n'hi ha dos que disten com a màxim $1/3$.

6. Proveu que en un grup de sis persones o bé n'hi ha tres que es coneixen dos a dos, o bé n'hi ha tres on cap parella de dues persones es coneixen.

7. De quantes maneres poden seure n homes i n dones al voltant d'una taula rodona si demanem que dues persones del mateix sexe no estiguin de costat?

8. D'una baralla de 52 cartes, quants grups de 10 cartes diferents podeu formar? En quants casos entre les cartes escollides hi haurà:

a) com a mínim un as?

b) exactament un as?

c) no menys de dos asos?

d) exactament dos asos?

9. De quantes maneres es poden escollir 6 cartes d'una baralla, que conté 52 cartes, si es demana que entre les cartes escollides hi hagi cartes de cada pal?

10. A una comissió de deu persones s'ha d'elegir un president, un secretari i un tresorer. De quantes maneres es poden escollir? Expliqueu quines suposicions feu per trobar la solució.

11. De quantes maneres es pot escollir un quadrat negre i un quadrat blanc d'un taulell d'escacs, de forma qu no estiguin tots dos a la mateixa fila o a la mateixa columna?

12. De quantes maneres es poden col·locar vuit torres a un taulell d'escacs de forma que no n'hi hagi dues a la mateixa fila o columna?

13. Si en una classe hi ha m noies i n nois amb $n + 1 \geqslant m$, de quantes maneres es poden col·locar en una línia de forma que no hi hagi dues noies juntes? I de forma que estiguin totes juntes?

14. Quants nombres de telèfon de cinc dígits tenen algun digit que es repeteix com a mínim una vegada?

15. Proveu que el conjunt d'enters positius amb tots els dígits diferents és finit. Quants n'hi ha?

16. Trobeu el nombre (la quantitat) de números des de 0 fins a 10^n que no tinguin xifres iguals succesives. Per exemple, si $n = 3$, llavors 371 seria un dels números buscats i 331 no ho seria.

17. De quantes maneres es poden repartir n boles diferents en m urnes diferents?

18. De quantes maneres es poden repartir n boles iguals en m urnes diferents?

19. Proveu que el nombre de paraules de longitud n formades amb l'alfabet $\{0,1\}$ que contenen exactament r zeros és $\binom{n}{r}$

20. Proveu que si llancem 3 daus indistingibles hi ha 56 resultats possibles. Quants resultats hi ha si llancem n daus?

21. Calculeu el coeficient de

a) x^5 en $(1+x)^{11}$;

b) a^2b^8 en $(a+b)^{10}$;

c) a^6b^6 en $(a^2+b^3)^5$;

d) x^3 en $(3+4x)^6$.

22. Proveu la igualtat següent amb n enter,

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

23. Proveu la propietat hexagonal, amb n enter,

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}.$$

24. Proveu que el nombre de maneres de distribuir n boles idèntiques en m capses etiquetades, algunes de les quals poden quedar buides, és $\binom{n+m+1}{n}$.

25. Calculeu de quantes maneres es poden repartir n boles iguals en m urnes diferents, tenint en compte les condicions següents:

a) no hi ha cap urna buida;

b) a la segona urna hi ha k boles;

c) a les primeres s urnes hi ha $a_1, a_2, \ldots, a_s$ boles, respectivament $(a_1+a_2+\cdots+a_s \leq n)$;

d) a la i-èsima urna hi ha com a mínim a_i boles $(i = 1, \ldots, m)$.

26. Considerem un conjunt X de cardianl n. Proveu que:

a) Hi ha un conjunt de $\binom{n-1}{k-1}$ subconjunts de X de cardinal k de forma que dos a dos tenen intersecció no buida.

b) Hi ha un conjunt de $\binom{n}{n^*}$ subconjunts de X de forma que cap d'ells està contingut en cap altre, on n^* és igual a $1/2$ si n és parell i igual a $(n-1)/2$ si n és senar.

27. Proveu que si n és un enter es satisfà:

a) $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$;

b) $\left\{ {n \atop 3} \right\} = \dfrac{1}{6}(3^n - 32^n + 3)$.

28. Quants nombres de cinc xifres poden compondre's, utilitzant les xifres del número 75 226 522 ?

29. En un campionat de bàsquet hi participen 20 equips. Quin és el nombre mínim de partits que s'han de jugar, per a què de qualsevol manera que triem tres equips sempre n'hi hagi dos que hagin jugat entre ells?

30. En un tauler d'escacs estan col·locades, arbritàriament, dues torres (negra i blanca). Què és més probable, que les torres puguin menjar-se una a l'altra o que no puguin?

31. Trobeu el nombre de parelles diferents de nombres naturals x i y més petits o iguals que 1000 pels quals $(x^2+y^2)/49$ és un número natural (Les parelles (x,y) i (y,x) es consideren iguals).

32. 30 persones són examinades per saber si són immunes a la tuberculosi, a la rubèola i a la verola. De les 30 persones, 13 són trobades immunes a la tuberculosi, 17 a la rubèola, 13 a la verola, 7 a la tuberculosi i la rubèola, 8 a la rubèola i la verola, 7 a la tuberculosi i la verola, i 1 a la tuberculosi, la rubèola, però no a la verola. Quantes persones no són immunes a cap de les tres malaties?

33. Trobeu una expressió del nombre d'objectes d'un conjunt A que tenen com a mímin una de les propietats $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

34. 100 ampolles d'aigua eren analitzades per saber si hi havia indicis de mercuri, arsènic i plom. De les 100 ampolles, 7 tenien mercuri, 5 tenien arsènic, 4 tenien plom, 3 tenien mercuri i arsènic, 3 tenien arsènic i plom, 2 tenien mercuri i plom, i 1 tenia mercuri i arsènic, però no plom. A quantes ampolles hi havia indicis de com a mínim d'algun dels tres productes?

35. En una classe de 67 estudiants, 47 saben francès, 35 alemany i 23 les dues llengues. Quants no saben ni francès ni alemany? Si a més n'hi ha 20 que saben rus, dels quals 12 saben també francès, 11 alemany i 5 les tres llengües, quants n'hi ha que no saben cap de les tres llengües?

36. Donada l'equació $x + y + z + w = 20$, quantes solucions enteres positives existeixen amb les condicions addicionals: $x \leqslant 6, y \leqslant 7, z \leqslant 8, w \leqslant 9$?

37. Si D_n és el nombre de desarranjaments d"un conjunt de n elements, justifiqueu que $n!e^{-1}$ és una bona aproximació per a D_n.

38. n cavallers lliuren sengles espases a l'entrada del castell. Suposant que després les espases es tornen a l'atzar, trobeu la probabilitat que exactament k cavallers amb $0 \leqslant k \leqslant n$ rebin les seves pròpies espases.

39. Quants enters x entre 1 i 1000 no són divisibles ni per 2, ni per 3, ni per 5?

40. Al llarg d'una setmana es succeixen 8 accidents. Escriviu una expressió per calcular la probabilitat de què hi hagi un accident cada dia com a mínim.

41. Utilitzeu el principi d'inclusió-exclusió per trobar el nombre de solucions de l'equació

$$x_1 + x_2 + x_3 = 16,$$

en les quals cada x_i és un enter no negatiu que compleix $x_i \leq 7$.

42. Trobeu el nombre de permutacions de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en les quals no apareix la successió 124 ni la 35.

43. De quantes maneres poden seure n parelles al voltant d'una taula redona si demanem que cap parella estigui asseguda de costat?

3. Estructures algebraiques

1. La llei de composició de dues resistències en paral·lel R_1 i R_2 ve donada per $R = R_1 \star R_2$ on $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$. Estudieu les propietats de la llei $\star$. És grup?

2. A $\mathbb{Q}$ es defineix l'operació $a \circ b = a + b + \lambda$, amb $\lambda \in \mathbb{N}$ fix. Calculeu λ perquè la llei sigui associativa. Estudieu les altres possibles propietats.

3. A la teoria de la relativitat restringida, la llei de composició de dues velocitats v_1 i v_2 de la mateixa direcció és $v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$, on c és la velocitat de la llum. Estudieu les propietats d'aquesta llei.

4. Donat el conjunt $B = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, proveu que la suma i el producte ordinaris són interns a B i estudieu els elements simètrics d'un element qualsevol per a les dues operacions.

5. En un grup abelià $(G, \perp)$, resoleu, tot justificant els pasos realitzats, l'equació

$$x \perp a \perp b \perp x \perp c = b \perp x \perp a,$$

amb $a, b, c \in G$ elements donats.

Feu el mateix, suposant G no abelià i l' equació :

$$a \perp x \perp b \perp c \perp x = a \perp b \perp x.$$

6. Proveu que si en un grup es verifica $x^2 = e$, per a qualsevol element x i on e denota l'element unitat, aleshores el grup és commutatiu.

7. Sigui $(G, \cdot)$ un grup. Demostreu que G és abelià si, i només si, per a tot $a, b \in G$ es compleix $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

8. En el conjunt $E = \{a, b, c\}$, es defineix una llei interna donada per :

$$a^2 = a, \qquad b^2 = b, \qquad c^2 = c, \qquad bc = cb = a, \qquad ca = ac = b, \qquad ab = ba = c.$$

Demostreu que aquesta llei commutativa no és associativa.

9. A $\mathbb{R}$ es defineix l'operació $a \star b = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ on n és un nombre real positiu.

a) Proveu que $(\mathbb{R}, \star)$ és un grup abelià.

b) És $(\mathbb{R}^+, \star)$ un subgrup de $(\mathbb{R}, \star)$?.

10. Siguin A i B dos subgrups d'un grup G. Es defineix

$$A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Proveu que $A \cdot B$ és un subgrup de G si, i només si, es té $A \cdot B = B \cdot A$.

11. Es considera el conjunt $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Proveu que A amb la suma i producte habituals és un domini d'integritat.

12. Proveu que si k és un natural que no és quadrat perfecte, $K = \{a + b\sqrt{k} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ és un subcos de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

13. Proveu que el conjunt $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de les aplicacions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ és un anell commutatiu unitari i no íntegre amb la suma i el producte següents:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

4. L'àlgebra de les matrius

1. Considereu les tres matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Trobeu, quan tingui sentit, $A+B$, $-2B$, $A+2B$, $B-A$, $A+C$, AB, AB^t, A^tB, $A(BC)$.

2. Si $A \in MAT(n,r)$, a què és igual I_nA? I si $A \in MAT(m,n)$, a què és igual AI_n?

3. Un cas important on podem cancel·lar B de l'equació matricial $AB = CB$ és quan aquesta identitat es satisfeta per a tota B. Per exemple, proveu que si

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

per a tot b_1, b_2, llavors $A = C$.

4. Resoleu l'equació matricial $(AX^{-1})^{-1} + B = X$, on $A = 1/3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculeu $(AB)^t$ i B^tA^t. Noteu que encara que A i B són simètriques, AB no ho és. Calculeu B^tAB i comproveu que és simètrica.

6. Demostreu que si A és una matriu d'involució ($A^2 = I$), aleshores la matriu $B = \frac{1}{2}(I+A)$ és idempotent ($B^2 = B$).

7. Trobeu totes les matrius $A \in MAT(2)$ tals que $A^2 = I_2$.

8. Sigui A una matriu quadrada. Comproveu que $A + A^t$ és una matriu simètrica i que $A - A^t$ és una matriu antisimètrica. Proveu que tota matriu quadrada és suma d'una matriu simètrica i una d'antisimètrica.

9. Si A i B són dues matrius simètriques, demostreu que $AB + BA$ és una matriu simètrica i $AB - BA$ és antisimètrica.

10. Per a quines matrius quadrades A i B es compleix:
a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,
b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

11. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculeu A^2, A^3 i A^4.

12. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ on $i^2 = -1$, doneu una expressió general per a A^n.

13. Si $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, demostreu que $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.

14. Suposeu que la tercera columna d'una matriu A és igual a dues vegades la primera columna. Demostreu que la mateixa propietat és certa per a qualsevol producte BA.

15. Doneu dues matrius $A, B \in MAT(2)$ que no tinguin cap component nul·la però que compleixin $AB = 0$.

16. Una matriu A es diu d'involució si $A^2 = I$. Demostreu que A^2 és d'involució si, i només si, $(I - A)(I + A) = 0$.

17. Trobeu dues matrius $A, B \in MAT(2)$ no nul·les tal que $A^2 + B^2 = 0$.

18. Quines matrius reals satisfan $A^t A = 0$? Justifiqueu la resposta.

19. Suposeu que A és una matriu quadrada que satisfà $A^2 - 3A + I = 0$. Demostreu que $A^{-1} = 3I - A$.

20. Sigui $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tal que $ad - bc \neq 0$. Trobeu A^{-1}.

21. Demostreu que respecte la multiplicació, el subconjunt de $MAT(n)$ format per les matrius diagonals invertibles té estructura de grup abelià.

22. Si A és una matriu de $MAT(2)$ que commuta amb tota matriu d'aquest mateix conjunt, llavors demostreu que A ha de ser un múltiple de la matriu identitat I_2.

23. Sigui A una matriu quadrada.

a) Si $A^2 = 0$, proveu que $I - A$ és invertible.

b) Si $A^3 = 0$, proveu que $I - A$ és invertible.

c) En general, si $A^n = 0$ per a un cert $n \in \mathbb{Z}^+$, demostreu que $I - A$ és invertible.

d) Suposeu que $A^2 + 2A + I = 0$. Demostreu que A és invertible.

e) Suposeu que $A^3 - A + I = 0$. Demostreu que A és invertible.

24. Siguin A i B dues matrius quadrades de la mateixa mida. Diem que A és semblant a B si existeix una matriu invertible T tal que $B = TAT^{-1}$. Si aquest és el cas, proveu:

a) B és semblant a A.

b) A és invertible si, i només si, B és invertible.

c) A^t és semblant a B^t.

d) Si $A^n = 0$ i C és una matriu invertible de la mateixa mida que A, llavors $(CAC^{-1})^n = 0$.

25. Si A compleix $A^3 - 3A^2 + 2A + I = 0$, demostreu que tota matriu semblant amb A compleix la mateixa igualtat.

26. Sigui $A \in MAT(n)$ simètrica i $B \in MAT(n)$ antisimètrica. Per a quins valors de $p, q, r \in \mathbb{N}$ la matriu $A^pB^qA^r$ és antisimètrica?

27. Siguin $A, B \in MAT(n, \mathbb{R})$ dues matrius simètriques. Demostreu que si existeix una matriu $P \in MAT(n, \mathbb{R})$ tal que $P^{-1} = P^t$ i, P^tAP i P^tBP són dues matrius diagonals, aleshores es compleix que $AB = BA$.

28. Sense usar *ni llapis ni paper,* determineu si les matrius següents són invertibles.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0.1 \\ 0 & 5 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0.37 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

29. Trobeu una matriu K tal que $AKB = C$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

30. Trobeu la forma normal de les matrius següents:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0.5 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & -8 & 10 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ -5 & 7 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{e)} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

31. Siguin A i B dues matrius i C la matriu definida per blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Demostreu, en aquest cas, que $rang(C) = rang(A) + rang(B)$.

32. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

trobeu una matriu invertible $P \in MAT(3)$ tal que PA tingui la forma esglaonada reduïda per files.

33. Trobeu, si existeix, la inversa de cadascuna de les matrius següents:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$.

34. Si A^i és una inversa generalitzada de A, demostreu que A^{i^t} és una inversa generalitzada de A^t.

35. Calculeu la inversa generalitzada de

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Sistemes d'equacions lineals

1. Quines de les equacions següents són lineals en x, y, i z?

a) $x + 2xy + z = 2$, b) $x + y + z = \sin k$,

c) $x - 3y + 2z^{1/2} = 4$, d) $x = \sqrt{2}z - y + 7$,

e) $x + y^{-1} - 3z = 5$, f) $x = z$.

2. Trobeu un sistema d'equacions lineals que correspongui a cadascuna de les matrius augmentades següents:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 0.5 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0.3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

3. Digueu:

a) Quin és el rang d'un sistema compatible determinat amb 5 equacions i 4 incògnites? I si el sistema és indeterminat?

b) Quantes equacions són necessàries (com a mínim) per tenir un sistema indeterminat amb 2 graus de llibertat i rang 3? Quantes incògnites tindrà aquest sistema?

c) Pot ser compatible determinat un sistema amb 7 equacions i 10 incògnites?

d) Inventeu un sistema compatible determinat, un altre d'indeterminat i un altre d'incompatible, tots ells amb 3 incògnites i 4 equacions.

4. Si $A, B \in MAT(n, \mathbb{R})$ i $A - B$ no és invertible, demostreu que existeix almenys una matriu $X \in MAT(n, 1, \mathbb{R})$ tal que $AX = BX$.

5. Comproveu que el sistema d'equacions següent és compatible i determinat només si $c = a + b$,

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x \qquad + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

6. Demostreu que el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ -x - y - 2z = b, \\ -x - y = c; \end{cases}$$

no té solució si $a > 0, b > 0$ i $c > 0$.

7. Resoleu el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ + 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$$

8. Resoleu els sistemes homogenis següents:

a) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 6y - 2z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \end{cases}$

9. Resoleu els sistemes d'equacions següents:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -7x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{cases}$

10. Discutiu a $\mathbb{C}$,

$$\begin{cases} ix + y + iz + t = 0 \\ 2x - y + 2z - t = 1 \\ x + iy - z - it = 2 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases}$$

11. Discutiu, segons el valor del paràmetre real a, el sistema d'equacions següent

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$$

12. Estudieu, segons els valors dels paràmetres, els sistemes següents:

a) $\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m \end{cases}$ b) $\begin{cases} (a-1)x - ay = 2 \\ 6ax - (a-2)y = 1 - a \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + 3y = 2 \\ 3x + 2y = a \\ 2x + ay = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} kx + y + z + t = 1 \\ x + ky + z + t = k \\ x + y + kz + t = k^2 \\ x + y + z + kt = k^3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} bx + y + z = b^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3b \end{cases}$ f) $\begin{cases} ax + 2y + 3z + u = 6 \\ x + 3y - z + 2u = b \\ 3x - ay + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z + 3u = 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} ax + by + cz + dt = d - c \\ x + 2y - 3z + 4t = 0 \\ y - z + 2t = 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + y = k \\ ax + by = k^2 \\ a^2x + b^2y = k^3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} ax + y - z + t - u = 0 \\ x + ay + z - t + u = 0 \\ -x + y + az + t - u = 0 \\ x - y + z + at + u = 0 \\ -x + y - z + t + au = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$

13. Discutiu a $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} x - ay + a^2z = a \\ ax - a^2y + az = 1 \\ ax + y - a^3z = 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b-1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b+3)z = 2b - 1 \end{cases}.$$

14. Discutiu el sistema d'equacions següent en $\mathbb{R}$ i resoleu-lo per $\alpha = -3$ i $a = 2$,

$$\begin{cases} x+ & 2y & & & = 1 \\ x+ & y+ & & t & = 1 \\ x+ & 3y+ & 2\alpha z+ & 2t & = 1 \\ 2x+ & 6y+ & 2z+ & \alpha t & = a \end{cases}$$

15. Tres màquines diferents, A, B i C, són utilitzades 8 hores diàries per produir quatre productes diferents t, u, v i w. El nombre d'hores que cada màquina ha de ser utilitzada per fabricar una unitat de cada producte ens ho mostra la taula següent,

	Producte			
Màquina	t	u	v	w
A	1	2	1	2
B	7	0	2	0
C	1	0	0	4

és a dir, per produir una unitat de v cal 1 hora de la màquina A i 2 hores de la màquina B.

a) En termes de la quantitat de cada producte produït, quines equacions representen un ple ús de les màquines en 8 hores?

b) Resoleu el sistema trobat a l'apartat anterior.

c) Tenint present que resultats negatius no tenen sentit, però sí les solucions no enteres, interpreteu la solució del sistema.

d) Quina quantitat es fabrica de cada producte si la producció de t és maximitzada, mantenint el ple funcionament de totes les màquines?

e) Quina producció dels quatre articles maximitza la producció de w, mantenint la plena ocupació de les màquines?

16. a) Demostreu que tota matriu A té una inversa generalitzada A^i que satisfà $AA^iA = A$, i té una expressió del tipus

$$A^i = Q \begin{pmatrix} I_\rho & U \\ V & W \end{pmatrix} P,$$

on U, V, W són matrius arbitràries, ρ és el rang de la matriu A i P i Q són matrius elementals que satisfan $PAQ = \begin{pmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Si A^g és la matriu generalitzada que s'obté prenent $U, V, W = 0$, demostreu que la solució del sistema lineal $Ax = b$ pot expressar-se com

$$x = A^g b + (I - A^g A)z$$

on z és un vector arbitrari.

c) Utilitzeu l'apartat anterior per resoldre el sistema lineal següent:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 10x & + & & & 5z & & & = 1 \\ 4x & - & 2y & + & 2z & & & = 2 \\ 2x & + & 4y & + & z & - & 2t & = -3 \end{array}\right.$$

6. Espais vectorials

1. Digueu quins dels subconjunts següents de $\mathbb{R}^3$ són subespais vectorials:

a) $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}\}$;

b) $\{(x, y, z) \mid xyz = 0\}$;

c) $\{(x, y, z) \mid 2x + 4y - 3z = 2\}$;

d) $\{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$.

2. Sigui V un K-espai vectorial i $f : V \to V$ una aplicació que compleix per a tot $u, v \in V$ i $\lambda \in K$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$ i $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

A V es defineix la relació $u \sim v$ si, i només si, $f(u - v) = 0$ per a tot $u, v \in V$.

a) Demostreu que $\sim$ és una relació d'equivalència.

b) Si f és a més injectiva, demostreu que si $u \sim v$ aleshores $u = v$.

c) Si $V = \mathbb{R}^2$ i $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ és l'aplicació definida per $f(x, y) = (3x + y, 9x + 3y)$. Proveu que els elements $(0, 1)$ i $(1, -2)$ pertanyen a la mateixa classe d'equivalència.

3. Sigui $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el conjunt format per les funcions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Demostreu que $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ és espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ i mireu si són o no subespais vectorials els conjunts següents:

a) el conjunt de les funcions contínues;

b) el conjunt de les funcions derivables;

c) el conjunt de les funcions parelles);

d) el conjunt de les funcions imparelles;

e) el conjunt de les funcions constants;

f) el conjunt de les funcions no negatives;

g) el conjunt de les funcions tals que $f(x^2) = f(x)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

h) el conjunt de les funcions tals que $f(0) = f(1)$;

i) el conjunt de les funcions tals que $f(3) = 1 + f(-5)$;

j) el conjunt de les funcions tals que $f(-1) = 0$.

4. Per a quins valors de $\lambda \in \mathbb{R}$ el vector b és combinació lineal dels a_i?

a) $a_1 = (2,3,5)$, $a_2 = (3,7,8)$, $a_3 = (1,-6,1)$; $\quad b = (7,2,-\lambda)$.

b) $a_1 = (4,4,3)$, $a_2 = (7,2,1)$, $a_3 = (4,1,6)$; $\quad b = (5,9,\lambda)$.

c) $a_1 = (3,4,2)$, $a_2 = (6,8,7)$; $\quad b = (9,12,-\lambda)$.

d) $a_1 = (3,2,5)$, $a_2 = (2,4,7)$, $a_3 = (5,6,\lambda)$; $\quad b = (1,3,5)$.

5. Trobeu un sistema d'equacions que defineixi els subespais vectorials generats pels vectors:

a) $a_1 = (1,-1,1,0), a_2 = (1,1,0,1), a_3 = (2,0,1,1)$.

b) $a_1 = (1,-1,1,-1,1), a_2 = (1,1,0,0,3), a_3 = (3,1,1,-1,7), a_4 = (0,2,-1,1,2)$.

6. Comproveu si el nombre complex $3-2i$ és combinació lineal amb coeficients enters de cada un dels sistemes de vectors següents:

a) 1 , i;

b) $1-i$, $1+i$;

c) $4+2i$, $5-i$, $-5i$.

7. Digueu si els vectors donats són linealment dependents o independents:

a) $a_1 = (1,2,3)$, $a_2 = (3,6,7)$;

b) $a_1 = (2,-3,1)$, $a_2 = (3,-1,5)$, $a_3 = (1,-4,3)$;

c) $a_1 = (5,4,3)$, $a_2 = (3,3,2)$, $a_3 = (8,1,3)$;

d) $a_1 = (4,-5,2,6)$, $a_2 = (2,2-1,3)$, $a_3 = (6,-3,3,9)$, $a_4 = (4,-1,5,6)$;

e) $a_1 = (1,0,0,2,5)$, $a_2 = (0,1,0,3,4)$, $a_3 = (0,0,1,4,7)$, $a_4 = (2,-3,4,11,12)$.

8. Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial i u, v, w tres vectors de E que compleixen la relació $2u + 2v - w = -4u - 5v + w$. Demostreu que $\{u, v, w\}$ formen un sistema linealment dependent.

9. A l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ considerem els vectors $(1,1,0,a), (3,-1,b,1), (-3,5,a,-4)$. Determineu a i b per tal que aquests vectors siguin linealment dependents.

10. Demostreu que les matrius A i B són linealment independents en $MAT(2,3,\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. A l'espai $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ considereu les funcions f, g, h definides per $f(t) = t^2 + 2t - 1$, $g(t) = t^2 + 1$, $h(t) = t^2 + t$. Demostreu que són linealment dependents.

12. Demostreu que els vectors $e_i \in \mathbb{R}^3$ formen base i trobeu les components de x en aquesta base:

a) $e_1 = (1,1,1), e_2 = (1,1,2), e_3 = (1,2,3)$; $\quad x = (6,9,14)$.

b) $e_1 = (2,1,-3), e_2 = (3,2,-6), e_3 = (1,-1,1)$; $\quad x = (6,2,-7)$.

13. Trobeu una base del subespai que generen els vectors $(4,-5,2), (3,-3,4), (1,1,-2)$ i $(2,-1,1)$. Estudieu si aquest subespai és el mateix que el generat pels vectors $(1,-2,3)$ i $(2,0,-1)$.

14. Demostreu que $v_1 = (1,1,0,0), v_2 = (0,0,1,1), v_3 = (1,0,0,4), v_4 = (0,0,0,2)$ formen una base de $\mathbb{R}^4$, i a més:

a) Calculeu les components del vector $x = (1,0,2,-3)$ en aquesta base.

b) Determineu les components d'un vector arbitrari en aquesta base.

15. Trobeu la fòrmula que relaciona les components d'un vector de $\mathbb{R}^3$ a la base formada per $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,1), e_3 = (0,0,1)$, amb les del mateix vector a la base formada per $v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,0,1), v_3 = (1,1,0)$.

16. Trobeu una base dels subespais vectorials generats pels vectors a_i:

a) $a_1 = (1,0,0,-1), a_2 = (2,1,1,0), a_3 = (1,1,1,1), a_4 = (1,2,3,4)$,
$a_5 = (0,1,2,3)$;

b) $a_1 = (1,1,1,1,0), a_2 = (1,1,-1,-1,-1), a_3 = (2,2,0,0,-1)$,
$a_4 = (1,1,5,5,2), a_5 = (1,-1,-1,0,0)$.

17. Es considera en $\mathbb{R}^5$ el subespai format pels vectors $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tals que $x_3 = x_1 + x_2 - x_4$, $x_5 = x_2 - x_1$. Determineu una base del subespai i completeu-la fins a formar una base de $\mathbb{R}^5$.

18. Es considera un espai E i una base e_1, e_2, e_3. Demostreu que els vectors $e_1 + e_2$, $e_2 + e_3, e_3 + e_1$ també formen una base de E.

19. Demostreu que els vectors $(1, -1, i), (-1, i, 1), (i, 1-1)$ formen una base de $\mathbb{C}^3$. Trobeu les components de $(1+i, 1-i, i)$ en aquesta base.

20. $A \in MAT(n, \mathbb{R})$ és una matriu **màgica** si la suma dels elements de cada fila, columna o diagonal és sempre la mateixa.

a) Demostreu que el conjunt de les matrius màgiques és un subespai de $MAT(n, \mathbb{R})$.

b) El mateix per a les matrius màgiques simètriques i per a les matrius màgiques antisimètriques.

c) En el cas $n = 3$, trobeu la dimensió i doneu una base de cadascun dels tres subespais anteriors.

21. Demostreu que el conjunt de les matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, formen un $\mathbb{R}$-espai vectorial. Trobeu-ne una base.

22. Denotem per $S(n)$ i $H(n)$ els subspais de $MAT(n, \mathbb{R})$ formats per les matrius simètriques i antisimètriques respectivament.

a) A $MAT(n, \mathbb{R})$ definim la relació,

$$A \sim B \iff \frac{A + B^t}{2} \in S(n).$$

Demostreu que $\sim$ és una relació d'equivalència

b) Si $A, B \in S(n)$. Demostreu que $AB \in S(n) \iff AB = BA$.

c) Demostreu que $S(3)$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 6. Trobeu una base d'aquest espai.

d) Si $A = (a_{ij}) \in MAT(n, \mathbb{R})$ definim la traça de la matriu A com el nombre real $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Demostreu que si $A \in H(n)$, aleshores $\operatorname{tr} A = 0$.

e) Si definim l'aplicació $f : MAT(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\quad f(A) = \operatorname{tr} A$. És f injectiva? I exhaustiva?

23. Sigui S el subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit per

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\},$$

amb $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ donats. Demostreu que S és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ i trobeu una base de S.

24. Si $\{u,\ v,\ w\}$ és una base de un cert espai vectorial E, demostreu que $\{u+v, v+w, w+u\}$ també ho és.

25. Suposem que V és un espai vectorial i S un subespai vectorial de V. A l'espai vectorial V definim les dues relacions següents:

$$u \sim_1 v \iff u - v \in S \quad \text{i} \quad u \sim_2 v \iff u, v \text{ és un sistema linealment dependent.}$$

Demostreu que $\sim_1$ compleix la propietat transitiva i $\sim_2$ no.

26. Proveu que $\mathbb{C}$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 2 i un $\mathbb{C}$-espai vectorial de dimensió 1. Generalitzeu el resultat anterior a $\mathbb{C}^n$.

27. A $\mathbb{R}^4$ es consideren els vectors $(1, 4, -1, 10)$, $(6, 10, 1, 0)$ i $(2, 2, 1, 1)$. Proveu que són linealment independents i trobeu un vector que juntament amb aquests tres constituexi una base de $\mathbb{R}^4$.

28. Trobeu una base del subespai vectorial generat pels vectors de $\mathbb{R}^3$: $(4, -5, 2), (3, -3, 4), (1, 1, -2), (2, -1, 1)$. Estudieu si aquest subespai és el mateix que el generat pels vectors $(1, -2, 3), (2, 0, -1)$.

29. Si S i T són dos subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$ de dimensió 2, demostreu que $S \cap T \neq \{(0, 0, 0)\}$.

30. Trobeu la suma i la intersecció dels subespais vectorials generats pels vectors a_i amb els generats pels b_i on:

a) $a_1 = (1,2,1)$, $a_2 = (1,1,-1)$, $a_3 = (1,3,3)$;
$b_1 = (2,3,-1)$, $b_2 = (1,2,2)$, $b_3 = (1,1,-3)$.

b) $a_1 = (0,2,-1)$, $a_2 = (2,1,-1)$, $a_3 = (4,6,-4)$;
$b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (1,2,3)$, $b_3 = (0,-1,-2)$.

c) $a_1 = (1,0,2,1)$, $a_2 = (3,1,0,-1)$, $a_3 = (3,1,3,3)$;
$b_1 = (-4,2,3,1)$, $b_2 = (5,0,2,2)$, $b_3 = (1,1,7,7)$.

d) $a_1 = (2,1,-2,4)$, $a_2 = (1,2,0,3)$, $a_3 = (0,2,-1,1)$;
$b_1 = (1,0,2,-1)$, $b_2 = (2,-3,0,-1)$, $b_3 = (3,-3,2,-2)$.

31. Demostreu que l'espai vectorial E és suma directa de dos subespais V i W si, i només si, cada vector de E es pot expressar de manera única com a suma d'un vector de V i d'un de W.

32. Siguin V i W dos subespais de l'espai vectorial E. Demostreu que:

a) Si $E = V + W$, llavors $\dim E \leq \dim V + \dim W$.

b) Si $E = V \oplus W$, llavors $\dim E = \dim V + \dim W$.

c) Si $E = V + W$, llavors $\dim E = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$.

33. Sigui F el subespai de $\mathbb{R}^4$ solució de l'equació $x_1 - x_2 = 0$ i G el subespai generat per $(1,1,2,1)$ i $(2,0,-1,1)$. Trobeu les bases i les dimensions de F, G, $F+G$, $F \cap G$.

34. Comproveu si són subespais de $\mathbb{R}^3$ els conjunts següents:

a) $A = \{(x,y,z) \mid x + z = 0\}$;

b) $B = \{(x,y,z) \mid |x| = |y|\}$;

c) $C = \{(x,y,z) \mid z = x + 2\}$;

d) $D = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 0\}$;

e) $E = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 1\}$;

f) $F = \{(x,y,z) \mid x = y = 0\}$;

g) $G = \{(x,y,z) \mid z = x + y\}$.

Trobeu una base i la dimensió dels que siguin subespais. Calculeu una base i la dimensió de $D \cap F$, $D \cap G$, $F \cap G$, $A \cap D$, $D + F$, $D + G$, $F + G$ i $A + D$. Quines d'aquestes sumes són directes?

35. Considerem el subespai $F =< x, y, z, t >$ de $\mathbb{R}^3$, on $x = (1, 1, -1)$, $y = (3, 8, 2)$, $z = (0, -3, -3)$ i $t = (-2, -2, 2)$.

a) Trobeu una base i la dimensió de F.

b) Demostreu que $(3, -17, -23) \in F$ i busqueu les coordenades d'aquest vector en la base donada a l'apartat anterior.

c) Busqueu un subespai suplementari G de F.

d) Expresseu el vector $u = (2, 17, 12)$ com a suma de v i w, on $v \in F$ i $w \in G$.

36. A $\mathbb{R}^3$ considereu el subespai A$= < (0, 1, 1), (4, 1, -1), (2, 1, 0) >$.

a) Trobeu una base de A.

b) Trobeu la condició que ha de satisfer un vector (x, y, z) perquè sigui de A.

c) Trobeu una base de $B = \{(a + 3b - c, b - c, a + 2b) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

d) Trobeu una base de $A \cap B$.

e) Trobeu una base de $A + B$.

37. A l'espai vectorial M sobre $\mathbb{R}$ de les matrius quadrades d'ordre n amb coeficients reals, considerem els subconjunts S i T formats, respectivament, per totes les matrius simètriques i per totes les matrius antisimètriques.

a) Demostreu que S i T són subespais vectorials de M.

b) Calculeu la dimensió de S i de T.

c) Demostreu que $M = S \oplus T$.

38. A l'espai $\mathbb{R}^2$ es considera el subespai generat pel vector $(3, -1)$. Trobeu dos subespais que hi siguin suplementaris. Feu el mateix per al subespai de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors $(1, -1, 2), (-1, 3, -2)$.

39. Sigui F el subespai de $\mathbb{R}^4$ solució de l'equació $x - y = 0$ i G el subespai generat per $(1, 1, 2, 1)$ i $(2, 0, -1, 1)$. Trobeu les bases i les dimensions de $F, G, F + G, F \cap G$.

40. a) Trobeu una base del subespai E de $\mathbb{R}^5$ generat pels vectors $e_1 = (1, 2, 0, 3, 0), e_2 = (1, 2, -1, -1, 0), e_3 = (0, 0, 1, 4, 0), e_4 = (2, 4, 1, 10, 1)$ i $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

b) Si $F = \{(0, u, 0, v, 0) \in \mathbb{R}^5 \ : \ u, v \in \mathbb{R}\}$, quina és la dimensió de $E + F$ i $E \cap F$?

c) Doneu condicions sobre les coordenades de $b = (0, 0, 0, b_4, b_5)^t$ per tal que el sistema lineal $Ax = b$, on les files de A són els vectors e_i, $i = 1, \ldots, 5$, sigui compatible. En els casos que ho sigui trobeu les seves solucions.

7. Aplicacions lineals

1. Digueu quines de les aplicacions següents de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ són lineals:

a) $f(x,y,z) = (y+z, 2x+z, 3x-y+z)$.

b) $f(x,y,z) = (x, y+1, z+2)$.

c) $f(x,y,z) = (2x+y, x+z, z^2)$.

d) $f(x,y,z) = (2x+y, x+z)$.

e) $f(x,y,z) = (x-y+z, z, y)$.

f) $f(x,y) = (1+x, y, x-y)$.

g) $f(x,y) = (\sin x, y)$.

2. Es pot trobar una aplicació lineal F de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ que compleixi $F(1,-1,1) = (1,0)$ i $F(1,1,1) = (0,1)$?
I una de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ que compleixi $F(1,-1) = (1,0)$, $F(2,-1) = (0,1)$ i $F(-3,2) = (1,1)$?

3. Sigui A el conjunt de totes les matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, amb $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Demostreu que A és subespai de $MAT(2,\mathbb{R})$.

b) Demostreu que les matrius

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formen una base de A.

c) Si definim $f\colon A \to MAT(2,\mathbb{R})$ per

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

demostreu que f és una aplicació lineal.

d) Quina és la matriu associada a f prenent $\{M_1, M_2, M_3\}$ com a base de A?

4. Sigui $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determineu la antiimatge per f de $(0, -2, -4, 4)$.

b) Trobeu el rang de f.

c) Determineu el nucli de f.

5. Sigui $f : E \to E$ un endomorfisme que compleix $\operatorname{rang} f = 1$. Demostreu que existeix un escalar t tal que $f^2 = t\, f$.

6. Trobeu una base de la imatge i una del nucli de les aplicacions lineals definides per les matrius:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

7. Siguin E, F, G i H quatre espais vectorials de dimensió finita i $f : E \to F$, $g : F \to G$ i $h : G \to H$ tres aplicacions lineals tals que f és injectiva, h és exhaustiva, $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ i $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} g$. Demostreu que si $\dim F = \dim G$, llavors $\dim E = \dim H$.

8. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ amb $a \in \mathbb{R}$.

a) Trobeu una matriu P tal que PA sigui una matriu esglaonada per files. Quina és la dimensió de l'espai de files de la matriu A?

b) Segons el valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$, discutiu la solució del sistema d'equacions lineal $Ax = y$, amb $y^t = (1, 1, 0, 3, 1)$. Trobeu la solució quan $a = 1$.

c) Si $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ és l'aplicació lineal que té A com a matriu associada en la base canònica de $\mathbb{R}^5$, calculeu la dimensió i una base de $\operatorname{Im} f$. És f injectiva?

9. Calculeu el nucli i el rang de les aplicacions lineals següents, i comproveu que es satisfà la fórmula $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rang} f$:

$$\begin{array}{rccc} f_1: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (1,0,0) & \longrightarrow & (1,0) \\ & (0,1,0) & \longrightarrow & (1,0) \\ & (0,0,1) & \longrightarrow & (1,1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_2: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (1,0,0,0) & \longrightarrow & (1,1,0) \\ & (0,1,0,0) & \longrightarrow & (0,1,0) \\ & (0,0,1,0) & \longrightarrow & (1,0,0) \\ & (0,0,0,1) & \longrightarrow & (2,-1,0) \end{array}$$

10. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial que té una base formada pels vectors u, v, w, t, de manera que $f(u) = u+2w$, $f(v) = v+w$, $f(w) = 2u+v+w$, $f(t) = 2u+2v+4w$. Escriviu la matriu de f en aquesta base i trobeu una base i la dimensió dels subspais Ker f i Im f.

11. Sigui $h : \mathbb{R}^2 \to MAT(3, \mathbb{R})$ tal que:

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ -x & x & y \\ 0 & y & x-y \end{pmatrix}.$$

Proveu que h és lineal i trobeu el seu nucli i la seva imatge.

12. Siguin u i v dos vectors no nuls del pla tals que no hi ha cap constant $c \neq 0$ tal que $v = cu$. Sigui L una aplicació lineal del pla sobre ell mateix tal que $L(1,0) = u$ i $L(0,1) = v$. Descriviu la imatge del rectangle de vértexs (0,1), (3,0), (0,0) i (3,1) per l'aplicació L.

13. Es considera l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x, y, , z) = (x - y + \alpha, z - y + \beta)$. Calculeu α i β perquè sigui lineal i trobeu en aquest cas Ker$f$ i Imf.

14. Considereu les aplicacions $S, H : MAT(n) \longrightarrow MAT(n)$ definides respectivament per:

$$S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t) \quad \text{i} \quad H(A) = \frac{1}{2}(A - A^t), \quad \text{per a cada } A \in MAT(n).$$

a) Demostreu que S i H són lineals.

b) Determineu els seus nuclis i imatges, i calculeu el seus rangs.

c) Comproveu que $S^2 = S$, $H^2 = H$ i $S + H = id$.

d) Doneu les seves matrius en la base canònica quan $n = 2$.

15. Sabem que una aplicació lineal f de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ satisfà $f(1,2,3) = (1,0)$, $f(2,5,3) = (1,0)$ i $f(1,0,10) = (0,1)$.

a) Trobeu la fórmula que defineix f.

b) Calculeu la imatge de $(1,1,1)$.

c) Trobeu el nucli i la imatge de f.

16. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriu de l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en les bases $\mathcal{B} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ i $\mathcal{B}' = [w_1, w_2, w_3]$, on

$$v_1 = (0,1,1,1), \quad v_2 = (2,1,-1,-1), \quad v_3 = (1,4,-1,2), \quad v_4 = (6,9,4,2) \quad \text{i}$$

$$w_1 = (0,8,8), \quad w_2 = (-7,8,1), \quad w_3 = (-6,9,1).$$

a) Trobeu la imatge del vector (2,2,0,0).

b) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques.

17. Sigui $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cadascuna de les aplicacions indicades. Demostreu que L és un isomorfisme en cada cas.

a) $L(x,y,z) = (x - y, x + z, x + y + 3z)$.

b) $L(x,y,z) = (2x - y + z, x + y, 3x + y + z)$.

18. Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ que en la base canònica té per matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Vegeu si f és isomorfisme.

b) Calculeu la matriu associada a f^{-1} en base canònica.

c) Calculeu la antiimatge per f del vector $(1,2,-1,0)$.

19. Un endomorfisme de E té per matriu associada en una certa base la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a^3 \end{pmatrix}.$$

Trobeu Ker$f$ segons els valors de a.

20. Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x,y,z) = ((m-2)x + 2y - z,\ 2x + my + 2z,\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z)\,.$$

Determineu el rang de f i una base de Ker$f$ segons els valors de m.

21. Donat l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$, $f_r(x,y,z) = (2x + y + 2z, x + y, x + 2y + rz)$.

a) Trobeu el valor de r per al qual f_r té el rang més petit possible.

b) Calculeu una base i la dimensió de Ker f_r i Im f_r per a aquest valor.

c) Si $w = (1,2,1)$, calculeu $f_r(w)$ i $f_r^{-1}(f_r(w))$.

22. Siguin E, F, G tres espais vectorials i $f : E \to F$ i $g : F \to G$ dues aplicacions lineals que tenen per matrius en certes bases

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivament. Calculeu Ker f, Ker g, Ker $(g \circ f)$, Im f, Im g, Im $(g \circ f)$.

23. En un espai E fixem una base e_1, e_2, e_3 i a l'espai F la base v_1, v_2. Utilitzant aquestes bases, tenim una aplicació lineal definida per $f(x,y,z) = (x - 2z, y + z)$.

a) Trobeu la matriu A associada a f en les bases donades.

b) Trobeu la matriu B associada a f en les bases $e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3$ de E i $2v_1, 2v_2$ de F.

c) Mitjançant B, trobeu la imatge del vector $-2e_1 + 2e_2 - 2e_3$.

d) Trobeu la matriu C associada a f en les bases e_1, e_2, e_3 de E i $2v_1, 2v_2$ de F.

e) Trobeu la matriu D associada a f en les bases $e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3$ de E i v_1, v_2 de F.

24. Si $f \in Lin(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ té per matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calculeu per a quins valors de α l'aplicació f és injectiva i per a quins exhaustiva. Trobeu per a quins valors de α el vector (1,2,2,1) és de Im f.

25. Considerem l'aplicació lineal donada per

$$\begin{array}{rccc} f: & MAT(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & MAT(2,\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} a-d & 2(-a+b-c+d) \\ 0 & -b+c \end{pmatrix}. \end{array}$$

a) Doneu la matriu associada a f en la base canònica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Trobeu una base i la dimensió del nucli i de la imatge.

c) És $MAT(2,\mathbb{R})$ suma directa del nucli i de la imatge?

d) Trobeu la matriu associada a f en la base

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

26. Sigui $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ l'espai dels polinomis a coeficients reals de grau més petit o igual que 2 i

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

la matriu de l'aplicació $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ en la base $\mathcal{B} = [v_1, v_2, v_3]$, on

$$v_1 = 3x + 3x^2, \quad v_2 = -1 + 3x + 2x^2 \quad \text{i} \quad v_3 = 3 + 7x + 2x^2.$$

Trobeu les imatges de 1, x, x^2 i doneu la matriu de f en la base de P_2 formada per aquests vectors. Calculeu també la imatge del polinomi $1 + x^2$.

27. Siguin U i W subespais d'un espai vectorial E. Demostreu mitjançant els pasos indicats que

$$\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}).$$

a) Demostreu que l'aplicació $L : U \times W \to E$ donada per $L(u, w) = u - w$ és una aplicació lineal.

b) Proveu que la imatge de L és $U + W$.

c) Demostreu que el nucli de L és el subespai de $U \times W$ format pels elements (u, u) on $u \in U \cap W$. Trobeu una base i la dimensió d'aquest subespai.

d) Apliqueu el teorema de la dimensió per concloure la demostració.

28. Proveu que donada qualsevol aplicació lineal $f : E \longrightarrow F$ existeixen bases de E i F tals que la matriu de f en aquestes bases és $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quin significat té r?

29. Sigui

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \in MAT(2, \mathbb{R}) \mid c = a + b \right\}.$$

Considereu l'endomorfisme $f : E \longrightarrow E$ donat per

$$f \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3c + 3a \\ -2a - b & a - b + 3c \end{pmatrix}.$$

Trobeu una base d'E, la matriu de f en aquesta base i sengles bases de Ker f i Im f.

30. Un endomorfisme $f : E \longrightarrow E$ es diu un *projector* si $f^2 = f$. Demostreu que:

a) f és un projector si, i només si, $I - f$ ho és.

b) Si f és un projector, $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

c) Si f i g són projectors determineu condicions necessàries i suficients per a què $f + g$ també ho sigui.

d) Si f és un projector, trobeu les relacions existents entre Ker f, Im f, Ker $(I - f)$, Im $(I - f)$.

31. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal, que en la base $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (-1, 2, 1)$, $u_3 = (1, -1, 1)$ (a la sortida i a l'arribada), té per matriu

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & -3 \\ -8 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

a) Trobeu la matriu de f en base canònica (a la sortida i a l'arribada).

b) Trobeu el rang de f, una base de Im f, la dimensió i una base de Ker f.

c) És f injectiva? I exhaustiva?

d) Proveu que $E = \text{Ker } f^2 \oplus \text{Im } f^2$.

e) Trobeu l'antiimatge del vector $w = (a, b, -b) = au_1 + bu_2 - bu_3$ segons els valors reals de a i b. Doneu el resultat en base canònica.

f) Doneu una base del subspai $f(\text{Im} f^2)$.

g) Calculeu $f^{-1}(H)$, on $H = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0 \}$.

8. Determinants

1. Suposant que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calculeu els determinants següents:

$$a) \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}, \qquad b) \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix},$$

$$c) \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}.$$

2. Trobeu els valors de λ tals que $\det A = 0$ on

$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda - 6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda - 4 \end{pmatrix}.$$

3. Calculeu els determinants següents:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad b) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \qquad c) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

$$d) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad e) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.2 & 4 \\ 0.01 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0.2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Calculeu el determinant de la matriu $A = (a_{ij})$, on $a_{ij} = |i - j|$.

5. Proveu que $(x-1)^3$ divideix el polinomi $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$.

6. Comproveu que $\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a-1)^{n-1}(a+n-1)$.

7. Calculeu els determinants següents d'ordre n:

$$a) \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

8. Calculeu els determinants següents:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n+1)-x \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}.$$

9. Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, trobeu les arrels de l'equació,

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0.$$

10. Si $A_n \in MAT(n)$ és la matriu tridiagonal de Fibonacci de tamany n,

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

demostreu que $a_n = \det A_n$ és la successió de Fibonacci donada per $a_1 = 1, a_2 = 2$ i $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, si $n \geqslant 3$.

11. Resoleu el sistema d'equacions lineal següent

$$\begin{cases} 4x + y + z + w = 6 \\ 3x + 7y - z + w = 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w = -3 \\ x + y + z + 2w = 3 \end{cases}$$

a) Utilitzant la regla de Cramer.

b) Usant el mètode d'eliminació de Gauss.

12. Si a $MAT(n, \mathbb{R})$ es defineix la relació $A \sim B$ si, i només si, $\det A \leqslant \det B$. Demostreu que és reflexiva, transitiva però no és simètrica ni antisimètrica.

13. Sigui A una matriu $n \times n$ demostreu que:

a) $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$.

b) Si $\operatorname{rang} A = n - 1$, llavors $\operatorname{rang}(\operatorname{adj} A) = 1$.

14. Si $A \in MAT(n, \mathbb{R})$ té exàctament $(n-1)$ elements no nuls, aleshores demostreu que $\det A = 0$.

15. Sigui A una matriu 2×2 tal que $A^2 = 0$. Demostreu que, per a tot a, $\det(aI - A) = a^2$.

16. Si $A \in MAT(n)$ és una matriu ortogonal, $A^{-1} = A^t$, aleshores $\det A^2 = 1$.

17. Si $n > 1, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i $A \in MAT(n)$ són tals que $a_0 \neq 0$ i $a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_n A^n = 0$, aleshores A és invertible.

18. Sigui A una matriu quadrada $n \times n$ formada per nombres enters entre 0 i 9. Demostreu que si les files o les columnes de A, llegides com un nombre amb x xifres, formen un nombre múltiple de 3 aleshores $\det A$ també serà múltiple de 3. Comproveu, sense fer explícitament els càlculs, que el determinant següent és múltiple de 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

9. Diagonalització

1. Si f és un endomorfisme sobre un espai vectorial V i $u \in V$ és un vector propi de f de valor propi $\lambda \in K$. Demostreu que:

a) $-u$ és un vector propi de f de valor propi λ.

b) Si $\alpha \in K \setminus \{0\}$, u és un vector propi de αf de valor propi $\alpha\lambda$.

c) u és un vector propi de f^2 de valor propi λ^2.

2. Si $A, B \in MAT(n, \mathbb{R})$ són tals que B és una matriu invertible i existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ que verifica $\det(A - \lambda B) = 0$, demostreu que λ és un valor propi de la matriu AB^{-1}

3. Demostreu que una matriu quadrada A i la seva transposta A^t tenen els mateixos valors propis.

4. Sigui V un espai vectorial real i $f : V \longrightarrow V$ un endomorfisme. Proveu que si la dimensió de V és senar aleshores f té almenys un valor propi real.

5. Si A és una matriu idempotent ($A^2 = A$), demostreu que tot valor propi de AB és valor propi de ABA.

6. Sigui E un R-espai vectorial de dimensió finita i f i g dos endomorfismes sobre E amb els mateixos valors propis. Demostreu:

a) f és bijectiu $\Longleftrightarrow$ 0 no és valor propi de f.

b) f és bijectiu $\Longleftrightarrow$ g és bijectiu.

7. Sigui $A \in MAT(n, \mathbb{R})$. Si existeixen $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ i $x \in \mathbb{R}^n$ tals que $A^{m-1}x \neq 0$ i $A^m x = 0$, aleshores $A^{m-1}x$ és vector propi de A.

8. Calculeu el polinomi característic, els valors propis i els vectors propis associats a cada valor propi de les matrius següents:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c)}\ \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{d)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{e)}\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{f)}\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{g)}\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{h)}\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

9. Trobeu els valors i vectors propis de l'endomorfisme $F : \mathcal{P}_2[x] \longrightarrow \mathcal{P}_2[x]$ definit per

$$F(ax^2 + bx + c) = (c - 2a)x^2 - (8a + b)x + (2a + 6b + 5c).$$

10. Trobeu els valors i vectors propis de l'endomorfisme $F : MAT(2, \mathbb{R}) \longrightarrow MAT(2, \mathbb{R})$ definit per

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a + c \\ b - 2c & d \end{pmatrix}.$$

11. És diagonalitzable la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

12. Diagonalitzeu, si és possible, la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

13. Determineu quines de les matrius següents són diagonalitzables i doneu, quan sigui possible, una base en que diagonalitzin.

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{c)}\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad \text{d)}\ \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{e)}\ \begin{pmatrix} -2/5 & 3/5 & -3/5 \\ -3 & 7 & 0 \\ 3/5 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}, \quad \text{f)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{g)}\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

14. Per a quins valors de a i b reals diagonalitza la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$? I sobre $\mathbb{C}$?

15. Demostreu que si $A \in MAT(n, \mathbb{R})$ és una matriu triangular superior amb els elements de la diagonal principal diferents dos a dos aleshores A és diagonalitzable.

16. Decidiu si la matriu següent és diagonalitzable,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

17. Trobeu per a quins valors reals de a i b diagonalitza l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ que té per matriu associada en la base canònica la matriu $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

18. Determineu els valors de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tals que la matriu $\begin{pmatrix} c & 2a & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & 2b & -c \end{pmatrix}$ diagonalitza.

19. Considereu l'endomorfisme $f : \mathcal{P}_3[x] \longrightarrow \mathcal{P}_3[x]$ donat per

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a + b + c + d) + 2(b + c + d)x + 3(c + d)x^2 + 4dx^3.$$

Trobeu una base en la qual f diagonalitzi.

20. Considerem l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^4$ que en la base canònica té per matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculeu el polinomi característic i els valors propis.

b) Trobeu una base de $\mathbb{R}^4$ formada per vectors propis.

c) Doneu la matriu de canvi de base P de la base canònica a la base de l'apartat b). Calculeu P^{-1}.

d) Escriviu la matriu diagonal associada en la base de l'apartat b) i comproveu que és igual a $P^{-1}AP$.

21. Per a quins valors reals α i β és diagonalitzable la matriu

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 3 & 0 & \alpha \end{pmatrix}?$$

En els casos que ho sigui trobeu una base de $\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis.

22. Sigui A la matriu de $MAT(n, \mathbb{R})$ formada íntegrament per uns. Calculeu el polinomi característic. Proveu que A és diagonalitzable i trobeu una matriu diagonal D i una invertible P tals que $A = PDP^{-1}$

23. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal i considereu les tres hipòtesis següents:

(I) $f(1,1,1) = (1,1,1)$ i $f(1,0,0) - f(0,1,0) = f(1,1,2)$;

(II) $f^2 = f$;

(III) $f(F \cap G) \subset F \cap G$ i $f(F \cap G) \neq \{0\}$ on F i G són els subespais de $\mathbb{R}^3$ definits per:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + z = 0\} \quad \text{i} \quad G =< (1,-1,0),(1,0,1) > .$$

Demostreu que:

a) Si f compleix (I), aleshores 0 i 1 són valors propis de f.

b) Si f compleix (I), aleshores el determinant de la matriu associada a f en qualsevol base de $\mathbb{R}^3$ és sempre zero.

c) Si f compleix (II), aleshores els únics valors propis de f possibles són 0 i 1.

d) Si f compleix (III), aleshores $F \cap G =< (-1,3,2) >$.

e) Si f compleix (III), aleshores $(-1,3,2)$ és un vector propi de valor propi diferent de zero.

f) Si f compleix $(I), (II)$ i (III), aleshores f és diagonalitzable. Trobeu una base en que f diagonalitzi.

24. Sigui $A \in MAT(n, \mathbb{R})$ una matriu no nul·la fixada i $f_A : MAT(n, \mathbb{R}) \to MAT(n, \mathbb{R})$ una aplicació definida per $f_A(X) = AX - XA$ per a tota $X \in MAT(n, \mathbb{R})$.

a) Demostreu que f_A és un endomorfisme.

b) Demostreu que f_A no és injectiva.

c) Demostreu que el determinant de la matriu associada a f_A en qualsevol base de $MAT(n, \mathbb{R})$ és igual a zero.

d) Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$. Per a quins valors dels paràmetres reals a, c i d l'endomorfisme f_A és diagonalitzable?

25. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2.5 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calculeu A^{1492} i $\lim_{n\to\infty} A^n$.

26. Una matriu A és idempotent si $A^2 = A$. Sigui A una matriu simètrica idempotent. Demostreu que:

a) A té rang k si, i només si, A té k valors propis iguals a 1 i els altres iguals a 0. (Indicació: tota matriu simètrica diagonalitza).

b) Si $a_{ii} = 0$ per a algun i, aleshores tots els elements de la fila i i tots els elements de la columna i són 0.

27. Quina relació hi ha entre els valors propis de A i de A^n? I entre els vectors propis?

28. Calculeu les potències

a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$, b) $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^{100}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^3$.

29. Un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ transforma el vector $v_1 = (1, 2, 1)$ en ell mateix i té $v_2 = (1, -1, -0)$ i $v_3 = (2, 0, 1)$ com a vectors propis de valors propis 0 i 1, respectivament.

a) Demostreu que $\{v_1, v_2, v_3\}$ és base de $\mathbb{R}^3$. Trobeu la matriu associada a f en aquesta base.

b) Trobeu la matriu associada a f en la base canònica.

c) Doneu una base i la dimensió del nucli i de la imatge.

d) És $\mathbb{R}^3$ suma directa del nucli i la imatge de f?

30. Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensió 3, $[e_1, e_2, e_3]$ una base de E i f l'endomorfisme de E que a la base e_1, e_2, e_3 ve donat per

$$\begin{aligned} f\colon E &\to E \\ (x, y, z) &\mapsto (2x + 4z, 3x - 4y + 12z, x - 2y + 5z). \end{aligned}$$

a) Trobeu la matriu associada a f en la base $[e_1, e_2, e_3]$.

b) Doneu la dimensió i una base del nucli i la imatge de f.

c) Comproveu que els vectors $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = 2e_1 + e_2 + e_3$, $v_3 = -e_1 + 2e_3$ formen una base de E.

d) Calculeu $f(v)$ i $f^{-1}(f(v))$, on $v = -9e_1 - 7e_2 - 3e_3$.

e) Trobeu la matriu associada a f en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de l'apartat c).

f) Calculeu les coordenades del vector v de l'apartat d) i les de $f(v)$ en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

g) És f diagonalitzable? Si ho és, trobeu una base en què diagonalitzi i la matriu diagonal associada.

31. Considerem una aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que el nucli està format pels vectors (x, y, z), que són solució de l'equació $5x + y - 2z = 0$, i $(1, 1, 1)$ és un vector propi de valor propi $-1/2$. Trobeu la matriu associada a f en la base $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

32. Considereu l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ definit per $f(x, y, z) = (ax - y, x + y + z, 2z)$ on a és un paràmetre real.

a) Trobeu el rang de f segons els valors de $a \in \mathbb{R}$.

b) Siguin F i G els subespais de $\mathbb{R}^3$ definits per

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - ay + z = 0\} \quad \text{i} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, bx + y + bz = 0\},$$

on b és un altre paràmetre real. Trobeu els valors de a i b per tal que G sigui igual a la imatge de F per f.

c) És f diagonalitzable quan $a = 3$?

d) Doneu condicions sobre a per tal que f tingui tots els seus valors propis reals.

33. Siguin $(a_n), (b_n), \ldots, m$ successions tals que

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

amb $A \in MAT(n, \mathbb{R})$. Trobeu una expressió (no recurrent) del terme general de cada una d'aquestes successions quan A és diagonal. Com es pot trobar aquest terme general quan A és diagonalitzable? Apliqueu-ho als casos següents:

a) Trobeu totes les successions (a_n) tals que $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$. (Indicació: introduïu una nova successió $b_n = a_{n-1}$).

b) Trobeu el terme general de la successió de Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

b) Discutiu la convergència de les successions complexes $(a_n), (b_n)$ donades per:

$$a_{n+1} = \alpha(a_n + \sqrt{3}b_n) \quad \text{i} \quad b_{n+1} = \alpha(-\sqrt{3}a_n + b_n),$$

segons els valors de α, a_0 i b_0.

34. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

a) Demostreu que, per a tot $n \in \mathbb{N}$, existeixen reals a_n, b_n tals que $A^n = a_n A + b_n I$, on I és la matriu identitat d'ordre 3;

b) Demostreu que A és diagonalitzable;

c) Calculeu els coeficients a_n, b_n de l'apartat a).

35. En una certa zona, la distribució de la població de tres espècies d'animals segueix les lleis següents:

$$x_{n+1} = 7y_n + 4z_n, \quad y_{n+1} = \frac{1}{9}x_n, \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}y_n,$$

on x_n, y_n i z_n són les quantitats respectives d'individu de cada espècie, a l'any n.

a) Proveu que la població tendeix a estabilitzar-se amb el pas dels anys.

b) Calculeu la població que hi haurà de cada espècie quan s'hagi assolit l'equilibri, suposant que les poblacions inicials fossin $x_0 = 1150, y_0 = 930$ i $z_0 = 740$.

36. Trobeu l'arrel quadrada de la matriu $\begin{pmatrix} 24 & -14 & -16 \\ 10 & -3 & -8 \\ 10 & -4 & -7 \end{pmatrix}$.

37. Un OVNI surt d'un planeta en el qual tenen el seu origen els vectors v_1, v_2, v_3. Aquests vectors són utilitzats com base d'un sistema de coordenades de l'univers ($\mathbb{R}^3$). Després

d'arribar al punt (0,0,1) la nau es deixa portar per una estranya força tal que cada dia la transporta de la situació v a la Av, on

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 9/2 & -3/2 \\ -6 & 8 & -3 \\ -9 & 27/2 & -11/2 \end{pmatrix}.$$

a) On estarà al cap de 10 dies?

b) Arribarà algun dia a la Terra, que està situada al punt (1,2,-4) segons les seves coordenades ?

38. Per a cadascuna de les matrius següents A calculeu A^{1993}.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 \\ 5 & 13 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

39. Determineu la forma canònica de Jordan de les matrius següents:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Formes bilineals i quadràtiques

1. Siguin $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ i $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Determineu quines de les aplicacions següents són formes bilineals a $\mathbb{R}^2$:

a) $f(u, v) = 2xb - 3ya$,
b) $f(u, v) = x + b$,
c) $f(u, v) = 3yb$,
d) $f(u, v) = xy + ab$,
e) $f(u, v) = 1$,
f) $f(u, v) = 0$.

2. Quina de les aplicacions següents $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és una forma quadràtica?

a) $q(x, y) = x^2 + y^2 + 1$;
b) $q(x, y) = xy + x^2 + y$;
c) $q(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$.

3. Sigui f una forma bilineal definida sobre l'espai vectorial E. Demostreu que les aplicacions f_1 i f_2 de $E \times E$ a $\mathbb{R}$, definides per:

$$f_1(x, y) = \frac{f(x, y) + f(y, x)}{2}, \qquad f_2(x, y) = \frac{f(x, y) - f(y, x)}{2},$$

són bilineals simètrica i antisimètrica, respectivament.

4. Si E és un $\mathbb{R}$-espai vectorial i $f : E \times E \to \mathbb{R}$ és una aplicació lineal i bilineal alhora, demostreu que f és l'aplicació nul·la.

5. Sigui $C \in MAT(n, \mathbb{R})$ fixada, demostreu que l'aplicació $f : MAT(n, \mathbb{R}) \times MAT(n, \mathbb{R}) \to R$ definida per:

a) $f(A, B) = \operatorname{tr}(A^t CB)$ és bilineal.
b) $f(A, B) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr} A \ \operatorname{tr} B$ és bilineal.
c) $f(A, B) = \operatorname{rang}(AB)$ no és bilineal.

6. Si E és un espai vectorial real i $f : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal que compleix $f(u,u) = 0, \quad \forall u \in E$. Demostreu que f és antisimètrica ($f(u,v) = -f(v,u), \quad \forall u, v \in E$).

7. Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una forma bilineal antisimètrica, demostreu que f és la forma bilineal nul·la.

8. Si E és un espai vectorial real, $f : E \times E \to \mathbb{R}$ és una forma bilineal simètrica i q la seva forma quadratica associada, demostreu que $\forall u, v \in E$ es compleix:

a) $q(u+v) = q(u) + q(v) + 2f(u,v)$;

b) $f(u,v) = \frac{1}{4}\left(q(u+v) - q(u-v)\right)$.

9. Donat l'espai vectorial E sobre $\mathbb{R}$ format per les funcions reals contínues a l'interval $[0,1]$, es defineix

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x), \qquad \forall f, g \in E.$$

a) Demostreu que $<,>$ és una forma bilineal simètrica definida positiva.

b) Sigui $\mathbb{R}_2[X]$ l'espai vectorial dels polinomis reals de grau més petit o igual que dos. Demostreu que $<,>$ és una forma bilineal definida positiva sobre $\mathbb{R}_2[X]$. Calculeu la matriu associada a $<,>$ a la base de $\mathbb{R}_2[X]$ que volgueu.

10. Sigui f una forma bilineal a $\mathbb{R}^2$ definida per $f\left((x,y),(x',y')\right) = 2xx' - 3xy' + yy'$.

a) Trobeu la matriu A de f en la base formada per $u_1 = (1,0)$ i $u_2 = (1,1)$.

b) Trobeu la matriu B de f en la base formada per $v_1 = (2,1)$ i $v_2 = (1,-1)$.

c) Trobeu la matriu del canvi P de la base $\{u_1, u_2\}$ a la base $\{v_1, v_2\}$, i verifiqueu que $B = P^t A P$.

11. Una forma bilineal f sobre $\mathbb{R}^3$ té la matriu associada següent a la base canònica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Obteniu $f(x,y)$.

b) Determineu la matriu de f respecte de la base $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

12. Trobeu les formes quadràtiques associades a les formes bilineals que tenen per matriu associada:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Trobeu la matriu simètrica corresponent a cadascun dels polinomis quadràtics següents:

a) $q(x,y) = 4x^2 - 6xy - 7y^2$, b) $q(x,y,z) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xy - 6yz + z^2$,

c) $q(x,y) = xy + y^2$, d) $q(x,y,z) = x^2 - 2yz + xz$,

e) $q(x,y) = 3x^2 - 3xy - y^2$, f) $q(x,y,z) = 2x^2 - 8xy + y^2 - 16xz + 14yz + 5z^2$.

14. Reduïu a suma de quadrats les formes quadràtiques següents:

a) $2xy + 2zt$;

b) $x^2 + 2xy - 2xt + y^2 - 2yz + z^2 + 2zt + t^2$.

15. Per a cadascuna de les matrius següents A, trobeu una matriu invertible P tal que P^tAP sigui una matriu diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \\ -2 & -5 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

16. Reduïu les formes quadràtiques següents a una suma de multiples de quadrats:

a) $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy - 4yz$;

b) $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 4zy$;

c) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4xy + 4yz + 4zx + 4xt$.

17. Quines de les formes quadràtiques següents són definides positives?

a) $-x^2 + 3xy - 3y^2$,

b) $-2x^2 + 2xz - y^2 - z^2 + 4zt - 9t^2$,

c) $x^2 - 2xy + 2y^2$,

d) $2x^2 + 2xy - xz + y^2 + yz + z^2$.

18. Suposeu que A és una matriu simètrica definida positiva. Proveu que hi ha una matriu invertible P tal que $A = P^t P$

19. Si $q : \mathbb{R}^n \to R$ és una forma quadràtica definida positiva i A és la seva matriu associada, aleshores la forma quadràtica q' definida per $q'(x) = x^t(A+A^t)x$ també es definida positiva.

20. Si $q : \mathbb{R}^n \to R$ és una forma quadràtica tal que la seva matriu associada A verifica $\det A = 0$, aleshores Q no és ni definida positiva ni definida negativa.

21. Trobeu el rang i la signatura de les formes quadràtiques següents:

a) $x^2 - 2xy + 2xz - 2xt + y^2 + 2yz - 4yt + z^2 - 2t^2$;

b) $x^2 - 4xy + 2xz + 4y^2 + z^2$.

22. Si $A \in MAT(n, \mathbb{R})$ és una matriu invertible, demostreu que la forma quadràtica q definida per $q(x) = x^t A A^t x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ es definida positiva.

23. Sigui f la forma bilineal simètrica associada a la forma quadràtica $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Demostreu que:

a) f és no degenerada si, i només si, $b^2 - 4ac \neq 0$;

b) f és definida positiva si i només si, $a > 0$ i $b^2 - 4ac < 0$.

24. Proveu que si per a una matriu quadrada A existeix una matriu invertible P tal que $P^t AP$ és diagonal llavors A és simètrica.

25. Per a les formes quadràtiques sobre $\mathbb{R}^3$ que definim a continuació calculeu una base ortogonal $[a_1, a_2, a_3]$, el rang de la forma i una base $[b_1, b_2, b_3]$ tal que la matriu de la forma en aquesta base sigui diagonal i formada exclusivament per elements iguals a 1, -1 i 0:

a) $q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 7z^2 + 4xy - 4yz$,

b) $q(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2yz$,

c) $q(x, y, z) = 2xy - 4xz + 2yz$.

26. Demostreu que si A és una matriu definida positiva aleshores A és invertible i A^{-1} també és definida positiva.

27. Doneu un exemple d'una matriu real A d'ordre 2 tal que els seus menors principals siguin tots més gran que zero (> 0) i que no sigui definida positiva. Busqueu $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^t A x < 0$.

28. Si $q : \mathbb{R}^n \to R$ és una forma quadràtica i x i $y \in \mathbb{R}^n$ compleixen $q(x) < 0$ i $q(y) > 0$, demostreu que x i y són linealment independents.

29. Si $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una forma quadràtica definida positiva i $x, y \in \mathbb{R}^n$ compleixen $q(2x + 3y) = 0$, demostreu que x i y són linealment dependents.

30. Trobeu per a quins valors reals a, b, c la matriu $\begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}$ defineix un producte escalar.

31. Sigui $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma quadràtica que té per matriu associada en la base canònica

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{on } \alpha \text{ és un paràmetre real.}$$

a) Estudieu, segons els valors de $\alpha \in \mathbb{R}$, el rang i la signatura de la forma quadràtica q.

b) Per a quins valors de α la forma quadràtica q és un producte escalar? En els casos que ho sigui trobeu una base de $\mathbb{R}^2$ ortogonal segons aquest producte escalar.

32. Proveu que una matriu simètrica A és una matriu associada a un producte escalar si i només si existeix una matriu invertible B tal que $A = B^t B$.

33. Trobeu la matriu del producte escalar ordinari de $\mathbb{R}^3$ en la base formada pels vectors $(4, 1, 1), (0, -5, 1)$ i $(2, 2, 0)$.

34. Considereu les aplicacions següents de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ definides per:

a) $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$,

b) $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$,

c) $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.

Comproveu que són normes. Si $u = (x,y)$ demostreu que:

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_1, \qquad \|u\|_1 \leq \sqrt{2}\,\|u\|_2 \quad \text{i} \quad \|u\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|u\|_\infty.$$

Si $B_p = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\|_p \leq 1\}$ per a $p = 1, 2, \infty$, demostreu que $B_1 \subset B_2 \subset B_\infty$. Comproveu també gràficament aquest resultat fent un dibuix al pla del tres conjunts.

35. Trobeu el cosinus de l'angle α format pels vectors de $\mathbb{R}^2$, $(2,-5)$ i $(1,4)$.

36. Determineu l'angle que formen els vectors de $\mathbb{R}^n$, $(1,1,\ldots,1)$ i $(1,2,\ldots,n)$ quan $n \to \infty$. Indicació: $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ i $1+2^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

37. Calculeu la distància entre les funcions $f(t) = 1$ i $g(t) = 1 + 1/t$ a l'espai vectorial euclidià $\mathcal{C}([1,2])$ de les funcions contínues sobre l'interval $[1,2]$, amb el producte escalar definit per $\phi(f,g) = \int_1^2 f(t)g(t)\,dt$.

38. Si la matriu de la forma quadràtica d'un espai vectorial euclidià de dimensió 3 respecte una base e_1, e_2, e_3 és $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. Comproveu que el vector $(-1,3,1)$ és ortogonal a $(1,7,-7)$ i $(11,0,7)$.

39. Proveu que si $v_1, \cdots, v_m$ és una base ortonormal d'un subespai F d'un espai vectorial euclidià E, aleshores per a tot $x \in E$ es verifica

$$P_F(x) = P_{v_1}(x) + \cdots + P_{v_m}(x).$$

40. Trobeu, mitjançant el mètode de Gram-Schmidt una base ortonormal del subespai de $\mathbb{R}^4$, $F =< (1,2,1,3), (4,1,1,1), (3,1,1,0) >$.

41. Trobeu una base ortonormal pel subespai de $\mathbb{R}^4$ generat pels tres vectors següents: $(1,0,1,0)$, $(1,1,1,0)$ i $(1,-1,0,1)$. Feu el mateix pel subespai de $\mathbb{R}^5$ generat pels vectors: $(1,-1,1,0,0)$, $(-1,0,0,0,1)$, $(0,0,1,0,1)$ i $(1,0,0,1,1)$.

42. Descomponeu el vector x en suma d'un vector de F i un altre de $F^\perp$ en els casos següents:

a) $x = (5,2,-2,2)$, $\quad F =< (2,1,1,-1),(1,1,3,0) >$;

b) $x = (-3,5,9,3)$, $\quad F =< (1,1,1,1),(2,-1,1,1),(2,-7,-1,-1) >$.

43. Siguin S i T subespais ortogonals de $\mathbb{R}^n$ tals que $\dim S + \dim T = n$. Per què han de ser S i T complements ortogonals ($\dim S^\perp + \dim T^\perp = n$)?

44. Considereu a $\mathbb{R}^4$ el subespai $F = \{(x,y,z,t) : x+y=0 \text{ i } z+t=0\}$. Busqueu una equació implícita i una base de $F^\perp$.

45. Sigui $f : \mathcal{P}_3[x] \to \mathcal{P}_3[x]$ l'endomorfisme definit per $f(p(x)) = p'(x)$. Trobeu el nucli i la imatge de f. Estan en suma directa? Si a $\mathcal{P}_3[x]$ definim el producte escalar $(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$, calculeu l'ortogonal del nucli de f.

46. Sigui E un espai vectorial euclidià de dimensió finita i F_1 i F_2 subespais de E. Proveu que $(F_1+F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$ i que $F_1^\perp + F_2^\perp = (F_1 \cap F_2)^\perp$. Vegeu també que $F_1 \subset F_2^\perp$ si, i només si, $F_2 \subset F_1^\perp$.

47. Demostreu que la forma quadràtica $2x^2+y^2+z^2+2xy$ indueix un producte escalar $<,>$. Calculeu a l'espai vectorial euclidià $\{\mathbb{R}^3, <,>\}$ una base ortogonal pel mètode de Gram-Schmidt.

48. Direm que una matriu A és ortogonal, si $A^t = A^{-1}$.

a) Calculeu $\det A$ si A és una matriu ortogonal.

b) Demostreu que si A i B són ortogonals, llavors AB i A^{-1} també són ortogonals.

c) Comproveu que totes les matrius ortogonals d'ordre 2 són d'alguna de les dues formes següents:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

o bé

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

49. Donada la forma quadràtica q sobre $\mathbb{R}^4$, que a la base canònica té l'expressió

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\sum_{i=1}^{4} 2ax_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} 2ax_ix_j, \qquad a \in \mathbb{R},$$

trobeu una base ortonormal pel producte escalar usual de $\mathbb{R}^4$, de manera que la forma quadràtica quedi reduïda a suma de quadrats. Escriviu l'expressió de la forma quadràtica respecte d'aquesta base.

50. Feu el mateix que a l'exercici anterior, però amb la forma quadràtica

$$q(x, y, z, , t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 2zt.$$

51. Denotem per S al subespai vectorial de $MAT(2, \mathbb{R})$ format per les matrius simètriques i definim l'aplicació $\Phi : S \times S \to \mathbb{R}$ per $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(AB), \quad \forall A, B \in S$.

a) Demostreu que Φ és un producte escalar.

b) Donades les matrius

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

trobeu una matriu A_3 de forma que A_1, A_2 i A_3 formin una base ortogonal de S.

c) Ortonormalitzeu la base anterior.

52. Sigui E l'espai vectorial dels polinomis reals de grau ≤ 2. Per a tot parell $p(x), q(x) \in E$ definim

$$\phi(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx.$$

a) Demostreu que ϕ és un producte escalar a E.

b) Trobeu una base ortonormal de E.

c) Trobeu tots els polinomis ortogonals al polinomi $2x + 1$.

53. Reduïu a suma de quadrats la forma quadràtica real

$$2x_1x_2 + 2x_3x_4 + \cdots + 2x_{2n-1}x_{2n}, \qquad n \geqslant 1$$

en una base ortonormal de $\mathbb{R}^{2n}$. Escriviu la forma diagonal i la base ortonormal.

54. Determineu la projecció ortogonal del vector $(3, -1, 2)$ sobre el vector $(1, -1, , 4)$.

55. Busqueu la projecció ortogonal del vector $(5, -2, 3)$ sobre el subespai generat pels vectors $(1, -2, 1)$ i $(-3, -1, 2)$.

56. Calculeu la projecció ortogonal del vector $(2, -1, 1, 3)$ sobre el subespai de $\mathbb{R}^4$ format per les solucions de l'equació $x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$, $2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 0$.

57. Trobeu una base ortonormal del subespai de $\mathbb{R}^4$ format per les solucions de l'equació $2x + 4y - z + 3t = 0$. Trobeu la projecció ortogonal del vector $(4, -7, 1, 2)$ sobre aquest subespai.

58. Proveu que si $v_1, \ldots, v_m$ és una base ortonormal d'un subespai F d'un espai vectorial euclidià E, llavors per a tot $x \in E$ es verifica

$$P_F(x) = P_{v_1}(x) + \cdots + P_{v_m}(x).$$

59. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to R^3$ l'endomorfisme definit per $f(x, y, z) = (ax+by+az, cy, ax+by+az)$ on a,b,c són tres paràmetres reals.

a) Calculeu el nucli i la imatge de f. Demostreu que si $a \neq 0$, aleshores el nucli i la imatge estan en suma directa.

b) Quines condicions han de complir els paràmetres reals a, b, c per tal que f sigui diagonalitzable?

c) Quines condicions han de complir $a, b, c \in \mathbb{R}$ per tal que la matriu associada a f en la base $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ sigui la matriu associada a una forma bilineal simètrica semidefinida positiva?

d) Si $b = 0$ i $a, c \neq 0$, demostreu que a $\mathbb{R}^3$ amb el producte escalar ordinari es compleix $(\ker f^2)^\perp =< (1, 0, 1), (0, 1, 0) >$.

11. Espais afins euclidians

1. Sigui (E, V) un espai afí i P un punt de E. Es defineix $\phi_p : E \to V$ per $\phi_p(Q) = Q - P$.

a) Demostreu que ϕ_p és una aplicació bijectiva.

b) És lineal?

2. Trobeu les coordenades del punt $Q = (-1, 2, 8)$ de l'espai afí en el sistema de referència amb origen a $(2, 1, 1)$ i eixos a $(1, -1, 1), (1, 0, 2)$ i $(2, -2, 3)$. Trobeu, també, els punts que tenen les mateixes coordenades amb el sistema nou i amb l'antic.

3. En el sistema de referència del pla d'origen $(-3, 4)$ i eixos $(1, 1)$ i $(0, 3)$ un punt té coordenades $(4, 0)$. Calculeu les coordenades antigües d'aquest punt.

4. Trobeu les equacions paramètriques de la recta que:

a) Passa pel punt $(1, 2, 3)$ en la direcció $(1, 1, -1)$.

b) Passa pels punts $(-4, 2, 1)$ i $(-3, 5, 3)$.

5. Trobeu les equacions en coordenades cartesianes de les rectes següents:

a) $x(t) = 2t, \quad y(t) = 3 - t, \quad z(t) = t.$

b) $x(t) = 2t + 5, \quad y(t) = t - 6, \quad z(t) = 5t + 2.$

c) $x(t) = t, \quad y(t) = 8t - 6, \quad z(t) = 4t + 4.$

6. Trobeu les equacions paramètriques de les rectes:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{5}, \quad \frac{x+4}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{3}, \quad x = \frac{y-3}{3} = z + 1.$$

7. Trobeu les equacions paramètriques i cartesianes de la recta de l'espai afí de dimensió 7 que passa pels punts $P = (1, -1, 3, 0, 3, -4, 2)$ i $Q = (2, 0, -1, 5, 2, -1, 0)$.

8. a) Trobeu l'equació del pla que conté el punt $(3,-1,3)$ i la recta $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z}{4}$.
b) Trobeu el pla que passa pels punts $(0,1,-2)$, $(1,1,1)$ i $(3,5,1)$.

9. Demostreu que la varietat lineal $(1,3,4)+<(-1,3,0),(1,4,1),(2,1,1)>$ de l'espai afí té dimensió 2. Trobeu les seves equacions paramètriques i cartesianes.

10. Trobeu l'equació cartesiana de cadascun dels quatre plans de l'espai afí que passen per tres dels punts següents: $(-1,2,0),(1,1,1),(0,1,3)$ i $(3,4,5)$.

11. Trobeu l'equació cartesiana de l'hiperplà de l'espai afí de dimensió 4 que passa pels punts $P_0=(1,1,0,0)$, $P_1=(2,1,-1,3)$, $P_2=(0,1,2,-1)$, $P_3=(0,1,1,1)$.

12. Trobeu els punts d'intersecció del pla $ax+by+cz=1$ amb els eixos de coordenades.

13. Trobeu una equació del pla a $\mathbb{R}^3$ que passa pel punt $(3,-1,4)$ i és paral·lel al pla d'equació $3x-2z+7t=14$.

14. Siguin $A_ix=b_i$, $i=1,2$, les equacions de dues varietats lineals. Demostreu que les equacions de la varietat intersecció s'obtenen reduint pel mètode de Gauss la matriu

$$\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Si el sistema és incompatible les dues varietats no es tallen i,

a) si rang $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ = màx (rang A_1, rang A_2), les varietats son paral·leles,

b) si rang $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ > rang A_i, $i=1,2$, les varietats es creuen.

15. Demostreu que un subconjunt d'un espai afí és una varietat lineal si i només si conté, amb cada parella de punts, la recta que determinen.

16. Trobeu una equació de l'hiperplà a $\mathbb{R}^5$ que passa pels punts $(1,2,1,2,3)$, $(0,1,2,1,3)$, $(0,0,3,1,2)$, $(0,0,0,1,4)$ i $(0,0,0,0,2)$.

17. Proveu que la varietat de l'espai afí de dimensió 4

$$\begin{cases} 3x - 2y + z - t = -1, \\ z - t = 5, \\ x - y + 4t = -3; \end{cases}$$

és una recta i, trobeu un vector director d'aquesta.

18. Escriviu en forma vectorial les varietats lineals determinades pels sistemes d'equacions lineals següents:

a) $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 3x - y = 14; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y - 2z = 4, \\ 2x + 7y - z = -2, \\ x + 3y + z = -6; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y + 2z - t = 8, \\ 3x - 7y + t = 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y - 3z + t = 2, \\ 3x + 6y - 8z - 2t = 1. \end{cases}$

19. Trobeu les coordenades del punt de tall de la recta que passa pels punts $(-1, 3, 0)$ i $(2, 1, 1)$ i el pla que passa pels punts $(1, 1, 1), (2, 1, -1)$ i $(0, -1, 3)$.

20. Determineu si les parelles de rectes següents a $\mathbb{R}^3$ es tallen, i trobeu el punt d'intersecció quan sigui possible:

a) $x = 4 + t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 5t;$
$x = 11 + 3s, \quad y = -9 - 4s, \quad z = -4 - 3s.$

b) $x = 11 + 3t, \quad y = -9 - t, \quad z = 4 + 3t;$
$x = 6 - 2s, \quad y = -2 + s, \quad z = -15 + 7s.$

21. Trobeu la intersecció de la recta de l'espai afí de dimensió 4

$$L = (-1, 2, 1, 0) + < (1, 2, -1, 3) >$$

amb la varietat d'equació

$$\begin{cases} y + 4z + 3t = 10, \\ x + 2z + 2t = 4; \end{cases}$$

22. Determineu si les parelles de rectes següents a $\mathbb{R}^3$ es tallen, són paral·leles o es creuen:

$$\text{a)} \begin{cases} & - 3y + 2z = 2, \\ 2x & - y \qquad = 2; \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} 5x - y - 4z = 1, \\ 8x - y - 4z = 4. \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 3x + 3y + 6z = 9, \\ x - 9y + 2z = -23; \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} -5x - 9y \qquad = -40, \\ -x + y \qquad = 6. \end{cases}$$

23. A l'espai afí real es consideren tres rectes que es creuen dos a dos i són paral·leles a un pla. Demostreu que tota recta que talli les tres és paral·lela a un pla fix. Determineu aquest pla.

24. Estudieu, segons el valor del paràmetre t, la posició relativa de la recta de l'espai afí

$$\frac{x-2}{4+3t} = \frac{y-1}{-1-4t} = \frac{z+5}{-2+t}$$

respecte la recta d'equació cartesiana

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = -12, \\ 2x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

25. Discutiu, segons el valor del paràmetre t, la posició relativa de les rectes:

$$\begin{cases} tx + y + z = 1, \\ x + ty + z = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + tz = 1, \\ x + y + z = t; \end{cases}$$

26. Determineu la posició relativa de la recta

$$\begin{cases} 2tx - 5(t-1)y - 4(t-5)z = 14, \\ x + (t-1)y - 6z = -19-2t, \end{cases}$$

respecte el pla $2y + z = 7$, segons els valors que prengui el paràmetre real t.

27. Estudieu la posició relativa dels plans $x + 2y + 2tz = t + 4$ i $tx - y + (1+t)z = -3t$ pels diferents valors del paràmetre real t.

28. Segons el valor dels paràmetres a i b, descriviu la posició relativa dels plans de l'espai afí $(2-a)x - 3y - 3az = -(a-5)$ i $(1+3b)x - 3(1+b)y - 3(1-b)z = -2(2+8b)$.

29. Siguin S_1 i S_2 dos conjunts convexos de $\mathbb{R}^3$. Demostreu que la intersecció $S_1 \cap S_2$ és convexa.

30. Proveu que el conjunt K dels punts (x, y) de $\mathbb{R}^2$ que verifiquen $x^2 + y^2 < 1$ és convex. (Indicació: Utilitzeu la desigualtat de Cauchy-Schwarz)

31. Demostreu que el conjunt K dels punts (x, y) de $\mathbb{R}^2$ que compleix $x^3 > y$ i $-1 \leqslant x \leqslant 1$ no és convex.

32. Trobeu la projecció ortogonal del punt $Q = (1, 3, -1)$ sobre la recta L d'equacions paramètriques $x = 2t, y = 2 - t, z = 1 + 2t$. Trobeu, també, la distància de Q a L.

33. Trobeu la projecció ortogonal del punt $Q = (7, -3, -4)$ sobre el pla H que passa pels punts $P_0 = (2, 0, 1), P_1 = (3, -1, 2)$ i $P_2 = (2, 1, 3)$. Trobeu, també, la distància de Q a H.

34. a) Quina és la posició relativa de les rectes r_1 i r_2 de $\mathbb{R}^3$ d'equacions cartesianes:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{rrrcl} 4x & -2y & +z & = & 0, \\ 2x & & +z & = & 0; \end{array} \right. \qquad r_2 : \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 4, \\ x & +4y & & = & 0. \end{array} \right.$$

b) Calculeu la projecció ortogonal del punt $Q = (1, 0, 3)$ sobre la varietat ortogonal a r_1 que passa per l'origen.

35. Trobeu la distància del punt $(1, 2, 1)$ a la recta que passa per $(1, 1, 1)$ i té la direcció $(2, 1, 0)$.

36. Trobeu una equació del pla a $\mathbb{R}^3$ que passa pel punt $(-1, -0.5, 3)$ i és ortogonal a la recta que passa pels punts $(-1, 3, 0)$ i $(2, -4, 3)$.

37. Trobeu la recta de $\mathbb{R}^3$ que passa pel punt $(-1, 2, 3)$ i és perpendicular a les rectes d'equacions paramètriques $x = -2 + 3t$, $y = 4$, $z = 1 - t$ i $x = 7 - t$, $y = 2 + 3t$, $z = 4 + t$.

38. Trobeu les equacions paramètriques i cartesianes de la recta que passa pel punt $(-3, 2, 7)$ i és ortogonal al pla d'equació $x - 2y + z = 3$.

39. Classifiqueu els plans donats per les parelles següents d'equacions com paral·lels, ortogonals o cap de les dues coses.

a) $x + 4y = 7$ i $y - z = -3$;

b) $3x + 4y - z = 1$ i $-6x - 8y + 2z = 40$;

c) $x - 3y - z = 7$ i $2x + 4z = 1$;

d) $x = 8$ i $y - 4z = 2$.

40. Calculeu la distància del punt $(-2, 3, 1, 4, 2)$ a l'hiperplà $3x - y + 2z + s - 4t = 1$ a $\mathbb{R}^5$.

41. Trobeu la distància entre els plans de $\mathbb{R}^3$ donats per les equacions cartesianes $x + 3y - 2z = 1$ i $2x + 6y - 4z = 8$.

42. Calculeu la distància entre les parelles de rectes de $\mathbb{R}^3$ següents:

a) $(3, 4, -1) + \langle(-2, 3, 1)\rangle$ i $(2, 5, -3) + \langle(-1, 2, 4)\rangle$;

b) $(-1, 5, 0) + \langle(-1, -2, 0)\rangle$ i $(2, 0, -1) + \langle(0, 3, -1)\rangle$;

c) $(1, 1, -1) + \langle(2, 4, 5)\rangle$ i $(2, 4, 1) + \langle(1, 0, 1)\rangle$.

Índex

Pàg.

1. Conjunts, aplicacions i relacions 1

2. Anàlisi combinatòria 11

3. Estructures algebraiques 17

4. L'àlgebra de les matrius 19

5. Sistemes d'equacions 24

6. Espais vectorials 29

7. Aplicacions lineals 37

8. Determinants 45

9. Vectors i valors propis. Diagonalització 48

10. Formes bilineals i quadràtiques 56

11. Espais afins euclidians 65