Conferències FME Volum VI Curs E. Noether (2008-2009)

Conferències FME

$$\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{A}} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}.$$

$$(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})/(\mathfrak{A}/\mathfrak{N}) \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}.$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}.$$

Volum VI

Curs E. Noether

2008-2009

UPC
Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Conferències FME

Recull del Curs Emmy Noether
2008-2009

Conferències FME

Volum VI

Curs Emmy Noether

2008-2009

Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

© 2008-2009
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Pau Gargallo, 5 — 08028 Barcelona

Fotocomposició, impressió i enquadernació:
Barcelona digital
c/ Rosselló, 77. 08029 Barcelona
Tel. 93-3638610

ISBN: 978-84-7653-391-8
Dipòsit legal: B-33620-2009

Printed in Spain

Reservats tots els drets. Queda totalment prohibida la reproducció total o parcial d'aquest llibre per qualsevol procediment electrònic o mecànic, àdhuc fotocòpia, gravació magnètica o qualsevol sistema, sense el permís de la Facultat de Matemàtiques i Estadística.

ÍNDEX

Presentació del Curs Noether (2008-2009)
(Sebastià Xambó) 9

Presentació del Volum Noether
(Comissió Noether) 11

Índex d'autors 15

Emmy Noether: Her Heritage
(Mina Teicher) 17

El ejercicio de la disonancia
(David Blanco) 55

El teorema de Noether:
com el va descobrir i com es fa servir
(Francisco Marquès) 69

Emmy Noether i l'àlgebra commutativa
(Santiago Zarzuela) 89

Emmy Noether: una contribución extraordinaria y generosa
al establecimiento de la geometría algebraica
(Raquel Mallavibarrena) 121

Emmy Noether i l'algebraïtzació de la topologia
(Pere Pascual) 133

Hilbert revisited
(David Buchsbaum) 151

Emmy Noether:
de l'àlgebra no commutativa a la teoria de nombres
(Pilar Bayer) 169

Presentació del Curs Noether (2008-2009)

La Facultat de Matemàtiques i Estadística (FME) dedicà el curs 2008-2009 a Emmy Noether (1882-1935).

La **Comissió Noether**, constituïda per Francisco Marquès, Sara Merino, Margarida Mitjana, Eduard Recasens, Ana Rio i Sebastià Xambó, fou l'encarregada de donar contingut acadèmic a la decisió, incloent-hi l'elaboració del programa de conferències. És l'ocasió per reiterar l'agraïment de l'FME als seus membres pel temps i esforç que hi van dedicar.

La difusió de les conferències s'ha fet posant els articles al Butlletí Digital FME, al qual s'accedeix a través del vincle del mateix nom de la pàgina Web `https://www.fme.upc.edu/fme/publicacions-nou/`.

Ara, a més d'aquests materials, l'FME posa a disposició de tots els interessats un recull en paper de les conferències més directament relacionades amb la vida i obra d'Emmy Noether, el sisè de la sèrie dedicada a personalitats històriques.

En nom de l'FME, és una agradable obligació agrair molt especialment a cadascun dels autors l'esforç addicional de transformar els materials de la conferència en els articles d'aquest recull.

Els articles estan escrits en la llengua en què l'autor ens els ha lliurat: quatre estan en català, dos en castellà i dos en anglès.

Cal dir a més que hem usat un mateix estil de document LaTeX per composar els diversos articles (`amsart.sty`), encara que l'article lliurat no fos en LaTeX o que ho fos en un format diferent d'`amsart`, però que tanmateix hem intentat mantenir molts aspectes de la composició original dels autors.

Ens donarem per satisfets si contribuïm a fer que figures com Emmy Noether siguin millor conegudes entre els matemàtics, sobretot si aquest coneixement arribés ben viu a les generacions més joves.

Sebastià Xambó Descamps
Barcelona, agost de 2009

Presentació del Volum Emmy Noether

Aquest volum recull els articles corresponents a les conferències més directament relacionades amb Emmy Noether que es van impartir durant el Curs Noether (2008-2009).

La relació de les conferències és la següent:

- Conferència inaugural, el 17 de setembre de 2008, a càrrec de la professora Mina TEICHER: *Emmy Noether: Her Heritage*. D'aquest article se'n va fer una traducció al català que s'adjunta com annex de la versió anglesa. Tot junt, coincideix amb el material que es va incloure en l'opuscle de l'acte inaugural del curs.

- **Jornada Noether** (18 de febrer de 2009), destinada a aprofundir en els aspectes més importants de la vida i obra d'Emmy Noether. Com en els cinc cursos precedents, es va demanar als conferenciants de la Jornada (David BLANCO, Francisco MARQUÈS, Santiago ZARZUELA, Raquel MALLAVIBARRENA i Pere PASCUAL) que procuressin posar de relleu la influència d'Emmy Noether fins al dia d'avui.

  Els títols de les conferències, en el mateix ordre, foren els següents: *El ejercicio de la disonancia*; *El teorema de Noether: com el va descobrir i com es fa servir*; *Emmy Noether i l'Àlgebra Commutativa*; *Emmy Noether: una contribución extraordinaria y generosa al establecimiento de la Geometría Algebraica*; i *Emmy Noether i l'algebraïtzació de la topologia.*

- La conferència del professor David BUCHSBAUM, el dia 18 de març de 2009: *Hilbert revisited.*

- La conferència de cloenda del Curs Noether, el dia 6 de maig de 2009, a càrrec de la professora Pilar Bayer: *Emmy Noether: de l'Àlgebra no commutativa a la Teoria de nombres.*

Apunt biogràfic*

Si us atanseu al mural del passadís de la Facultat, que inclou matemàtics nascuts en el període 1000-1900, us adonareu que Noether és l'única dona que hi apareix. També veureu que al seu voltant hi ha noms com Riemann, Dedekind, Cantor, Poincaré, Hilbert, Minkowski, Weyl, ... i a la nota annexa trobareu unes poques afirmacions telegràfiques sobre la seva trajectòria. Per aprofundir més en aquesta trajectòria, proporcionem a continuació unes pinzellades sobre la seva vida i obra.

Emmy Noether va néixer a Erlangen, Alemanya, el 23 de març de 1882. De 1900 a 1903 estudià a la Universitat d'Erlangen, on el seu pare, Max Noether (1844-1921), era professor de matemàtiques. Després d'un semestre de Göttingen, retornà a Erlangen, on els drets de les estudiantes acabaven d'equiparar-se als dels estudiants. El 1907 es doctorà, sota la direcció de Paul Gordan (1837-1912), amb una tesi sobre la teoria d'invariants. El 1915 es traslladà a Göttingen, on David Hilbert (1862-1943) i Felix Klein (1849-1925) estaven interessats, entre altres coses, en la teoria de la relativitat d'Einstein (1877-1955). Emmy Noether feu contribucions molt importants en aquestes recerques, incloent-hi els celebrats «teoremes de Noether» que estableixen un lligam precís entre l'existència de simetries en un sistema físic i l'existència de quantitats conservades. Però tanmateix no obtingué l'habilitació de Göttingen fins al 1919 (fins aleshores impartí classes, d'una manera no oficial, en substitució de Hilbert), havent d'esperar al 1922 per ser nomenada «professora extraordinària» (*Ausserordentlicher Professor*), pràcticament sense salari.

Des d'aleshores fins a principis de la propera dècada, la seva influència en les matemàtiques fou extraordinària, sobretot en virtut del seu fèrtil programa de recerca. Basat en una visió conceptual i axiomàtica de la matemàtica, atragué nombrosos estudiants de doctorat (com ara Wolfgang Krull (1899-1975), Bartel L. van der Waerden (1903-1996), Max Deuring (1907-1984), ...) i col·laboradors (com ara Heinz Hopf (1894-1971), Pavel Alexandroff (1892-1982), Emil Artin (1898-1962), Helmut

* El text que segueix coincideix amb el que es va incloure en el tríptic distribuït en l'acte d'obertura del Curs Noether.

Hasse (1898-1979), ...). El resultat fou una remodelació radical de l'àlgebra i posà les bases per a una transformació similar de la geometria algebraica i de la topologia algebraica. Aquest període culminà amb el reconeixement internacional que representà la invitació a impartir una conferència plenària a l'ICM celebrat a Zuric el 1932, la qual versà sobre *Hyperkomplexe Grössen und ihre Beziehungen zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie* (*Magnituds hipercomplexes i les seves relacions amb l'àlgebra commutativa i la teoria de nombres*).

Un any després, el 1933, s'hagué d'exiliar a causa del nazisme. Se n'anà a Pennsilvània, als EUA, on se li oferí una plaça de professora invitada al Col·legi de Bryn Mawr (un centre universitari per a noies). És en aquesta localitat on morí dos anys després, als 53 anys, poc després de sotmetre's a una operació quirúrgica.

Citem algunes referències que poden ajudar a copsar millor la significació de l'obra de Noether. En primer lloc, el volum que conté la seva obra completa (més de 750 pàgines). Publicat el 1983 per Springer-Verlag, conté un introducció del responsable de la seva edició, N. Jacobson, que tracta especialment bé les contribucions algebraiques. És també molt recomanable el text *A history of algebra—From al-Khwarizmi to Emmy Noether*, de van der Waerden (Springer-Verlag, 1985), i concretament els capítols sobre àlgebres (10-13, pàg. 177-248). Finalment, esmentem *Emmy Noether—Matemática ideal*, de D. Blanco (Nivola, 2005). És un text més literari, adreçat a un públic general, però amb interessants, sovint punyents, consideracions sobre les circumstàncies històriques, socials i humanes en què Emmy Noether hagué de viure, i molt especialment les produïdes per la guerra (1914-1918), l'ascens del nazisme i la seva condició de dona jueva.

Finalment citem dues referències que tracten de les seves contribucions a la física matemàtica i del paper catalitzador que va tenir en el desenvolupament de la topologia algebraica, respectivament:

N. Byers, *E. Noether's discovery of the deep connection between symmetries and conservation laws.* Proceedings of a symposium on the heritage of Emmy Noether, held in Bar-Illan University, Israel, 1996. http://arxiv.org/abs/physics/9807044

C. McLarty, *Emmy Noether's «Set Theoretic» Topology: From Dedekind to the rise of functors*, in «The Architecture of Modern Mathematics: Essays in history and philosophy» (eds: Jeremy Gray and José Ferreirós). Oxford, 2006, 211-35.

La Comissió Noether
Barcelona, agost de 2009

Índex d'Autors

Mina Teicher
Department of Mathematics and Gonda Brain Research Center
Bar-Ilan University, Ramat-Gan 52900, ISRAEL
teicher@macs.biu.ac.il

David Blanco
Escritor
davidbquark@hotmail.com

Francisco Marquès
Departament de Física Aplicada
Universitat Politècnica de Catalunya
marques@fa.upc.edu

Santiago Zarzuela
Departament d'Àlgebra i Geometria
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
szarzuela@ub.edu

Raquel Mallavibarrena
Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
rmallavi@mat.ucm.es

Pere Pascual
Departament de Matemàtica Aplicada II i CFIS
Universitat Politècnica de Catalunya
pere.pascual@upc.edu

David Buchsbaum
Department of Mathematics
Brandeis University
Waltham, MA 02254-9110
buchsbau@brandeis.edu

Pilar Bayer
Departament d'Àlgebra i Geometria
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
bayer@ub.edu

EMMY NOETHER: HER HERITAGE

MINA TEICHER

Introduction

Emmy Noether is my role model for 3 reasons. Firstly, she is one of the most important mathematicians and physicists of the 20th century. Secondly, she fought to be a scientist in times when women were not allowed to be one. And, thirdly, she was a leader who created a School and paved the way to success for her students and followers.

In this lecture I will elaborate on her heritage and in particular we will focus on some of her fundamental contributions to mathematics and physics.

1. Biographical Outline

Emmy Noether was born in Erlangen, Germany, on March 23, 1882. Max Noether, her father, was a Professor of Mathematics in the university there. She grew up in a large, warm, intellectual family. Being non-rebellious, she might have settled for the traditional feminine tasks, were it not for the new wave in Germany that allowed girls to study science in high school. From 1900 to 1903 she was a student in the University of Erlangen. This was an unusual phenomenon, although she needed a special agreement from the professor for every course she wanted to attend —she did not give up!— and thus paved the road for many women after her.

She started her university studies by studying languages and then moved to mathematics. In 1903 she was awarded a *Reifepüfung* (university admission certificate) and moved to Göttingen. But after one semester she moved back to Erlangen, since this university took a very liberal step and introduced equal rights for female students.

She started her graduate studies under Paul Gordan, submitting a thesis on the theory of invariants in 1907. Then she remained in Erlangen for the next eight years and in 1915 she moved to Göttingen, which was a more important mathematical center. She still had no official job, but unofficially she gave lectures replacing Hilbert. Finally, in 1919 she submitted her *Habilatation*[1] —we will have a detailed look at it later.

In 1922 she was appointed *Ausserordentlicher* Professor,[2] but it was not a proper appointment and she was still unpaid. She certainly was not a member of the Royal Society of Göttingen (the Royal Society of London, founded in 1662, elected its first female member in 1945; the *Académie des Sciences* of Paris was founded in 1666 and elected its first female member in 1962).

In the early twenties, her mathematical work changed and became more conceptual. She changed from a computational to an axiomatic-conceptual approach. During the next ten years she had an enormous influence on the physics and mathematics of the period, as we will see in more detail later.

In 1932 she gave an invited address at the International Congress in Zurich. There she received full recognition for her work. In fact, she was the queen of the Congress. But in 1933 she was exiled by the Nazis, accepting finally a job in Bryn Mawr College, a women's higher education center in Pennsylvania. She died in Bryn Mawr in 1935, at the age of 53, following an operation.

Her contribution to physics made the symmetries a pillar of physics. Her impact on algebraic geometry is enormous. We can only wonder what mathematics in general, and algebraic geometry in particular, would have been today if she would have survived the operation.

2. Mathematical History

As already said, Emmy Noether started her graduate studies in Erlangen under Paul Gordan, who was a colleague of her father. He was

[1] The act of receiving the official right to teach at a given university, or 'venia legendi' (cf. [5]).

[2] A professor with somewhat limited internal administrative rights and functions (cf. [5]).

called "The king of invariants," for his work on the finite basis for the invariants of a binary quadratic form. (The general problem, called "Gordan's Problem", was later solved by Hilbert.) For her thesis she calculated all the 331 invariants of ternary bi-quadratic forms! She worked unpaid in Erlangen supervising students and sometimes lecturing for her ailing father who died in 1914.

After submitting her thesis she started to work with Ernst Fischer, who replaced Gordan after his retirement. Influenced by Fischer, she soon took the abstract approach to algebra following Hilbert's 1888 basis theory paper.

In 1915, Emmy Noether was invited by David Hilbert to join the team of mathematicians assembled in Göttingen. The mathematicians included Hermann Weyl and Felix Klein. Noether was welcome as she was able to help them with her invariant-theoretic knowledge. She was 33 at that time and had already written eleven papers.

In June-July 1915, shortly after Noether arrived in Göttingen, Albert Einstein gave six lectures on the general theory of relativity. At that time the theory was not yet completed, as Einstein had not yet found the complete field equations. However, the basic ideas were clear and his audience found them compelling. After giving the lectures, Einstein wrote (cf. [17]):

> To my great joy, I completely succeeded in convincing Hilbert and Klein.

Einstein had been working to generalize the special theory of relativity to include gravity since 1905. In 1907 he discovered the importance of the equality of gravitational and inertial mass and formulated the equivalence principle, but it took another eight years to complete the theory. Finally, in November 1915, having found the complete field equations, he submitted the famous paper [7] that gives the theory in its final form. Remarkably, in the same month, Hilbert, being interested in the fundamental laws of physics for many years, submitted a manuscript [9] in which the same field equations are obtained as the solution of a variational problem. Hilbert and Einstein had independently found the field equations at about the same time.

Hilbert's 1915 paper "*Grundlagen der Physik*" [9] contains his derivation of the field equations for general relativity. Hilbert omitted this paper from his collected works, as his original plan for this paper (to provide a unified field theory of gravity, electromagnetism, and matter) was unsuccessful. However, when specialized to gravity, Hilbert's derivation of the field equations is an original and important contribution to the general theory. The Lagrangian he introduced is known as the Hilbert-Einstein Lagrangian, and his formulation of the theory is in widespread use today. Pais [17] writes:

> Hilbert was not the first to apply the principle to gravitation. Lorentz had done so before him. So had Einstein, a few weeks earlier. Hilbert was the first, however, to state this principle correctly.

In 1916 Klein was working on the problem of energy conservation in general relativity, or, as he termed it, "Hilbert's energy vector". He wrote in a letter to Hilbert that

> *Frl.* Noether advised me continually throughout my work, and it was really only through her that I was led to the material presented in this letter. When I spoke recently with *Frl.* Noether about my result concerning your energy vector, she told me that she had derived the same thing from your Note a year ago and written it up in a manuscript (which I examined).

In his 1918 presentation and paper [10], Klein acknowledges helpful contributions from Noether. However, in the annotation to this paper in his collected works he makes it clear that his result is a special case of her 'far-reaching' theorem. He reports that he presented her paper to the Göttingen Society the following week, and says that she also proved and generalized some of Hilbert's ideas.

Her main work on the connections between symmetries and conservation laws was presented to the July 16, 1918 meeting of the Royal Society of Göttingen by Felix Klein (and published in its Proceedings) and not by Noether herself, as Noether was not invited to be a member of the Royal Society (and she probably was not even allowed to be present when the paper was read). In his famous 1924 paper, David Hilbert credits Emmy Noether with having solved the problem of

an energy theorem in the general theory, and refers to [14] "*Invariante Variationsprobleme*" (I.V. in the sequel).

During the war Hilbert tried to push through Emmy Noether's *Habilitation* (the right to lecture under University auspices) in the Philosophical Faculty in Göttingen. He failed due to the resistance of the philologists and historians. It is a well-known anecdote that Hilbert declared at the faculty meeting:

> I do not see that the sex of a candidate is an argument against her admission as Privatdocent. After all, we are a university not a bathing establishment.

It was only after the liberalization of Germany in the 1920's that the *Habilitation* was an option for women.

In 1919, Noether chose the I.V paper [14] for her *Habilitation*'s thesis and presented it to the University of Göttingen along with the twelve previously published papers and two additional manuscripts, one of which [13] contained a number of important ideas which had a significant impact on the development of modern abstract algebra.

She was finally able to lecture officially at the University, but as her *Habilitation* was not officially recognized, she was working unpaid. She had given lectures in the preceding years, but the posted notices stated that they were

> offered by Herr Professor David Hilbert, given by Frl. E. Noether,

with no tuition required. These lectures were becoming famous and drawing the attendance of mathematicians from all over Europe.

It is quite clear from the application papers written for her *Habilitation* that Noether knew the scope and importance of her mathematical results for physics in general and for conservation laws in mechanics in particular (she referred to them as first integrals). She also mentioned (cf. [6]) that her mathematical work was

> an outgrowth of my assistance to Klein and Hilbert in their work on Einstein's general theory of relativity.

I trust that she realized that her powerful results are deep and general, far more than a simple verification of Hilbert's assertion on the

connection between the failure of proper energy conservation laws and general relativity.

After submitting her *Habilitation* and after some additional work on differential invariants in general relativity [12], Noether returned to the main line of her mathematical research —axiomatic algebra. Her mathematical work changed and it became more conceptual. The turning point can be symbolized by the paper with W. Schmeidler on differential operators, "Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken" [13].

During the next ten years, she had an enormous influence on the mathematics of the period. Looking at her Collected Papers we find that about ten of her papers are devoted to theory of algebras (numbers 17, 32, 33, 34, 38, 39, 40, 41, 42), most of them published between the years 1927 and 1933. However, we have already mentioned that she made her most important contributions known in this field not through her publications, but rather through her courses at Göttingen, in particular the courses during the winter terms of 1927/28 and 1929/30. She did not publish many of her principal results herself, but rather left this task to van der Waerden, Hasse, Deuring and others. Alexandrov, Weyl, and van der Waerden stress this point, that she preferred to communicate her research in conversation; therefore published documents cannot tell the whole story. We know that many brilliant mathematicians attended her seminars and lectures, and it is difficult to guess to which extent she communicated her ideas to them. The following courses were given by her at Göttingen:

Winter 1924/25:	*Gruppentheorie und hyperkomplexe Zahlen*
Winter 1927/28:	*Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*
Summer 1928:	*Nichtkommutative Algebra*
Summer 1929:	*Nichtkommutative Arithmetik*
Winter 1929/30:	*Algebra der hyperkomplexen Grössen.*

The first course is mentioned in the introduction of van der Waerden's *Moderne Algebra* [20], and in [21], where he writes:

> One of the main subjects in this course was Wedderburn's theory of algebras over arbitrary fields.

The same subject was treated, in a much improved form, in her course under the same title in 1927/28, in which also a quite new treatment of representations of groups and algebras was given [18].

Her work spread out not so much through her published work than through her fruitful research program and courses; her many graduate students and young colleagues (Grete Herman, Köthe, Krull, Deuring, Fitting, Witt, Tsen, Shoda, Levitski, van der Waerden); her associates (Schmidt, Artin, Hasse, Alexandroff, Pontrjagin, Hopf); her being an inspiring teacher to her students; her sharing personality; and also through the lectures of van der Waerden. This was despite her non pedagogical talents, that resulted in a usually non-full lecture hall — only the most brilliant ones attended. There were many foreigners among her students. Her group of students was called "The Noether boys". They were a close research group and she took good care of them. In the Mathematics Geneaology Project it is listed that she has 750 descendants (see the Annex).

Her most devoted student was van der Waerden. He arrived in the winter of 1924-25 and quickly mastered her theories. In 1927 he gave a course on the theory of ideals. He brilliantly exposed her ideas, which gained fame and acceptance in Göttingen and from there to the other universities. His book *Moderne Algebra*, which became one of the "classics", includes her ideas and his new findings. It is still of interest to readers today.

When she had to leave Germany in 1933, she wanted to go to Moscow, where she once spent a semester teaching algebra, organizing a course in algebraic geometry and working with Alexandrof and Pontrjagin (1928-1929). But the process of obtaining papers went slowly and finally she immigrated (like many of her colleagues) to the U.S. Being a woman, she was not accepted into the Institute for Advanced Study in Princeton, but to Bryn Mawr College, Pennsylvania, a women's college. She created a small group there and commuted to Princeton for seminars and collaborations. She taught there for 2 years before her premature death in 1935.

3. Contribution to Physics

Emmy Noether's paper I.V., [14], profoundly influenced 20th century physics. The paper proved two theorems and their converses which revealed the general connection between symmetries and conservation laws in physics. They led to a deeper understanding of laws such as the principle of conservation of energy, of angular momentum, etc., and also were instrumental in the great discoveries of gauge field symmetries of the 20th century [2].

In November 1915, Emmy Noether wrote to Ernst Fischer:

> Hilbert plans to lecture next week about his ideas on Einstein's differential invariants, and so ... [we] had better be ready [5].

Athough the general theory of relativity was completed in 1915, there remained unresolved problems. In particular, the principle of local energy conservation was a vexing issue. In the general theory, energy is not conserved locally as it is in classical field theories —Newtonian gravity, electromagnetism, hydrodynamics, etc. Energy conservation in the general theory had been perplexing many people for decades. In the early days, Hilbert wrote about this problem as 'the failure of the energy theorem'. In a correspondence with Klein [3], he asserted that this 'failure' is a 'characteristic feature of the general theory', and that instead of 'proper energy theorems' one had 'improper energy theorems' in such a theory. In the note to Klein he reports that he had requested Emmy Noether to help clarify the matter.

Emmy Noether was thus drafted into physics, which was something of a departure from the main line of her mathematical research, namely the development of modern abstract algebra. After David Hilbert's discovery of the variational principle from which he derived the field equations of general relativity, David Hilbert, Felix Klein and others in Göttingen were intensely interested in the recently completed general theory of relativity and Noether's help was requested to clarify the question of energy conservation referred to above.

She then began to study relativity theory and soon clarified the problem. This led to two papers: [12] and [14]. In [19] Hermann Weyl characterized these two papers as giving

> the genuine and universal mathematical formulation of two of the most significant aspects of general relativity theory: first, the reduction of the problem of differential invariants to a purely algebraic one by use of normal coordinates; and second, the identities between the left sides of Euler's equations of a problem of variation...

In [15] Einstein is quoted as writing to Hilbert about the first paper:

> Yesterday I received from Miss Noether a very interesting paper on invariant forms. I am impressed that one can comprehend these matters from so general a viewpoint. It would not have done the old guard at Göttingen any harm had they picked up a thing or two from her...

The discussion and proofs of the two theorems in I.V. clarified and resolved the issues regarding energy conservation, as Hilbert acknowledged in a 1924 paper.

Let's look at this issue in present day language. In modern mathematical terminology, the general theory of relativity is a gauge theory and the symmetry group of the theory is the gauge group. It is the group of all continuous coordinate transformations with continuous derivatives, often called the group of general coordinate transformations. It is a Lie group that has a continuously infinite number of independent infinitesimal generators. In Noether's terminology such a group is an infinite continuous group. The symmetry group of special relativity, the Poincaré group, is a Lie subgroup of the group of general coordinate transformations. It has 7 independent infinitesimal generators. Noether refers to such a group as a finite continuous group. This distinction between a Lie group with a finite (or countably infinite) number of independent infinitesimal generators and an infinite continuous group is what distinguishes Noether's Theorem I and Theorem II in I.V. Theorem I applies when one has a finite continuous group of symmetries, and Theorem II when there is an infinite continuous group of symmetries. Field theories with a finite continuous symmetry group have what Hilbert called 'proper energy theorems'. Physically in such theories one has a localized, conserved energy density; and one can prove that in any arbitrary volume the net outflow of energy across the boundary is equal to the time rate of decrease of energy within the volume. This follows from the fact that the energy-momentum tensor of the theory is divergence free. In general relativity, on the other hand, it has no

meaning to speak of a definite localization of energy. One may define a quantity which is divergence free analogous to the energy-momentum density tensor of special relativity, but it is gauge dependent: i.e., it is not covariant under general coordinate transformations. Consequently, the fact that it is divergence free does not yield a meaningful law of local energy conservation. Thus in such theories one has, as Hilbert saw it, 'improper energy theorems'.

A key feature for physics of Noether's I.V. paper is the clarity her theorems brought to our understanding of the principle of energy conservation. In the N. Jacobson's Introduction to the Collected Papers of Noether [16], he quotes Gursey:

> Before Noether's Theorem the principle of conservation of energy was shrouded in mystery, leading to the obscure physical systems of Mach and Ostwald. Noether's simple and profound mathematical formulation did much to demystify physics.

Noether showed in her Theorem I that the principle of energy conservation follows from symmetry under time translations. This applies to the group of Lorentz transformations and spacetime translations. In general relativity, on the other hand, energy conservation takes a different form as will be shown below. Noether's Theorem II applies in the case of general relativity and one sees that she has proved Hilbert's assertion that in this case one has 'improper energy theorems', and that this is a characteristic feature of the theory. This is due to the fact that the theory is a gauge theory; i.e., that it has an infinite continuous group of symmetries of which time translations are a subgroup. Indeed, generally, she defines as "improper" divergence relationships, which vanish when the field equations are satisfied, which correspond to a finite continuous subgroup of an infinite continuous group. Generally they do not have the required invariance or covariance properties under the larger group.

For example, in general relativity a divergence free energy-momentum (pseudo) tensor can be constructed but it is gauge dependent (see below). Because it is not covariant under general coordinate transformations, it is more properly called a pseudotensor. Such pseudotensors

are covariant with respect to the linear transformations of the Poincaré group and may be used in asymptotic spacetime regions far from gravitating sources to derive a principle of energy conservation [2].

We need to discuss in some detail field theories of matter, gravity, electromagnetism, etc. in both special and general relativity. In special relativity these theories have a 'proper energy theorem' in the sense of Hilbert, and 'proper energy theorems' give a principle of local energy conservation. In general relativity, on the other hand, the proper energy theorem becomes improper in that the energy-momentum tensor for which the theorem holds is gauge dependent. There is transfer of energy to and from the gravitational field and it has no meaning to speak of a definite localization of the energy of the gravitational field in space. Consequently, we do not have a principle of local energy conservation in spacetime regions in which there exist gravitational fields. The theories we discuss here are field theories which may be formulated in terms of a variational principle; i.e., their field equations may be obtained from Hamilton's principle. This was Hilbert's great contribution to the general theory of relativity. He showed the correct field equations can be derived from Hamilton's principle, and Noether's work unfolded from this.

4. Contribution to Algebra

Emmy Noether created the mathematical work that has made her name immortal in mathematics between the years 1920 and 1932. The importance of her work was immediately recognized by her colleagues in Göttingen and from there to the rest of the world. At the International Congress at Zürich in 1932 she gave an plenary lecture on "Algebras and their Application to Number Theory", and when she died in 1935 there was general agreement that she, more than anybody else, had created the modern algebra of the 20th century.

In his memorial speech (in [15]) on November 5, 1935, Alexandrov, her former collaborator, said:

> But when we think of Emmy Noether as a mathematician, we have in mind not these early works, important though they were in their concrete results, but rather the main period of her research, beginning in

> about 1920, when she became the creator of a new direction in algebra and the leading, the most consistent and prominent representative of a certain general mathematical doctrine, all that which is characterized by the words "conceptual mathematics".
>
> ... she herself was ready to forget what she had done in the early years of her scientific life, since she considered those results to have been a diversion from the main path of her research, which was the creation of a general, abstract algebra.
>
> Emmy Noether embarked on her own completely original mathematical path in the years 1919/1920. She herself dated the beginning of this fundamental period in her work with the famous joint work with V. Schmeidler [13]. In a sense this paper serves as a prologue to her general theory of ideals which she revealed in 1921 in the classic memoir "Idealtheorie in Ringbereichen".
>
> From 1927 on, as the influence of Emmy Noether's ideas on modern mathematics constantly increased, the scholarly renown of the author of those ideas was similarly increasing. Meanwhile, the direction of her own work was changing, moving more and more toward the areas of noncommutative algebra, representation theory and the general arithmetic of hypercomplex systems.
>
> Emmy Noether lived to see the full recognition of her ideas. If in the period 1923-1925 she was striving to prove the importance of the theories she was developing, in 1932, at the International Congress of Mathematicians in Zürich, her accomplishments were lauded on all sides. The major survey talk that she gave at the Congress was a true triumph for the direction of research she presented. At that point she could look back upon the mathematical path she traveled not only with an inner satisfaction, but with an awareness of her complete and unconditional recognition in the mathematical community. The Congress in Zürich marked the high point of her international scientific position.

This evaluation of her position in the "Mathematics Hall of Fame" has not changed in the following 50 years and up to our times. Nathan Jacobson, the editor of her Collected Papers [16] wrote in 1982 in his Introduction to them:

> Emmy Noether was one of the most influential mathematicians of this century. The development of abstract algebra, which is one of the most distinctive innovations of twentieth century mathematics, is largely due to her —in published papers, in lectures, and in personal influence

> on her contemporaries. By now her contributions have become so thoroughly absorbed into our mathematical culture that only rarely are they specifically attributed to her. It therefore seems appropriate in this introduction to her collected papers to seek to highlight her principal contributions to the area of mathematics variously known as "abstract", "conceptual" or "modern" algebra.

The axiomatic approach was for Hilbert a means of logical clarification, but in the hands of Emmy Noether it became a powerful method of mathematical research. As Herman Weyl said [19]:

> This method was applied by Emmy Noether with mastery skill, it suited her nature and she made algebra 'the Eldorado of axiomatics',

and from algebra it spread to the rest of mathematics.

Emmy Noether's (and R. Brauer's) main contributions to the theory of algebras, were the following:

- applications of abstract algebraic concepts, e.g., ideal theory, to the structure theory of algebras;
- unification of the representation theory of finite groups and the theory of semisimple algebras;
- the theory of splitting fields;
- clarification of the internal structure of simple algebras, e.g., the Skolem–Noether theorem and the double centralizer theorem;
- cohomology theory: factor sets and crossed products;
- applications of the theory of algebras to algebraic number theory and class field theory.

One can argue that her first important work in Algebra is contained in the course given in Göttingeen in the fall of the academic year 1927/28: "*Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*". In fact, these lectures presented hardly any new major results, but, nevertheless, they constitute one of the main roots of what we call today "modern algebra". Van der Waerden took notes of this course, prepared the publication (No. 34 in the collected works), and incorporated it, in content and spirit, in his own book *Moderne Algebra*. The importance of many fundamental principles of algebra —obvious today— was pointed out in this course for the first time: Isomorphism theorems, Jordan-Hölder

theorem, Krull-Schmidt decomposition, semisimplicity, complete reducibility, ground ring extension, structure theory of noncommutative rings, behaviour of the center, and above all the fact that representation theory of finite groups can be based on the theory of semisimple algebras, which seemed to Noether herself the most important aspect.

A lot was still missing in this course, e.g., the structure theory of simple algebras, factor systems and crossed products, a clear grasp of the importance of separability. The following summer semester she continued with her course, where she proved the so-called Skolem–Noether theorem, a cornerstone of the whole theory, which asserts that every automorphism of a simple algebra is inner (Dickson and Wedderburn proved and used special cases of this theorem in their theory of cyclic algebras and crossed products). The closely related centralizer theorem (a simple subalgebra equals its double centralizer), proved by Deuring in 1935, [4], was not yet known to her, as she remarks herself (in the introduction to the paper no. 40 in the Collected Papers).

During the winter semester 1929/30 she gave again a course on "*Algebra der hyperkomplexen Grössen*". Notes of the course were taken by Deuring, but were published for the first time in her Collected Papers. The mathematical content of this course became known before its publication in the Collected Papers, through van der Waerden, through Hasse's 1932 exposition of cyclic algebras and crossed products, in [1], through her own 1933 paper (no. 40 in the Collected Papers), and through Deuring's book from 1935 [4].

It is not clear why she never published her lecture notes on one of her most significant discoveries, namely, the relation between the "Theory of algebras" and "Galois cohomology", including the Wedderburn theorems, structure of simple algebras, the Skolem–Noether and centralizer theorems, splitting fields, factor systems and crossed products. As an application she proves Wedderburn's theorem on finite division rings, Frobenius' classification of real division algebras, and something leading into the future, namely the main result of local class field theory $\mathrm{Br}(L/K) \sim \mathrm{Gal}(L/K)$ for a cyclic extension of a p-adic field. The representation theory of finite groups is mentioned only briefly and restricted to abelian groups. The theory of algebras had also implications for algebraic number theory and class field theory. Here it seems to

be even more difficult than in the algebraic theory to say exactly what can be credited to Noether. In a 1935 manuscript [19] Weyl remarks:

> Hasse acknowledges that he owed the suggestion for his beautiful papers on the connection between hypercomplex quantities and the theory of class fields to casual remarks by Emmy Noether. She could just utter a far-seeing remark like this, "Norm rest symbol is nothing else than cyclic algebra" in her prophetic lapidary manner, out of her mighty imagination...

Generally speaking, she was probably the first one to see clearly that class field theory could (and perhaps should) be based on the formalism of Galois cohomology. A high point of algebraic number theory is the result of Brauer, Hasse and Noether that over an algebraic number field every division algebra is cyclic (No. 38 of her Collected Papers). However the main step in the proof is Hasse's local-global principle for the Brauer group, where the contributions of Brauer and Noether are relatively minor. On the other hand, her 1932 talk in Zürich, and her paper 41 in the Collected Papers, contain a most remarkable sketch of how Galois cohomology can be used. There, she first proves Hilbert 90 (due to Schur and Speiser but at that time not well-known) and then she essentially works out the cohomology of the ideal group and the ideal class group, which, of course, relies on the local-global principle for the Brauer group, ideas that lead directly to Artin-Tate class field theory (see [18]).

I shall conclude with quotations from Hermann Weyl from 1935 ([19]):

> ...In my Göttingen years 1930-1933, she was without doubt the strongest center of mathematical activity there, considering both the fertility of her scientific research program and her influence upon a large circle of pupils... Above all, her conceptual axiomatic way of thinking in algebra becomes first noticeable in this paper dealing with differential operators... It is here for the first time that the Emmy Noether whom we all know appears, and who changed the face of algebra by her work... Her significance for algebra cannot be read entirely from her own papers; she had great stimulating power and many of her suggestions took final shape only in the works of her pupils or co-workers... She lived in close communion with her pupils; she loved them, and took interest in their personal affairs...

... This clarifying power she proved, for example, in her theory of the cross product, in which almost all the facts had already been found by Dickson and by Brauer...

... Her heart knew no malice; she did not believe in evil —indeed it never entered her mind that it could play a role among men... She was a great mathematician, the greatest, I firmly believe, that her sex has ever produced, and a great woman... And of all I have known, she was certainly one of the happiest...

... Her strength lay in her ability to operate abstractly with concepts. It was not necessary for her to be led to new results on the leading strings of concrete examples. She possessed a most vivid imagination, with the aid of which she could visualize remote connections; she constantly strove for unification. In this, she sought out the essentials in the known facts, brought them into order by means of appropriate general concepts, espied the vantage point from which the whole could best be surveyed, cleansed the object under consideration of superfluous dross, and thereby won through to so simple and distinct a form that the venture into new territory could be undertaken with the greatest prospect of success."

Annex
A transcript of the Mathematical Genealogy of Emmy Noether

Emmy Amalie Noether

PH.D. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg 1907
Dissertation: Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form
Mathematics Subject Classification: 06—Order, lattices, ordered algebraic structures
Advisor: Paul Gordan

Student(s):

Name	School	Year	Descendants
Max Deuring	*UG*	*1931*	*444*
Wilhelm Dörate	*UG*	*1927*	
Hans Fitting	*UG*	*1931*	
Heinrich Grell	*UG*	*1926*	*109*
Margarethe Hermann	*UG*	*1926*	
Yaakov Levitzki	*UG*	*1929*	*27*
Otto Schilling	*UM*	*1935*	*45*
Ruth Stauffer	*BM*	*1935*	
Chiungtze Tsen	*UG*	*1934*	
Werner Vorbeck	*UG*	*1935*	
Werner Weber	*UG*	*1929*	*6*
Wolfgang Wichmann	*UG*	*1936*	
Ernst Witt	*UG*	*1934*	*109*

According to our current on-line database,
Emmy Noether has 13 students and 750 descendants
UG=Georg-August-Universität Göttingen
BM=Bryn Mawr College
UM=Georg-August-Universität Göttingen

Referències

[1] R. Brauer, H. Hasse, E. Noether, *Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren*, J. reine angew. Math. 167 (1932), 399-404; (E. Noether, Gesammelte Abh., pp. 630-635).

[2] N. Byers, *E. Noether's discovery of the deep connection between symmetries and conservation laws*, Heritage of Emmy Noether, IMCP 12, 1999 (Mina Teicher, ed.), pp. 67-81.

[3] Correspondence between D. Hilbert and F. Klein published by F. Klein in Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse (1918) as *Zu Hilberts erster Note Äuberdie Grundlagen der Physik*; included in his annotated collected works Ref. [11]; see Ch. XXXI (erster band, p. 560); English translation courtesy of Basil Gordon.

[4] M. Deuring, *Algebren*. Ergebnisse der Math., Band 4, Heft 1, Berlin, 1935.

[5] A. Dick, *Emmy Noether (1882-1935)*, Birkhauser, 1981; English translation by H.I. Blocher.

[6] A. Dick, *Die Habilitation von Emmy Noether an der Universitat Göttingen*, ATM Schriften Leipzig, vol. 28, (1991), 13-32.

[7] A. Einstein, *Sitzungsberichte*, Preussische Akademie der Wissenschaften, 1915, p. 844.

[8] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, New York, 1970.

[9] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik*, Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse (1915), 395-407.

[10] F. Klein, *Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in die Einsteinschen Gravitationstheories*, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse (1918).

[11] F. Klein, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Julius Springer, Berlin, 1921.

[12] E. Noether, *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke*, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse (1918), 37-44.

[13] E. Noether and W. Schmeidler, *Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken*, Math. Zs. 8 (1920), 1-35.

[14] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235-257; English translation M.A. Travel, Transport Theory and Statistical Physics 1(3) (1971), 183-207.

[15] Emmy Noether, *A Tribute to Her Life and Work* (James W. Brewer and Martha K. Smith, eds.), Marcel Dekker, Inc., 1981.

[16] Emmy Noether, *Collected Papers*, Springer-Verlag, 1983.

[17] A. Pais, *Subtle is the Lord*, Oxford University Press, 1982.

[18] W. Scharlau, *Emmy Noether's contributions to the theory of algebras*, Heritage of Emmy Noether, IMCP 12, 1999 (Mina Teicher, ed), pp. 39-55.

[19] H. Weyl, *Emmy Noether*, Scripta Math. 3 (1935), 201 - 220; Ges. Abh. Bd. 3, pp. 425-444; English translation of this memorial lecture is given in Ref. [8].
[20] B.L. van der Waerden, *Moderne Algebra II*, Berlin, 1931.
[21] B.L. van der Waerden, *On the sources of my book Moderne Algebra*, Historia Math. 2 (1975), 31-40.
[22] B.L. van der Waerden, *Obituary of Emmy Noether*, Mathematische Ann. 111 (1935), 469-474.

Emmy Noether: el seu llegat*

Mina Teicher

Introducció

Emmy Noether és el meu model de persona, per tres raons. Primera, perquè és una de les figures més importants del segle XX en el món de les matemàtiques i la física. Segona, perquè lluità per ser una científica en un temps en què a les dones no els era permès ser-ho. I tercera, perquè fou una líder que creà una escola i promogué l'èxit dels seus estudiants i seguidors.

En aquesta conferència comentaré el seu llegat i, en particular, algunes de les seves contribucions fonamentals a les matemàtiques i a la física.

5. Ressenya biogràfica

Emmy Noether va néixer a Erlangen, Alemanya, el 23 de març de 1882. El seu pare, Max Noether, era professor de Matemàtiques de la universitat d'aquesta ciutat. Emmy va créixer en una família gran, càlida i intel·lectual.

Dòcil com era, segurament hauria estat educada per ocupar-se de les tasques tradicionalment femenines si no hagués estat per les noves tendències a Alemanya que permetien a les noies estudiar ciències a l'escola secundària superior.

Des de 1900 a 1903 va ser estudiant de la Universitat d'Erlangen. Aquest fet no era gens habitual, i havia de demanar permís per assistir a classe a cadascun dels professors de les assignatures que volia estudiar. No es va rendir, i va obrir camí a tantes dones que han vingut després d'ella.

Els seus estudis universitaris es van iniciar en el camp de les llengües, per després canviar a matemàtiques. El 1903 va aconseguir un certificat d'admissió a la universitat, *Reifeprüfung*, i se'n va anar a Göttingen,

*Traducció al català a càrrec de Jaume Franch, Margarida Mitjana, Eduard Recasens, Oriol Serra i Sebastià Xambó. Les referències coincideixen amb les de la versió original anglesa i es troben a les pàgines 34-35.

però al cap d'un semestre va tornar a Erlangen perquè aquesta universitat havia pres una orientació més liberal en introduir igualtat de drets per a les noies estudiants.

Va començar els estudis de doctorat amb Paul Gordan. Presentà la tesi, sobre teoria d'invariants, el 1907 i es va quedar a Erlangen els següents vuit anys. El 1915 va anar a Göttingen, que era un dels centres més importants en matemàtiques. Oficialment no tenia cap posició, però en realitat donava classes substituint a Hilbert.

El 1919 va presentar la seva *Habilatation*,[1] punt que considerarem amb més detall posteriorment.

El 1922 va ser contractada com a *Ausserordentlicher*,[2] però no era pròpiament un nomenament, ja que no tenia cap sou, i certament no fou membre de la *Real Societat de Göttingen* (la *Royal Society of London*, fundada el 1662, va escollir per primer cop una dona com a membre el 1945; l'*Académie des Sciences* de París, fundada el 1666, no en va escollir una fins el 1962).

A principi dels any vint, el seu treball matemàtic va canviar per esdevenir més abstracte. D'una aproximació computacional als problemes, va passar a un estudi més axiomàtic i conceptual. Durant els propers deu anys va tenir una gran influència en la física i la matemàtica de l'època, com veurem amb més detall posteriorment.

Durant el Congrés Internacional de Zuric, el 1932, va impartir una conferència plenària on va rebre el màxim reconeixement pel seu treball, esdevenint l'estrella del Congrés. El 1933, a causa del nazisme, es va haver d'exiliar, acceptant finalment un treball en un centre universitari per a noies, el Bryn Mawr College, a Pennsylvania. Va morir el 1935, a l'edat de 53 anys, després d'una operació quirúrgica.

Les seves contribucions a física van erigir els grups de simetries en un dels pilars de la física. El seu impacte en la geometria algebraica és enorme. Podem preguntar-nos què hauria estat de les matemàtiques en general i de la geometria algebraica en particular si ella hagués sobreviscut a l'operació.

---

[1] L'acte de rebre oficialment el dret a ensenyar en una universitat donada, o 'venia legendi' (v. [5]).

[2] Un professor amb funcions i drets administratius limitats (cf. [5]).

6. Història Matemàtica

Emmy Noether començà els seus estudis de doctorat a Erlangen sota la direcció de Paul Gordan, que era un col·lega del seu pare. L'anomenaven "El rei dels invariants", pels seus treballs sobre bases finites per als invariants d'una forma quadràtica binària (el problema general, anomenat "el problema de Gordan", fou resolt posteriorment per Hilbert). A la seva tesi, Emmy Noether va calcular tots els 331 invariants de les formes biquadràtiques ternàries! Es va doctorar l'any 1907. Treballà a Erlangen sense cobrar, dirigint tesis i, de vegades, fent les classes del seu pare, qui morí l'any 1914.

Un cop va rebre el títol de doctor, començà a treballar amb Ernst Fischer, que havia substituït a Gordan quan aquest es jubilà. Sota la seva influència aviat prengué el camí abstracte a l'àlgebra tot seguint l'article sobre bases d'ideals de polinomis que Hilbert publicà l'any 1888.

L'any 1915, David Hilbert convidà Emmy Noether a integrar-se a l'equip de matemàtics de Göttingen. En aquest equip hi havia, entre d'altres, Hermann Weyl i Felix Klein. Fou molt ben acollida i va ser capaç d'ajudar-los amb el seu coneixement teòric sobre els invariants. Tenia 33 anys i ja havia publicat onze articles.

L'estiu de 1915, poc després de l'arribada de Noether a Göttingen, Einstein hi va impartir sis conferències sobre la teoria general de la relativitat. En aquells temps la teoria encara no estava enllestida, ja que Einstein encara no havia trobat la forma final de les equacions del camp gravitatori. Tanmateix, les idees bàsiques eren clares i l'audiència les trobà engrescadores. Després de donar les conferències, Einstein va escriure (cf. [17]):

> Amb gran joia veig que he reeixit en la tasca de convéncer Hilbert i Klein.

Einstein havia estat treballant des de 1905 per generalitzar la teoria especial de la relativitat a fi d'incloure-hi la gravitació. L'any 1907 descobrí la importància de la igualtat entre la massa gravitacional i la inercial, i va formular el principi d'equivalència, però necessità encara vuit anys més per completar la teoria. Finalment, al novembre de 1915,

un cop havia trobat les equacions, va sotmetre el seu famós article [7] en el que donava la forma definitiva a la seva teoria. Remarcablement, el mateix mes, Hilbert, que estava interessat en les lleis fonamentals de la física des de feia anys, enviava el manuscrit [9] en el qual s'obtenien les mateixes equacions com a solució d'un problema variacional. Hilbert i Einstein havien arribat a les mateixes equacions de manera independent a l'ensems.

L'article de Hilbert de 1915 "*Grundlagen der Physik*" [9] conté la seva deducció de les equacions de camps per a la teoria general de la relativitat. Hilbert va ometre aquest article en els seves obres completes perquè el seu pla original per aquell treball (fornir una teoria unificada de la gravitació, l'electromagnetisme i la matèria) no havia reeixit. Tanmateix, aplicada a la gravitació, la deducció de Hilbert és una contribució important i original a la teoria general. El lagrangià que va introduir es coneix com a Lagrangià de Hilbert-Einstein, i la seva formulació de la teoria és encara molt emprada avui dia. Pais [17] escriu el següent:

> Hilbert no fou el primer en aplicar el principi a la gravitació. Lorentz ho feu primer, i encara Einstein setmanes abans. Tanmateix Hilbert fou el primer a enunciar aquest principi correctament.

L'any 1916 Klein estava treballant en el problema de la conservació de l'energia en la relativitat general o, com deia ell, en el "vector d'energia de Hilbert". Va escriure una carta a Hilbert on deia:

> *Frl.* Noether m'ha aconsellat contínuament al llarg del meu treball, i ha estat només gràcies a ella que he arribat al material que presento en aquesta carta. Quan vaig parlar recentment amb *Frl.* Noether sobre el meu resultat relatiu al teu vector d'energia, m'ha dit que ella va arribar al mateix resultat a partir del teu article ara fa un any, i que ho havia escrit en un manuscrit (que he examinat).

A la seva presentació de 1918, i en l'article [10], Klein agraí les contribucions de Noether. Tanmateix, en l'anotació d'aquest article a les seves obres completes va deixar clar que el seu resultat no era més que un cas particular del teorema de Noether. Ell explica que va presentar l'article d'ella a la Reial Societat de Göttingen la setmana després, i

també diu que ella va demostrar i generalitzar algunes de les idees de Hilbert.

Aquest articles és el principal treball de Noether sobre les connexions entre simetries i les lleis de conservació i fou presentat per Felix Klien a la sessió del 16 de juliol de 1918 de la Reial Societat de Ciències de Göttingen, i publicat després als Proceedings. No fou, doncs, presentat per la mateixa Noether, i probablement ni fou convidada a assistir-hi per no ser membre de Societat. En el seu famós article de 1924, David Hilbert reconeix que Emmy Noether havia resolt el problema d'un teorema de l'energia dins la teoria general, i cita "Invariante Variationsprobleme" [14] (I.V. en el que segueix).

Durant la guerra Hilbert va intentar fer passar l'*Habilitation* (requisit per donar classes sota els auspicis de la Universitat) d'Emmy Noether a la Facultat de Filosofia de Göttingen. Va fracassar, però, per la resistència de filòlegs i historiadors. És una anècdota ben coneguda que Hilbert va declarar a la reunió de la facultat:

> No veig que el sexe d'un candidat sigui un argument contra la seva admisió com a *Privatdozent*. Després de tot som una Universitat, no un balneari.

L'*Habilitation* només va arribar a ser una opció per les dones a partir de la liberalització d'Alemanya als anys vint.

El 1919 Noether va escollir l'article I.V. [14] per a la seva Tesi d'Habilitació i el va presentar a la universitat de Göttingen acompanyat dels dotze articles que ja havia publicat i de dos manuscrits addicionals, un dels quals [13] contenia una sèrie d'idees cabdals que van tenir un impacte profund en el desenvolupament de l'àlgebra abstracta moderna.

Finalment va aconseguir donar classes oficialment a la universitat, però com que la seva *Habilitation* no va ser legalment reconeguda, va haver de treballar de franc. Ja havia donat classes els cursos anteriors, però els anuncis oficials precisaven que eren

> ofertes per Herr Professor David Hilbert, donades per Frl. E. Noether,

sense que fos necessari matricular-se. Aquestes classes estaven esdevenint cèlebres i atreien a matemàtics de tot Europa.

Es desprèn ben clarament de la sol·licitud que va fer per a la seva *Habilitation* que Noether era conscient del context i de la importància que els seus resultats matemàtics tenien per a la física en general i per a les lleis de conservació de la mecànica en particular (a les quals es referia com integrals primeres). També va mencionar (cf. [6]) que el seu treball matemàtic

> sorgeix de la meva col·laboració amb Klein i Hilbert en el seu treball sobre la teoria general de la relativitat d'Einstein.

Estic segura que Noether era plenament conscient de la profunditat i la generalitat dels seus potents resultats, molt més enllà del que seria una simple verificació de les hipòtesis de Hilbert sobre la connexió entre la teoria general de la relativitat i el no compliment de les lleis de conservació local de l'energia.

Després d'haver sotmès la seva habilitació i del seu treball addicional sobre invariants diferencials en relativitat general [12], Noether va retornar a la seva línia principal de recerca matemàtica: l'àlgebra axiomàtica. El seu treball matemàtic es va transformar i es va tornar més conceptual. El punt d'inflexió es pot observar en l'article amb W. Schmeidler sobre operadors diferencials, "*Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzen ausdrücken*" [13].

En els deus anys següents, Noether va tenir una enorme influència en les matemàtiques del seu temps. Revisant les seves obres completes, trobem que uns deu dels seus articles estan dedicats a la teoria d'àlgebres (números 17, 32, 33, 34, 38, 39, 40, 41 i 42), la majoria dels quals van ser publicats entre els anys 1927 i 1933. Tot i així, ja hem dit que les contribucions més importants de Noether en aquesta àrea no es troben tant en les seves publicacions com en els seus cursos de Göttingen, en particular els dels hiverns de 1927/28 i 1929/30. Ella no va publicar directament molts dels seus resultats, sinó que més aviat va deixar aquesta tasca a van der Waerden, Hasse o Deuring, entre altres. Alexandrov, Weyl, i van der Waerden insisteixen en aquest punt: que ella preferia comunicar els seus resultats en viu. Així doncs, els documents publicats no expliquen la història completa. Sabem que molts matemàtics brillants van assistir als seus seminaris i a les seves classes, i es fa difícil endevinar fins a quin punt els va transmetre les

seves pròpies idees. Els següents cursos van ser impartits per Noether a Göttingen:

Winter 1924/25:	*Gruppentheorie und hyperkomplexe Zahlen*
Winter 1927/28:	*Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*
Summer 1928:	*Nichtkommutative Algebra*
Summer 1929:	*Nichtkommutative Arithmetik*
Winter 1929/30:	*Algebra der hyperkomplexen Grössen.*

El primer curs és mencionat a la introducció de *Moderne Algebra* de van der Waerden [20], i a [21], on van der Waerden escriu que

> un dels temes principals del curs fou la teoria de Wedderburn de les àlgebres sobre cossos arbitraris.

El mateix tema fou tractat i millorat en el curs que portava el mateix nom i que Emmy Noether va impartir el 1927/28. En aquest curs també es va donar un nou i complet tractament de la teoria de representacions de grups i àlgebres (v. [18]).

La difusió de l'obra d'Emmy Noether fou deguda, més que a les seves publicacions, als rics programes de recerca que proposava i als cursos que donava; als seus molts estudiants graduats i joves col·legues (Grete Herman, Köthe, Krull, Deuring, Fitting, Witt, Tsen, Shoda, Levitski, van der Waerden); als seus associats (Schmidt, Artin, Hasse, Alexandroff, Pontrjagin, Hopf); al fet de ser una professora que motivava i inspirava als seus estudiants; al seu esperit de col·laboració amb els demés; i, també, a les classes que impartia van der Waerden. Això va ser d'aquesta manera a pesar del seu poc talent pedagògic, que feia que només els més brillants assistissin a les seves classes impartides en aules que mai omplia. Hi hagué molts estrangers entre els seus estudiants. El seu grup d'estudiants era conegut com "Els nois de la Noether". Formaven un grup de recerca molt compacte i ella tenia gran cura de tots ells. Al "Mathematics Genealogy Project" estan llistats 750 descendents (v. l'annex de la pagina 33 per a més detalls).

Van der Waerden fou l'estudiant més devot d'Emmy Noether. Va arribar a l'hivern del 1924/25 i de seguida va aprendre les seves teories. El 1927 va impartir un curs sobre la teoria d'ideals. Van der Waerden exposava de manera brillant les idees d'Emmy Noether, les quals llavors van agafar fama i acceptació a Göttingen i d'aquí cap a les altres

universitats. El seu llibre *Moderne Algebra*, el qual ha esdevingut un clàssic, inclou les idees i resultats d'Emmy Noether i encara avui és un llibre interessant.

El 1932 va ser conferenciant invitada al Congres Internacional de Zurich i la seva obra va rebre un reconeixement total. Podríem dir que va ser l'estrella del congrés.

Quan va haver de marxar d'Alemanya el 1933, ella volia anar a Moscow, on, ja feia un temps, havia impartit un semestre d'àlgebra, havia organitzat un curs de geometria algebraica i havia treballat amb Alexandrof i Pontrjagin (1928-1929). Però la burocràcia dels papers anava lenta i finalment va emigrar (com molts altres dels seus col·legues) als Estats Units. Pel fet de ser dona no va ser acceptada a l'"Institute for Advanced Study", a Princeton. Va ser-ho al Bryn Mawr College, un "college" femení de Pennsyvania. Allà va crear un petit grup de recerca i anava a Princeton per a seminaris i col·laboracions. A Bryn Mawr va ensenyar-hi només durant dos anys, ja que morí prematurament el 1935.

7. Contribucions a la Física

L'article d'Emmy Noether I.V., [14], va influir profundament la física del segle XX. A l'article es provaven dos teoremes i els seus recíprocs, la qual cosa revelava la connexió general entre simetries i les lleis de conservació de la física. Van conduir a un profund coneixement d'algunes lleis, com ara el principi de conservació de l'energia, del moment angular, etc., i foren un instrument cabdal en els grans descobriments de les simetries dels camps gauge al llarg del segle XX [2].

Al novembre de 1915, Emmy Noether escrivia a Ernst Fischer:

> Hilbert pretén fer unes xerrades la propera setmana sobre les seves idees relatives als invariants diferencials d'Einstein i, per tant, ... millor que estem preparats [5].

Tot i que la teoria general de la relativitat es completà l'any 1915, romangueren problemes oberts. En particular, el principi de la conservació local de l'energia era un tema controvertit. A la teoria general, l'energia no es conservava localment com a les teories clàssiques

de camps (gravitació Newtoniana, electromagnetisme, hidrodinàmica, etc.). La qüestió de la conservació de l'energia a la teoria general havia deixat perplexos a molta gent des de feia dècades. En els seus primers dies, Hilbert anomenava aquest problema "la fallada del teorema de l'energia". En una carta a Klein [3], assegurava que aquesta "fallada" és un "fet característic de la teoria general" i que en comptes de tenir "teoremes d'energia propis", hom tenia "teoremes d'energia impropis". En una nota a Klein explica que li va demanar a Emmy Noether que aclarís el problema.

Emmy Noether va ser doncs enllistada per a la física, que era quelcom diferent de la seva línia principal de recerca (el desenvolupament de l'àlgebra abstracta moderna). Després de la descoberta de David Hilbert del principi variacional del qual se'n deduïen les equacions del camp de la relativitat general, David Hilbert, Felix Klein i d'altres a Göttingen es van interessar intensament per l'aleshores recentment completada teoria de la relativitat i l'ajut de Noether fou reclamat per clarificar la qüestió de la conservació de l'energia a la que ens hem referit abans.

Ella va començar a estudiar la teoria de la relativitat i aviat va clarificar el problema. Això la conduí a dos articles: [12] i [14]. Hermann Weyl caracteritzà aquests dos articles ([19])de la manera següent:

> La formulació matemàtica genuïna i universal de dos dels aspectes més representatius de la teoria de la relativitat general: en primer lloc, la reducció del problema dels invariants diferencials a un altre purament algebraic mitjançant l'ús de coordenades normals; i en segon lloc, les identitats entre les parts esquerres de les equacions d'Euler d'un problema de variacions ...

Segons [15] Einstein escriu a Hilbert el següent sobre el primer article:

> Ahir vaig rebre un article molt interessant sobre formes invariants de la senyoreta Noether. Estic realment impressionat que hom pugui entendre aquestes qüestions des d'un punt de vista tan general. No li hauria fet cap mal a la vella guàrdia de Göttingen aprendre alguna cosa d'ella ...

La discussió i les demostracions dels teoremes de I.V. aclaria i resolia qüestions sobre conservació de l'energia, com reconeixia Hilbert en el seu article de 1924.

Considerem la qüestió en el llenguatge actual. En la terminologia matemàtica moderna, la teoria de la relativitat general és una teoria gauge i el grup de simetria de la teoria és el grup de gauge. És el grup de tots els canvis de coordenades que tenen derivades contínues, sovint anomenat el grup dels canvis de coordenades generals. És un grup de Lie que té un nombre infinit (amb la potència del continu) de generadors infinitesimals independents. En la terminologia de Noether, un grup així és un grup continu infinit. El grup de simetria de la relativitat especial, el grup de Poincaré, és un subgrup de Lie del grup dels canvis de coordenades generals. Té 7 generadors infinitesimals independents. Noether s'hi refereix com el grup continu finit. La diferència entre un grup de Lie amb un nombre finit o numerable de generadors infinitesimals independents i un grup continu infinit és el que diferencia els teoremes I i II de l'article I.V. El teorema I val quan hom té un grup continu finit de simetries, mentre que el teorema II val en el cas que el grup sigui continu infinit. Les teories de camps amb un grup continu finit de simetries presenten, com ho anomenava Hilbert, 'teoremes d'energia propis'. Físicament, en aquestes teories hom té una densitat d'energia localitzada i conservada; i hom pot demostrar que en qualsevol volum arbitrari el flux net d'energia a través de la frontera és igual a la taxa de decreixement per unitat de temps de l'energia dins del volum. Això se segueix del fet que el tensor d'energia-moment té divergència zero. D'altra banda, a la relativitat general, no té sentit parlar de la localització de l'energia. Hom pot definir una quantitat que tingui divergència zero anàlogament al tensor de densitat d'energia-moment de la relativitat especial, però és dependent del gauge: és a dir, no és covariant sota canvis de coordenades generals. Per tant, el fet que tingui divergència zero no implica cap llei de conservació local de l'energia. Així, en aquestes teories hom té, com ho veia Hilbert, 'teoremes d'energia impropis'.

Un aspecte essencial per a la física del article I.V. de Noether és la claredat que els seus teoremes tenen per la nostra comprensió del principi de conservació de l'energia. En la introducció de N. Jacobson als Collected Papers de Noether aquest cita a Gursey [16]:

> Abans de Noether el teorema de conservació de l'energia estava envoltat de misteri, portant-nos cap els obscurs sistemes físics de Mach i

Ostwald. La simple i profunda formulació matemàtica de Noether va fer molt per aclarir la física.

Noether va demostrar en el seu Teorema I que el principi de conservació de l'energia és conseqüència de la simetria sota translacions en el temps. Això s'aplica al grup de transformacions de Lorentz i a les translacions a l'espai-temps. D'altra banda, en relativitat general la conservació de l'energia pren una forma diferent com es podrà veure més endavant. El Teorema II de Noether s'aplica en el cas de la relativitat general i es pot veure que ella va provar l'afirmació de Hilbert que en aquest cas hom té "teoremes d'energia impropis", i que això és "un aspecte característic de la teoria". Això es degut al fet que la teoria és una teoria gauge; és a dir, que té un grup de simetries infinit i continu del qual les translacions en el temps en són un subgrup. De fet defineix, d'una manera generalment, defineix relacions de divergència "impròpies", les quals s'anul·len quan se satisfan les equacions del camp, cosa que correspon a un subgrup continu finit d'un grup continu infinit, però que generalment no tenen les propietats requerides d'invariància o covariància respecte del grup més gran.

Per exemple, en relativitat general es pot construir un (pseudo) tensor d'energia-moment amb divergènce nul·la, però resulta que depèn del gauge perquè no és covariant per transformacions generals de coordenades (és per això que se'n diu més pròpiament un pseudotensor). Aquests pseudotensors són covariants respecte les transformacions lineals del grup de Poincaré i poden ser utilitzats en regions de l'espai-temps que estiguin allunyades de fonts gravitatòries per derivar un principi de conservació de l'energia [2].

Necessitem tractar amb cert detall teories de camps de la matèria, la gravetat, l'electromagnetisme, etc., tant pel que fa a la relativitat especial com a la general. En relativitat especial aquestes teories tenen un "teorema d'energia propi", en el sentit de Hilbert, i els "teoremes d'energia propis" donen un principi local de conservació de l'energia. En relativitat general, d'altra banda, el teorema d'energia esdevé impropi pel fet que el tensor energia-moment que intervé en el teorema depèn del gauge. Hi ha transferència d'energia cap i des del camp gravitatori i no té cap sentit parlar d'una localització definida de l'energia del camp gravitatori relativista. En conseqüència, no tenim un principi

local de conservació de l'energia en les regions de l'espai-temps en què hi ha camps gravitatoris. Las teories que estem tractant són teories de camp que poden ser formulades en termes d'un principi variacional; és a dir, les equacions del camp poden ser obtingudes del principi de Hamilton. Aquesta va ser la més gran contribució de Hilbert a la teoria de la relativitat general. Ell va provar que les equacions de camp poden deduir-se del principi de Hamilton, i el treball de Noether es desenvolupà a partir d'això.

8. Contribució a l'Àlgebra

Entre els anys 1920 i 1932, Emmy Noether va crear el treball matemàtic que ha fet el seu nom immortal. La importància del seu treball va ser immediatament reconeguda pels seus col·legues de Göttingen i, a partir d'allà, a la resta del món. En el Congrés Internacional de Zuric el 1932, va donar la conferència plenària "Algebras and their Application to Number Theory". I quan va morir, el 1935, tothom va estar d'acord que ella, més que ningú altre, havia creat l'àlgebra moderna del segle vint.

Alexandrov, el seu antic col·laborador, en la necrològica [15] que en la seva memòria va escriure el 5 de novembre de 1935, deia:

> Però quan pensem en Emmy Noether com a matemàtica, tenim al cap no els seus treballs inicials, importants com són en resultats concrets, sinó el principal període de la seva recerca que comença el 1920 quan ella esdevé la creadora d'una nova direcció en l'àlgebra i la directora, la més consistent i eminent representant d'una certa doctrina matemàtica, tota la que es caracteritza amb les paraules "matemàtica conceptual".
>
> ··· ella mateixa es va disposar a oblidar tot el que havia fet els primers anys de la seva vida científica, perquè considerava que aquells resultats havien estat una desviació del camí principal de la seva recerca, que era la creació d'una àlgebra general, abstracta.
>
> Emmy Noether es va iniciar en el seu propi camí matemàtic, totalment original, en els anys 1919/1920. Ella mateixa data el començament d'aquest període fonamental en el la seva recerca amb el famós treball en col·laboració amb V. Schmeidler [13]. En aquest sentit, aquest article és el pròleg de la seva teoria general d'ideals que va recollir en la clàssica memòria "*Idealtheorie in Ringbereichen*".

> A partir de 1927, com que creixia constantment la influència de les idees d'Emmy Noether, el renom acadèmic de l'autora de les idees va créixer també de forma similar. Mentre, la direcció del seu treball anava canviant cap a les àrees d'àlgebra no commutativa, teoria de representacions i aritmètica general de sistemes hipercomplexes.
>
> Emmy Noether va viure per poder veure el complet reconeixement de les seves idees. En el període 1923-1925, es va comprometre fortament en demostrar la importància de les teories que estava desenvolupant. El 1932, en el Congrés Internacional de Zuric, els seus esforços es van veure totalment acomplerts. La conferència que va impartir en el Congrés va significar un vertader triomf de la línia de recerca que ella presentava. En aquest punt, podia haver revisat el camí matemàtic que havia hagut de recórrer no només amb íntima satisfacció, sinó adonant-se del reconeixement complet i incondicional de la comunitat matemàtica. El Congrés a Zuric va marcar el punt més alt de la seva posició científica internacional.

Aquesta avaluació de la seva posició en el "Mathematics Hall of Fame" no va canviar en els següents 50 anys, i es manté fins els nostres dies. Nathan Jacobson, l'editor de la seva Obra Completa [16], el 1982 va escriure en la Introducció:

> Emmy Noether va ser una de les personalitats més influents en la matemàtica d'aquest segle. El desenvolupament de l'àlgebra abstracta, que és una de les més distingides innovacions de la matemàtica del segle vint, és deguda a ella — pels articles publicats, els seminaris, i per la seva influència en els seus contemporanis. Per ara, les seves contribucions han estat tan profundament absorbides en la nostra cultura matemàtica que rarament li són atribuïdes. Per tant sembla més adequat, en aquesta introducció a la seva obra completa, mirar de subratllar les seves principals contribucions a l'àrea de les matemàtiques genèricament coneguda com àlgebra "abstracta", "conceptual", o "moderna".

Per a Hilbert el punt de vista axiomàtic tenia com a objectiu la clarificació lògica. Noether, en canvi, el va convertir en un mètode potent per a la recerca matemàtica. Com va dir Herman Weyl [19]:

> Noether va aplicar el mètode axiomàtic amb una habilitat excepcional, encaixava amb la seva naturalesa i va fer de l'àlgebra un 'Eldorado de l'axiomàtica',

i de l'àlgebra es va estendre a la resta de la matemàtica.

Les contribucions principals d'Emmy Noether (i de R. Brauer) a la teoria d'àlgebres van ser les següents:

- aplicacions de conceptes algebraics abstractes, com la teoria d'ideals, a la teopria estructural d'àlgebres;
- unificació de la teoria de representacions de grups finits i la teoria d'àlgebres semisimples;
- la teoria de cossos de descomposició;
- aclarir l'estructura interna de les àlgebres simples, com el teorema de Skolem-Noether o el teorema del doble centralizador;
- cohomologia: conjunts factors i productes creuats;
- aplicacions de la teoria d'àlgebres a la teoria algebraica de nombres i a la teoria de classes de cossos.

Es pot sostenir l'opinió que el primer treball important de Noether en àlgebra es troba en el curs que va donar a Göttingen la tardor de l'any acadèmic 1927/28: "*Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*". En realitat aquestes notes gairebé no presenten resultats importants nous. Tot i això constitueixen una de les arrels principals del que ara anomenem "àlgebra moderna". Van der Waerden va prendre notes d'aquest curs, en va preparar la seva publicació (no. 34 en les obres completes) i el va incorporar, en continguts i esperit, en el seu propi llibre *Moderne Algebra*. La importància de molts dels principis fonamentals de l'àlgebra, que avui resulta óbvia, va ser indicada per primera vegada en aquest curs: teoremes d'isomorfisme, el teorema de Jordan-Hölder, la descomposició de Krull-Schmidt, semisimplicitat, reduïbilitat completa, extensió d'anells, teoria estructural d'anells no commutatius, comportament del centre i, sobretot, el fet que la teoria de repreentacions de grups finits es pot basar en la teoria d'àlgebres semisimples, aspecte que a la pròpia Noether li semblava el més important.

En aquest curs hi faltaven encara moltes coses, com la teoria estructural d'àlgebres simples, sistemes factorials i productes creuats o una visió clara de la importància de la separabilitat. El semestre d'estiu següent Noether va continuar amb el seu curs, en el qual va provar el que es coneix com a teorema de Noether–Skolem, una fita essencial de tota la teoria, que afirma que qualsevol automorfisme d'una àlgebra simple

és interior (Dickson i Wedderburn havien provat i fet servir casos especials d'aquest teorema en la seva teoria d'àlgebres cícliques i productes creuats). Noether, tal com explica a la introducció de l'article 40 de les seves obres completes, no coneixia encara el teorema del centralitzador (una àlgebra semisimple és igual al seu doble centralitzador), estretament relacionat amb el teorema de Noether–Skolem, i que fou provat per Deuring el 1935, [4].

Durant el semestre d'hivern de 1929/30 Noether va donar una altra vegada un curs sobre "*Algebra der hyperkomplexen Grössen*". Les notes del curs van ser preses per Deuring, però només es van publicar a les seves obres completes. El contingut matemàtic d'aquests cursos es va difondre abans de la seva publicació a través de van der Waerden, de l'exposició de Hasse el 1932 sobre àlgebres cícliques i productes creuats, a [1], del propi article de Noether (núm. 40 de les seves obres ocmpletes) i del llibre de Deuring del 1935 [4].

No està clar per què Noether no va publicar mai les seves notes de classe sobre una de les seves descobertes més significatives, la relació entre la teoria d'àlgebres i la cohomologia de Galois, incloent els teoremes de Wedderburn, l'estructura de les àlgebres simples, el teorema de Noether–Skolem, els teoremes de centralitzadors, cossos de descomposició, sistemes factorials i productes creuats. Com a aplicacions Noether prova el teorema de Wedderburn sobre anells de divisió finits, la classificació de Frobenius de les àlgebres de divisió reals i quelcom que apuntava al futur: el resultat principal sobre els cossos de classes, $\mathrm{Br}(L/K) \sim \mathrm{Gal}(L/K)$, per a l'extensió cíclica d'un cos p–àdic. La teoria de representacions de grups finits es menciona només breument i restringida a grups abelians. La teoria d'àlgebres va tenir també implicacions a la teoria algebraica de nombres i a la teoria de cossos de classes. Aquí és encara més difícil que a la teoria algebraica de precisar el que es pot atribuir a Noether. En un manuscrit del 1935 Weyl [19] escriu:

> Hasse reconeix que deu la inspiració dels seus meravellosos articles sobre la connexió entre quantitas hipercomplexes i la teoria de cossos de classes a observacions informals de Noether. Ella podia deixar anar una observació profunda com la següent: " El símbol del residu de la norma no és res més que àlgebra cíclica" en el seu estil lapidari i profètic sorgit de la seva poderosa imaginació.

Parlant en general, Noether probablement fou la primera persona en veure clarament que la teoria de cossos de classes es podria (i potser s'hauria) de basar en el formalisme de la cohomologia de Galois. Un punt important de la teoria algebraica de nombres és el resultat de Brauer, Hasse i Noether que sobre un cos de nombres algebraic tota àlgebra de divisió és cíclica (No. 38 de les seves obres completes). Tanmateix el pas essencial de la demostració és el principi local-global de Hasse per al grup de Brauer, essent les contribucions de Brauer i Noether relativament menors. Per altra banda, la seva conferència del 1932 al congrés de Zuric, i l'article número 41 de les seves obres completes, contenen un més que remarcable esboç de com es pot usar la cohomologia de Galois. Primer prova el teorema 90 de Hilbert (degut a Schur i Speiser, però poc conegut en aquell moment), i tot seguit desenvolupa, en essència, la cohomologia del grup d'ideals i el grup de classes d'ideals, basant-se, naturalment, en el principi local-global per al grup de Brauer. Aquestes idees van conduir directament a la teoria de cossos de classes d'Artin–Tate (v. [18]).

Finalitzaré amb unes cites de Hermann Weyl de 1935 (v. [19]):

> ... En els anys que vaig estar a Göttingen, 1930-1933, ella era sens dubte el centre més fort d'activitat matemàtica allà, vista la fertilitat del seu programa d'investigació científica i la seva influència sobre un nombrós cercle de deixebles ... La seva manera conceptual i axiomàtica de pensar l'àlgebra es manifesta especialment en el seu article sobre operadors diferencials ... És aquí que apareix per primera vegada l'Emmy Noether que tots coneixem, la que amb el seu treball canvià la cara de l'àlgebra ... La seva total significació pel que fa a l'àlgebra no es pot inferir només partint dels seus articles, i cal tenir en compte la seva capacitat inspiradora i el fet que molts dels seus suggeriments van cuallar en els treballs dels seus deixables i col·laboradors
>
> ... La seva existència era propera a la dels seus deixebles; els apreciava i s'interessava pels seus afers personals ...
>
> ... Aquesta capacitat de destil·lació la va demostrar, per exemple, amb la seva teoria del producte creuat, en la qual gairebé tots els fets havien ja estat trobats per Dickson i per Brauer ...
>
> ... El seu cor no coneixia la malícia; no creia en el mal —de fet, mai es pogué imaginar que pogués tenir un paper entre les persones

... Fou una gran matemàtica, crec fermament que la més gran, i fou una gran dona ... I de totes les que he conegut, ella fou certament una de les més felices ...

... La seva força provenia de la seva habilitat per operar d'una manera abstracta amb els conceptes. A ella no li calien exemples concrets per arribar a nous resultats ... Estava dotada de la més viva imaginació, la qual li servia per visualitzar connexions remotes, i sempre s'esforçava per trobar punts d'unificació. D'aquesta manera cercava els aspectes essencials dels fets coneguts, els ordenava mitjançant conceptes generals apropiats, trobava un punt des del qual es pogués contemplar la totalitat, netejava l'objecte considerat de tot el que fos superflu, i aconseguia així una forma tant simple i nítida que es podia aventurar a entrar en el nou territori amb les més grans possibilitats d'èxit.

EL EJERCICIO DE LA DISONANCIA

DAVID BLANCO

En la frase más popular del *Tractatus*, Wittgenstein aconseja que: *De lo que no se puede hablar, es mejor callar*. Cuanto sigue a continuación podría interpretarse como un desafío algo irresponsable a esta máxima.

Cualquier aproximación a la personalidad de Emmy Noether termina derivando, casi por accidente, en un caso policial, donde las pistas se confunden y se amontonan las hipótesis.

La incertidumbre brota de nuestra propia ignorancia: hace tiempo que su punto de vista se desvaneció casi sin dejar cicatrices en la memoria. No quedan diarios que desempolvar, lo que ha sobrevivido de su correspondencia privada gira casi exclusivamente en torno a asuntos matemáticos. En última instancia no queda más remedio que recurrir a los testigos, que con frecuencia mienten, no premeditadamente, sino porque hablan a través del cristal distorsionado de sus prejuicios.

Se hace tan difícil detectar los tics y las ideas preconcebidas de una época, cuando uno se halla instalado en ella, como a una persona cualquiera apreciar sus propios defectos. Desde una perspectiva moderna resultan chocantes muchas actitudes que la gente del siglo XIX daba por sentadas.

Tampoco conviene olvidar lo productiva que puede llegar a ser la especie humana a la hora de construir prejuicios. Si no se hallan motivos personales, siempre cabe recurrir a un amplio repertorio en el que fundar el desprecio, donde la raza afea tanto como la religión, el sexo, una forma determinada de vestir o las convicciones políticas. Puede decirse que el tiempo que le tocó vivir a Noether la apuntó a casi todos ellos sin la delicadeza de antes pedirle permiso.

Mujer en el seno de una cultura profundamente misógina, judía dentro de una sociedad que acuñó la palabra *antisemita*, firme pacifista durante la Gran Guerra de 1914 y miembro del partido socialdemócrata

que se hundió con la República de Weimar, se subió a un escenario donde cada accidente parecía dispuesto con el fin de anular alguno de los rasgos que alcanzaban a definirla superficialmente. Sin embargo, su epidermis ofrecía una vulnerabilidad engañosa. Por general que sea el principio, una descripción somera de Noether apenas describe nada, apenas roza la médula de un carácter tan fértil en anécdotas como en absoluto anecdótico.

El ejercicio de su vocación se convirtió en una larga carrera de obstáculos, donde salvar la valla de un prejuicio servía tan solo para salir al encuentro del siguiente. Cada uno de ellos bastaría para alimentar las páginas de una enciclopedia, pero aquí nos centraremos en las trabas que padeció debido a su condición de mujer: hubo hombres señalados con la misma estrella de David o que mantuvieron posturas políticas que pudieron considerarse extremistas en determinados círculos académicos, y que sin embargo alcanzaron una meta mucho más lejana.

El verdadero problema para la sociedad de la época consistía en la intersección de dos conjuntos: el de las mujeres y el de las matemáticas, una mezcla tan inverosímil como la del agua con el aceite. La literatura o el arte entreabrieron sus puertas al bello sexo con menos reservas que la ciencia, aunque a veces lo obligaran a presentarse en sociedad bajo seudónimo (una estrategia que puso en práctica Sophie Germain al iniciar su correspondencia con Gauss). Sin embargo, la creación literaria o plástica ofrecía un asidero para aceptar hasta cierto punto la creatividad femenina: la convicción de que las mujeres estaban dotadas de una sensibilidad distinta. Una mayoría argüiría que esa sensibilidad daba pie a una literatura o una pintura de segunda, sobre todo si se comparaba con los frutos del genio masculino, pero al menos escribir o pintar, bajo esta coartada emocional, no violentaba la esencia de la femineidad. La principal pega residía en que el cultivo de este género menor estorbaba la atención del hogar y la crianza de los hijos.

Tomemos el caso de dos pintoras francesas que formaron parte del núcleo inicial de los impresionistas: Marie Bracquemond y Berthe Morisot. Bracquemond se vio obligada a empaquetar el caballete con los pinceles y recogerlos en el desván, como si fueran armas de fuego que amenazaban la estabilidad familiar. Contaba además con la oposición de su marido, también artista, al que se le había atragantado su estilo,

moderno en exceso. Morisot se casó con un hermano de Manet y tuvo hijos. Afrontó los mismos problemas para conciliar su vocación con las obligaciones impuestas por el entorno familiar, pero reaccionó de modo distinto. Escribía a los 49 años en su diario:

> La verdad es que nuestro valor radica en el sentimiento, en la intuición, en nuestra mirada, más sutil que la de los hombres [...]. Ahora quiero estar a la altura de mi responsabilidad [artística] hasta mi muerte; y me gustaría que los demás no me lo pusieran demasiado difícil.

Seguramente Emmy Noether hubiera estampado de corazón su firma al pie de esta última frase. Sin embargo, el problema radicaba en la que la precede. Al margen de que se negara a interpretar el papel que le habían asignado socialmente, ¿qué sensibilidad nueva podía aportar una mujer a las matemáticas? En el terreno literario o plástico era fácil proyectar un estereotipo sentimental y verlo plasmado en una suerte de género chico. Pero ¿qué clase de ciencia dictaban las emociones?

En un diálogo de la película *Shadowlands*, Clive Lewis, en presencia de la poetisa americana Joy Gresham, le comenta a un profesor de Oxford:

—*Pensaba que no creías en la existencia del alma, Christopher.*

Y su colega no vacila en responder:

—*Bueno, en realidad sí. Ahora bien, considero el alma como un rasgo esencialmente femenino: el anima, en oposición al animus, la variante masculina. Es la única manera que encuentro para explicar la desconcertante diferencia entre los sexos. Allí donde los hombres poseen intelecto, las mujeres tienen alma.*

A falta de intelecto, y sólo con alma, uno bien se las podía apañar para pintar o escribir, pero ¿para demostrar teoremas?

Las ciencias cifraban el problema en una imposibilidad biológica. Kant hacía bromas al respecto: *Una mujer con la cabeza llena de griego, como madame Dacier, o que se mete a discutir las complejidades de la mecánica, como la marquesa de Chatelet, bien podría lucir una barba.* Voltaire veía a esta última como: *un gran hombre cuyo único defecto consistía en haber nacido mujer. Una mujer que traducía y explicaba a Newton... en suma, un hombre magnífico.* Premisas que conducían a Kant a una tajante conclusión: *La mujer, por tanto, no debería*

aprender ninguna geometría. Detrás de las inquietudes intelectuales de cualquier mujer, Nietzsche adivinaba la existencia de algún problema con su sexualidad. Y para Goncourt no existían mujeres de genio, las mujeres de genio sencillamente eran hombres.

¿Se trataba de simples metáforas? Paul Moebius, un prestigioso médico, considerado por Freud como uno de los padres de la psicoterapia, opinaba que las mujeres matemáticas eran contrarias a la naturaleza, y juzgaba a Sofía Kowalevsky como el fruto de un proceso patológico. Los mecanismos de la creatividad científica centraron su interés profesional durante un tiempo, llevándole a un importante descubrimiento:

> La mujer matemática lo es contra natura, es en cierto sentido un hermafrodita. Las mujeres instruidas o artistas son el resultado de la degeneración. Sólo por el camino de la anormalidad, a causa de una malsana metamorfosis, puede la mujer adquirir otros talentos que los que la capacitan para ejercer de madre o de amante.

Richard von Krafft-Ebing, uno de los fundadores de la sexología, estaba convencido de que las mujeres que sufrían un grado severo de homosexualidad degenerativa tendían a manifestar una poderosa inclinación hacia las ciencias.

Según Theodor von Bischoff, profesor de medicina en la Universidad de Múnich, las adolescentes que incurriesen durante la pubertad en el pernicioso hábito del estudio corrían el riesgo de infligirse una *lesión profunda y permanente* en los ovarios.

Estas opiniones nos ayudan a fraguar el cristal a través del cual examinaron los contemporáneos de Noether sus aspiraciones científicas.

En las matemáticas el talento resulta menos cuestionable que en otras áreas de creación, donde un gusto caprichoso bastaba para rebajar cualquier aportación femenina. En el caso de Noether, más objeciones encontró en quienes precisamente no entendían lo suficiente de matemáticas como para acusar el impacto de su obra. Fueron la administración y el ala de humanidades de su facultad, integrada por filósofos, filólogos e historiadores, quienes forzaron su incómoda, y a menudo absurda, situación académica.

El frente tradicional masculino fue adoptando diversas estrategias ante la desconcertante floración de mujeres científicas de finales del XIX

y comienzos del siglo XX. La facción más impermeable rechazaba de entrada la mera posibilidad de que alguna naciera con talento. El siguiente paso consistía en negar la evidencia, como en el caso de Sofía Kowalevsky, cuyas aportaciones fueron sometidas a una apresurada devaluación tras su muerte. Ante la magnitud de la obra de Noether resultaba más difícil ponerse a silbar y mirar hacia otra parte. La única manera de preservar la imagen que se tenía entonces de las mujeres pasaba por separarla del resto, guardándola a buen recaudo en la barraca de feria de las anomalías. Un genio masculino tampoco amanecía a diario, pero en el caso de Noether había que asegurarse de que fuera una excepción monstruosa como quien nace, por así decir, con siete dedos en una mano.

Los propios matemáticos que la apoyaron contra viento y marea, y que llegaron a profesarle un gran afecto, negaron su feminidad, seguramente de modo inconsciente. De ahí la obsesión por el aspecto físico de Emmy Noether, por su forma de vestir, de hablar, que en las semblanzas de otros matemáticos contemporáneos jamás asoma el hocico. En muchas ocasiones se esboza su retrato con el trazo grueso de una caricatura. Y precisamente el mecanismo de las caricaturas funciona atrapando los rasgos que se desvían de un cierto ideal para exagerarlos hasta lo grotesco.

Gauss ya apuntó la naturaleza de este proceso al referirse a Sophie Germain. Observó que la combinación de su destreza matemática innegable y el hecho de que fuera una mujer generaba una tensión evidente en quienes la trataban: *para resolver el conflicto, con frecuencia se la despojaba de sus atributos femeninos.*

Durante la estancia en Viena de Noether, en 1913, para asistir a un encuentro anual de la Asociación Alemana de Matemáticos, despertó la curiosidad del nieto de Franz Mertens, sumamente intrigado por las visitas que hacía a su abuelo un extraño personaje:

> Recuerdo con claridad a un visitante que, aun tratándose de una mujer, me pareció el capellán de una parroquia rural, con un vestido negro que casi le llegaba hasta los tobillos y un abrigo de lo más anodino, un sombrero de hombre sobre el pelo corto (en aquel tiempo todavía algo poco común) y una cartera en bandolera como las de los conductores de ferrocarril de la época imperial. Debía rayar en la treintena y ofrecía

> una estampa de lo más inusual. La hubiera tomado fácilmente por un clérigo de un pueblo vecino. Cuando interrogué a mi abuelo sobre su extraña visitante, me explicó que era una matemática, una mujer sabia que había venido a conversar con él sobre asuntos científicos.

La mayoría de las impresiones directas que conservamos de Noether son posteriores a 1923 y nos pintan un retrato de madurez, cuando ya había rebasado los cuarenta. El boceto lo emprenden matemáticos de su núcleo más íntimo, gente que cerró filas en torno a ella y admiró su obra.

En *A Mathematician's Miscellany*, de John Littlewood, sorprendemos el siguiente juicio de Edmund Landau, profesor en Berlín y heredero de la cátedra de Minkowski en Gotinga: *Puedo dar testimonio de que es un gran matemático, ahora bien, de si es una mujer... esto ya no podría jurarlo.*

Hermann Weyl, del mismo círculo académico, ahonda en la idea:

> Resultaba fácil para quienes la conocían por primera vez, o no habían experimentado su fuerza creativa, considerarla estrafalaria y hacer bromas a su costa.
>
> Nadie podría sostener que las Gracias se detuvieron junto a su cuna; pero si en Gotinga solíamos referirnos a ella en broma como *señor Noether*, lo hacíamos también como un reconocimiento respetuoso a la fuerza de su mente creadora, que parecía haber roto las barreras de su sexo.

Una confidencia afectuosa donde se cuela entre líneas una broma cruel sobre su aspecto físico. Por supuesto, se dan por sentadas las barreras del sexo femenino.

El canadiense Albert Tucker, que diera forma definitiva al famoso dilema del prisionero, recuerda un día en que, siendo estudiante, avistó desde una ventana a Emmy Noether, que se aproximaba desde la estación de tren. Otro matemático, McShane, comentó pensativo mientras la veía caminar: *¿Sabrías cómo distinguir a Emmy Noether de un pingüino?*, para acto seguido contestar a su propia pregunta: *Los pingüinos no llevan cartera.*

Tucker remata la anécdota:

> Noether siempre usaba el mismo traje; creo que no tenía otro. Y era de constitución casi tan ancha como alta, así que la descripción resultaba apropiada.

En el curso de una entrevista, Leon Cohen matiza el testimonio de Tucker:

> Permíteme una observación sobre el aspecto de Emmy Noether. Como ya comenté, durante una semana asistí a uno de sus seminarios. A primera vista producía la impresión de una señora de la limpieza que viniera a borrar la pizarra. Era una mujer corpulenta embutida en un vestido amorfo, pero la intensidad de sus ojos, detrás de unas gafas cristalinas, ofrecía un contraste absoluto con el resto de su aspecto descuidado. Ahora bien, ignoro cómo es la mirada de un pingüino.

El algebrista Nathan Jacobson, estudiante por la misma época, tampoco pasa por alto su indumentaria:

> Era una persona maravillosa. Inolvidable también. Al igual que Veblen, sólo disponía de dos trajes, algo así como una especie de blusones. Uno era de un azul deslumbrante. Tanto que casi te podías ver reflejado en él.

Erich Hecke, un experto en teoría de números que fue ayudante de Hilbert y Klein, también reparó en su singularidad:

> Aprendí a apreciar en profundidad a Emmy Noether durante estos últimos años, con ocasión de sus visitas a Hamburgo; verdaderamente era una excelente persona. Debo confesar sin embargo que al principio me costó abstraerme de ciertos hechos evidentes.

¿Cuáles? Por desgracia, su misma evidencia le impide entrar en detalles.

Podemos comparar estas viñetas de Emmy Noether con otra que hace de ella una de sus estudiantes americanas, Grace Shover:

> Su estatura rondaba el metro sesenta y era de constitución ligeramente robusta. Tenía la tez morena. Llevaba corto el pelo oscuro, veteado de gris. Cubría sus ojos miopes con unas lentes gruesas y tenía una forma peculiar de echar la cabeza a un lado y perder la mirada mientras se disponía a pensar sin dejar de hablar. Su aspecto y su modo de vestir no resultaban nada convencionales, hasta el punto de llamar la atención, un efecto que distaba mucho de ser premeditado.

Otras mujeres matemáticas, como Sofía Kowalevsky, sufrieron el mismo proceso de defeminización. Hasta en una biografía laudatoria de Kowalevsky como *El pequeño gorrión*, se la disfraza con diversos atributos masculinos para conferir cierta verosimilitud a su éxito matemático: su estampa infantil la convierte en un marimacho rollizo, que sentía alergia hacia los volantitos, las faldas y las muselinas, muy atractiva, pero *no hermosa*.

En resumen: el estereotipo femenino de mujer seductora se daba de bofetadas con el talento matemático.

Como parece ser que Kowalevsky era, en efecto, extremadamente atractiva, el procedimiento anterior resulta excepcional y la paradoja solía resolverse al revés, aceptando su feminidad, subrayándola y rebajando al mismo tiempo su mérito matemático.

Weyl sintetiza en una sola frase estas dos actitudes: *Sólo ha habido dos mujeres en la historia de las matemáticas, y una de ellas no era matemática, mientras que la otra no era una mujer.*

Aquí las palabras hacen su juego a costa de Kowalevsky y Noether. En cada caso se resuelve el régimen de incompatibilidades por una vía distinta.

En vida de Noether también se produjeron intentos de rebajar su estatura matemática, apoyados en que su enfoque, entonces de vanguardia, despertaba dudas o rechazo en numerosos matemáticos. En cualquier caso su presencia se hacía incómoda. La matemática austriaca Olga Taussky recordaría muchos años después sus tiempos de estudiante en Gotinga: *Nadie podría poner en duda su popularidad entre los estudiantes, pero sus colegas, o bien desconfiaban de su trabajo o bien era ella misma quien no terminaba de gustarles.*

Los propios amigos de Noether sintieron el peso de la contradicción y se embarcaron en un esfuerzo intermitente y casi arqueológico por escarbar y sacar a la luz sus rasgos femeninos. El desconcierto ante sus manifestaciones explícitas de cariño, absolutamente inéditas en la relación casi militar de un profesor con sus alumnos, unido a su generosidad y sincera preocupación por los estudiantes, sólo cabía interpretarse a la luz de una figura familiar: la de madre. Así, casi todas las descripciones

de Noether hechas por hombres desembocan tarde o temprano en su metafórica maternidad.

Recuperamos ahora un comentario de Weyl, para completarlo:

> Si en Gotinga solíamos referirnos a ella en broma como *señor Noether*, lo hacíamos también como un reconocimiento respetuoso a la fuerza de su mente creadora, que parecía haber roto las barreras de su sexo. Pero sin duda eras una mujer, maternal, y de una calidez infantil.
>
> No sólo te entregabas a los estudiantes en el terreno intelectual, por completo y sin reservas: se arremolinaban a tu alrededor como polluelos buscando cobijo bajo las alas de mamá gallina. Los querías, cuidabas de ellos y convivías estrechamente en su compañía.

Otro matemático, Norbert Wiener, insiste en la imagen de *numerosos estudiantes* [que] *se arremolinaban a su alrededor como un puñado de patitos en torno a su bondadosa madre.* Uno de esos patitos, el norteamericano Nathan Jacobson, recuerda que:

> La gente solía llamarla *señor Noether*, algo fuera de lugar. Ella era muy, muy femenina. Poseía un formidable instinto maternal.

Aparte de esta obsesión caricaturesca por su aspecto físico o su modo de vestir, la sombra oblicua de la prevención se proyectaba a la hora de apreciar su carácter.

La austriaca Auguste Dick, autora de su primera biografía, siguió al pie de la letra los testimonios que recogió décadas después de la muerte de Noether:

> Se comportaba a menudo de forma poco amigable con la gente que no compartía su modo de pensar, o incluso con aquellos que presumía que podían no hacerlo. Lo cual ha sido puesto de manifiesto por diversas fuentes [...]. Hoy nadie le guarda el menor rencor por ello.

Añade, sin embargo, que en su día hubo *gente que con frecuencia se sentía ofendida por sus maneras desagradables y a veces manifiestamente despectivas.*

Uno de sus discípulos rusos, Aleksandrov, ofrece una variación muy distinta sobre el mismo tema:

> Su bondad y dulzura nunca la hicieron débil o incapaz de resistir la malicia. Tenía sus propias opiniones y era capaz de avanzarlas con fuerza y tenacidad. Aunque pacífica y conciliadora, su carácter también era apasionado, temperamental y decidido; siempre sostenía sus puntos de vista con franqueza y no temía la oposición.

¿En qué quedamos: resultaba poco amigable o se defendía con firmeza? Desde luego han sobrevivido testimonios de profesores que la trataron de modo desconsiderado. A nadie extraña que el hecho de no dejarse avasallar frente a la opinión de los hombres la volviera impertinente a ojos masculinos. No conviene olvidar que la mayoría de los matemáticos que trataron a Noether tendrían la última palabra en el ámbito doméstico, donde se hallaban recluidas las mujeres, y que no contarían con una sola experiencia previa de una mujer capaz de hacerles frente en su propio terreno académico.

Según Weyl, *no había nada rebelde en su naturaleza; aceptaba complaciente las condiciones tal y como se le presentaban.* Son palabras pronunciadas en su oficio fúnebre, donde seguramente trató de presentarla bajo la luz más favorecedora posible de acuerdo con los gustos de su auditorio. Porque en otras circunstancias menos protocolarias llegó a confesar que: *Era de complexión robusta y voz poderosa, y no siempre era fácil hacerse escuchar en su presencia.*

¿Hacerse escuchar o sermonear?

Edward J. McShane, un estudiante norteamericano, la encontraba: *no sólo extraordinariamente brillante, sino además absolutamente adorable.*

Y para otra alumna, Grace Shover: *era sincera, sencilla, cariñosa, considerada y respetuosa.*

Si los dibujos más caricaturescos o desfavorecedores salen de la mano de hombres, puede decirse lo mismo de los juicios desdeñosos acerca de sus dotes como docente. ¿Estos hombres nos ofrecen una mirada limpia o se sentían violentados frente a una mujer que les daba clase, encumbrada sobre un estrado? Probablemente nunca sabremos la verdad, pero es difícil retirar el velo de la sospecha sobre muchos testimonios, sobre todo teniendo en cuenta que las opiniones más positivas se deben a hombres jóvenes (menos cargados de prejuicios) y mujeres.

Con esta constelación de recelos e ideas preconcebidas de fondo, ¿cómo se desarrolló la carrera matemática de Emmy Noether? Podemos rescatar una frase del obituario que le dedicó Einstein para resumirla:

> Nacida en el seno de una familia judía que se distinguía por su amor al saber, Emmy Noether nunca alcanzó en su propio país el estatus académico que le correspondía, a pesar de los esfuerzos de Hilbert, el gran matemático de Gotinga.

Pudo ejercer la docencia gracias a la baja de un profesor llamado a filas durante la Primera Guerra Mundial. Durante quince años dio clase a diario, preparó conferencias y supervisó tesis doctorales, todo ello sin que se le reconociera cargo oficial alguno. El propio ministro de Educación de Prusia comunicó expresamente en 1917 su intención de que nunca le fuera permitido enseñar en una universidad alemana y hasta 1922, tras el advenimiento de la República, sus cursos tuvieron que ser anunciados de manera semiclandestina, siempre bajo el nombre de otro profesor y siendo mencionada tan sólo marginalmente, como ayudante. Necesitó dos décadas de actividad docente ininterrumpida para que se le reconociera la titularidad de sus clases. Hasta los 41 años no recibió ningún tipo de remuneración, pasando a cobrar el peor sueldo de su facultad. Nunca tuvo derecho a una pensión. Nunca fue catedrática. El cenit de su carrera académica fue el puesto de *privatdozent*, el más bajo del escalafón, mientras muchos de sus alumnos, por no mencionar una infinidad de matemáticos de inferior rango, ocupaban plazas fijas y cátedras.

Ni siquiera logró mantener el equilibrio en esta precaria situación. En abril de 1933 las leyes nazis irrumpieron en las aulas de Gotinga. El matemático Edward J. McShane nunca olvidaría su reacción:

> Se le prohibió enseñar en la universidad, así que ella invitaba a los estudiantes a casa, donde daba clase. Nadie la pagaba por ello y además se ponía en peligro al cometer un delito: imponer sus matemáticas judías a estudiantes arios.

Estos fueron los obstáculos visibles, documentados en los archivos, en los epistolarios y aun en las mismas leyes alemanas, a los que tuvo que hacer frente Noether.

Querría terminar con una reflexión acerca de otra traba en cierto modo sutil, más subterránea, pero quizá determinante.

Hoy en día muchos padres se llevarían las manos a la cabeza en caso de descubrir que sus hijos desean ser cantantes, actores, pintores, *drag queens*, vagabundos o drogadictos a tiempo completo, pero incluso frente a la más abierta hostilidad un joven puede apuntalar su rebeldía sobre otras personas que, con nombre y apellidos, le precedieron. Antes de embarcarse en una vida de incertidumbre, puede trazarse un mapa de referencias, imitar, fijar con chinchetas los símbolos, el póster en su dormitorio con el que identificarse.

Cuando Emmy Noether decidió que quería ser matemática no halló en su entorno modelo femenino alguno en el que apoyarse. Tuvo que improvisar su camino enfrentándose con una manera mayoritaria de entender la sociedad. Si la tildaban de masculina, en realidad gran parte de la culpa era de la propia cultura de su tiempo, puesto que el único espejo donde acertó con el reflejo de su inspiración fue masculino.

¿Cómo vivió el desgarro de saber que sus certezas, que precisaban de cierta colaboración por parte de los demás para materializarse, eran compartidas por una minoría? ¿Y que incluso para esa minoría suponía una rara avis, una extravagancia, casi un accidente de la naturaleza?

La respuesta quizá se halle en la carta al editor que apareció publicada en el *New York Times* el 5 de mayo de 1935, escrita por Einstein tres semanas después de que Emmy Noether falleciera en su exilio americano, de las complicaciones de una operación quirúrgica:

> Bajo los esfuerzos dirigidos a la obtención de bienes materiales, yace con demasiada frecuencia la ilusión de que este propósito es el más importante y deseable que cabe alcanzar; por fortuna, existe una minoría de personas que descubren desde una edad muy temprana que la más hermosa y satisfactoria experiencia al alcance del hombre no deriva del mundo de las apariencias, sino que se encuentra íntimamente ligada al desarrollo de los propios sentimientos, de su trabajo y su inteligencia. Los verdaderos artistas, científicos y pensadores han sido siempre personas de esta especie. Por anónimamente que discurran sus vidas, los frutos de sus esfuerzos son la contribución más valiosa que cada generación puede entregar a la siguiente.

Pienso que el abatimiento pudo alcanzarla a veces, pero nunca la rindió porque su actitud no nacía de un mero acto de rebeldía. O quizá porque procedía del mayor acto de rebeldía que cabe imaginar: aquel que lo es de forma inconsciente, que no se alimenta de contrastes y se limita a enunciarse a sí mismo, sean cuales sean las consecuencias.

EL TEOREMA DE NOETHER: COM EL VA DESCOBRIR I COM ES FA SERVIR

FRANCESC MARQUÈS

Resum. Emmy Noether va demostrar el 1918 dos importants teoremes, emprats des de llavors pels físics en multitud de diferents branques. Aquesta va ser una de poques, però molt fructuoses incursions d'Emmy Noether a la física. De fet, ho va fer a petició de David Hilbert, que va demanar la seva ajuda per resoldre el problema de la conservació de l'energia en relativitat general, problema que quedà resolt amb els seus dos teoremes.

Els teoremes de Noether (i els seus inversos) estableixen una profunda relació entre invariància per un grup de simetries i lleis de conservació. Encara que es parla molt sovint del *Teorema de Noether generalitzat*, pràcticament totes les versions que s'han fet servir estaven ja incloses en el treball de 1918. Els dos teoremes s'il·lustraran amb exemples procedents de la mecànica clàssica, així com de les teories de camps, i es comentarà com els teoremes de Noether permeteren resoldre el problema de la conservació de l'energia en relativitat general.

1. Introducció

La vida d'Emmy Noether es descriu amb tot luxe de detalls a altres treballs d'aquest volum, i aquí comentarem únicament els esdeveniments al voltant del descobriment dels teoremes de Noether, molt ben descrits als treballs de Nina Byers [By1, By2].

L'any 1915 David Hilbert i Felix Klein conviden Emmy Noether a formar part de l'equip de matemàtics de la Universitat de Göttingen. Hermann Weyl [Wey] diu que la convidaren per tal que els ajudés amb el seu coneixement de la teoria dels invariants. Tenia trenta tres anys, i

Treball parcialment suportat per l'AGAUR, SGR-00024.

continuava a Erlangen, on es va doctorar, encara que havia passat una temporada a Göttingen com a estudiant.

El juny i juliol de 1915, poc després de l'arribada de Noether a Göttingen, Albert Einstein va donar un seminari en sis lliçons sobre la teoria general de la relativitat, que encara no tenia completament acabada. Però les idees bàsiques eren ja prou clares, i l'audiència les va trobar molt convincents. El mateix Einstein va dir [Pai]:

> Estic molt satisfet d'haver aconseguit convèncer completament a Hilbert i Klein.

Einstein treballava en la generalització de la seva teoria de la relativitat especial des de 1905, per tal d'incloure-hi el principi d'equivalència entre massa inercial i gravitatòria. Uns mesos després dels seminaris a Göttingen, el novembre de 1915, Einstein completà la teoria i envià a publicar el famós article amb la teoria de la relativitat general [Ein]. Curiosament, el mateix mes Hilbert envià a publicar un article [Hil] on obtenia les mateixes equacions de la relativitat general a partir d'un principi variacional; els dos havien obtingut les equacions del camp pràcticament al mateix temps.

Arran dels seminaris d'Einstein i altres seminaris organitzats per Hilbert sobre relativitat general, Emmy Noether es posà a estudiar relativitat, i a treballar en els invariants diferencials d'Einstein. A finals de 1915, obté els seus dos teoremes sobre lleis de conservació i simetries. Els manuscrits son de gran ajut per a Klein, Hilbert i Einstein, i així ho reconeixen en els seus escrits. Per exemple, Einstein, en una carta a Hilbert, deia [Kim]:

> Ahir vaig rebre un escrit molt interessant de la senyora Noether sobre formes invariants. Estic impressionat de que es pugui abordar aquest problema des d'un punt de vista tan general. No li hauria fet cap mal a la vella guàrdia de Göttingen aprendre algunes coses d'ella.

Encara que la teoria de la relativitat general fou completada el 1915, quedaven problemes per resoldre. Un d'ells, el principi de la conservació local de l'energia, era particularment molest. A diferència de les teories clàssiques de camps (gravitació Newtoniana, electromagnetisme, etc.), en la relativitat general l'energia no es conserva localment. Hilbert sospitava que en lloc de teoremes propis de conservació de l'energia, en

relativitat general hi hauria 'teoremes impropis' de conservació. Aquesta conjectura va ser clarificada, quantificada i demostrada per Emmy Noether en els seus dos teoremes, en particular el segon.

Aquets resultats sobre invariants i simetries, obtinguts a finals de 1915, no foren publicats fins el 1918 [No1, No2], als Proceedings de la Real Societat de Ciències de Göttingen. I de fet foren presentats per Felix Klein, ja que les dones no podien ser membres de la Real Societat. Encara que Emmy Noether no tornà a treballar en física, era molt conscient de la importància dels seus descobriments, i de fet va escollir aquest treball (juntament amb un treball fonamental en àlgebra) per la seva tesi d'habilitació. La seva habilitació també mostra una llarga història de discriminació de la dona. A pesar dels esforços de Hilbert i Klein per el seu reconeixement i habilitació a Göttingen, això no va ser possible fins acabada la primera guerra mundial, i només parcialment, ja que se li permeté ensenyar a la Universitat, però sense remuneració!

Els teoremes de Noether redueixen la recerca de lleis de conservació i regles de selecció a l'estudi sistemàtic de les simetries del Lagrangià del problema; i inversament, a partir de l'observació de lleis de conservació, es poden descobrir noves simetries del Lagrangià. Els teoremes de Noether foren ignorats a la literatura en física durant els propers quaranta anys. Assenyalarem dos fets que ens donen una possible explicació. En primer lloc, el descobriment de la desintegració del neutró (desintegració beta) el 1914 va posar en qüestió el principi de conservació de l'energia. Encara que Pauli postulà l'existència del neutrino el 1927 per restaurar la conservació de l'energia, no fou fins el 1956 que el neutrino fou finalment detectat directament, quedant així restablert del tot el principi de conservació de l'energia. Un altre factor influent va ser el predomini de les formulacions Hamiltonianes en mecànica quàntica i teories de camps; i no fou fins els anys 50 del segle passat que les formulacions Lagrangianas tornaren a predominar, i els teoremes de Noether començaren a ser citats. També podem suggerir com a possible factor la resistència, fins ben acabada la segona guerra mundial, a atribuir a una dona resultats tan fonamentals.

2. Sistemes amb un nombre finit de graus de llibertat

Els teoremes de Noether s'apliquen tant a sistemes dinàmics discrets com continus que derivin d'un Lagrangià, i a grups de simetria continus (grups de Lie) de dimensió finita o infinita. Començarem amb el cas més senzill, el dels sistemes dinàmics discrets amb un nombre finit de graus de llibertat, i grups de Lie de dimensió finita, per introduir les idees fonamentals de manera senzilla i amb exemples familiars.

Principis variacionals. Considerem un sistema dinàmic governat per un principi variacional: les òrbites són extremals d'un funcional anomenat acció. Suposem un sistema mecànic amb un nombre finit de graus de llibertat $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, i sigui

$$I = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \tag{1}$$

l'acció i $\mathcal{L}$ el Lagrangià, on hem fet servir $\dot{q} = dq/dt$ per simplificar l'escriptura. Si $q(t)$ és extremal per a I, llavors $q \to q + \delta q$ satisfà $\delta I = 0$, i obtenim les equacions d'Euler-Lagrange:

$$\psi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) = 0, \tag{2}$$

que son les equacions diferencials (equacions del moviment) del sistema dinàmic considerat.

Per exemple, considerem dues partícules m_1 i m_2, amb vectors de posició $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$, sotmeses a un potencial $V = V(r)$, on $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Llavors

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 - V(r), \tag{3}$$

i les equacions del moviment són

$$m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 = -m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 = -V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \tag{4}$$

Direm que una transformació $q'(q,t)$, $t'(q,t)$ és una transformació de simetria del sistema dinàmic governat per el principi variacional (1), si

les equacions d'Euler-Lagrange per a $(q', \dot{q}', t')$ són invariants (funcionalment idèntiques). El Lagrangià transformat és

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t') = \mathcal{L}\big(q(q', t'), \dot{q}(q', \dot{q}', t'), t(q', t')\big)\frac{dt}{dt'}. \tag{5}$$

Com que dos Lagrangians donen les mateixes equacions si i només si difereixen en una derivada total [Lev], la transformació serà de simetria si existeix una funció $\Omega(q, t)$ tal que $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + d\Omega/dt$. Un càlcul senzill, per una transformació infinitesimal de simetria $q' = q + \delta q$, $t' = t + \delta t$ ens dóna

$$\frac{dQ}{dt} = -\psi \cdot (\delta q - \dot{q}\delta t) \tag{6}$$

on hem posat

$$Q = \mathcal{L}\delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(\delta q - \dot{q}\delta t) + \delta\Omega. \tag{7}$$

Per tant, Q es conserva sobre les trajectòries solució ($\psi = 0$). De fet, en els teoremes d'Emmy Noether, es considerava sols el cas $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$; la inclusió del terme $\delta\Omega$ és una de les poques extensions posteriors dels teoremes de Noether, i són molt pocs els cassos d'interés on $\delta\Omega \neq 0$. D'altre banda, la modificació de la demostració del Teorema deguda al terme $\delta\Omega$ és mínima.

Si el sistema dinàmic és invariant per un grup de Lie n-dimensional $\mathcal{G}_n$, per cada un dels n generadors infinitesimals $(\delta q_n, \delta t_n)$ podem construir la corresponent quantitat conservada.

Exemple: el grup de Galileu. La mecànica Newtoniana és invariant pel grup de Galileu; una transformació infinitesimal genèrica d'aquest grup s'escriu

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{r} + \mathbf{c}t, \qquad t' = t + \tau, \tag{8}$$

on $\mathbf{r}$ és la posició de qualsevol de les partícules del sistema, i $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ i τ són els generadors infinitesimals de les translacions, rotacions, canvis de sistema de referència amb velocitat constant (boost) i traslacions temporals, respectivament. Per l'exemple de dues partícules i una força central discutit abans (3), les equacions del moviment són invariants, pero el Lagrangià no ho és ($\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$), i obtenim que

$$\delta\Omega = -\mathbf{c}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2). \tag{9}$$

En aquest cas, tenim $\delta\Omega \neq 0$ únicament pels boosts. Les quantitats conservades associades a cada generador infinitesimal són:

Moment lineal:	$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$
Moment angular:	$\mathbf{L} = m_1\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2$
Moviment centre de masses:	$\mathbf{R}_0 = \dfrac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} - \dfrac{\mathbf{P}}{M}t$
Energia:	$E = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 + V(r)$

on hem posat $M = m_1 + m_2$. Com que el centre de masses es mou amb velocitat constant, el podem eliminar amb un canvi apropiat de sistema de referència i de coordenades; si posem $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$ i $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ arribem al Lagrangià pel moviment relatiu,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V(r), \tag{10}$$

on $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = d\mathbf{r}/dt$.

El teorema de Noether invers. Fins ara hem considerat transformacions puntuals, $q'(q,t)$, $t'(q,t)$. Per aquestes transformacions, el Teorema de Noether no admet invers: hi ha quantitats conservades que no deriven d'una transformació puntual de simetria. L'article de E. Noether treballa des del primer moment amb transformacions més generals, $q'(q,\dot{q},t)$, $t'(q,\dot{q},t)$. Per aquestes transformacions, existeix sempre invers: a tota magnitut conservada li correspon una transformació de simetria, com va demostrar E. Noether a l'article; coneguts Q i $\mathcal{L}$, (7) proporciona δt, δq i $\delta\Omega$. Com a exemples d'aquestes transformacions, tornem al cas de dues partícules amb una força central entre elles, i considerem directament el Lagrangià pel moviment relatiu (10).

Hi ha dos potencials centrals que donen lloc a òrbites tancades: el potencial gravitatori $V(r) = -k/r$ i l'oscil·lador harmònic $V(r) = kr^2$. En els dos cassos hi ha quantitats conservades addicionals que no deriven d'una transformació puntual:

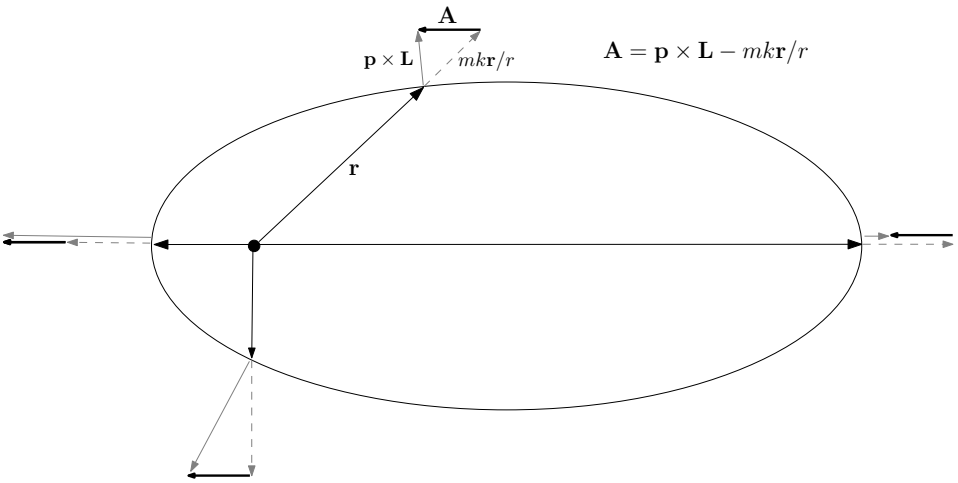
Potencial	**Nom**	**Quantitat conservada**
$V(r) = -k/r$	Vector de Runge-Lenz	$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\mathbf{r}/r$
$V(r) = \frac{1}{2}kr^2$	Tensor energia	$E_{i,j} = \frac{1}{2}mv_iv_j + \frac{1}{2}kr_ir_j$

on $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ i $\mathbf{L} = \mathbf{p}\times\mathbf{r}$ denoten els moments lineal i angular de la massa puntual m. Les transformacions no puntuals s'anomenen *simetries dinàmiques*, mentre que les puntuals s'anomenen *simetries geomètriques*. Les simetries dinàmiques son sovint de difícil visualització. Examinem els dos cassos esmentats.

Problema de Kepler: el vector de Runge-Lenz. Les òrbites del problema de Kepler son còniques (el·lipses si són acotades), amb el centre de masses a un focus de l'el·lipse. La direcció del vector de Runge-Lenz,

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\mathbf{r}/r,$$

és la del semieix major, tal com indica la figura.



La simetria dinàmica que genera el vector de Runge-Lenz és:

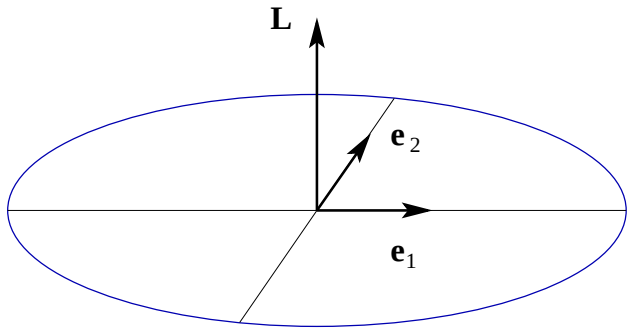
$$\delta r_i = \epsilon_j(2v_i r_j - r_i v_j - \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}\delta_{i,j}), \quad j = 1, 2, 3 \tag{11}$$

Com que hi ha tres simetries dinàmiques, es conserven tres quantitats, les components del vector de Runge-Lenz. Aquesta quantitat conservada la va descobrir Jakob Hermann (~ 1710), parent llunyà d'Euler i deixeble de Jacob Bernouilli. Aquest vector el van redescobrir posteriorment Laplace, Hamilton i Gibbs. Runge i Lenz el popularitzaren, i a partir del treball de Pauli sobre la mecànica quàntica de l'àtom d'hidrogen, va ser conegut com vector de Runge-Lenz.

Oscil·lador harmònic: tensor energia. Les òrbites de l'oscil·lador harmònic son el·lipses. En aquest cas, la simetria dinàmica que genera el tensor energia $E_{i,j}$ és

$$\delta r_i = \epsilon_{j,k}(v_k \delta_{i,j} + v_j \delta_{i,k}), \quad j,k = 1,2,3. \tag{12}$$

$E_{i,j}$ és semidefinit positiu, i està íntimament lligat a les altres quantitats conservades i a la geometria de l'òrbita. La direcció pròpia nul·la correspòn al moment angular $\mathbf{L}$, i les dues direccions pròpies positives $\mathbf{e}_i$ corresponen als semieixos de l'òrbita. La traça de $E_{i,j}$ és l'energia mecànica de l'oscil.lador.



3. El primer teorema de Noether

Una vegada vistes les idees bàsiques de la teoria en el cas de sistemes discrets, podem passar a descriure el primer teorema de Noether tal com apareix a [No2]. El teorema s'aplica a sistemes dinàmics continus, és a dir, a sistemes dinàmics descrits per camps $u_i(t, \mathbf{r})$ que depenen de les coordenades espacials i el temps. S'aplica a sistemes dinàmics derivats d'un principi de mínima acció, amb un Lagrangià que conté derivades dels camps fins a ordre k,

$$I = \int \mathcal{L}\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) dx \tag{13}$$

on $x \in \mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\mu$, i μ és el nombre de camps. Les equacions d'Euler-Lagrange són EDP d'ordre $2k$:

$$\psi \equiv \sum_{j=0}^{k} (-1)^j D_x^j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x^j u)} \right) = 0, \quad \text{on} \tag{14}$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \ldots + \frac{\partial^{j+1} u}{\partial x^{j+1}} \frac{\partial}{\partial(\partial_x^j u)} + \ldots \tag{15}$$

on hem suprimit l'escriptura dels índexs per simplicitat. Per exemple, com que x té n components, D_x també té n components; així, la component i-èsima de $(\partial u/\partial x)\partial/\partial u$ és $\sum_{j=1}^{\mu}(\partial u_j/\partial x_i)\partial/\partial u_j$; i ψ té μ components, és a dir, tenim μ equacions diferencials per als μ camps u_j. La notació explícita de $\partial_x^j u$ és particularment pesada, i cal fer servir multiíndexs:

$$\partial_x^j u_\ell = \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n} u_\ell}{\partial^{j_1} x_1 \ldots \partial^{j_n} x_n}, \tag{16}$$

i $j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$ és un multiíndex. El conveni d'Einstein s'aplica tant a l'index ℓ com al multiíndex j de $\partial_x^j u$. El mateix es pot fer amb les derivades D_x^j. A l'expressió (14) el sumatori és sobre el multiíndex j, i s'extén a tots els multiíndexs fins ordre k; l'ordre del multiíndex j es defineix com $j_1 + \ldots + j_n$ i és l'ordre de la derivada parcial $\partial_x^j u$.

Considerem una transformació de variables independents i dependents,

$$\begin{aligned} y &= x + \delta x(x, u, \partial_x u, \ldots, \partial_x^j u, \ldots) \\ v(y) &= u(x) + \delta u(x, u, \partial_x u, \ldots, \partial_x^j u, \ldots). \end{aligned}$$

Quan calculem $\partial_y^j v$, ens apareixen derivades de u d'ordre més elevat que les que apareixen a $\mathcal{L}$, i per invertir la transformació i trobar x, u en funció de y, v ens trobem amb un sistema infinit d'equacions, per tots els ordres de $\partial_y^j v$. Aquest procés sols funciona si totes les funcions són analítiques, o bé per transformacions infinitesimals (en aquest cas, si suposem δx i δu d'ordre ϵ i menyspreem els termes d'ordre superior en ϵ, no necessitem derivades d'ordre més elevat que k). En el cas de grups de Lie, les transformacions finites es poden reconstruir a partir de les transformacions infinitesimals, i són analítiques, per tant tot funciona.

Si la transformació $(x,u)\to(y,v)$ és de simetria, és a dir si, les equacions d'Euler-Lagrange en les noves variables son idèntiques a les originals, es verifica:

$$D_x\Big\{\mathcal{L}\delta x+\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell-1}D_x^{\ell-1}\Big(\sum_{j=\ell}^{k}\binom{j}{\ell}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x^j u)}\bar{\delta}u^{j-1}\Big)+\delta\Omega\Big\}=-\psi\bar{\delta}u$$

$$\text{on}\quad \bar{\delta}u=\delta u-\frac{\partial u}{\partial x}\delta x,\quad \bar{\delta}u^j=D_x^j\bar{\delta}u,\quad \delta\Omega\Big(x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\dots,\frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\Big).$$

Donat un grup uniparamètric de transformacions ($\delta x=\epsilon X$, $\delta u=\epsilon U$, $\delta\Omega=\epsilon\Lambda$), i sobre les trajectòries del sistema ($\psi=0$), existeix una quantitat conservada; assumint que les variables independents $x=(t,\mathbf{r})$ son espai i temps, ens queda

$$(17)\quad D_x\mathcal{F}=0\ \Rightarrow\ \partial_t\mathcal{F}_0+\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\mathbf{F}}=0\ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}}\mathcal{F}_0dV+\int_{\partial\mathcal{D}}\overrightarrow{\mathbf{F}}\cdot\overrightarrow{dS}=0,$$

on hem hem posat

$$\mathcal{F}=\mathcal{L}\delta x+\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell-1}D_x^{\ell-1}\Big(\sum_{j=\ell}^{k}\binom{j}{\ell}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x^j u)}\bar{\delta}u^{j-1}\Big)$$

i on $\mathcal{D}$ és un domini d'integració arbitrari. La quantitat $Q=\int_{\mathcal{D}}\mathcal{F}_0dV$ es conserva localment: l'augment a $\mathcal{D}$ de Q és igual al flux de Q que entra per $\partial\mathcal{D}$, per qualsevol volum $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{F}$ decau prou ràpidament a l'infinit, llavors la *càrrega* total $Q_T=\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{F}_0dV$ és una quantitat conservada. [Gol] conté una descripció detallada del formalisme del primer teorema de Noether.

Si les equacions del camp són de segon ordre, com és molt habitual, llavors el *corrent de Noether* $\mathcal{F}$ s'escriu

$$(18)\qquad \mathcal{F}=\mathcal{L}\delta x+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x u)}(\delta u-\partial_x u\,\delta x)+\delta\Omega$$

L'única "millora" respecte del Teorema I de Noether del 1918 és la inclusió del terme $\delta\Omega$, en el cas de que el Lagrangià no sigui invariant però sí ho siguin les equacions d'Euler-Lagrange.

Hem vist doncs que un grup de Lie m-dimensional de simetries implica la conservació de m magnituts, una per cada un dels m generadors

infinitesimals del grup. Es verifica també el teorema invers, demostrat a l'article de 1918: si les equacions d'Euler-Lagrange admeten m quantitats conservades independents, llavors existeix un grup de Lie m-dimensional que deixa el problema invariant. No existeix l'equivalent del Teorema de Noether per al cas que les equacions d'Euler-Lagrange admetin simetries discretes (paritat, inversió temporal...).

Presentem a continuació alguns exemples d'aplicació del teorema de Noether a les teories de camps.

El camp electromagnètic. Les equacions del camp electromagnètic en el buit s'obtenen del Lagrangià

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{19}$$

on $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ és el 4-vector potencial: $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla\Phi$ és el camp elèctric i $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ és el camp magnètic. Φ es redueix al potencial electrostàtic si el problema és estacionari, i $\mathbf{A}$ és el potencial vector del camp magnètic. Les equacions del camp són $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, o equivalentment $\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = 0$, que és l'equació d'ones per A_ν. Els índexs grecs (μ, ν, ...) varien de 0 a 3, i fem servir el conveni d'Einstein, que suposa que si hi ha un índex repetit en una equació, es suma sobre tots els seus valors.

El Lagrangià és invariant per transformacions de Poincaré,

$$y^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu, \qquad B^\mu = A^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu A^\nu, \qquad \epsilon_{\mu,\nu} = -\epsilon_{\nu,\mu}. \tag{20}$$

Aquí suposem que els índexs pugen i baixen amb la mètrica de Minkowski $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. El teorema I de Noether ens porta a la conservació dels tensors energia-impuls

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\Big(F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}\Big)$$

i moment angular $M^{\mu\nu\lambda} = T^{\mu\nu} x^\lambda - T^{\mu\lambda} x^\nu$ del camp electromagnètic:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu M^{\mu\nu\lambda} = 0. \tag{21}$$

Per exemple, la component T^{00} és la densitat d'energia del camp electromagnètic:

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \tag{22}$$

Per qualsevol teoria de camps invariant Poincaré, es poden construir anàlogament els tensors energia-impuls i moment angular.

Mecànica quàntica no relativista. L'equació d'Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x,t)\psi, \tag{23}$$

on ψ és la funció d'ona d'una partícula de massa m que es mou en el potencial $V(x,t)$, s'obté del Lagrangià

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi + \frac{i\hbar}{2}(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi) - V(x,t)\psi^*\psi, \tag{24}$$

on ψ^* és el complex conjugat de ψ. Aquest Lagrangià és invariant per un canvi de fase de la funció d'ona:

$$\psi \to e^{i\epsilon}\psi,\ \psi^* \to e^{-i\epsilon}\psi^*; \qquad \delta\psi = i\epsilon\psi,\ \delta\psi^* = -i\epsilon\psi^* \tag{25}$$

D'aquí s'obté immediatament per aplicació del Teorema I de Noether la conservació de la probabilitat

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0, \quad p = |\psi|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{m}\Im(\psi^*\nabla\psi), \tag{26}$$

on p és la densitat de probabilitat, $\mathbf{j}$ el corrent de probabilitat i $\Im$ indica la part imaginaria del nombre complex.

Hem tractat ψ i ψ^* com a variables independents per simplicitat; altrament, caldria escriure-ho tot en funció de les seves components real i imaginaria, $\psi = \psi_R + i\psi_I$, i al final retornar a ψ, ψ^*. El resultat és el mateix, però els càlculs més complicats.

Conservació de l'energia en mecànica clàssica i relativista. Un sistema dinàmic aïllat és invariant per un grup de Lie G_{10} de dimensió 10, amb 10 paràmetres corresponents a translacions en espai i temps (4 paràmetres), rotacions (3) i canvis de sistema de referència amb velocitat constant (3):

- El grup de Galileu en mecànica clàssica.
- El grup de Poincaré en relativitat restringida.

Si les equacions del sistema dinàmic deriven d'un principi variacional (un Lagrangià), llavors el teorema I de Noether implica l'existència de

10 quantitats conservades: l'energia, el moment lineal i angular, i la velocitat uniforme del centre de masses.

Per tant, el **principi de conservació de l'energia**, que la física considera vàlid en qualsevol cas i circumstancia, es dedueix directament pels sistemes esmentats del teorema I de Noether. Aquest principi de conservació de l'energia té un caràcter local, és a dir s'aplica a l'energia continguda en un volum arbitrari $\mathcal{D}$ tal com hem vist a (17).

Les equacions de la relativitat general, en canvi, admeten un grup d'invariància molt més gran: el grup de totes les transformacions de coordenades. Aquest grup de transformacions, en lloc de dependre d'un nombre finit de paràmetres (un grup de Lie en el sentit habitual) conté quatre *funcions* arbitràries. En aquest cas caldria parlar de grups de Lie de dimensió infinita, pels quals encara no existeix una teoria rigorosa completament desenvolupada. Per tractar aquets cassos Emmy Noether demostrà el seu segon teorema, com veurem a §4.

Teoria Quàntica de Camps. El mateix que hem fet per al camp electromagnètic i l'equació d'Schrödinger es pot fer per les diferents equacions dels camps que governen els diferents tipus de partícules: equació de Klein-Gordon per a partícules d'espín zero, equació de Dirac per a espín 1/2, equació de Proca per a espín un, equació de Rarita-Schwinger per a espín 3/2, etc [Mon]. Altres equacions dels camps, tipus Yang-Mills, inclouen simetries internes per descriure nombres quàntics addicionals com color, estranyesa i d'altres.

En totes elles, la invariància pel grup de Poincaré porta a la conservació del tensor d'energia-impuls i del moment angular. Altres simetries per grups de Lie de dimensió finita porten a altres conservacions (probabilitat, càrrega, etc.). Un paper especial juguen les anomenades *simetries de gauge*, que contenen funcions arbitràries; en aquest cassos cal aplicar el segon teorema de Noether.

En teoria quàntica de camps, els camps $\phi(x,t)$ es substitueixen per operadors a l'espai de Hilbert, i es postulen certes relacions de commutació entre ells [Sch]. Això les converteix en teories de moltes partícules: és el que s'anomena segona quantificació. Al fer això les quantitats conservades del Teorema de Noether es reinterpreten en termes del nombre de partícules.

Teories de camps clàssiques. Aquí just donarem algunes indicacions sense entrar en els detalls tècnics.

Elasticitat. Aquí les equacions deriven d'un principi variacional, i el Teorema de Noether és de gran utilitat. Les equacions són d'ordre superior a dos (típicament d'ordre quatre) i hi ha un nombre elevat de quantitats conservades [Fle].

Mecànica de fluids. Les celebrades equacions de Navier-Stokes (recordem que la *Clay Foundation* té establert un premi d'un milió de dòlars per la resolució d'alguns dels problemes matemàtics més difícils, i un d'ells és l'existència i unicitat de solucions d'aquestes equacions) són:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F}(x,t), \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{27}$$

on $\mathbf{v}(x,t)$ és el camp de velocitats del fluid, $p(x,t)$ la pressió i $\mathbf{F}(x,t)$ el camp de forces externes. Aquestes equacions son dissipatives, i no deriven d'un Lagrangià, per tant el Teorema de Noether no s'aplica. En el cas especial de les equacions d'Euler per a fluids no viscosos, en les quals s'ha eliminat la dissipació,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}(x,t), \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{28}$$

és possible amb grans dificultats formular un principi variacional i fer servir el Teorema de Noether [Naz].

Un exemple senzill. Donarem per acabar un exemple senzill on les simetries inclouen una dilatació. El procés de relaxació cap a una distribució de Maxwell ve donada per l'EDP no lineal

$$\partial_{xt} u + u^2 = 0, \quad u(x,t), \quad \text{on} \quad x,t,u \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

que deriva del Lagrangià

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} u_x u_t + \frac{1}{3} u^3. \tag{30}$$

$\mathcal{L}$ és invariant per les transformacions

$$x \to x + \epsilon_1 - \epsilon x, \quad t \to t + \epsilon_2 + \epsilon t, \quad u \to u \tag{31}$$

que corresponen a translacions espacials i temporals (ϵ_1, ϵ_2) i a una dilatació temporal i contracció espaial ϵ. Aquestes transformacions donen lloc a tres lleis de conservació:

$$\begin{array}{ll} \text{Traslació espaial:} & \partial_t\big(\frac{1}{2}u_x^2\big) + \partial_x\big(\frac{1}{3}u^3\big) = 0 \\ \text{Traslació temporal:} & \partial_t\big(\frac{1}{3}u^3\big) + \partial_x\big(\frac{1}{2}u_t^2\big) = 0 \\ \text{Dilatació:} & \partial_t\big(\frac{1}{3}tu^3 - \frac{1}{2}xu_x^2\big) + \partial_x\big(\frac{1}{2}tu_t^2 - \frac{1}{3}xu^3\big) = 0 \end{array}$$

4. El segon teorema de Noether

Grups de Lie de dimensió infinita. Hi ha simetries que en lloc de dependre d'un nombre finit (o numerable) de paràmetres, contenen *funcions* arbitràries. Llavors parlem de grups de Lie de dimensió infinita. En la notació de Emmy Noether, escriurem:

$\mathcal{G}_m$**:** grups de Lie de dimensió finita m; les transformacions contenen m paràmetres arbitraris.

$\mathcal{G}_{\infty,m}$**:** grups de Lie de dimensió infinita no numerable; les transformacions contenen m funcions arbitràries.

Les *transformacions de gauge*, típiques de la teoria de camps, son d'aquesta mena. Per exemple, pel camp electromagnètic, si fem

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\phi, \quad \text{deixa invariant} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \text{i} \quad \mathcal{L}, \tag{32}$$

per qualsevol funció $\phi(x,t)$. En aquest cas, tenim invariància per $\mathcal{G}_{\infty,1}$.

El teorema II de Noether. El teorema s'aplica a sistemes dinàmics continus derivats d'un principi de mínima acció, (13), però ara les equacions del moviment són invariants per un grup de Lie de dimensió infinita, $\mathcal{G}_{\infty,m}$. Encara és vàlida l'expressió obtinguda per grups de Lie de dimensió finita a §4,

$$D_x\Big\{\mathcal{L}\delta x + \sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell-1}D_x^{\ell-1}\Big(\sum_{j=\ell}^{k}\binom{j}{\ell}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x^j u)}\bar{\delta}u^{j-1}\Big) + \delta\Omega\Big\} = -\psi\bar{\delta}u,$$

per una transformació de simetria $(x,u) \to (x+\delta x, u+\delta u)$ on δx, δu contenen una funció arbitrària p. Però ara, com que p no és constant i

no commuta amb D_x, no surt factor comú al primer membre, i no podem ja obtenir quantitats conservades sobre les trajectòries del sistema. Les identitats $fD_xp = -pD_xf + D_x(fp)$, $fD_x^jp = (-1)^j pD_x^jf + D_x(\ldots)$ permeten manipular el terme $\psi\bar{\delta}u$ i obtenir

$$\big(a_0\psi + a_1D_x\psi + \ldots + a_jD_x^j\psi + \ldots\big)p = D_x(B) \tag{33}$$

on B és lineal en p i les seves derivades. Integrant sobre recintes arbitraris, arribem a

$$a_0\psi + a_1D_x\psi + \ldots + a_jD_x^j\psi + \ldots = 0, \tag{34}$$

expressió que el Lagrangià $\mathcal{L}$ ha de satisfer idènticament per admetre una transformació de simetria amb una funció arbitrària. Per $\mathcal{G}_{\infty,m}$ obtenim m expressions d'aquest tipus; però ara aquestes expressions s'anul·len idènticament sobre les trajectòries (definides per $\psi = 0$). Noether les anomena expressions *impròpies*. Les quantitats conservades són no trivials (*pròpies*) sols per $\mathcal{G}_m$, i de fet sols quan $\mathcal{G}_m \not\subset \mathcal{G}_{\infty,m}$, ja que d'un grup de Lie infinit dimensional sempre podem extreure subgrups de Lie de dimensió finita (substituint les funcions arbitràries per constants), però aquest procediment en aquest cas no proporcionarà quantitats conservades, sinó identitats.

Exemple: transformació de gauge del camp electromagnètic. Hem vist abans que el Lagrangià del camp electromagnètic

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \qquad \text{on} \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{35}$$

és invariant per les transformacions de gauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\phi$. El teorema II de Noether ens porta a

$$\partial^2_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\phi = D_\mu\{(\partial_\mu F^{\mu\nu})\phi - F^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\} \tag{36}$$

L'equació que ens dóna el teorema II de Noether és $\partial^2_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$, que és idènticament nul·la degut al caràcter antisimètric de $F^{\mu\nu}$. Si posem ϕ constant obtenim un grup uniparamètric de transformacions, i l'aplicació del Teorema I de Noether ens porta a la mateixa equació. L'equació obtinguda en aquest cas és l'anul·lació de la divergència $\partial_\mu F^{\mu\nu}$, que són simplement les equacions d'Euler-Lagrange del camp electromagnètic,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{37}$$

Per tant, les expressions obtingudes són idènticament nul·les (impròpies), i no obtenim cap quantitat conservada.

Relativitat General. Les teories de camps que hem vist fins ara descriuen la dinàmica d'un camp en un espai-temps donat immutable: l'espai temps euclidià per la mecànica clàssica o l'espai de Minkowsky per la relativitat restringida.

A la relativitat general, l'estructura de l'espai temps ve condicionada per la matèria present. L'estructura de l'espai temps ve descrita pel tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, $R^{\lambda\mu\rho\nu}$, que depèn únicament del tensor mètric $g_{\mu\nu}$ i les seves derivades, mentre que la matèria es descriu amb el tensor d'energia-impuls $T^{\mu\nu}$, que ja hem trobat abans i depèn del Lagrangià que descriu la interacció de la matèria. La connexió la donen les equacions d'Einstein de la relativitat general,

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \chi T^{\mu\nu}, \qquad \chi = \frac{8\pi G}{c^4} \tag{38}$$

on $R^{\mu\nu} = R_\lambda{}^{\mu\lambda\nu}$ és el tensor de Ricci, $R = R^\mu{}_\mu$ l'escalar de curvatura, G la constant gravitatòria i c la velocitat de la llum. Aquestes són les equacions enviades a publicar per Einstein el novembre de 1915 [Ein] com ja hem comentat a la introducció. Aquestes equacions son les mateixes en qualsevol sistema de coordenades, i per tant son invariants pel grup de transformacions de coordenades, $\mathcal{G}_{\infty,4}$, que conté quatre funcions arbitràries.

Implicacions del Teorema II de Noether. El mateix novembre de 1915 Hilbert va enviar un article [Hil] on obtenia les mateixes equacions a partir d'un problema variacional,

$$I = \int (\mathcal{L} + \chi^{-1}R)\sqrt{-g}d^4x \tag{39}$$

on $\mathcal{L}$ és el Lagrangià de la matèria i g és el determinant del tensor mètric. Per exemple, si introduïm el camp electromagnètic,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad \text{i} \quad T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\Big(F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\Big) \tag{40}$$

obtindríem les equacions d'Einstein-Maxwell.

Tenim així tots els ingredients per aplicar el Teorema II de Noether; com que el grup de transformacions és de dimensió infinita, no existeixen quantitats conservades, en el sentit que ens donin un corrent localment conservat ($\partial_\mu \mathcal{F}^\mu = 0$). El que s'obté de l'aplicació del Teorema II de Noether són les identitats de Bianchi del tensor de curvatura,

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma;\rho} + R^\mu{}_{\nu\sigma\rho;\lambda} + R^\mu{}_{\nu\rho\lambda;\sigma} = 0, \tag{41}$$

on hem introduït la notació $_{;\mu}$ per indicar la derivada covariant associada a la mètrica $g_{\mu\nu}$.

'Conservació de l'energia' en relativitat general. Les identitats de Bianchi impliquen que el tensor de Ricci satisfà

$$\big(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\big)_{;\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \tag{42}$$

on hem fet servir les equacions d'Einstein. L'última expressió és el que es considera el principi de conservació de l'energia en relativitat general; però ara, les derivades parcials que apareixen al Teorema I de Noether (17) resulten substituïdes per derivades covariants, amb termes addicionals dependents de l'estructura de l'espai temps. En conseqüència, no podem deduir-ne principis locals de conservació com a (17). Això és el que va clarificar Emmy Noether en la secció §6 i última del seu article del 1918 [No2], titulat *A Hilbertian Assertion*. Molts anàlisis posteriors han permès clarificar aquest assumpte totalment. Així, esmentarem que aquest principi de conservació *no és un principi local*, ja que qualsevol càlcul local de conservació resulta dependent del sistema de coordenades utilitzat. En canvi, *sí és un principi global*: Donada una hipersuperfície tipus espai que sigui asimptòticament plana, llavors es pot formular un principi de conservació de l'energia global, que és Poincaré invariant lluny de les fonts del camp. El mètode de construcció del corrent conservat ja fou apuntat a l'article d'Emmy Noether del 1918.

El problema a relativitat general és que l'energia es transfereix entre els camps que descriuen la matèria i l'estructura de l'espai temps, i aquesta transferència no té un caràcter local.

5. Desenvolupaments posteriors dels teoremes de Noether

En els 90 anys passats des de la seva formulació s'han produït molts desenvolupaments a partir del Teoremes de Noether, consistents essencialment en transportar aquets resultats a altres formulacions. Així podem esmentar:

- Formulació dels Teoremes de Noether en formalisme Hamiltonià i la seva relació amb les transformacions canòniques ([G-S] és una referència clàssica; per una formulació breu i molt assequible, cf. [Tak], Theorem 2.17).
- Formulació del Teorema de Noether en fibrats sobre varietats diferenciables ([Kru]).
- Extensió de la teoria a Lagrangians singulars i a sistemes amb lligadures [Lec].
- Construcció de tècniques basades en els Teoremes de Noether per EDP que no deriven d'un principi variacional (cf. [NMM]).

Referències

[By1] N. Byers, *The Life and times of Emmy Noether: Contributions of Emmy Noether to particle physics*, UCLA-94-TEP-42, e-Print: `hep-th/9411110, 1994`.

[By2] N. Byers, *E. Noether's discovery of the deep connection between symmetries and conservation laws*, UCLA-98-TEP-20A, e-Print: `physics/9807044, 1998`.

[Ein] A. Einstein, *Sitzungsberichte*, Preussische Akademie der Wissenschaften, p. 844, 1915.

[Fle] D. C. Fletcher, *Conservation laws in linear elastodynamics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 60(4), 329-353, 1976.

[Fra] T. Frankel, *The Geometry of Physics—An Introduction*. Cambrigde University Press, 1998.

[Gol] H. Goldstein, Ch. Poole, J. Safko: *Classical Mechanics* (3rd edition). Pearson, 2002.

[G-S] H. Goldsmith, S. Sternberg, *The Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variations*. Ann. de l'Institut Fourier, tome 23, n°1 (1973), p. 203-267.

[Hil] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik*, Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse, S. 395-407, 1915.

[Kim] Clark Kimberling in *Emmy Noether, A Tribute to Her Life and Work*; James W. Brewer and Martha K. Smith, ed.; Marcel Dekker, Inc.

[Kru] D. Krupka, *Some geometric aspects of variational problems in fibred manifolds*. Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Purk. Brunensis, Physica 14, Brno (Czechoslovakia), 1973.

[Lec] M. Leclerc, *Noether's theorem, the stress-energy tensor and Hamiltonian constraints*, `arXiv:gr-qc/0608096v4`.

[Lev] J. M. Lévy-Leblond *Conservation Laws for Gauge-Variant Lagrangians in Classical Mechanics*. American Journal of Physics, **39**, 502-506, 1971.

[Naz] R. Naz, F.M. Mahomed, D.P. Mason, *Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics*, Applied Mathematics and Computation, 205, 212-230, 2008.

[No1] E. Noether, *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke*. Nachr. d. König Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, pp. 37-44, 1918.

[No2] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. d. König Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, pp. 235-257, 1918. Per una traducció a l'anglès, vegeu `arXiv:physics/0503066v1 [physics.hist-ph]`.

[NMM] R. Naz, F.M. Mahomed, D.P. Mason: *Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics*. Applied Mathematics and Computation **205** (2008), 212-230.

[Mon] M. Montesinos, E. Flores, *Symmetric energy-momentum tensor in Maxwell, Yang-Mills, and Proca theories obtained using only Noether's theorem*, `arXiv:hep-th/0602190v1`.

[Pai] A. Pais, *Subtle is the Lord*, Oxford University Press, 1982.

[Sch] L. I. Schiff, *Quantum mechanics*. McGraw-Hill, 1968.

[Tak] L. A. Takhtajan, *Quantum Mechanics for Mathematicians*. Graduate Studies in Mathematics, **95**. American Mathematical Society, 2008.

[Wey] H. Weyl, Scripta Mathematica III. 3 201-220, 1935; està traduït a l'anglès a [Pai].

EMMY NOETHER I L'ÀLGEBRA COMMUTATIVA

SANTIAGO ZARZUELA ARMENGOU

Resum. Emmy Noether representa un punt d'inflexió fonamental en el desenvolupament de l'Àlgebra Commutativa. En ella confluïxen, per una banda, algunes de les línies evolutives prèvies més importants d'aquesta branca de les Matemàtiques. Per altra, a partir del seu treball i, sobretot, de la influència de la seva manera de pensar i treballar les Matemàtiques, l'Àlgebra Commutativa va prendre la volada necessària per convertir-se en una àrea de recerca amb gran vitalitat.

En aquest treball revisarem aquesta evolució centrant-nos en el paper exercit per Emmy Noether en tot aquest procés, explicant alguns dels resultats per ella obtinguts.

1. Introducció

Emmy Noether
22 de març de 1882 (Erlangen)
14 d'abril de 1935 (Bryn Mawr)

El treball d'Emmy Noether en Àlgebra Commutativa constitueix un punt d'inflexió fonamental en l'evolució de l'Àlgebra Commutativa, fins al punt que sovint és esmentada com a una de les creadores de l'Àlgebra Commutativa moderna. Els motius per aquest reconeixement són diversos: la seva recerca en aquest camp és en part el resultat de la confluència d'algunes de les línies d'investigació prèvies més importants al voltant dels problemes que finalment haurien de configurar el camp de recerca de l'Àlgebra Commutativa moderna. També va obtenir alguns resultats que formen part dels fonaments de la matèria, d'aquells que s'expliquen als primers capítols de qualsevol introducció a l'Àlgebra Commutativa i que apareixen a la majoria dels manuals generals d'Àlgebra avançada. No obstant, la seva dedicació a aquesta matèria va ser relativament curta en el temps, amb un nombre de treballs limitat. En efecte, Hubert Flenner [7] cita, d'entre totes les publicacions d'Emmy Noether, exactament nou com els treballs que es poden considerar contribucions a l'Àlgebra Commutativa, concretament [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20], amb un primer treball publicat l'any 1920 i un darrer l'any 1927; i d'aquestes nou publicacions, les fonamentals són en realitat els dos treballs [14, 18], publicats respectivament els anys 1921 i 1924. A més, en certa manera també es podria afirmar que els resultats que va obtenir ja eren d'alguna forma coneguts per casos particulars, i també que molts dels conceptes que va utilitzar havien ja estat introduïts en versions restringides per autors anteriors. Val a dir que possiblement ella mateixa ho reconeix així, quan afirma sovint que *Das steht alles schon by Dedekind*: Richard Dedekind (1831-1916) va ser el matemàtic per qui va tenir una admiració més gran i de qui va publicar conjuntament amb Robert Fricke i Öystein Ore l'obra completa comentada [4] entre els anys 1930 i 1932.

Richard Dedekind

Així doncs, què fa que la figura d'Emmy Noether i l'Àlgebra Commutativa siguin considerades gairebé com a inseparables? Al meu parer, és la manera de pensar i treballar les Matemàtiques d'Emmy Noether el què ha impregnat profundament aquesta àrea de recerca, possiblement com a cap altra dels camps en què ella es va interessar. Tot aquell que en algun moment s'hagi apropat a l'Àlgebra Commutativa, pot reconèixer en el seu conegut comentari

> *Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objecten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind*[1]

un dels trets distintius de la metodologia de treball d'aquesta branca de les Matemàtiques. A banda, els estudiants i col·laboradors d'Emmy Noether van contribuir de forma decisiva a que el seu pensament fos ràpidament reconegut i assimilat arreu. Així, el text *Moderne Algebra* de Bartel L. Van der Waerden (1903-1996), que va revolucionar l'aprenentatge de l'Àlgebra des del moment de la seva primera publicació en alemany l'any 1930, conté en el seu segon volum i gairebé de forma literal el treball d'Emmy Noether en Àlgebra Commutativa. Val a dir que del llibre s'han anat publicant noves edicions i traduccions de forma successiva, la darrera l'any 1991 [25], i que la seva lectura avui en

[1]Totes les relacions entre nombres, funcions i operacions esdevenen clares, generalitzables i veritablement fructíferes només quan són aïllades dels seus objectes particulars i reduïdes a conceptes generals.

dia és encara ben fresca i aconsellable. A més, d'altres col·laboradors, com ara i especialment Wolfgang Krull (1899-1971), varen portar endavant un programa de recerca profund i ambiciós essencialment basat en l'enfocament donat per Emmy Noether a l'Àlgebra Commutativa, de gran repercussió en altres àrees com la Geometria Algebraica o la Teoria Algebraica de Nombres.

Wolfgang Krull i Bartel L. Van der Waerden

En aquest treball revisarem el paper fonamental que Emmy Noether va tenir en el desenvolupament de l'Àlgebra Commutativa, descrivint en primer lloc alguns dels antecedents directament relacionats amb el seu treball, concretament de la Teoria Algebraica de Nombres, la Geometria Algebraica i la Teoria d'Invariants. Posteriorment, explicarem amb un cert detall alguns dels resultats fonamentals que ella va provar en aquest camp, en particular el conegut Teorema de descomposició primària d'ideals. Finalment, veurem com alguns conceptes relacionats amb les idees que ella va introduir han estat objecte de recerca fins el moment actual. Concretament, veurem com les anomenades potències simbòliques d'un ideal tenen un paper fonamental en problemes com ara el 14 de Hilbert o el darrer Teorema de Fermat.

La revisió que fem en aquest treball de les contribucions d'Emmy Noether a l'Àlgebra Commutativa no pretén ser exhaustiva i es basa en un punt de vista personal. Tampoc busca descriure la influència que els seus treballs en aquest camp han tingut en altres àrees de les Matemàtiques, com ara especialment la Geometria Algebraica, a la que

està dedicat el treball de Raquel Mallavibarrena en aquest mateix volum. Val a dir que la bibliografia al voltant de la vida i obra d'Emmy Noether és extensa i són nombrosos els treballs que analitzen la seva influència en el desenvolupament de les Matemàtiques, i en concret de l'Àlgebra Commutativa. Així, d'entre altres, he tret un bon profit de llegir el treball ja esmentat de Hubert Flenner [7] o el de Pilar Carrasco [3]. També del capítol dedicat a l'Àlgebra Commutativa i la Teoria Algebraica de Nombres de Nicolas Bourbaki [1] i dels diferents articles continguts als llibres editats respectivament per Mina Teicher [24] i Bhama Srinivisan i Judith Sally [22]. La primera biografia completa d'Emmy Noether va ser publicada en alemany l'any 1970 per Auguste Dick i traduïda a l'anglès l'any 1981 [5]: té la virtut de que l'autora encara va poder entrevistar-se i obtenir testimoni directe de diversos col·laboradors i col·legues de la pròpia Emmy Noether. La recent biografia de David Blanco [2] és una aproximació completa i rigorosa, al mateix temps que literària, a la vida d'Emmy Noether i les seves circumstàncies. Per últim, i com passa sovint amb els grans matemàtics, la lectura directa dels treballs d'Emmy Noether és potser la millor forma d'aproximar-se a la seva obra. L'edició completa dels seus treballs va ser feta per Nathan Jacobson l'any 1983 [11].

El present treball és la versió escrita de la xerrada que l'autor va impartir el 18 de febrer de 2009 a la Jornada Noether que va tenir lloc a la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya. L'autor agraeix a la Comissió Noether per haver-lo convidat a donar a aquesta xerrada. També a la Dra. Teresa Cortadellas per les diverses lectures realitzades, tant de la xerrada con del treball, i pels seus comentaris, sempre valuosos i interessants.

2. Àlgebra Commutativa abans d'Emmy Noether

En aquesta secció descriurem a grans trets alguns dels resultats precedents directament relacionats amb el treball d'Emmy Noether en Àlgebra Commutativa, especialment els relacionats amb la Teoria Algebraica de Nombres, la Geometria Algebraica i la Teoria d'Invariants. La nostra pretensió és tan sols emmarcar adequadament el seu treball en aquesta àrea.

2.1. **Nombres algebraics.** El teorema fonamental de l'Aritmètica, demostrat per Euclides, afirma que donat qualsevol nombre natural $n \neq 0, 1$ es pot descompondre de forma única com a producte de nombres primers (o irreductibles), és a dir, de nombres que no es poden descompondre de forma no trivial com a producte d'altres nombres naturals:

$$n = p_1 \cdots p_r$$

Aquesta propietat s'estén a tots el nombres enters diferents d'1 i -1, encara que ara haurem d'entendre que la descomposició és única excepte producte per qualsevol de les dues unitats. Això és el que enunciem com que l'anell dels nombres enters és factorial.

Karl F. Gauss (1777-1855), en el seu estudi al 1832 dels residus biquadràtics, va observar que aquesta propietat també es verifica per altres conjunts de nombres. Concretament, va considerar el conjunt de nombres complexos de la forma

$$a + b\sqrt{-1}\,, a, b \in \mathbb{Z}\,,$$

els enters de Gauss, i va comprovar que tant la suma com el producte de nombres d'aquest tipus tornava a ser de la mateixa forma, i que verifiquen propietats similars a les del conjunt de nombres enters. A més, va provar que admeten una descomposició única (excepte producte per unitats: $1, -1, i, -i$ en aquest cas) com a producte d'altres enters de Gauss irreductibles. Per exemple, $2 + i, 2 - i$ són irreductibles i $5 = (2+i)(2-i)$; també, $1 - i$ és irreductible i $2 = i(1-i)^2$ (observem que 5 i 2 deixen de ser irreductibles en aquest conjunt). En definitiva, l'anell dels enters de Gauss és factorial. La teoria de divisibilitat en aquest conjunt de nombres és aleshores l'eina fonamental que Gauss utilitza en el seu estudi dels residus biquadràtics.

Leonhardt Euler i Karl F. Gauss

L'interès per saber quan conjunts de nombres complexos similars als enters de Gauss tenen les mateixes propietats que els nombres enters està estretament relacionada amb el darrer Teorema de Fermat. El cas és que Leonhard Euler (1707-1783) va donar una primera demostració errònia de la no existència de solucions enteres no trivials per a l'equació cúbica

$$x^3 + y^3 = z^3$$

basant-se (sense dir-ho explícitament) en el fet (*erroni*) de que el conjunt de nombres de la forma $a + b\sqrt{3}$, amb a i b enters, es comporta de *forma similar* al conjunt dels nombres enters. Però encara hi tenen un paper més important els conjunts d'enters ciclotòmics. Per a $n \geq 2$, sigui ξ una arrel primitiva n-èsima de la unitat, és a dir, una arrel tal que totes les altres arrels n-èsimes de la unitat són potències de ξ (per exemple, $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$). Podem aleshores considerar el conjunt de nombres de la forma

$$a_0 + a_1\xi + \cdots + a_{n-1}\xi^{n-1}\,, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$$

Aquest conjunt de nombres, anomenats enters ciclotòmics (d'odre n), té algunes propietas similars a les del conjunt dels enters: per exemple, si sumem o multipliquem dos enters ciclotòmics d'ordre n obtenim un enter ciclotòmic d'ordre n. Es podria pensar aleshores que també verifiquen la propietat de factorialitat. Si això fos cert per a tot primer n més gran que 2, aleshores s'en podria deduir el darrer Teorema de Fermat. De fet, això és el que Gabriel Lamé (1795-1870) va donar per bo

en la demostració que va presentar a la Acadèmia de Paris el 1847. Joseph Liouville (1809-1882), que hi era present, va posar en dubte el fet de que els conjunts de nombres ciclotòmics verifiquessin la factorialitat, encara que no va poder donar un contraexemple. No obstant, tant Lamé com altres matemàtics francesos (Augustin L. Cauchy (1789-1857) entre ells) es van esforçar en provar- ho fins que, poc temps després, el mateix Liouville va anunciar que Ernst Kummer (1810-1893) havia trobat que per $n = 37$ no es verificava la factorialitat (de fet, Kummer ja ho havia provat alguns anys enrere).

Gabriel Lamé i Joseph Liouville

Kummer va portar endavant un llarg programa d'estudi dels enters ciclotòmics. Un dels objectius era desenvolupar una teoria de la divisibilitat en aquests conjunts que fos similar a la dels enters naturals. Per altra banda, la manca de la factorialitat estava lligada a una propietat fonamental dels nombres enters: la principalitat. Donats dos nombres enters a, b, el conjunt d'enters que podem obtenir com a combinació lineal d'a i b, és a dir, els enters de la forma $\lambda a + \mu b$, amb λ i μ enters arbitraris, coincideix amb el conjunt dels múltiples del màxim comú divisor d'a i b. Però en aquells conjunts d'enters ciclotòmics on no es verificava la factorialitat això resultava no ser veritat, és a dir, donats dos enters ciclotòmics d'ordre n, en general les seves combinacions lineals a coeficients altres enters ciclotòmics d'ordre n no són els múltiples d'un cert enter ciclotòmic d'ordre n. La idea de Kummer va ser aleshores definir uns nous nombres, als que anomenaria ideals. Es tractaria

de desenvolupar una teoria de nombres ideals similar a la dels nombres enters, amb un teorema de factorització única en producte de primers.

Ernst Kummer

Les definicions que va introduir Kummer no eren del tot satisfactòries i no es varen apreciar en tot el seu sentit fins l'esdeveniment de la teoria de valoracions. Aleshores, i sense entrar en detalls de les contribucions del mateix Kummer a la teoria de nombres ideals i d'altres matemàtics del moment (Leopold Kronecker (1823-1891), per exemple), va ser Dedekind qui d'alguna forma va completar el programa iniciat per Kummer. En primer lloc, Dedekind considera els conjunts d'enters algebraics. Recordem que d'un nombre complex α es diu que és un enter algebraic si és arrel d'un polinomi mònic a coeficients enters. Aleshores, donat un cos de nombres, és a dir una extensió finita F de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$, el conjunt d'enters algebraics de F és tancat per les operacions suma i producte. Per exemple, el conjunt dels enters ciclotòmics d'ordre n és el conjunt dels enters algebraics del cos ciclotòmic $C_n = Q(\xi)$. Al contrari, el conjunt dels elements de la forma $a + b\sqrt{-3}\,, a, b \in \mathbb{Z}$, no és el conjunt dels enters algebraics del cos de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, ja que el nombre $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ és arrel del polinomi mònic $x^2 + x + 1$.

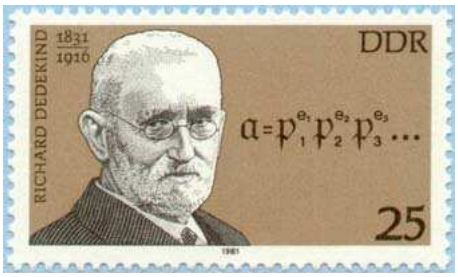
En un tal conjunt d'enters algebraics A, Dedekind defineix els ideals d'A com aquells conjunts que es poden obtenir com a combinacions lineals d'una familia finita $a_1, \ldots, a_n$ d'elements del conjunt A:

$$I = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n\,, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in A\}$$

Aquest és l'ideal generat per la familia $a_1, \ldots, a_n$ (A és també un ideal, generat per 1, i $\{0\}$ és l'ideal generat per 0). Tot definint aleshores un producte d'ideals i la noció d'ideal primer, demostra que tot ideal diferent d'A i $\{0\}$ és pot escriure de forma única com a producte d'ideals primers (no necessàriament diferents):

$$I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$$

En el cas que el conjunt d'enters algebraics és factorial, aquesta descomposició recupera la donada per la mateixa factorialitat.



El Teorema de factorització de Dedekind

Tot això ho va desenvolupar Dedekind en la que es considera la seva obra més important, el Suplement XI al llibre de Dirichlet sobre la Teoria de Nombres. Emmy Noether coneixia molt be aquest resultats, doncs com ja hem comentat a la introducció va ser una de les editores de la obra completa Dedekind.

2.2. **Teoria d'invariants algebraics.** La teoria d'invariants algebraics va ser un camp de recerca molt actiu a la segona meitat del segle XIX. Un dels problemes fonamentals d'aquesta teoria era la determinació dels invariants de les formes (polinomis homogenis) n-àries (en n variables) de grau k a coeficients complexos. Així, les formes binàries d'ordre 2 són les formes quadràtiques en dues variables:

$$F = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2\,, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$$

Donat un grup G que actua linealment sobre les variables, es tracta de trobar expressions polinòmiques en els coeficients de la forma que són invariants per l'acció del grup sobre la forma. Per exemple,

si $G = SL(2, \mathbb{C})$ (matrius invertibles amb determinat 1 a coeficients complexos), el discriminant de F

$$\Delta(F) = a_1^2 - 4a_0a_2$$

es invariant per l'acció de G sobre F. Per la seva importància en la geometria projectiva, l'acció dels grups $SL(n, \mathbb{C})$ sobre les formes n-àries era la que es considerava més bàsica.

Una de les fites més importants de la teoria d'invariants a finals del segle XIX va ser la obtinguda per Paul Gordan (1837-1912) en descriure mitjançant un algorisme explícit tots els invariants algebraics de las formes binàries de qualsevol grau. En particular, va provar que un nombre finit d'invariants era suficient per generar polinòmicament tots els altres, en definitiva, va trobar una base finita dels invariants. Gordan era sovint esmentat com *el rei dels invariants*.

Paul Gordan

Emmy Noether va ser alumna de Gordan, el qual li va dirigir la tesi doctoral defensada a Erlangen el 1907. En ella, Noether estudia el problema dels invariants de les formes ternaries de grau 4 i n'obté una base a la manera computacional d'en Gordan, descrivint explícitament els 331 invariants de la base.

No obstant, alguns anys enrera, la teoria d'invariants algebraics havia estat completament capgirada per David Hilbert (1862-1943). En un treball publicat el 1890, considerat per molts com un dels més importants de la història de l'Àlgebra, Hilbert va provar el caràcter finit

dels sistemes d'invariants algebraics per a qualsevol forma de qualsevol grau. Els mètodes utilitzats per Hilbert eren tant diferents dels algorísmics i computacionals de Gordan que es diu que aquest va comentar sobre el treball que *allò era Teologia, no Matemàtiques*. La demostració donada per Hilbert era existencial i els mètodes purament conceptuals. No obstant, el propi Hilbert, davant les crítiques d'alguns col·leges, va mostrar en un segon treball el 1893 com aplicar els seus mètodes per trobar explícitament tots els invariants.

Només cal llistar alguns dels resultats enunciats per Hilbert en aquest dos treballs per donar una idea de la seva importància: Teorema de la base, Teorema de les sizigies, Funció de Hilbert i la seva racionalitat, Teorema del zeros. Recordem l'enunciat de Hilbert del Teorema de la base, per la seva importància en el treball posterior d'Emmy Noether: sigui $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$ un successió infinita de formes en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Aleshores existeix sempre un enter m tal que cada forma de la successió es pot expressar com

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}_1\mathcal{F}_1 + \mathcal{A}_2\mathcal{F}_2 + \cdots + \mathcal{A}_m\mathcal{F}_m\,,$$

on $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m$ són formes adequades en les mateixes n variables.

David Hilbert

Per demostrar el caràcter finit dels sistemes d'invariants algebraics, Hilbert resol per $SL(n, \mathbb{C})$ un problema de caire una mica diferent i que es pot formular en general de la manera següent: quan els polinomis en n variables a coeficients complexos (o també amb coeficients a altres cossos) invariants sota l'acció lineal d'un grup donat que opera sobre les

variables es poden generar finitament? Recordem un exemple clàssic: el polinomis simètrics.

El grup simètric S_n actua de forma natural sobre els polinomis en n variables a coeficients complexos permutant les variables. Un polinomi $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots x_n]$ es diu que és invariant per l'acció del grup simètric si el resultat de fer actuar qualsevol permutació sobre les variables és el mateix polinomi; és a dir, si per a tot $\sigma \in S_n$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

Per exemple, els polinomis de la forma

$$\begin{aligned}
e_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 1, \\
e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \textstyle\sum_{1 \leq j \leq n} x_j, \\
e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \textstyle\sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k, \\
e_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \textstyle\sum_{1 \leq j < k < l \leq n} x_j x_k x_l, \\
&\cdots \\
e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 x_2 \cdots x_n
\end{aligned}$$

Són els anomenats polinomis simètrics elementals. Així, el que sovint es coneix com a Teorema de Newton assegura que tots els polinomis simètrics es poden expressar de forma única com a polinomis a coeficients complexos en els polinomis simètrics elementals. En definitiva, $e_1, \ldots, e_n$ són $\mathbb{C}$ algebraicament independents i

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n} = \mathbb{C}[e_1, \ldots, e_n]$$

A més, el conjunt del polinomis de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ es pot generar finitament a partir $\mathbb{C}[e_1, \ldots, e_n]$.

Emmy Noether s'introdueix en els mètodes de Hilbert de la mà d'Ernst Fischer (1875-1954), successor de Gordan a Erlangen. Fischer va influir notablement en l'evolució de la manera de treballar les Matemàtiques d'Emmy Noether i la seva relació científica va durar molts anys. A banda, malgrat que la mateixa Emmy Noether no tenia gaire bona opinió de la seva pròpia tesi doctoral sobre teoria d'invariants, posteriorment va obtenir alguns resultats importants a la manera de Hilbert, particularment en el cas de grups finits. Va demostrar concretament que el

conjunt de polinomis en n variables a coeficients a k, un cos qualsevol, que són invariants per l'acció lineal d'un grup finit, admet generació finita i va trobar una fita superior del nombre de generadors i els seus graus en termes del cardinal de G (fita de Noether). A més, va provar que $k[x_1, \ldots, x_n]$ admet generació finita sobre els polinomis invariants per G. És en el decurs d'aquest treball on Emmy Noether enuncia i demostra el seus famós Lema de Normalització. En el cas dels nombres complexos, aquests resultats ja havien estat provats per Hilbert.

Ernst Fischer

2.3. **Geometria algebraica.** Max Noether (1844-1921), el pare d'Emmy, és considerat com un dels fundadors de la Geometria algebraica. De forma molt general, la Geometria algebraica estudia les propietats de les solucions dels sistemes d'equacions polinòmiques en qualsevol nombre de variables i qualsevol grau. Per exemple, el conjunt de punts de l'espai afí $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ que són solució d'un sistema d'equacions de la forma

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\cdots \\ F_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

amb $F_1, \ldots, F_r$ polinomis de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Si els polinomis són tots homogenis, també podem pensar les solucions com un conjunt de punts

de l'espai projectiu $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$. S'anomenen genèricament varietats algebraiques (afins o projectives).

Max Noether

Un dels resultats més coneguts de Max Noether és l'anomenat "Teorema a + b". Sigui $H = \{h = 0\}$ una corba algebraica del pla projectiu (h serà un polinomi homogeni en tres variables) que conté l'intersecció de dues corbes algebraiques $F = \{f = 0\}$ i $G = \{g = 0\}$ (f i g són també polinomis homogenis en tres variables) sense components comuns (per tant, la intersecció és un nombre finit de punts). El teorema dona aleshores condicions suficients i necessàries per tal de que $h = af + bg$, amb a, b polinomis homogenis en tres variables. Són les anomenades condicions de Noether. (Observem que pel Teorema dels zeros de Hilbert, una potència de h si és d'aquesta forma.)

La generalització d'aquest resultat a dimensions superiors no és immediata. Per trobar una resposta final cal esperar al 1905, quan Emanuel Lasker (1868-1941) publica el seu resultat sobre descomposició primària d'ideals a l'anell de polinomis. Lasker, alumne de Hilbert i un dels jugadors d'escacs més importants de la història (en va ser campió del món del 1894 al 1921) va provar un resultat que de fet acabaria donant nom al corresponent d'Emmy Noether sobre descomposició primària.

Emanuel Lasker

Al conjunt de polinomis a coeficients en un cos no es pot esperar un resultat de descomposició com el provat per Dedekind pels conjunts d'enters algebraics. Per exemple, és senzill raonar que a $\mathbb{C}[x, y]$, l'ideal (x^2, xy) generat per x^2 i xy, és a dir, el conjunt de les combinacions lineals de la forma $fx^2 + gxy$, amb f i g polinomis de $\mathbb{C}[x, y]$, no és producte de dos ideals. En canvi, es té que

$$(x^2, xy) = (x) \cap (x, y)^2$$

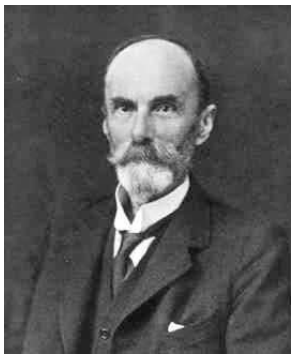
Lasker va provar aleshores que tot ideal I del conjunt de polinomis a coeficients en un cos (és a dir, el conjunt de combinacions lineals finites d'una familia de polinomis) es pot obtenir com l'intersecció finita d'una certa familia d'ideals $\mathfrak{q}_1, \ldots \mathfrak{q}_r$:

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$$

Aquests ideals són d'un tipus especial i s'anomenen components primàries de l'ideal: per exemple, (x) i $(x, y)^2$ són components primàries de (x^2, xy). En aquest cas, (x) és un ideal primer i $(x, y)^2$ és potència de l'ideal primer (x, y). No obstant, també es té que

$$(x^2, xy) = (x) \cap (x^2, y)$$

i en aquest cas (x^2, y) és una component primària que no és potencia d'un ideal primer.



Francis S. Macaulay

Així doncs, Lasker va trobar una descomposició a la que va anomenar primària, però que no és única. El mètode de demostració utilitzat per Lasker era força complicat, essencialment basat en mètodes de Geometria Algebraica (descomposició de varietats algebraiques com a reunió de subvarietats algebraiques irreductibles) i de la Teoria de Resultants i d'Eliminació. Va provar també altres resultats, com per exemple d'unicitat de certes components primàries, que varen ser millor entesos i completats posteriorment per l'anglès Francis S. Macaulay (1862-1937). El treball de Macaulay, de gran influència a l'Àlgebra Commutativa contemporània i gairebé ignorat a l'Anglaterra del seu temps, va ser molt apreciat i reconegut per Emmy Noether i la seva escola.

3. El treball d'Emmy Noether en Àlgebra Commutativa

No volem fer una descripció sistemàtica de tots els treballs i resultats d'Emmy Noether en Àlgebra Commutativa. Donat que l'article [14] publicat l'any 1921 és considerat com el més important i el que ha tingut una major influència, la millor manera d'entendre la seva aportació fonamental és simplement explicant breument el contingut d'aquest treball. Si ho fem amb el llenguatge i a la manera actual, no hi ha de fet gaire diferència amb el que ella mateixa va escriure, potser estalviem una mica de notació i temps.

Bàsicament, el que fa és donar les bases per a un tractament axiomàtic i conceptual de la teoria dels anells commutatius i els seus ideals. Introdueix no tan sols les definicions i noms que fem servir avui en dia, sinó

també els mètodes i procediments. L'objectiu era bàsicament obtenir un resultat que fos la generalització natural, per una banda, del treball de Dedekind sobre descomposició en producte de primers dels ideals d'un conjunt d'enters algebraics, i per altra del resultat de Lasker sobre descomposició primària d'ideals a l'anell de polinomis. Per fer-ho, es basa en l'anomenada condició de cadena ascendent dels ideals, que és equivalent a la condició de generació finita demostrada per Hilbert pels ideals d'un anell de polinomis. És per això que els anells que verifiquen aquesta condició (o en general, els objectes que verifiquen una condició d'aquesta mena) s'anomenen Noetherians. La condició es tant senzilla i a l'hora productiva, que serveix com indicador de la profunditat del pensament d'Emmy Noether.

Tots els treballs previs de Dedekind, Hilbert, Lasker i Macaulay són citats a l'article. També alguns treballs d'Adolf Fraenkel (1891-1965) publicats del 1914 al 1920 on es dóna una primera definició d'anell, així com el seu propi treball previ conjunt amb Werner Schmeidler [12], on es dóna la definició d'ideal i mòdul en un context d'àlgebres d'operadors diferencials. D'alguna forma, aquest treball conjunt amb Schmeidler es pot considerar a manera de preludi del que molt més tard serà la Teoria algebraica de D-mòduls.

Emmy Noether a la seva maduresa com a matemàtica

3.1. Un conjunt A (*sistema d'elements* $a, b, c, \ldots, f, g, h, \ldots$) es diu que és un anell commutatiu si té dues operacions internes, suma $(+)$ i producte $(\cdot)$, tals que tant la suma com el producte compleixen les

propietats associativa i commutativa, es compleix la propietat distributiva, i existeix la resta, és a dir, donats elements a i b existeix un element x tal que $a+x=b$ (aleshores escrivim $x=b-a$). De l'existència de la resta s'en dedueix l'existència d'un element nul per la suma, que denotem per 0. Si a més existeix un element nul per al producte, diemque A és un anell unitari,

i l'element nul per al producte el denotem per 1. Per a nosaltres, els anells seran sempre unitaris. A més, direm que l'anell A és un domini d'integritat si quan el producte de dos element és 0, aleshores un dels dos elements és zero.

Per exemple, el conjunt del polinomis en n variables a coeficients en un cos o bé el conjunt d'enters algebraics d'un cos de nombres són dominis d'integritat.

3.2. Donat un anell A i un subconjunt I d'elements d'A direm que és un ideal si (1) per a qualsevol element a d'A i per a qualsevol element f de I, el producte $a{\cdot}f$ és de I, i (2) per a qualsevol elements f i g de I, la resta $f-g$ és de I. Donada una familia d'ideals $I_1, I_2, \ldots, I_r, \ldots$ es defineix la seva suma com el conjunt I d'elements de la forma $d = a_{i_1} + a_{i_2} \cdots + a_{i_n}$, on a_{i_j} és un element d'I_{i_j}. És un ideal que denotem per $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots)$. Donats elements $f_1, \ldots, f_r$ de l'anell A, denotem per $(f_1, \ldots, f_r)$ el conjunt d'elements de la forma $a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r$, on $a_1, \ldots, a_r$ són elements qualsevol d'A. És un ideal, que s'anomena l'ideal generat per $f_1, \ldots, f_r$. Si un ideal I és d'aquesta forma direm que és finitament generat i que $f_1, \ldots, f_r$ és una base del ideal.

La següent condició caracteritza la generació finita de tot ideal d'un anell A.

Teorema 1 (**de la condició de cadena ascendent**). *Suposem que per a tota familia d'ideals de la forma $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_r \subset \cdots$ existeix un n tal que $I_n = I_{n+1} = \cdots$ (condició de cadena ascendent). Aleshores, tot ideal és finit generat. Inversament, si tot ideal és finit generat, A verifica la condició de cadena ascendent.*

Així, els anells que verifiquen aquesta condició s'anomenen Noetherians. Per exemple, tot anell de polinomis en n variables a coeficients en un cos o bé l'anell d'enters d'un cos de nombres són Noetherians.

Una forma equivalent d'enunciar aquesta condició és mitjançant l'anomenada condició maximal: tota familia no buida d'ideals d'A té un element maximal.[2]

3.3. Donada una familia d'ideals $I_1, \ldots, I_r$, podem denotar per $I = [I_1, \ldots, I_r]$ el més petit ideal contingut a tot ells. Resulta que $[I_1, \ldots, I_r]$ és de fet igual a l'intersecció $I_1 \cap \cdots \cap I_r$ dels ideals. Direm que un ideal I és reductible si es pot obtenir com intersecció de dos ideals estrictament més grans. En cas contrari, diem que l'ideal és irreductible. El següent resultat afirma que tot ideal en un anell Noetherià es pot obtenir com a intersecció finita d'ideals irreductibles.

Teorema 2 (descomposició com a intersecció finita d'irreductibles). *En un anell Noetherià A, tot ideal es pot obtenir com a intersecció d'un nombre finit d'ideals irreductibles.*

Potser val la pena de fer la demostració d'aquest resultat, per mostrar l'ús de la condició de cadena ascendent:

Suposem que no és així i sigui $\Omega \neq \emptyset$ la familia d'ideals que no verifiquen la condició. Aleshores, existeix un ideal I que és maximal en aquesta familia. Serà doncs intersecció de dos ideals estrictament més grans. Com I és maximal a Ω, aquest dos ideals no pertanyen a Ω i es poden obtenir cadascun d'ells com a intersecció d'un nombre finit d'ideals irreductibles. Ajuntant les dos interseccions resulta que I també es pot obtenir com a intersecció d'un nombre finit d'irreductibles, la qual cosa és contradictòria amb l'hipòtesi.

3.4. Un ideal $\mathfrak{q}$ d'un anell A es diu que és primari si donats dos elements a i b d'A tals que $a \cdot b$ pertany a $\mathfrak{q}$ i a no pertany a $\mathfrak{q}$, aleshores existeix un enter positiu n tal que b^n pertany a $\mathfrak{q}$. Si a més n ha de ser sempre 1, en diem que $\mathfrak{q}$ és un ideal primer. Donat un ideal primari $\mathfrak{q}$, el conjunt d'elements d'A tals que un potencia seva pertany a $\mathfrak{q}$ és un ideal primer $\mathfrak{p}$. Es diu que $\mathfrak{p}$ és l'ideal primer associat a $\mathfrak{q}$ i que $\mathfrak{q}$ és un ideal primari que pertany a $\mathfrak{p}$.

[2]Aquesta condició no la va fer servir directament Emmy Noether, encara que és latent en el seu treball. L'avantatge d'aquesta formulació equivalent de la condició de cadena ascendent és que simplifica alguns dels seus arguments.

Teorema 3 (els irreductibles són primaris). *En un anell Noetherià tot ideal irreductible és primari.*

La demostració d'aquest resultat és una nova mostra de l'us de la condició de cadena ascendent:

Sigui A un anell Noetherià i I un ideal irreductible d'A. Suposem que I no és primari: aleshores existeixen elements a i b tals que $a{\cdot}b$ pertany a I, a no pertany a I i cap potencia positiva de b no pertany a I. Per a qualsevol element c d'A, el conjunt d'elements x d'A tals que $x{\cdot}c$ pertany a I és un ideal que denotem per $I : c$. Així, tenim una cadena creixent d'ideals de la forma $I : b \subset I : b^2 \subset \cdots \subset I : b^r \subset \cdots$, i per la condició de cadena ascendent ha d'existir un k tal $I : b^k = I : b^{k+1}$. Aleshores, $I = (I, (a)) \cap (I, (b^k))$. En efecte, un element de la intersecció ha de ser, per una banda, de la forma $c = f + g{\cdot}b^k$, amb f un element de I. Però verifica també que $c{\cdot}b$ pertany a I, ja que per hipòtesi $a{\cdot}b$ pertany a I. Per tant, $f{\cdot}b + g{\cdot}b^{k+1}$ pertany a I i també $g{\cdot}b^{k+1}$ pertany a I. Així, $g{\cdot}b^k$ pertany a I i c pertany I. Com tots dos ideals contenen estrictament a I, obtenim que I no és irreductible, la qual cosa és una contradicció.

Teorema 4 (primer teorema de descomposició primària). *En un anell Noetherià tot ideal és intersecció d'un nombre finit d'ideals primaris.*

Ara podem ajuntar en un sol ideal la intersecció de tots els ideals primaris que tenen el mateix ideal primer associat. Resulta ser un nou ideal primari, amb aquest mateix primer com associat. Així, obtenim una descomposició de qualsevol ideal com a intersecció d'un nombre finit d'ideals primaris, tots ells amb primers associats diferents. Ara, aquesta descomposició té una propietat especial: cap dels ideal primaris que apareixen a la intersecció conté la intersecció dels altres. S'en diu aleshores que la descomposició és iredundant. Així, tot ideal té un descomposició iredundant com a intersecció d'ideals primaris.

Teorema 5 (**Teorema de descomposició primària en anells Noetherians**). *Sigui A un anell Noetherià. Aleshores, tot ideal és intersecció irredundant d'un nombre finit d'ideals primaris: són les components primàries de l'ideal. Aquestes components primàries tenen totes ideals primers associats diferents.*

3.5. Considerem l'exemple tractat a la secció anterior: l'ideal $I = (x^2, xy) \subset \mathbb{C}[x, y]$ admet com a descomposició primària irredundant

$$(x^2, xy) = (x) \cap (x^2, xy, y^2)$$

En aquest cas, les components primàries són (x), $(x^2, xy, y^2) = (x, y)^2$ i els ideals primers associats són (x), (x, y). Però també

$$(x^2, xy) = (x) \cap (x^2, y)$$

és una descomposició primària irredundant, amb components primàries (x), (x^2, y) amb ideals primers associats (x), (x, y).

Així doncs, la descomposició primària irredundant no és única. No obstant, si que es verifica el següent:

Teorema 6 (primer teorema d'unicitat). *Sigui A un anell Noetherià. Aleshores, dues descomposicions primàries irredundants d'un mateix ideal tenen el mateix nombre de components primàries i els mateixos ideals primers associats a les components primàries.*

Aquest conjunt únic d'ideals primers s'anomena conjunt de primers associats. Òbviament, fan el paper dels divisors primers en un anell factorial i té una gran importància a la teoria d'ideals.

L'exemple anterior també mostra un fet que no es dóna en el cas dels anells factorials. Observem que els dos primers associats són comparables: $(x) \subset (x, y)$. Aquest fet és precisament el que d'alguna forma ocasiona la no unicitat de la descomposició primària irredundant. Direm que un primer associat a un ideal és immers si conté estrictament un altre primer associat. En cas contrari, direm que el primer associat és aïllat. Les components primaries que els tenen com associats reben el mateix nom. Així, (x, y) és un primer immers de (x^2, xy) i l'ideal (x^2, xy, y^2) una component primària immersa, mentre que (x) és un primer associat aïllat i (x^2) una component primària aïllada.

Teorema 7 (segon teorema d'unicitat). *Sigui A un anell Noetherià. Aleshores, les interseccions de components primàries que pertanyen a primers associats aïllats són úniques. En particular, les components primàries que pertanyen als ideals primers associats aïllats son úniques.*

Val a dir, que aquests dos teoremes d'unicitat són vàlids sense la condició Noetheriana, un cop es tingui un ideal que admet una descomposició

primària irredundant. Els anells tals que tot ideal admet una descomposició primària s'en diuen de Lasker i han estat objecte d'una recerca continuada de cert interès.

3.6. Essencialment, tot l'anterior és el que Emmy Noether prova a [14]. Prova també que la teoria es pot aplicar als anells de polinomis i anells d'enters algebraics, i que es recupera així la teoria ja coneguda respectivament per Lasker i Dedekind. També dona indicacions de com estendre la teoria al marc més general dels mòduls.

És difícil imaginar com aquest treball va canviar la manera de pensar l'Àlgebra en aquells moments, tant acostumats com estem actualment a fer-ho així. Possiblement, l'única forma és llegir directament els treballs de Lasker o de Dedekind i comparar. Una revolució més recent del mateix estil que ens pot donar una idea és la produïda pel treball d'Alexander Grothendieck i la teoria d'esquemes. No obstant, també és cert que molts dels mètodes computacionals i algorismes de finals dels segle XIX i principis del XX han estat revisats i parcialment recuperats gràcies al desenvolupament recent de la Computació algebraica.

3.7. Dels altres treballs d'Emmy Noether en l'àmbit de l'Àlgebra Commutativa, [18] és possiblement el més citat. En ell, Noether completa d'alguna forma el programa sobre descomposició primària d'ideals al caracteritzar els anells on aquesta descomposició primària esdevé en realitat un producte d'ideals primers. Són els que seran posteriorment coneguts (per raons òbvies) com dominis de Dedekind. En el treball, es desenvolupa de forma sistemàtica la noció de dependència entera, completant el treball de Dedekind. També fa servir, entre d'altres, la condició de cadena descendent sobre els ideals (condició dual de la de cadena ascendent).

Si A és un domini d'integritat i K és el seu cos de fraccions, un element a de K es diu que és enter (sobre A) si és arrel d'un polinomi mònic a coeficients a A. El conjunt d'elements enters de K és un subanell de K, que s'anomena la clausura entera d'A (això no és un fet trivial). S'en diu que A és íntegrament tancat si la seva clausura entera és ell mateix, és a dir, si els únics elements enters de K són els d'A. Per exemple, $\mathbb{Z}$ (i en general qualsevol domini d'integritat que sigui factorial) és

íntegrament tancat. La clausura entera funciona com una clausura, és dir, la clausura entera de la clausura entera és ella mateixa. El teorema provat per Emmy Noether és el següent:

Teorema 8. *Sigui A un anell (no necessariament unitari). Aleshores, tot ideal és producte de forma única d'ideals primers si, i només si, es verifiquen les següents condicions:*

(I) A verifica la condició de cadena ascendent.
(II) Mòdul qualsevol ideal no nul l'anell verifica la condició de cadena descendent.
(III) A és unitari.
(IV) A és un domini d'integritat.
(V) A és íntegrament tancat.

El anells de Dedekind tenen moltes altres caracteritzacions i una rica teoria, en un cert sentit com la primera classe d'anells després dels dominis d'ideals principals. Localment són dominis de valoració discreta, com els dominis d'ideals principals, però globalment no són necessàriament factorials. De fet, un anell de Dedekind és domini d'ideals principals si, i només si, és factorial. Ometent alguna de les condicions que els caracteritzen s'obtenen d'altres classes d'anells. Potser els més coneguts siguin els de Prüfer, que no verifiquen la condició Noetheriana. Val a dir que, en general, la clausura entera d'una domini Noetherià no és Noetheriana, i que aquesta és una condició difícil de verificar que ha proporcionat algunes de les pagines més interessants de l'història de l'Àlgebra Commutativa, en particular famosos i difícils contraexemples.

4. Potències simbòliques

El càlcul de la descomposició primària d'un ideal és difícil. Afortunadament, no és freqüent en Àlgebra Commutativa haver de determinar completament les components primàries, sinó més bé el conjunt d'ideals primers associats, que en general és un càlcul una mica més senzill. En termes de Geometria Algebraica, aquesta és en certa manera la diferència entre determinar l'intersecció de varietats conjuntísticament o be amb multiplicitats, tal com s'explica a la contribució en aquest mateix volum de Raquel Mallavibarrena.

Una de les alumnes d'Emmy Noether, Grete Hermann (1901-1984), va desenvolupar diversos algorismes en Àlgebra Commutativa, en particular pel càlcul de la descomposició primària [8]. Com a conseqüència va trobar que existeix una funció que depèn de n, k i d tal que si I és un ideal d'un anell de polinomis en n variables a coeficients a $\mathbb{C}$, generat per k elements de grau com a molt d, aleshores existeix una descomposició primària tal que els generadors de les seves components primàries tenen graus acotats superiorment per aquesta funció. La funció trobada per Hermann és doble exponencial en n i no es coneix avui en dia si aquesta fita és pot millorar. Els paquets més coneguts de computació en Àlgebra Commutativa, CoCoA, Macaulay2 i Singular, poden calcular descomposicions primàries basant-se en diferents algorismes més o menys eficients, depenen del tipus d'ideal.

4.1. Voldria comentar ara un dels aspectes possiblement més interessants de la descomposició primària. Es dóna el cas que, en general, les potències d'un ideal primer no són ideals primaris. El següent n'es un exemple. Sigui $\mathfrak{p}$ l'ideal primer

$$\mathfrak{p} = (y^2 - xz, yz - x^3, z^2 - x^2y) \subset \mathbb{C}[x, y, x]$$

(és l'ideal de definició de la corba (t^3, t^4, t^5) de l'espai afí $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$). Aleshores,

$$x(x^5 - 3x^2yz + xy^3 + z^3) \in \mathfrak{p}^2$$

però en canvi x no pertany a $\mathfrak{p}$ (i cap potència seva tampoc) i $x^5 - sx^2yz + xy^3 + z^3$ no pertany a $\mathfrak{p}^2$. Per tant, $\mathfrak{p}^2$ no és un ideal primari.

Això no passa si l'ideal primer és maximal, és a dir, si no hi cap altre ideal propi que el contingui (tot ideal maximal és primer): si $\mathfrak{m}$ és un ideal maximal, aleshores tot ideal de la forma $\mathfrak{m}^n$ és primari amb primer associat $\mathfrak{m}$ (encara que no tot ideal $\mathfrak{m}$-primari és una potència de $\mathfrak{m}$).

El que si passa és que per a tot ideal primer $\mathfrak{p}$, tota potència $\mathfrak{p}^n$ te a $\mathfrak{p}$ com a primer associat aïllat (de fet n'és l'únic). Per tant, a qualsevol descomposició primària irredundant de $\mathfrak{p}^n$ hi una component primària ben determinada amb ideal primer associat $\mathfrak{p}$. És l'anomenada n-ésima potència simbòlica de $\mathfrak{p}$, que denotem per

$$\mathfrak{p}^{(n)}$$

Els problemes relacionats amb el comportament d'aquestes potències simbòliques són en general molt difícils i profunds.

Si k és un cos algebraicament tancat i $\mathfrak{p}$ és un ideal primer de l'anell de polinomis $k[x_1, \ldots, x_n]$, tenim com a conseqüència del Teorema dels zeros de Hilbert que

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in X} \mathfrak{m}$$

on X és el conjunt d'ideals maximals de $k[x_1, \ldots, x_n]$ que contenen a $\mathfrak{p}$. El següent teorema ens dona una descripció similar de les potències simbòliques.

Teorema 9 (O. Zariski (1949), M. Nagata (1962)). *Sigui k un cos algebraicament tancat de característica zero i $\mathfrak{p}$ un ideal primer de l'anell de polinomis $k[x_1, \ldots, x_n]$. Aleshores, per a tot $r \geq 1$ es verifica que*

$$\mathfrak{p}^{(r)} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in X} \mathfrak{m}^r$$

Dit en altres paraules, la r-èsima potencia simbòlica de $\mathfrak{p}$ és l'ideal de totes les funcions que s'anul·len amb ordre com a mínim r per a tot punt de la varietat definida per $\mathfrak{p}$.

En un anell Noetherià la noció de potència simbòlica és pot estendre a qualsevol ideal no necessàriament primer. La notació és la mateixa: per un ideal I, la n-èsima potencia simbòlica de I és denota per $I^{(n)}$. No en donem els detalls, però.

4.2. El Problema 14 de Hilbert es por formular de la forma següent.

Siguin F un cos de característica zero, $R = F[x_1, \ldots, x_n]$ l'anell de polinomis en n variables a coeficients a F i K un subcós del cós de fraccions de R. És $K \cap R$ una àlgebra de generació finita sobre F?

Masayoshi Nagata (1927-2008) en va donar un contraexemple al 1958 [10]. Per construir-lo, Nagata va utilitzar l'àlgebra de Rees de les potències simbòliques d'un cert ideal.

Donat un anell A i $I \subset A$ un ideal, podem considerar el subanell de l'anell de polinomis en una variable $A[t]$ donat per

$$R(I) := \bigoplus_{t \geq 0} I^n t^n \subset A[t]$$

És el que s'anomena anell de Rees de I, ja que David Rees [21] el va utilitzar per primera vegada en la construcció d'un contraexemple a una versió més general del Problema 14 de Hilbert formulada per Oscar Zariski (1899-1986). Si l'anell A és Noetherià, l'anell de Rees de qualsevol ideal és també Noetherià o, equivalentment, és una A-àlgebra de generació finita.

La construcció de l'anell de Rees es pot estendre de forma òbvia a qualsevol filtració d'ideals: entenem per filtració d'ideals d'A una successió decreixent d'ideals

$$\mathcal{I} := I_0 = A \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$$

tal que $I^r I^s \subset I^{r+s}$ per a tot r i s. Aleshores, l'anell de Rees de la filtració $\mathcal{I}$ és el subanell graduat de $A[t]$ definit per

$$R(\mathcal{I}) := \bigoplus_{n \geq 0} I_n t^n \subset A[t]$$

Les potències simbòliques d'un ideal I són una filtració d'ideals, és a dir, $I^{(n+1)} \subset I^{(n)}$ per a tot $n \geq 0$ i $I^{(r)} I^{(s)} \subset I^{(r+s)}$ per a tot r i s (no és difícil de provar, però tampoc és obvi). L'àlgebra de Rees de la filtració de les potències simbòliques d'un ideal I s'anomena sovint l'àlgebra de Rees simbòlica d'I. Ara bé: el que ja no és cert en general és que l'anell de Rees $R(\mathcal{I})$ d'una filtració qualsevol d'A sigui una A-àlgebra de generació finita.

Justament, el contraexemple donat per Nagata al Problema 14 de Hilbert es pot realitzar com l'àlgebra de Rees simbòlica d'un cert ideal de l'anell de polinomis en tres variables que no és finitament generada.

4.3. Un dels punts crucials de la demostració d'Andrew Wiles [26] del Darrer Teorema de Fermat consisteix en provar que un cert epimorfisme entre dues àlgebres sobre l'anell dels enters d'una extensió finita d'un cos p-àdic (l'àlgebra universal de les deformacions i una àlgebra de Hecke generalitzada) és un isomorfisme. L'estratègia és provar primer

que l'àlgebra de Hecke generalitzada és intersecció completa i deduir a partir d'aquest fet que l'epimorfisme és, en efecte, un isomorfisme. Per provar la propietat intersecció completa de l'àlgebra de Hecke generalitzada cal aplicar un criteri numèric, provat per Richard Taylor i el propi Wiles a [23].

En realitat, la situació anterior és una cas particular de la següent: sigui k un anell i T una k-àlgebra local essencialment de tipus finit sobre k. Una evolució de T sobre k és una k-àlgebra local R essencialment de tipus finit i un epimorfisme de k-àlgebras

$$\varphi : R \to T$$

que indueix un isomorfisme entre els mòduls dels diferencials

$$\Omega_{R/k} \simeq \Omega_{T/k}$$

Es diu que l'evolució és trivial si φ és un isomorfisme i que T és evolucionalment estable si totes les seves evolucions sobre k són trivials. De fet, en el cas de Wiles es té que l'àlgebra de Hecke generalitzada és evolucionalment estable perquè és intersecció completa.

David Eisenbud i Barry Mazur estudien a [6] el problema següent: donat un cos k o bé un anell de valoració discreta de característica mixta, caracteritzar quan una k-àlgebra local T, plana, reduïda i essencialment de tipus finit sobre k és evolucionalment estable. Proven que si T es pot presentar com un quocient P/I d'un anell local $(P, \mathfrak{m})$ que és la localització d'un anell de polinomis en un nombre finit de variables sobre k, T és evolucionalment estable si, i només, si

$$I^{(2)} \subset \mathfrak{m}I$$

Més en general, un es pot plantejar la següent pregunta [6]: donat un ideal primer $\mathfrak{p}$ en un anell local $(P, \mathfrak{m})$, quan es verifica que $\mathfrak{p}^{(2)} \subset \mathfrak{p}\mathfrak{m}$? La resposta és en general negativa en el cas equicaracterístic positiu, de fet hi ha contraexemples per a tota característica positiva, però no es coneix en característica zero o mixta.

4.4. L'estudi asimptòtic de les propietats d'un ideal és molt important en Àlgebra Commutativa. La funció de Hilbert n'és un cas, també el Lema d'Artin-Rees. En general, volem saber si per alguna propietat les potències d'un ideal és comporten de manera uniforme, o almenys

asimptòticament uniforme. Per exemple, donat un ideal I d'un anell Noetherià A, els conjunts d'ideals primers associats a les potències de I poden anar variant. No obstant, es pot provar que existeix un enter positiu n tal que per a tot $m \geq n$, els conjunts de ideals primers associats a I^m són estables.

El fet de que l'àlgebra de Rees simbòlica d'un ideal no sigui en general finitament generada ens indica que el comportament de les potències simbòliques és poc uniforme. És en part per això que el següent resultat provat per Melvin Hochster i Craig Huneke el 2002 [9] és molt remarcable.

Teorema 10. *Sigui A un anell Noetherià regular que conté un cos (per exemple, l'anell de polinomis en un nombre finit de variables a coeficients en un cos). Sigui I un ideal qualsevol d'A i h l'alçada més gran dels ideals primers associats a I. Aleshores,*

$$I^{(hn)} \subset I^n$$

per a tot enter positiu n.

La demostració d'aquest resultat s'obté per reducció a característica positiva i aplicant aleshores la teoria de "tight closure". Aquesta teoria desenvolupada per Hochster i Huneke i la seva escola des de l'any 1986, constitueix un dels avenços més importants i profunds de l'Àlgebra Commutativa els darrers anys.

Referències

[1] N. Bourbaki, *Elementos de historia de las matemáticas. Edición revisada y aumentada.* Alianza Editorial S. A., Madrid, 1976.

[2] D. Blanco, *Emmy Noether. Matemática ideal.* La matemática en sus personajes, **22**, NIVOLA libros y ediciones, S.L., Tres Cantos, 2005.

[3] P. Carrasco, *Emmy Noether y el inicio del Álgebra abstracta.* Gac. R. Soc. Mat. Esp. **7** (2004), no. 2, 331-346.

[4] R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke I-III.* Herausgegeben von R. Fricke, E. Noether und Ö. Ore. Reprint Chelsea Publishing Company, New York, 1969.

[5] A. Dick, *Emmy Noether, 1882–1935.* Translated from the German by Heidi I. Blocher. With contributions by B. L. van der Waerden, Hermann Weyl and P. S. Alexandrov. Birkhäuser, Boston, Mass., 1981.

[6] D. Eisenbud & B. Mazur, *Evolutions, symbolic squares, and Fitting ideals.* J. Reine Agew. Math. **488** (1997), 189–201.

[7] H. Flenner, *Emmy Noether and the development of commutative algebra.* The heritage of Emmy Noether (Ramat-Gan, 1996), 23–38, Israel Math. Conf. Proc., 12, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.

[8] G. Hermann, *Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale.* Math. Ann. **95** (1926), no. 1, 736–788.

[9] M. Hochster & C. Huneke, *Comparison of symbolic and ordinary powers of ideals.* Invent. Math. **147** (2002), 349–369.

[10] M. Nagata, *On the 14-th Problem of Hilbert.* Amer. J. Math. **81** (1959), 766-772.

[11] E. Noether, *Gesammelte Abhandlungen.* Edited and with an introduction by Nathan Jacobson. With an introductory address by P. S. Alexandrov. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.

[12] E. Noether & W. Schmeidler, *Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken.* Math. Z. **8** (1920), 1–35

[13] E. Noether, *Über eine Arbeit des im Kriege gefallenen K. Hentzelt zur Eliminationstheorie.* J. Ber. d. DMV **30** (1921), p. 101.

[14] E. Noether, *Idealtheorie in Ringbereichen.* Math. Ann. **83** (1921), 24–66.

[15] E. Noether, *Bearbeitung von K. Hentzelt: zur Theorie der Polynomideale und Resultanten.* Math. Ann. **88** (1923), 53–79.

[16] E. Noether, *Eliminationtstheorie und allgemeine Idealtheorie.* Math. Ann. **80** (1923), 229–261.

[17] E. Noether, *Eliminationtstheorie und Idealtheorie.* J. Ber. d. DMV **33** (1924), 116–120.

[18] E. Noether, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahlkörpern.* J. Ber. d. DMV **33** (1924), p. 102.

[19] E. Noether, *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p.* Nach. v. d. Ges. d. Wis. zu Göttingen (1926), 28–35.

[20] E. Noether, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern.* Math. Ann. **96** (1927), 26–61.

[21] D. Rees, *On a problem of Zariski.* Illinois J. Math. **2** (1958), 145–149.

[22] B. Srinivasan & J. Sally, *Emmy Noether in Bryn Mawr.* Proceedings of a Symposium in honor of her 100th birthday held at Bryn Mawr College, Bryn Mawr, Pa., March 1719, 1982. Edited by Bhama Srinivasan and Judith D. Sally. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

[23] R. Taylor & A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras.* Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 3, 553–572.

[24] M. Teicher, *The Heritage of Emmy Noether.* Proceedings of the conference held at Bar-Ilan University, Ramat-Gan, December 23, 1996. Edited by Mina Teicher. Israel Mathematical Conference Proceedings, 12. Bar-Ilan University, Gelbart Research Institute for Mathematical Sciences, Ramat

Gan; Bar-Ilan University, Emmy Noether Research Institute of Mathematics, Ramat Gan, 1999.

[25] B. L. van der Waerden, *Algebra, Vol I, Vol II.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[26] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 443–551.

EMMY NOETHER: UNA CONTRIBUCIÓN EXTRAORDINARIA Y GENEROSA AL ESTABLECIMIENTO DE LA GEOMETRíA ALGEBRAICA

RAQUEL MALLAVIBARRENA

Resumen. Emmy Noether, matemática excepcional, no se dedicó propiamente a la Geometría Algebraica, pero sus aportaciones y razonamientos en el ámbito del Álgebra Conmutativa contribuyeron de modo muy importante a clarificar y dar rigor al estudio de las variedades algebraicas.

1. Motivación del título

1.1. Una contribución extraordinaria y generosa. Emmy Noether no se dedicó propiamente a la Geometría Algebraica, pero fue consciente de que sus investigaciones sobre la Teoría de Anillos e Ideales tenían consecuencias geométricas importantes cuando se particularizaban al anillo de polinomios en varias variables. Coincidió en el tiempo con los trabajos encaminados a dar rigor, mediante el Álgebra Conmutativa, al estudio y clasificación de las variedades algebraicas, objetos principales de la Geometría Algebraica.

B. L. van der Waerden fue alumno destacado de Emmy Noether cuando ella estaba en la Universidad de Göttingen. Sus aportaciones a la fundamentación de la Geometría Algebraica son bien conocidas y en ellas queda patente la influencia del trabajo algebraico de Emmy Noether (cf. [9]).

Muchos razonamientos de Emmy Noether han sido absorbidos por la cultura matemática general y por ello no es fácil ver la influencia directa que tuvo en las investigaciones de otras personas.

Alexandrov, gran amigo de Emmy Noether, escribió en el obituario con motivo de su fallecimiento ([6])

> ... eran ajenas a ella la búsqueda de gloria y de éxito en el mundo ...

Esta frase nos confirma la apreciación anterior: sus contribuciones a la Geometría Algebraica fueron sólidas e importantes pero en cierto sentido han quedado diluídas en trabajos de otras personas o forman parte de conocimientos básicos cuyo origen es desconocido para muchos. En todo caso el uso esencial de los anillos noetherianos en Geometría Algebraica deja constancia de su nombre aunque no sean tan conocidas sus aportaciones concretas al estudio y aplicaciones de estos anillos.

En las biografías de Emmy Noether y también en los testimonios de los que la conocieron, sobre todo en el período alemán, queda constancia de la gran preocupación que tenía por sus alumnos y jóvenes investigadores en general. Su dedicación, entusiasmo y capacidad para las Matemáticas se hacían patentes en las tertulias organizadas en su casa para colegas y estudiantes o los paseos por la ciudad de Göttingen y sus alrededores con las mismas características.

B. L. van der Waerden le presentó en una ocasión unos resultados obtenidos a partir de unos artículos suyos y de Hentzel, otro estudiante suyo muerto en la Primera Guerra Mundial. Ella también los había obtenido por su cuenta para completar el trabajo de Hentzel, pero no le dijo nada a van der Waerden y aceptó su trabajo en Mathematische Annalen. Él supo más tarde que ella había hecho lo mismo independientemente.

1.2. Establecimiento de la Geometría Algebraica. Esta rama de la Geometría se había ido desarrollando en los siglos anteriores y se basa en el estudio de los conjuntos de ceros comunes a una cantidad finita de polinomios en varias variables:

$$\begin{gathered} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \dots \\ f_r(x_1,\dots,x_n)=0 \end{gathered}$$

A estos conjuntos de puntos de les llama *variedades algebraicas*.

A finales del siglo XIX y principios del XX se obtienen resultados y modos de razonamiento muy importantes por parte de la llamada *Escuela italiana* y de otros matemáticos europeos. Max Noether, padre de Emmy, es uno de estos últimos. Los nombres de Segre, Castelnuovo, Enriques o Severi deben ser mencionados como figuras principales de la escuela italiana.

La Escuela italiana aporta resultados muy notables que reflejan una gran visión geométrica de los autores. A la vez aparecen problemas de precisión, conceptos que no están claros y demostraciones incompletas. Por ejemplo:

- Distinción entre puntos generales (puntos que verifican las propiedades de casi todos los puntos de la variedad) y puntos cualesquiera de la variedad. Si pensamos en curvas planas con nodos o cúspides, o superficies como un cono cuádrico, un par de planos que se cortan en una recta o la desarrollable tangencial de una curva alabeada, intuiremos que los nodos y cúspides, el vértice del cono, la recta de intersección de los dos planos o la curva alabeada dentro de la desarrollable tangencial, son puntos especiales que pueden presentar propiedades distintas que el resto de los puntos. Delimitar qué puntos verifican cierta propiedad en una variedad presenta dificultades en muchos casos, sobre todo en variedades de dimensión alta y cuya construcción es más complicada que la de los ejemplos citados.

- Multiplicidades. Medir la intersección entre dos variedades algebraicas no es fácil si no disponemos de técnicas adecuadas. Hay situaciones límite en las que una variedad comparte con otra no sólo un punto, sino varias direcciones infinitesimales en ese punto. Los geómetras italianos no acertaron siempre a la hora de medir estas multiplicidades con precisión o intuyeron el resultado correcto pero no dieron argumentos rigurosos para demostrarlo.

- Conservación del número. Si estamos seguros de que el número que queremos calcular (puntos en determinada intersección) no cambia si especializamos la configuración geométrica, puede resultar más fácil trabajar en el caso especial en vez de en el caso general. Un ejemplo sencillo: si queremos calcular el número de puntos de corte entre dos curvas planas y sabemos que se conserva el número en una situación

especial podemos considerar que cada curva es unión de rectas distintas (tantas como el grado de la curva) y calcular así el número de puntos de intersección.

- Con frecuencia, en las demostraciones de los resultados conocidos hasta el momento de Geometría Algebraica, aparecían técnicas puramente algebraicas y otras de tipo analítico. Para darle autonomía a la Geometría Algebraica era preciso disponer de técnicas propias.

- El trabajo de Emmy Noether con cuerpos abstractos contribuye al punto anterior en el sentido del desarrollo de técnicas algebraicas que no dependan del cuerpo base elegido. Los geómetras italianos trabajaron sobre el cuerpo de los números complejos. La Geometría Algebraica posterior utiliza cuerpos base generales hasta donde es posible. Para ciertas situaciones hay que imponer condiciones sobre la característica del cuerpo, que sea algebraicamente cerrado,...o buscar demostraciones diferentes según los casos. El famoso texto de Zariski, *Conmutative Algebra*, publicado en 1958 en colaboración con Samuel, contribuyó de modo importante a la autonomía de la Geometría Algebraica con técnicas propiamente algebraicas. Las aportaciones fundamentales de Zariski a la resolución de singularidades fueron también un paso en la fundamentación rigurosa de la Geometría italiana.

Las herramientas algebraicas necesarias para una fundamentación rigurosa de la Geometría Algebraica, tema de gran importancia en la época en la que vivió Emmy Noether, fueron: La Teoría de Ideales, la Teoría de Eliminación y la Teoría de Cuerpos. Este proceso de fundamentación transcurrió asociado a los nombres de Dedekind, Kronecker, Hilbert o Van der Waerden entre otros. Una exposición más detallada y rigurosa sobre este proceso puede leerse en el artículo histórico de van der Waerden que aparece en [9].

Una etapa clave en este proceso de fundamentación de la Geometría Algebraica, y que llevó a su extensión a contextos mucho más amplios, se produjo más tarde: fue la introducción de la teoría de haces y esquemas tratando de traducir al ámbito algebraico el papel tan importante de los haces en Topología y Geometría Analítica. Dos nombres son de obligada referencia en esta etapa: Serre y Grothendieck. Además de los haces y esquemas, una herramienta básica es la cohomología de haces.

A la vista del artículo de Pere Pascual en este volumen, podemos mencionar de nuevo aquí a Emmy Noether y su importante papel en el nacimiento del Álgebra Homológica y por tanto podemos concluir que de algún modo está presente en el desarrollo de la Geometría Algebraica actual.

La Geometría Clásica llega así, fundamentada y rigurosa, hasta nuestros días y sigue siendo una línea de investigación activa conectada con muy diversos campos.

Una de las técnicas más empleadas en la Geometría Algebraica contemporánea a Emmy Noether fue la llamada *Teoría de Eliminación*. Se pretende encontrar un análogo a la eliminación de parámetros en las ecuaciones que definen las variedades lineales pero con ecuaciones polinómicas de cualquier grado (las que determinan las variedades algebraicas). Naturalmente el problema general, con ecuaciones de grado superior a uno es mucho más complicado y los cálculos son con frecuencia largos y farragosos. Se definen las resultantes o eliminantes y los discriminantes para obtener los ceros comunes a dos polinomios o a un polinomio y su derivada.

En la comunidad matemática de la época hubo quienes intentaron evitar su uso o simplificarlo. Mucho después, los tratamientos informáticos y computacionales de estos problemas geométricos han vuelto a poner de actualidad la eliminación: la definición de las bases de Gröbner y los algoritmos para su uso que se han desarrollado en las últimas décadas ponen de manifiesto que es posible abordar la eliminación y obtener de ella resultados importantes. También puede verse en [4] una demostración de la completitud del espacio proyectivo en la que se utiliza la teoría de eliminación clásica. Quede en todo caso como anécdota la siguiente frase de A. Weil en 1946, muestra del ambiente que se vivió en aquellos momentos:

> Hemos conseguido por fin eliminar la eliminación.

En relación con la Teoría de Ideales y Cuerpos, hay que insistir en el papel fundacional de Emmy Noether, con su extraordinaria capacidad de abstracción, a la hora de dar las definiciones de anillo e ideal y su trabajo con los cuerpos abstractos ya mencionado. A continuación se indican simplemente algunas definiciones y cuestiones básicas:

- Sea $(A, +, .)$ un anillo. Decimos que un subconjunto I de A es un *ideal* de A si para la suma de A restringida a I es un grupo y verifica además la propiedad: para todo $x \in A$ y para todo $y \in I$, el producto $xy \in I$.

- Los *cuerpos* son anillos en los que podemos dividir (excepto por el cero). Las variedades algebraicas (ceros comunes a una cantidad finita de polinomios en varias variables) pueden asociarse a unos anillos y cuerpos de cuyo estudio se deducen resultados muy importantes.

2. Emmy Noether y B. L. Van der Waerden

Bartel Leendert van der Waerden nació en Amsterdam en 1903 y falleció en Zurich en 1996. Estudió Matemáticas en su ciudad natal, donde ya se distinguió como alumno brillante, y entre 1924 y 1926 en Göttingen, donde estudió con Emmy Noether, de la que recibió una gran influencia. En esta universidad alemana, tan importante en la época, consiguió la habilitación en 1928. Previamente, en 1925, se había doctorado en Amsterdam.

Mencionarle en una ponencia sobre Emmy Noether y la Geometría Algebraica tiene sentido, pues contribuyó en gran medida a difundir las ideas y razonamientos de Emmy Noether en sus trabajos de Álgebra y Geometría Algebraica.

Podemos comentar aquí que los razonamientos tan abstractos de Emmy Noether eran a veces poco accesibles para un público general. Hay referencias y anécdotas de ello en las biografías que se han escrito y también en los relatos de alumnos suyos. Se desenvolvía mejor en las clases para alumnos más avanzados o en conversaciones con ellos fuera de la docencia reglada.

El famoso texto de van der Waerden, "Moderne Algebra", contiene en el segundo volumen material abundante de las clases de Emmy Noether [7].

B. L. van der Waerden publicó en la década de los treinta varios artículos sobre Geometría Algebraica en la revista Mathematische Annalen. En estos artículos dió una definición precisa de dimensión de una variedad algebraica. Para ello utiliza la teoría de ideales en anillos de

polinomios creada por Artin, Hilbert y Emmy Noether, y también la teoría algebraica de cuerpos. Queda fuera del ámbito de esta ponencia comentar estos estudios (y confrontarlos, por ejemplo, con las opiniones de Severi sobre los mismos), así como analizar su propia evolución, visible en su libro de 1939 (*Einführung in die Algebraische Geometrie*), sobre todo por su mayor conocimiento de la geometría italiana (v., a este respecto, el comentario de Dan Pedoe en [7]).

3. El lema de normalización de Noether

Este resultado de Álgebra Conmutativa, debido en su forma más completa a Emmy Noether, tiene una traducción geométrica de gran utilidad y que forma parte de la cultura general y básica en Geometría Algebraica. La primera demostración que conocemos para un cuerpo infinito está en [5].

3.1. Investigaciones de Kronecker y Emmy Noether. Podemos considerar como resultados que dieron lugar al lema de normalización, tal como se conoce hoy, los siguientes:

- Con métodos de la Teoría de Eliminación, Kronecker había probado que toda variedad algebraica es unión de variedades algebraicas irreducibles. Igualmente demostró que, después de una transformación lineal de coordenadas, todos los puntos de una variedad irreducible de dimensión d pueden obtenerse de este modo: *las primeras coordenadas, $x_1, \ldots, x_d$, son arbitrarias y las otras son funciones algebraicas de estas d primeras.*

- Un estudiante de Emmy Noether, Henzel, había obtenido un método de eliminación más elegante que los habituales. Emmy Noether, utilizando el método de Henzel, llegó a los mismos resultados que Kronecker y los completó reemplazando las coordenadas definidas sobre la variedad por indeterminadas y trabajando con el llamado *cuerpo de ceros* del ideal primo que define la variedad irreducible (*cuerpo de funciones*).

3.2. Enunciado y demostración del lema. Tomamos el enunciado que aparece en [1] (v. también [3] y el capítulo I de [4]).

Lema de normalización de Noether: Sea K un cuerpo y $A \neq 0$ una K-algebra con generación finita, $A = K[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces existen elementos $y_1, \ldots, y_r$ de A que son algebraicamente independientes sobre K y tales que A es entero sobre $K[y_1, \ldots, y_r]$.

Esquema de la demostración (según el texto [1]):

- Partimos de que $A = K[x_1, \ldots, x_n]$. Las hipótesis nos permiten afirmar que, reordenando las variables, las primeras r son algebraicamente independientes sobre K y el resto algebraicas sobre $K[x_1, \ldots, x_r]$.
- Aplicamos inducción sobre n para demostrar la segunda parte del enunciado.
- Si $n = r$ no hay nada que probar. Si $n > r$ y el resultado es cierto para $n - 1$, el generador x_n es algebraico sobre $K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ y por tanto existe un polinomio f no nulo con n variables tal que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Sea F la parte homogénea de mayor grado de f. Como K es infinito, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$ tales que $F(\lambda_1, , \ldots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$.
- Si $x'_i = x_i - \lambda_i x_n, (1 \leq i \leq n)$, se prueba que x_n es entero sobre el anillo $A' = K[x'_1, \ldots, x'_{n-1}]$ y por tanto A es entero sobre A'.
- Se termina aplicando la hipótesis de inducción.

De la demostración se deduce que $y_1, \ldots, y_r$ pueden elegirse como combinaciones lineales de $x_1, \ldots, x_n$.

En [3] pueden verse una demostración y un enunciado ligeramente distintos del que en este caso se llama *Teorema de normalización*. Hay una definición que surge naturalmente del Lema (Teorema):

Si A es una K-álgebra afín no nula, $K[y_1, \ldots, y_r] \subset A$ es una *normalización noetheriana* si $y_1, \ldots, y_r$ son algebraicamente independientes sobre K y A es un $K[y_1, \ldots, y_d]$-módulo finitamente generado.

La demostración de [3] y de [4] vale para cualquier cuerpo, finito o infinito, y especifica que la expresión lineal de las $y_1, \ldots, y_r$ en función de las $x_1, \ldots, x_n$ se verifica en el caso en el que K es infinito.

3.3. Interpretación geométrica del lema en el espacio afín y en el espacio proyectivo. Aplicando el lema al anillo de coordenadas de una variedad llegamos a resultados geométricos:

Proposición: Si K es algebraicamente cerrado y X es una variedad algebraica afín de $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^n(K)$, con anillo de coordenadas $A = K[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ y dimensión r, entonces existe una variedad lineal L de dimensión r de $\mathbf{A}^n$ y una aplicación lineal (proyección paralela) de $\mathbf{A}^n$ sobre L que aplica X sobre L y la antiimagen en X de cualquier punto de L es finita. (Ver [1], [3] y [8] (Cap. 1)).

La demostración se basa en aplicar el lema de normalización a la K-álgebra A y entonces encontramos $y_1, \ldots, y_r$, que son polinomios homogéneos lineales de $x_1, \ldots, x_n$. Como además son algebraicamente independientes sobre K, mediante un cambio de coordenadas podemos suponer que $y_i = x_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Consideramos la variedad lineal L de dimensión r dada por $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$. Como el lema de normalización afirma que A es un $K[x_1, \ldots, x_r]$-módulo finitamente generado, por las propiedades de las extensiones enteras de anillos, como es el caso, y en concreto la correspondencia entre los ideales maximales de los dos anillos, se demuestra que la proyección de $\mathbf{A}^n$ sobre L cumple lo que afirma el enunciado.

Un ejemplo elemental de este resultado es la parábola de $\mathbf{A}^2$ dada por $y = x^2$ y su proyección paralela de dirección vertical sobre la recta $y = 0$. Por otra parte, las cónicas $xy = 0$ y $xy-1 = 0$, y sus proyecciones sobre los ejes X e Y, no cumplen la proposicióm, ya que en el primer caso hay fibras infinitas y en el segundo no son sobreyectivas, pero es fácil hacer un cambio coordenadas (que en todo caso debe existir por el lema de normalización) para las cuales las proyecciones horizontales o verticales cumplen la proposición.

Una consecuencia de la proposición es la siguiente:

Corolario: Si X es una variedad algebraica de dimensión r de $\mathbf{A}^n$ $r \geq 0$, existe una variedad lineal L' de dimensión $n - r$ tal que corta a X en una cantidad finita de puntos y otra variedad lineal L'' de dimensión $n - r - 1$ que no corta a X.

La demostración del Corolario se basa en la proyección de la proposición. La antiimagen de cualquier punto p de L por la proyección de $\mathbf{A}^n$

a L, es una variedad lineal, L', de dimensión $n-r$ cuyo corte con X es la antiimagen finita de p por la proyección restringida a X. Si ahora elegimos un hiperplano H que no contiene a ninguno de los puntos de X anteriores (se demuestra que H existe por un cálculo de dimensiones de los conjuntos de hiperplanos que pasan por una cantidad finita de puntos), podemos definir L'' como $L' \cap H$ que verifica lo que se pide en el enunciado.

Observación: La demostración anterior lleva a concluir que, variando el punto p de L, *casi todas* las variedades lineales de $\mathbf{A}^n$ de dimensión $n-r$ (hay que precisar este concepto excluyendo a las paralelas a L y variando la dirección de la proyección paralela) cortan en una cantidad finita de puntos a X y además se puede demostrar que esa cantidad finita es casi siempre la misma.

Si consideramos ahora *variedades algebraicas proyectivas* (conjuntos de un espacio proyectivo dados por ceros comunes a una cantidad finita de polinomios homogéneos) podemos también obtener algunas consecuencias del Lema de Normalización que se demuestran de manera análoga al caso afín:

Proposición: Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y sea X una variedad algebraica proyectiva de $\mathbf{P}^n(K)$ de dimensión $r \geq 0$. Entonces existen variedades lineales L y L' de dimensión r y $n-r-1$, respectivamente, que son disjuntas, L' no corta a X y tales que la proyección central de X en L desde L' es exhaustiva y con fibras finitas.

Observación: La proyección central desde L' se define del modo siguiente: Para cada $x \in X$, la variedad lineal generada por x y L' tiene dimensión $n-r$ y corta a L en un punto, y, que es, por definición, la imagen de x por la proyección central desde L'.

4. Consideraciones finales

Las ideas desarrolladas en el ámbito del Álgebra Conmutativa, y en concreto en la Teoría de Ideales, por Emmy Noether, han contribuido a clarificar y dar rigor de modo muy importante al estudio de las variedades algebraicas. El lema de normalización proporciona la existencia de proyecciones lineales con ciertas propiedades, lleva al estudio de la ramificación para dichas proyecciones, permite definir el grado

y la dimensión de una variedad algebraica o la normalización de una variedad algebraica afín (v. [8]). Además los anillos noetherianos y sus propiedades constituyen el contexto algebraico en el que se trabaja con las variedades en la mayoría de los casos.

Los razonamientos abstractos y axiomáticos de Emmy Noether, a veces difíciles de entender, tuvieron una influencia clara en sus alumnos y matemáticos en general y permitieron un avance significativo en la Geometría y el Álgebra al dar definiciones generales de conceptos que hasta el momento se estudiaban en casos particulares, por muy importantes que fueran éstos.

El párrafo siguiente del citado obituario de Alexandrov [6] describe con gran sensibilidad la personalidad de tan impresionante mujer y matemática:

> *...Ella amó a las personas, a la ciencia y a la vida con todo el calor, el gozo, la generosidad y la ternura de los que es capaz un corazón –el corazón de una mujer– que siente profundamente.*

5. Agradecimientos

Mi agradecimiento a los organizadores de la Jornada Noether por la oportunidad de participar en ella y de acercarme de nuevo a la figura de Emmy Noether y su perseverancia para mantener su dedicación matemática en un ambiente hostil que la rechazaba por ser mujer. Especialmente agradezco a Sebastià Xambó sus comentarios y sugerencias para preparar esta ponencia.

Referencias

[1] M. Atiyah - I.G. MacDonald: *Introducción al Álgebra Conmutativa*, Reverté, 1980.
[2] A. Dick: *Emmy Noether*, Birkhäuser, 1981.
[3] E. Kunz: *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, 1985.
[4] D. Mumford: *The Red Book of Varieties and Schemes*, Springer LNM 1358, 1988.
[5] E. Noether: *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1926), 28-35.
[6] E. Noether: *Collected Papers*, Springer-Verlag, 1983.
[7] Artículo sobre B. L. van der Waerden de J. J. O'Connor y E. F. Robertson en `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Van_der_Waerden.html`
[8] I. R. Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry*, Second Edition, Springer - Verlag, 1994.
[9] B. L. van der Waerden: *Selected Papers*, Springer-Verlag, 1983.

EMMY NOETHER I L'ALGEBRAÏTZACIÓ DE LA TOPOLOGIA

PERE PASCUAL GAINZA

Resum. Aquestes notes són la versió escrita de la conferència pronunciada el 18 de febrer de 2009 a la Jornada Noether de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC. S'hi descriuen alguns dels canvis de la Topologia Algebraica i més concretament de l'homologia, al voltant dels anys 20 sota la influència de Emmy Noether. S'ha procurat mantenir el caràcter expositiu de la conferència.

1. Introducció

La Comissió de l'Any Noether de la Facultat de Matemàtiques Estadística de la UPC em va demanar que fes una presentació de la contribució d'Emmy Noether a la Topologia. És un fet ben assumit que Emmy Noether va tenir un paper molt important en la formulació de la Topologia, i en particular de la Topologia Algebraica, tal i com l'entenem avui en dia, però quin va ser aquest rol?

Emmy Noether és una figura fonamental de les matemàtiques de la primera meitat del segle XX; i és en aquest període que la Topologia esdevé una branca pròpia, alliberant-se de les seves servituds respecte de l'anàlisi i la geometria, alhora que col·laborant al seu desenvolupament conjunt. És lògic preguntar-se doncs si Emmy Noether va intervenir en el desenvolupament de la Topologia i en quina forma.

El llibre de Jean Dieudonné *History of Algebraic and Differential Topology* és segurament el lloc més adient per a començar el nostre recorregut. Hi trobem tres cites a Emmy Noether, totes elles menors (pp. 38, 54 i 68), i en cap d'elles es fa referència a cap treball científic de Noether ni a cap resultat concret. Les cites són referències a la influència d'Emmy Noether en el treball de dos joves topòlegs del

moment que crearien una escola de primer ordre, Pavel Alexandroff i Heinz Hopf. Com es va produir aquesta influència? Emmy Noether es trobava als anys 20 immersa en l'alliberament de l'àlgebra del garbuix de matrius i determinants que la dominaven, substituint-los per mòduls i morfismes, i va ser aquesta visió conceptual la que va transmetre als seus col·laboradors.

Cap els anys 1930, Alexandroff i Hopf van imaginar un tractat complet que descrivís els nombrosos avenços de la Topologia, del qual van escriure el primer volum *Topologie*, iniciant un procés que ha esdevingut usual en matemàtiques i que consisteix en preveure diversos volums sobre un tema per quedar-se només amb el primer, desbordats pels nous punts de vista que s'anaven produint. Al final de la introducció del *Topologie*, Alexandroff i Hopf fan un elogi d'Emmy Noether i la seva influència en la forma i en la presentació de la matèria tal i com apareix en aquell volum:

> La fonamentació de la topologia en la teoria de grups que segueix la nostra exposició es deu enterament a E. Noether [...] Va ser necessària tota l'energia i el temperament d'E. Noether per tal que aquesta algebraïtzació fos acceptada pels topòlegs, i per tal que esdevingués la bastida bàsica en la qual s'estructuren les qüestions i els mètodes de la topologia.

Aquesta cita reflecteix resumidament la intervenció d'Emmy Noether en el desenvolupament de la Topologia. Hi ha un abans i un després d'Emmy Noether, un pas de la Topologia Combinatòria inicada per Poincaré a la Topologia pròpiament Algebraica. Aquesta transició va ser implementada per Alexandroff, Hopf i molts altres matemàtics sota la seva influencia, i també per altres investigadors que treballaven independentment, com ara Vietoris.

En les notes que segueiexen farem un esboç de com estava la Topologia, i més precisament l'Homologia, abans de Noether i com va canviar sota la seva influència, seguint el corrent d'algebraïtzació de la matemàtica dels inicis del segle XX. Estem interessats en mostrar el pas de la intuïció de Riemann a l'aritmetització de Poincaré i la formulació algebraica propiciada per Noether.

Hem estructurat l'exposició a partir de tres fites que hem considerat rellevants per a l'evolució de la Topologia Algebraica que volem analitzar:

- El treball pioner de Riemann (1851, 1857) i Betti (1871), en el qual introdueixen els ordres de connexió d'una varietat.
- La publicació, a partir de l'any 1895, de l'*Analysis situs* de Poincaré i els seus complements, on introdueix l'homologia i demostra alguns resultats fonamentals, com ara el teorema de dualitat.
- La coincidència, el curs 1926/27, de Noether, Alexandroff i Hopf a Holanda, on visiten Brouwer i estudien els seus mètodes i resultats, i l'assistència regular d'Alexandroff i Hopf als seminaris de Noether a Göttingen (amb una estada a Princeton, 27/28).

Tractant-se d'una exposició informativa, proposem un recorregut descriptiu de la situació. Així, aquestes notes no tenen altre objectiu que incentivar el lector interessat a aprofundir en la història de la topologia a partir de la bibliografia ressenyada al final del text.

Vull agrair a l'Abdó Roig el seu ajut per la lectura d'alguns dels textos en alemany. Les traduccions dels diversos paràgrafs que incloem en aquestes notes són aproximades i pretenen, sobretot, reflectir l'esperit d'allò que s'hi diu. Agraeixo al professor Sebastià Xambó els comentaris i observacions sobre una primera redacció d'aquest article.

2. El treball de Riemann i Betti

El nostre recorregut s'inicia amb Bernhard Riemann i els seus estudis de les funcions de variable complexa i de les funcions abelianes, publicats els anys 1851 i 1857, [R1, R2]. És en aquests escrits on Riemann introdueix i analitza l'*ordre de connexió* d'una regió. El paper emergent dels conceptes topològics com a suport de l'anàlisi queda palès en les paraules següents (cf. [R2]):

> en l'estudi de les funcions que provenen de la integració de les diferencials totals, alguns teoremes de l'analysis situs són gairebé imprescindibles. [...] on s'estudien únicament les relacions de situació dels llocs i les regions, fent abstracció de les relacions mètriques.

En la *Inauguraldissertation* de 1851, Riemann considera una funció holomorfa $f(z)$ definida en un domini D del pla, fixa un punt z_0 de D i analitza la dependència de la integral

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz,$$

respecte del camí utilitzat en la integració. Pel teorema de Cauchy, que Riemann també demostra, es té

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0, \tag{1}$$

si γ és un camí tancat que envolta una superfície de D.

Si el camí γ envolta una singularitat de la funció $f(z)$, Riemann aïlla aquesta singularitat mitjançant una circumferència al seu voltant. La fórmula (1) segueix sent vàlida integrant sobre la corba resultant d'adjuntar una nova línia (una secció transversa ℓ) entre aquesta circumferència i γ.

Així, a partir de la teoria de funcions, Riemann entreveu una classificació de les superfícies: anomena *simplement connexes* aquelles superfícies per a les quals no cal afegir cap secció trasversa per tal que se satisfaci (1) per a les corbes tancades, mentre que les altres les classifica segons el nombre de seccions transverses independents que cal afegir perquè esdevinguin simplement connexes.

Els comentaristes posteriors del treball de Riemann assenyalen dues deficiències de la noció d'ordre de connexió anterior: d'una banda, tot i que permet distingir (llevat d'homeomorfisme) entre superfícies compactes sense vora (remarquem que, a l'època, aquestes superfícies eren sempre orientables), aquest no és un invariant complet de les superfícies amb vora; i de l'altra, la demostració de Riemann de la invariància topològica de l'ordre de connexió és obscura i es basa en fets assumits com a intuïtivament evidents que resultarien parcialment falsos.

Enrico Betti va completar el treball de Riemann en un article publicat l'any 1871, [B], en el qual estén la noció d'ordre de connexió per a varietats de dimensió qualsevol. Anotem, de passada, que l'article de Betti marca l'inici de la topologia de les varietats en dimensió superior.

Seguint una definició alterntiva donada pel propi Riemann de l'ordre de connexió per a les superfícies, Betti defineix l'ordre de connexió d'una varietat com segueix:

> Si, en un espai R de dimensió n, podem imaginar un nombre p_m d'espais tancats de dimensió m, que no formin el contorn d'una part connexa d'un subespai de dimensió $m+1$ i tal que tot altre espai de dimensió m formi, ell mateix o amb la totalitat dels p_m espais, el contorn d'una porció connexa de dimensió $m+1$, direm que R té connexió p_m pel gènere m.

Betti contrasta aquests conceptes sobre uns quants exemples, que avui consideraríem elementals (un el·lipsoide, l'espai entre dues esferes concèntriques, l'espai interor d'un un tor, o l'espai entre dos tors), i enuncia el següent teorema d'invariància:

Teorema. *Si t espais tancats de dimensió m, $A_1, \ldots, A_t$ no formen el contorn d'un subespai connex de dimensió $m+1$ de R, però si que ho fan si afegim un altre espai tancat de dimensió m qualsevol, i si un altre sistema $B_1, \ldots, B_{t'}$ d'espais tancats de dimensió m té les mateixes propietats, aleshores $t = t'$.*

La prova d'aquest resultat proposada per Betti segueix de prop la prova de Riemann per a superfícies i, una vegada més, es basa en alguns lemes acceptats sense demostració que no resistiran les anàlisis efectuades pels seus contemporanis.

En definitiva, Riemann i Betti introdueixen els ordres de connexió d'una varietat, però el concepte està mancat de precisió i els resultats que enuncien es basen en una intuició que resulta parcial, i fins i tot errònia. No disposen d'una metodologia adequada per analitzar aquest nou concepte. Aquest és l'estat de l'Analysis Situs abans de l'arribada de Poincaré.

3. L'*Analysis Situs* de Poincaré

Henri Poincaré publica l'any 1895 el transcendental article *Analysis Situs*, [P1]. Al llarg de les més de cent pàgines d'aquest article, i dels complements que el seguiran pocs anys després ([P2]), Poincaré

estableix les nocions fonamentals de la Topologia Algebraica sobre les que s'edificarà aquesta nova àrea de la matemàtica.

Poincaré, com Riemann el 1857, justifica el seu interés pels conceptes bàsics de la Topologia per la necessitat de desenvolupar aquesta nova disciplina com a eïna fonamental de les seva recerca en diferents camps. Aquesta punt de vista es resumeix en el paràgraf següent ([P1]):

> Tots els diferents camins en els quals m'he interessat darrerament em conduixen a l'*Analysis Situs*. Tenia necessitat dels resultats d'aquesta Ciència pel meu estudi de les corbes definides per les equacions diferencials i per estendre'l a les equacions diferencials d'ordre superior, i, en particular, a les del problema dels tres cossos. En tenia necessitat per l'estudi de les funcions no uniformes de dues variables. En tenia necessitat per l'estudi de les integrals múltiples i per a l'aplicació d'aquest estudi al desenvolupament de la funció de pertorbació. [...]

La Topologia, que apareix com una disciplina auxiliar de les matemàtiques, esdevé mitjançant el treball de Poincaré una teoria amb continguts i problemes propis. En els següents anys, seran altres autors els qui resoldran alguns dels problemes plantejats per les idees de Poincaré.

No pretenem analiztar aqui les múltiples contribucions de Poincaré en l'*Analysis Situs* (per a un estudi més aprofundit, consulteu [D2], [Ja], especialment l'article de Sakarian, i [N]), sinó centrar-nos en aquells aspectes de l'homologia que ens seran útils en la nostra història. Assenyalem però, a tall d'exemple dels temes que no analitzarem, que és en aquest article en el qual Poincaré introdueix el grup fonamental d'un espai topològic.

Poincaré inicia l'*Analysis Situs* fixant el concepte de varietat, que Betti havia utilitzat en un sentit un tant imprecís. Per a Poincaré, una varietat M és un subconjunt de $\mathbb{R}^N$ donat per equacions i desigualtats

$$\begin{aligned} F_\alpha(x_1,\ldots,x_N) &= 0, \quad 1 \le \alpha \le p, \\ \Phi_\beta(x_1,\ldots,x_N) &> 0, \quad 1 \le \beta \le q, \end{aligned}$$

essent les funcions que apareixen derivables amb continuïtat.

Per tal de formalitzar la definició d'ordre de connexió de Riemann-Betti, on es parlava de *contorn d'un espai*, Poincaré defineix la *frontera*

de la varietat M com el conjunt donat per

$$\{F_\alpha = 0,\ 1 \leq \alpha \leq p; \quad \Phi_\beta = 0,\ \Phi_\gamma > 0,\ 1 \leq \beta \neq \gamma \leq q\}.$$

Per a Poincaré les varietats són el que avui anomenaríem subvarietats orientades d'$\mathbb{R}^n$ definides implícitament. Sovint, al llarg de l'article de Poincaré, les hipòtesis són implícites, donades pel context.

Si $v_1, \ldots, v_\lambda$ són subvarietats compactes de M de dimensió $q-1$ tals que la seva unió constitueix la *vora completa* d'una subvarietat q-dimensional de M, Poincaré escriu

$$v_1 + \cdots + v_\lambda \sim 0,$$

i diu que és una *homologia* entre les v_i, i afageix una frase que representa un gir fonamental en la definició de l'homologia:

> les homologies es poden combinar com equacions ordinàries.

És a dir, Poincaré considera les subvarietats de M com elements d'una nova estructura en la qual es poden realitzar les operacions aritmètiques bàsiques, la suma i la resta. És potser el primer lloc en la història de les matemàtiques on es considera el grup abelià lliure generat per un conjunt; tot i que, formalment, Poincaré no considera el grup abelià, sino l'aritmètica subjacent.

Aquesta formalització és una mostra d'un procés que Poincaré aplica al llarg de l'*Analysis Situs*, el de substituir la intuició espacial, vaga i poc concreta, per consideracions aritmètiques, més adaptades als raonaments i càlculs matemàtics. Una situació similar s'estava donant en l'anànalisi matemàtica, sobretot amb el treball de K. Weierstrass, conformant allò que F. Klein va anomenar l'*aritmetitació de les matemàtiques*.

Per a Poincaré, aquesta aritmetització de les subvarietats de dimensió q respon a la geometria de la varietat M. Així, el sentit de nv no és altre que el d'una suma d'n-subvarietats $nv \sim v_1 + \cdots + v_n$, *lleugerament* diferents de v, terme imprecís, però que responia a la intuició; mentre que el sentit de $-v$ correspon al canvi d'orientació de la subvarietat.

Un cop establerta la noció d'homologia i de depència lineal associada, Poincaré defineix els nombres de Betti de M, b_i, $0 \leq i \leq \dim M$, segons

$$\begin{aligned} b_i \ := \ & \text{nombre màxim de subvarietats compactes i connexes} \\ & \text{de dimensió } i \text{ que són independents,} \end{aligned}$$

on hem utilitzat la notació moderna (originalment Poincaré defineix uns nombres de Betti P_i tals que $b_i = P_i - 1$), i accepta implícitament que aquesta definició coincideix amb la d'ordre de connexió de Riemann-Betti, basant-se en part en els càlculs que efectua per als exemples analitzats per Betti, on troba aquesta coincidència. Per la pròpia definició, els nombres de Betti són invariants diferencials de les varietats, per la qual cosa no li cal plantejar el problema de la seva invariància.

Els dos resultats fonamentals referents als nombres de Betti de l'*Analysis Situs* són:

Teorema de dualitat. *Si M és una varietat compacta, connexa, orientable i de dimensió n, aleshores*

$$b_{n-i} = b_i.$$

Característica d'Euler-Poincaré. *Si α_i és el nombre de símplexs de dimesió i d'una triangulació de M, aleshores $\sum(-1)^i\alpha_i$ és independent de la tiangulació.*

Tot i l'esforç de fonamentació de Poincaré, el seu treball té algunes llacunes, com assenyala l'any 1898 el matemàtic holandès Poul Heegaard. En la seva tesi, Heegaard prova que si M és la varietat de dimensió 3 intersecció del con $z^2 = xy$ amb el cilindre $|x|^2+|y|^2 = 1$ a $\mathbb{C}^3$, aleshores

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0,$$

contradient el teorema de dualitat establert per Poincaré. Analitzant aquest exemple, Poincaré observa dos fets importants. D'una banda, que Heegaard utilitza la definició d'ordre de connexió de Riemann-Betti, cosa que mostra que és diferent de la definició de nombre de Betti de Poincaré, i de l'altra, que la prova del teorema de dualitat va bé indistintament de la definició que es prengui. Es fa palesa un cop

més la necessitat d'una bona fonamentació de la Topologia que permeti un tractament més rigurós dels conceptes involucrats.

Quina és la diferència entre la definició de Riemann-Betti i la de Poincaré? L'ordre de connexió q-èsim de Riemann-Betti és el màxim nombre de subvarietats compactes, connexes i *diferents* v_i tals que la unió no és vora d'una subvarietat de dimensió $q+1$.

Això no impedeix que existeixin enters n_i tals que

$$n_1 v_1 + \cdots + n_\lambda v_\lambda \sim 0,$$

possibilitat que sí contempla Poincaré. Dit altrament, amb Poincaré es tenen en compte per primera vegada els fenòmens de torsió. Un exemple elemental d'aquesta situació, que s'imparteix en qualsevol curs de Topologia Algebraica, el dóna l'espai projectiu real: a $\mathbb{P}^3$ hi ha un $\mathbb{P}^1$ que no és vora, però si que ho és $2\mathbb{P}^1$.

En el primer dels complements a l'Analysis Situs, [P2], Poincaré fa un pas endavant en el camí d'aritmetització de la topologia: reformula la definició d'homologia, introduint els *complexos simplicials* mitjançant una triangulació T de la varietat M (que Poincaré suposa que vé donada d'antuvi), el que donarà lloc a l'anomenada *Topologia Combinatòria.*

Així, Poincaré parteix d'una triangulació T amb cel·les q-dimensionals orientades a_i^q, $1 \leq i \leq \alpha_i$. Donades cel·les a_i^q, a_j^{q-1}, defineix el nombre d'incidència

$$\varepsilon_{ij}^q = [a_i^q : a_j^{q-1}] = \pm 1, 0.$$

segons que a_j^{q-1} formi part o no de la vora de a_i^q, i en cas afirmatiu, $+1$ o -1 segons que l'orientació induïda sobre a_j^{q-1} coincideixi o no amb l'original.

Seguidament considera les cadenes (el terme *cadenes* es deu a Alexander)

$$\sum \lambda_i a_i^q$$

i defineix la vora d'una cadena com

$$\sum \lambda_i \varepsilon_{ij}^q a_j^{q-1},$$

establint la relació

$$\sum \lambda_i a_i^q \sim 0,$$

quan la cadena és una vora. Demostra, a més, que la vora d'una cadena que és vora, és zero; és a dir, el que ara escrivim com la relació fonamental $\partial^2 = 0$.

Poincaré organitza els nombres d'incidència mitjançant una matriu de tipus $\alpha_q \times \alpha_{q-1}$, la *matriu d'incidència*

$$E_q = (\varepsilon_{ij}^q),$$

i estableix un resultat fonamental que relaciona aquestes matrius amb els nombres de Betti, tal com ell els havia definit a l'*Analysis Situs*. En efecte, Poincaré utilitza el teorema de Frobenius (del qual, de fet, en dóna una demostració independent) segons el qual la matriu d'incidència admet una reducció en la forma $PE_qQ = (\rho_{ij})$, on P i Q són matrius unimodulars, amb

$$\rho_{ij} = 0, i \neq j, \quad \rho_{ii} | \rho_{i+1,i+1}, \quad \text{i}$$

$$\rho_{ii} = 0 \Leftrightarrow i > \gamma_q = \text{rang } E_q.$$

Poincaré demostra aleshores la relació fonamental

$$b_q = \alpha_q - \gamma_q - \gamma_{q+1}. \tag{2}$$

A partir d'aquest punt, el teorema de dualitat i el de la característica d'Euler es dedeuixen fàcilment:

- Pel que fa a la dualitat, Poincaré considera la *triangulació dual* T^* de T i observa que la matriu d'incidència corresponent és la transposta de la matriu d'incidència de T, més concretament, que $E^*_{n-p+1} = E^t_p$. Per tant, $\gamma^*_{n-p+1} = \gamma_p$, i com $\alpha^*_{n-p+1} = \alpha_{p-1}$, de (2) se segueix que

  $$b^*_{n-p+1} = \alpha^*_{n-p+1} - \gamma^*_{n-p+1} - \gamma^*_{n-p+2} = \alpha_{p-1} - \gamma_p - \gamma_{p-1} = b_{p-1}$$

  Poincaré prova, per un procés de subdivisió baricèntrica, que $b^*_i = b_i$, per la qual cosa dedueix finalment el teorema de dualitat

  $$b_{n-i} = b_i.$$

- Pel que fa a la característica d'Euler, la fórmula (2) dóna immediatament

  $$\sum (-1)^i \alpha_i = \sum (-1)^i b_i,$$

  i, per tant, la invariància de la característica.

El nou treball de Poincaré obra molts interrogants: la invariància topològica dels b_i, la triangulabilitat de les varietats, etc. que no seran resolts fins a uns quants anys després. Hem de remarcar que la Topologia Combinatòria és una disciplina difícil, mancada d'un llenguatge adequat per atacar els diversos problemes que planteja. En aquest context d'invariants numèrics poc estructurats, només un treball de fina orfebreria permetria a Hermann Künneth, els anys 1923/24, fer el càlcul dels nombres de Betti d'un producte de compexos simplicials, tal i com assenyala Friedrich Hirzebruch, [Hi].

Com a resultat dels entrebancs que sorgeixen en l'anàlisi de la topologia de les varietats, l'any 1913 James W. Alexander i Oswald Veblen es proposen fonamentar el treball de Poincaré en unes bases sòlides i dotar-lo de tècniques de demostració adequades, establint un programa de treball que s'haurà de desenvolupar en el temps. Fruit d'aquest treball, l'any 1922, Veblen publica el llibre *Analysis situs*.

Tot i l'esforç de Veblen, encara quedava molta feina per fer, com demostra el següent comentari de Saunders MacLane :

> era extremadament difícil entendre la topologia combinatòria seguint el llibre de Veblen sense un mestre; l'any 1931 ho vaig intentar i vaig fracasar,

i és en aquest context que el punt de vista de Noether esdevindria clau.

Abans de situar el paper d'Emmy Noether en el desenvolupament de l'homologia hem d'esmentar una altra gran figura de la Topologia a principis del segle XX, Lutzien Brouwer. Entre els anys 1910 i 1912, Brouwer desenvolupa nous mètodes de demostració i prova alguns resultats fonamentals. Així, introdueix l'aproximació simplicial d'una aplicació contínua i el grau d'una aplicació, i amb aquest bagatge demostra un seguit de resultats clau que representaven un repte per a la nova disciplina emergent: la invariància de la dimensió, la invariància del domini, el teorema de Jordan-Brouwer, el teorema del punt fix; i analitza les singularitats dels camps vectorials.

En definitiva, Brouwer remarca la importància de les apliacions contínues simplicials en l'anàlisi de la topologia de les varietats. Dieudonné [D2] resumeix les contribucions de Poincaré i Brower de la forma següent:

> es pot assegurar que Poincaré va definir els objectes de la Topologia Algebraica, però que va ser Brouwer qui va imaginar els mètodes mitjançant els quals els teoremes sobre aquests objectes es poden provar.

4. El panorama en temps d'Emmy Noether

Com ja hem esmentat, a mitjants dels anys 20, Emmy Noether es trobava immersa en un procés de refonamentació de l'àlgebra en el qual es primen les estructures sobre els elements particulars i les operacions associades. Per a Noether, les relacions numèriques només esdevenien clares i aplicables quan eren aïllades dels objectes particulars que les conformaven, establint-se mitjançant conceptes vàlids universalment.

Per il·lustrar el paràgraf anterior basta referir-nos a l'article *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*, publicat l'any 1927 ([N2], [J]), en el qual Noether introdueix conceptes i resultats que avui en dia estan a la base de qualsevol presentació de l'àlgebra, i que podem estar temptats d'imaginar que sempre hi han estat, tot que és aleshores que prenen carta d'identitat. Així, Noether introdueix els morfismes entre mòduls:

> Si M i $\overline{M}$ són mòduls sobre R, diem que M és homomorf a $\overline{M}$, $M \sim \overline{M}$, si tot element de M representa un i només un element de $\overline{M}$; i per aquesta correlació la diferència i el múltiple per un element de R es representen per ells mateixos,

i els mòduls quocient:

> Si U és un R-mòdul contingut en M aleshores s'obté un mòdul $\overline{M}$ homomorf a M —el mòdul de classes de residus $M|U$— prenent congruència mòdul U com la relació d'igualtat [...] recollim els elements iguals de $\overline{M}$ en una classe i concevim aquestes classes com els elements de $\overline{M}$.

Aquesta darrera frase és molt significativa, ja que Noether és la primera que analitza un quocient com a conjunt *per se*, de forma abstracta i com un objecte a analitzar individualment (els grups d'homologia en serien una aplicació evident). Aquest tractament de l'àlgebra és el que s'anomenaria l'*àlgebra basada en la teoria de conjunts de Noether* (cf. [M]).

Un cop establertes les nocions d'homomorfisme i de quocient, Noether demostra els teoremes d'isomorfisme. Per exemple, enuncia el primer teorema d'isomorfisme en la forma:

> **Primer teorema d'isomorfisme**. Sigui $\overline{M}$ el mòdul de classes de residus $M|U$ i C un divisor de U. Aleshores hi ha un isomorfisme $\overline{M}|\overline{C} \simeq M|C$.

(En l'enunciat anterior Noether utilitza un llenguatge heretat de l'aritmètica segons el qual C és un divisor de U si $U \subseteq C$, que és la mena de relació que trobem entre els ideals i divisors de $\mathbb{Z}$.)

Podem imaginar el punt de vista adoptat per Noether com l'embrió de la noció de categoria abeliana desenvolupat per S. MacLane (qui, per cert, va participar als seminaris de Noether a Göttingen a finals dels anys 20) i, sobretot, per A. Grothendieck, ja que les categories abelianes donen el context adequat on els morfismes i els teoremes d'isomorfisme adquireixen tot el seu valor.

Noether assenyala la importància de les estructures i les seves relacions mitjançant els homomorfismes. Una mostra més d'aquest punt de vista és l'anàlisi del teorema de Frobenius utiltzat per Poincaré, assenyalat en la secció anterior. Noether inverteix la prova del teorema per establir directament el teorema de classificació dels grups abelians finit generats, del qual deduix el resultat de Frobenius. Per a Emmy Noether, els grups són més simples que l'aritmètica subjacent. De fet, és en aquest context en el qual trobem l'única referència a la topologia en els treballs de Noether ([N1]):

> El teorema sobre els grups és el més simple; en l'aplicació d'aquest teorema —e.g. pels nombres de Betti i de torsió en topologia— no cal fer referència al teorema dels divisors elementals.

En el curs 1926/27 Emmy Noether visita Brouwer a Holanda, on troba un grup de matemàtics joves i prometedors que assisteixen als seminaris i conferències de Brouwer. En aquells anys, per Holanda passen la major part dels joves topòlegs europeus, com ara Alexandroff, Hopf, Hurewicz, Uryshon o Vietoris. Sota la influència de Brouwer, aquests topòlegs emfasitzaran el paper de les aplicacions contínues per damunt dels espais i varietats. Noether, que al seu torn està remarcant la importància dels morfismes en l'àlgebra, coincideix amb Alexandroff i

Vietoris i exerceix una clara influència en el primer, com ho mostra el següent comentari d'Alexandrof:

> la meva teoria de particions contínues d'espais topològics [descomposició canònica d'una aplicació contínua] va sorgir en gran mesura de la influència de les converses amb ella [Emmy Noether] [...] quan ambdós ens trobàvem a Holanda.

A partir d'aquell moment, Alexandroff i Hopf assisteixen regularment als seminaris d'Emmy Noether a Göttingen, i desenvolupen part de la seva recerca sota la influència dels novedosos punts de vista que ella proposa, com evidencien les paraules recollides al pròleg del *Topologie* recordades a la introducció.

Hopf ho recorda, l'any 1966, amb les següents paraules ([Ho2]):

> Alexandroff i jo vam aprendre d'E. Noether els fonaments de la teoria d'homologia pels complexos simplicials. És a dir, si X^r és el grup de cadenes r-dimensionals i $\partial : X^{r+1} \longrightarrow X^r$ l'homomorfisme vora, aleshores $\partial\partial = 0$. Això significa que $\partial X^{r+1} \subseteq Z^r$, on Z^r denota el nucli de $\partial : X^r \longrightarrow X^{r-1}$. El grup $H^r = Z^r/\partial X^{r+1}$ és l'i-èsim grup d'homologia, i es té
>
> $$b_i = \mathrm{rang} H^i.$$
>
> Aquesta igualtat era la traducció dels teoremes d'isomorfisme en aquest context
>
> $$X^r/Z^r \cong \partial X^{r+1}, \qquad Z^r/\partial X^{r+1} \cong H^r \ .$$

Hopf va ser un dels pioners en la utilització dels grups d'homologia i de l'àlgebra associada, constatant ben aviat els avantatges de disposar de les eïnes que proporcionaven les idees d'Emmy Noether aplicades a la topologia. Ho assenyala explícitament en el seu treball sobre punts fixos. En efecte, Hopf estudia els punts fixos d'una aplicació contínua qualsevol $f : X \longrightarrow X$, on X és un complex simplicial de dimensió finita n. Per fer-ho, introdueix el morfisme $f_{*,q}$ induït per f en l'homologia q-èsima (un cop més estem simplificant la presentació utilitzant el llenguatg actual, mentre que Hopf va utilitzar en primera instància una complicada combinatòria) i, seguint el treball de Solomon Lefschetz, introdueix el *nombre de Lefschetz*

$$\Lambda(f) = \sum_{0 \leq q \leq n} (-1)^q \mathrm{tr}(f_{*,q}),$$

per provar el resultat següent:

Teorema del punt fix. *Suposem que f no té punts fixos, aleshores* $\Lambda(f) = 0$.

Hopf redueix la prova d'aquest resultat al que anomenarà una *fórmula d'Euler-Poincaré generalitzada*

$$\sum_{0 \leq q \leq n} (-1)^q \mathrm{tr}(f_q) = \sum_{0 \leq q \leq n} (-1)^q \mathrm{tr}(f_{*,q}),$$

on els f_q són els morfismes associats a una aproximació simplicial d'f entre els complexos de cadenes. D'aquesta fórmula Hopf en va donar dues proves, en la segona de les quals va utilitzar tota la potència de les idees de Noether, cosa que explicava en la forma següent ([Ho1]):

> Vaig ser capaç d'emmarcar la prova original d'aquesta fórmula d'Euler-Poincaré generalitzada en un context més simple i més clar al llarg d'una sèrie d'exposicions que vaig fer a Göttingen l'estiu de 1928, introduint-hi, sota la influència de la Senyora E. Noether, les idees de teoria de grups.

Al llarg dels anys 30 les idees de E. Noether implementades per Alexandroff i Hopf van impregnar tota la Topologia Algebraica, tot i que amb algunes reticències. Alexandroff comenta:

> Hopf i jo vam adoptar immediatament el punt de vista d'Emmy Noether, però per algun temps ens vam trobar entre un reduït grup de matemàtics, ja que no va trobar una acollida favorable per part de molts topòlegs d'autoritat.

Bona mostra de la desconfiança sobre els nous mètodes proposats per Noether i implementats per Alexandroff i Hopf, i l'acceptació posterior, n'és l'actitud de Lefschetz. L'any 1930 Lefschetz escriu en el pròleg del llibre *Topology*, [L1]:

> La connexió amb la teoria abstracta de grups és clara... De fet tot el que segueix pot enunciat-se en termes de la teoria de grups. És simplement una qüestió de terminologia.

Anys més tard, en el llibre *Algebraic Topology*, publicat el 1942 ([L2]), Lefschetz canviaria aquest punt de vista i assumiria plenament el plantejament de Noether:

> Com ha assenyalat Emmy Noether, la relació entre cadenes, cicles, ..., l'única forma adequada d'expressar-la, requereix la teoria de grups.

Observació: Hem d'assenyalar que els grups d'homologia van ser introduits independentment per Vietoris, i pel seu estudiant Walther Mayer (en aquest sentit, vegeu [D1], [M1] i [R]), en el context de l'homologia dels espais mètrics (Vietoris, 1927) i del càlcul de l'homologia mitjançant l'homologia de peces més simples (Mayer, 1929), com per exemple, quan formulen la igualtat

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

5. Comentaris finals

Emmy Noether no va treballar directament en els problemes de la Topologia, però sota la seva influència els grups d'homologia esdevenen el tema central de la Topologia Algebraica. Coneixem aquesta influència mitjançant els testimonis dels seus contemporanis, sobretot els d'Alexandroff i Hopf.

Podriem concloure que Emmy Noether va introduir, en un sentit encara naïve, la functorialitat en Topologia. En paraules de MacLane, [M2]:

> Al 1930, Emmy Noether va emfasitzar la idea de que l'homologia no tractava simplement dels nombres de Betti, sinó de grups abelians [...] els grups d'homologia donaven una imatge algebraica de la topologia —una primera versió de la idea final [...] del que avui anomenariem *functors* [...]

Aquest punt de vista functorial va permetre, a partir dels anys 30, un desenvolupament espectacular de la Topologia Algebraica. Assenyalem alguns dels ítems més significatius en el desenvolupament de l'homologia dels espais topològics:

- 1935 En la conferència internacional de Moscou, Alexander i Whitney defineixen l'anell de *cohomologia*

$$H^p(X) \times H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X),$$

per a *tot espai* topològic X.

- 1944 Eilenberg introdueix l'homologia singular.
- 1945 Eilenberg i MacLane introdueixen les categories i els functors.
- 1945 Eilenberg i Steenrod desenvolupen la teoria axiomàtica de l'homologia.

Amb el temps, la visió conceptual de Emmy Noether dóna lloc a una nova disciplina, l'àlgebra homològica, i les seves aplicacions apareixen en els llocs més insospitats. Tot i això, el paper d'E. Noether es va diluint. En paraules de David Blanco, [Bl]:

> Noether pertenece a la estirpe de los creadores que con el paso del tiempo acaban por volverse invisibles: sus puntos de vista, tan cuestionados en su día, han terminado por asimilarse con tal intensidad que quienes hoy manejan sus ideas piensa que pertenecieron al álgebra desde tiempos de los griegos.

Referències

[A] P. Alexandroff, *Die Topologie in und um Holland in der Jahren 1920-1930.* Niue Archief voor Wiskunde (3) **XVII**, (1969), 109–127.

[AH] P. Alexandroff, H. Hopf, Topologie. Springer, 1935. (Reimpressió: Chelsea Publ. 1965)

[B] E. Betti, *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni.* Annali di Matematica pura ed applicata. **4**, (1871), 140–18.

[Bl] D. Blanco, Emmy Noether, matemática ideal. Nívola, 2005.

[D1] J. Dieudonné, *Emmy Noether and Algebraic Topology.* Journal of Pure and Appl. Algebra **31**, (1984), 5–6.

[D2] J. Dieudonné, History of Algebraic and differential Topology, 1900-1960. Birkhäuser Verlag, 1989.

[Hi] F. Hirzebruch, *Emmy Noether and Topology.* En "The mathematical heritage of Emmy Noether". Bar Ilan Univ. (1999), 57–65.

[Ho1] H. Hopf, *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel.* Nachrichten, Gesellschaft der Wissenchaften zu Göttingen, (1928), 127-136.

[Ho2] H. Hopf, *Einige persönliche Erinnerungen aus der Topologie.* Colloque de Topologie. CBRM, Bruxelles (1966), 9–20.

[J] N. Jacobson (ed), E. Noether: Gesammelte Abhandlungen. Springer Verlag, 1983.

[Ja] I. M. James (ed), History of Topology. Noth-Holland, 1999.

[L1] S. Lefschetz, Topology. AMS, 1930.

[L2] S. Lefschetz, Algebraic Topology. AMS, 1942.

[M1] S. MacLane, *Topology became algebraic with Vietoris and Noether.* Jour. of Pure and Appl. Algebra**39**, (1986), 305–307.

[M2] S. MacLane, *Samuel Eilenberg and Categories.* Jour. of Pure and Appl. Algebra**168**, (2002), 127–131.

[M] C. McLarty, *Emmy Noether's "set theoretic" topology: from Dedekind to the first functors.* En "The architecture of modern mathematics". Oxford, 2006. 21–235.

[N1] E. Noether, *Abstract.* Jahresbericht DMV, (1926), 34–104.

[N2] E. Noether, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern.* Math. Annalen, **96**, (1927), 26–91.

[N] S. Novikov, *Henri Poincaré and XXth Century Topology.* Proc. of the Symposium Henri Poincaré. International Solvay Institutes for Physics and Chemistry. Brussels, 8-9 October 2004.

[P1] H. Poincaré, *Analysis Situs.* Journal de l'École Polythecnique **1**, (1895), 1–121.

[P2] H. Poincaré, *Compléments à l'Analysis Situs.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **13**, (1899), 285–343.

[P] J.C. Pont, *La topologie algébrique des origines à Poincaré.* Presses univ. de France, 1974.

[R] H. Reitberger, *Leopold Vietoris, (1891-2002).* Notices AMS, **49** (10), 1232-1236.

[R1] B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.* Inagurationdissertation, Göttingen, 1851.

[R2] B. Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen.* J f. Math. **54** (1957).

[V] O. Veblen, Analysis Situs. AMS, 1922.

HILBERT REVISITED

DAVID BUCHSBAUM

1. Introductory comments

The seeds of a good deal of the material I'll talk about today may be found in the beautiful 1890 article by Hilbert: On the theory of algebraic forms (Über die Theorie der algebraische Formen), [13]. When I was a graduate student, people spoke of that paper as the one that killed off invariant theory. I hope the irony of this perception will become evident as we proceed with this talk.

It was in that paper that the famous Basis Theorem and Syzygy Theorem were proved; the first, a fundamental result for the development of commutative algebra as we know it; in fact, the basis of one of the definitions of "Noetherian," and the second, the nineteenth century form of the statement that the global dimension of the polynomial ring in n variables is n.

Hilbert was concerned with fundamental problems of invariant theory: given a linear group, G, acting linearly on the ring of polynomials, $S = K[X_1, \ldots, X_N]$, we let S^G be the subring of invariants. Is S^G finitely generated as an algebra over the field, K, and if so, what are its generators? Assuming it is finitely generated, that is, that $S^G = K[Y_1, \ldots, Y_{N'}]/I$, is it the case that I is finitely generated as an ideal in $K[Y_1, \ldots, Y_{N'}]$? (The ideal, I, is called **the ideal of relations on the invariants**.) To answer the latter question, Hilbert proved his famous *Basis Theorem*, undeniably one of the cornerstones of commutative algebra.

Because G acts linearly on the variables of S, it's clear that the ring S^G is graded and that the graded piece of degree ν, $(S^G)_\nu$, is a finite-dimensional vector space over the field, K. A question of prime concern

was to determine the dimension of this space for all ν, that is, to evaluate the function $\chi(\nu) = \dim_K((S^G)_\nu)$ for all ν (what we today call the *Hilbert function*), and to determine its growth. What Hilbert saw was that this could be done if one could write down a finite free resolution of S^G over the polynomial ring, $K[Y_1, \ldots, Y_{N'}]$ (this gives an explicit computation of the dimension, and also shows that the function is polynomial; we'll see an example of this in the next section). He then proceeded to prove the *Syzygy Theorem,* clearly a fundamental result in homological algebra.[1]

So, starting with a basic problem in invariant theory, Hilbert was led to prove two of the building blocks of commutative and homological algebra. If, indeed, he did "kill" invariant theory, he certainly atoned for it with a wealth of reparations. But we'll get back to representation theory again later.

2. An example

To illustrate the ideas mentioned above, let us consider the variables $\{U_{ij}, V_{jk}\}$ over a field, K, with $i = 1, 2, 3; j = 1, 2; k = 1, 2$, and the polynomial ring, $S = K[U_{ij}, V_{jk}]$. The general linear group of 2×2 non-singular matrices, $G = GL_2(K)$, operates on S in the following way: A matrix, A, operates on S by multiplying the matrix (U_{ij}) on the right by A^{-1}, and by multiplying the matrix (V_{jk}) on the left by A. It's fairly easy to show that the ring of invariants, S^G, is generated by all six elements of the form $Z_{ik} = \sum_{j=1,2} U_{ij}V_{jk}$; the ideal of relations on the invariants is, by the Hilbert Basis Theorem, finitely generated, and it is again not difficult to prove that the 2×2 minors of the matrix (Z_{jk}) generate this ideal, which we will call I_2. Thus, our ring S^G is the graded ring, $K[\{Z_{ik}\}]/I_2$.

Suppose, now, that we want to calculate the Hilbert function of S^G. Let $x_i = Z_{i1}$ and $y_i = Z_{i2}$, for $i = 1, 2, 3$. Our ideal is generated by the

[1]The Syzygy Theorem did more than provide a way to evaluate the function, $\chi(\nu)$; it actually showed that for large values of ν, the function is a polynomial function, that is, it agrees with a polynomial for sufficiently large ν.

minors of order two of the matrix:

$$\Delta = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3' \end{pmatrix},$$

and we set R to be the graded polynomial ring, $K[x, y]$. We get the exact sequence (the exact sequence associated to the syzygies of the R-module, R/I_2):

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\beta} R^3 \xrightarrow{\alpha} R \to R/I_2 \to 0$$

with $\beta : R^2 \to R^3$ the map whose 2×3 matrix is $\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 \\ y_1 & -y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ and $\alpha : R^3 \to R$ the map whose 3×1 matrix is $\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix}$, where Δ_i is the 2×2 minor obtained from Δ by eliminating the ith row.

It's now easy to compute the νth degree of our factor ring as

$$\binom{6+\nu-1}{\nu} - 3\binom{6+\nu-3}{\nu-2} + 2\binom{6+\nu-4}{\nu-3} =$$

$$3\binom{\nu}{3} + 7\binom{\nu}{2} + 5\binom{\nu}{1} + 1.$$

This is clearly a polynomial function of degree three.

3. Homology and commutative ring theory

Here we'll elaborate a bit on the notions of homological dimension, global dimension, and other ways that homology ties in with algebra.

One very simple illustration of the relationship between homology and algebra is the following. Suppose R is a commutative ring, and x an element of R. One is immediately led (if one is so inclined) to consider the complex:

$$0 \to R \xrightarrow{x} R \to 0.$$

Its zero-dimensional homology is the module, $R/(x)$, and its one-dimensional homology is the ideal, $(0) : x = \{y \in R/xy = 0\}$. Thus, the vanishing of the first tells us that the element, x, is a unit, and the

vanishing of the second tells us that x is not a zero-divisor in R. If we replaced R by the R-module, M, and considered the complex

$$0 \to M \xrightarrow{x} M \to 0,$$

the vanishing of the zero-dimensional homology would tell us that every element of M is divisible by x, and the vanishing of the one-dimensional homology would say that x is a regular element for M, that is, that there is no non-zero element of M that is annihilated by x. We can extend the notion of regular element to the notion of **regular sequence of elements** for a module, M: the sequence, $\{x_1, \ldots, x_n\}$, of elements of R is said to be regular for M, if for each $i = 0, \ldots, n-1$, the element x_{i+1} is regular for $M/(x_1, \ldots, x_i)M$. When $i = 0$, this just means that x_1 is regular for M. One also adds the condition that $(x_1, \ldots, x_n)M \neq M$.

Now, if we have a complex, $\mathbf{C}$, of R-modules, and an element $x \in R$, multiplication by the element x on $\mathbf{C}$ yields a map of the complex into itself. The mapping cone of this map of complexes is another complex which we can denote by $\mathbf{C}(x)$.[2] Given a sequence of elements, $\{x_1, \ldots, x_n\}$, we can iterate this procedure[3] and obtain the complex, $\mathbf{C}(x_1, \ldots, x_n)$. In particular, given a module, M, and the sequence of elements $\{x_1, \ldots, x_n\}$, we can form the complex, $M(x_1, \ldots, x_n)$; this is known as the **Koszul complex over M associated to the sequence, $\{x_1, \ldots, x_n\}$.**

A very nice relationship between this homological construction and the notion of regular sequence is the following:

If R is a local ring, M an R-module, and $\{x_1, \ldots, x_n\}$ a sequence of elements in the maximal ideal of R such that $M/(x_1, \ldots, x_n)M \neq 0$, then $\{x_1, \ldots, x_n\}$ is a regular M-sequence if and only if

$$H_1(M(x_1, \ldots, x_n)) = 0.^4$$

[2]If $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ are complexes, and $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ is a map (of degree 0), the mapping cone of f is the complex, $\mathbf{Y}$ defined by: $Y_n = A_{n-1} \bigoplus B_n$, and with the boundary map, $d_f : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$ given by $d_f(a, b) = (d_{\mathbf{A}}(a), d_{\mathbf{B}}(b) + (-1)^{n-1} f(a))$.

[3]Here we are using the fact that R is commutative; if R weren't commutative, we could still iterate this procedure if we assumed that the elements x_i commuted among themselves.

[4]The vanishing of H_1 is equivalent to the vanishing of H_i for all $i > 0$ in the case of a local ring.

For simplicity, we'll assume from now on that our rings, R, are all local rings.

Regular sequences have played a pretty important role in local ring theory. In fact, they are fundamental in defining a sort of arithmetic notion of "size" of an ideal and of a local ring.

In noetherian ring theory, if we are given an ideal, I, we use the rank or height of I as a measure of its "size" (really tied up with a geometric notion of dimension). If we're given a ring, R, we use its Krull dimension as a measure of its "size." I say they are a geometric type of measure since they are connected with the lengths of nested sequences of varieties. We say that the **depth** of an ideal, I, is the length of the longest R-regular sequence contained in I, and the **codimension** of a local ring is the depth of its maximal ideal. Since the regularity of a sequence is a more or less arithmetic idea, I think of depth and codimension as an "arithmetic measure" of size. In a Cohen-Macaulay ring, these two measures coincide; for that reason, the application of algebraic techniques to Cohen-Macaulay varieties is so effective.

For a local ring, then, we have two integers connected with its size: its codimension, and its dimension (or Krull dimension). There is also another well-known integer associated with a local ring: its **embedding dimension**, written $\operatorname{edim}(R)$. This number is the smallest number of elements required to generate the maximal ideal of the ring.

The Krull Principal Ideal Theorem tells us that the embedding dimension of a local ring is always greater than or equal to its dimension, and it's easy to show that the dimension of a local ring is always greater than or equal to its codimension. The classical definition of a **regular local ring** is that a local ring is regular if its embedding dimension is equal to its dimension. A classical question about regular local rings, unanswered until the advent of homological tools, was the following: If R is a regular local ring, and $\mathfrak{p}$ a prime ideal of R, is the localization, $R_{\mathfrak{p}}$, again regular?

To see how the introduction of homological tools helped to solve this problem, we define a few more constants associated with a local ring.

The first is **projective dimension of a module** (and this idea goes straight back to the Hilbert paper, [13]). If

$$\mathbf{P} : \cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$$

is a complex of projective modules (P is **projective** if it is the direct summand of a free module), we say it is a **projective resolution of the module,** M, if $H_0(\mathbf{P}) = M$ and $H_i(\mathbf{P}) = 0$ for all $i > 0$. Every module has a projective resolution and, since over a local ring, all projective modules are free, the notions of a free resolution (the only ones considered by Hilbert) and a projective one, coincide.

We say that such a resolution is finite if there is an integer, m, such that $P_i = 0$ for all $i > m$, and we define the length of such a resolution to be the smallest such integer m. We say that a module, M, has finite projective dimension if it has a finite projective resolution, and in that case we define its projective dimension, $\mathrm{pd}_R(M)$, to be the smallest of the lengths of its projective resolutions. If a module has no finite resolution, we say its projective dimension is infinite.

If R is a local ring, we define the **global dimension of** R, denoted by $\mathrm{gldim}(R)$, to be $\sup_M \mathrm{pd}_R(M)$, where M runs over all R-modules. We define the **finitistic global dimension of** R, denoted by $\mathrm{fgldim}(R)$, to be $\sup_N \mathrm{pd}_R(N)$, where N runs over all R-modules such that $\mathrm{pd}_R(N) < \infty$.

It was known almost from the inception of homological algebra that if R is a regular local ring, then $\mathrm{fgldim}(R)$ is finite (and equal to its dimension). This is pretty much the Hilbert Syzygy Theorem for local rings. If it could be shown that finite global dimension characterized regular local rings, then the problem of the localization by a prime ideal would have an affirmative answer. For it's known that the global dimension of the localization of a ring, R, is always less than or equal to that of R. Therefore, it was pretty evident that this homological characterization of regularity would be quite useful.

Much of the foregoing discussion, as well as the proof of the following result, can be found in [4].

Theorem

If R is a local ring, the following inequalities always hold:

$$\mathrm{fgldim}(R) = \mathrm{codim}(R) \leq \dim(R) \leq \mathrm{edim}(R) \leq \mathrm{gldim}(R).$$

An immediate corollary of this is the following:

Corollary

A local ring, R, is regular if and only if $\mathrm{gldim}(R)$ is finite.

Another classical problem that defied solution without the use of homological tools was to show that every regular local ring is factorial. One clue that factoriality and homology are related is that, for a commutative ring, R, factoriality is equivalent to $\mathrm{pd}_R R/(x,y) \leq 2$ for every pair of elements, x, y, in R. The proof that every regular local ring is factorial is a bit long for this talk, but it can be found in [4].

4. Further ramblings in local ring theory

We spoke earlier about the Hilbert function, or Hilbert polynomial, but didn't relate it to local ring theory directly. In 1947, Pierre Samuel [14] used a generalization of the Hilbert function to define the dimension of a local ring, as well as its multiplicity. The scheme was this: we let R, as usual, be a local ring with maximal ideal, $\mathfrak{m}$. Then for every integer ν, the module $R/\mathfrak{m}^\nu$ has finite length as an R-module, and we define $\chi(\nu) = \mathrm{length}(R/\mathfrak{m}^\nu)$. The degree, d, of this polynomial is the dimension of R, and the leading coefficient of this polynomial divided by $d!$ is the multiplicity of R. This, and the study of intersection multiplicities, made the Hilbert polynomial a basic tool in algebraic geometry and ring theory.

Samuel used this approach to define a more general theory of intersection multiplicity than existed at that time, and in around 1957 Serre proposed a definition that involved the functors Tor (this, too, is discussed in more detail in [4]). While Serre's definition was shown to be "right" for unramified regular local rings, there were many questions left standing for the ramified case. Here, A. Grothendieck stepped in with a suggestion. Since every ramified regular local ring, R, is of the

form $S/(x)$, where S is an unramified regular local ring and x an element of S, he pointed out that the difficulties in the ramified case could be resolved if one could solve the "Lifting Problem." This problem can be stated this way.

Let S be a local ring, x an element of S which is regular in S, $R = S/(x)$, and let M be an R-module. Is there an S-module, $\bar{M}$, such that i) $\bar{M}/x\bar{M} \cong M$ and ii) x is regular for $\bar{M}$? Clearly item ii) is the difficult one to satisfy, since we could always take $\bar{M}$ to be M itself, if not for that condition.

A fairly straightforward way to proceed might be this. We let

$$\mathbf{F} : \cdots \to F_k \to F_{k-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0$$

be a free resolution of M over R.

By choosing bases for the free modules of the resolution, the maps may be described by matrices. Now let

$$\bar{\mathbf{F}} : \cdots \to \bar{F}_k \to \bar{F}_{k-1} \to \cdots \to \bar{F}_1 \to \bar{F}_0$$

be a "lifting" of the complex $\mathbf{F}$. This means that the barred modules are free of the same rank as the corresponding non-barred free modules, and the maps are matrices whose entries in S are representatives of the entries in the corresponding matrices over R. (That is, if $a_{ij} \in R$ is a matrix entry, we let $\bar{a}_{ij} \in S$ be an element which, modulo (x), is equal to a_{ij}.) In short, $\bar{\mathbf{F}}/x\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$.

Since x is regular in S, we have the short exact sequence:

$$0 \to \bar{\mathbf{F}} \xrightarrow{x} \bar{\mathbf{F}} \to \mathbf{F} \to 0,$$

which, if it were a sequence of complexes, would imply that the barred complex is acyclic, and its 0-dimensional homology would be a lifting of M.

But the problem is how to lift the matrices in $\mathbf{F}$ in such a way that the sequence of modules and maps forming $\bar{\mathbf{F}}$ is a complex.

In the case of a module, M, of projective dimension 0 or 1, this is clearly not a problem. The first case that must be seriously considered, then, is that of $\mathrm{pd}_R(M) = 2$.

To make a long story short, it is possible to show in this low-dimensional case that a lifting is possible,[5] but a number of counterexamples have been produced to show that in this generality, lifting is not always possible in higher dimensions. However, it is important to note that the essential step used in lifting the two-dimensional module was to start with the matrix at the "tail" of the resolution (hence very heavy reliance on the finite-dimensionality of the module, M), and to transport the information it carried, forward to the other terms of the resolution. In fact, this kind of analysis of a finite free resolution led Eisenbud and me to work on the structure of finite free resolutions in general (see [6], [7] and [8]).

The study of matrices and determinantal ideals was essential in the work on the Lifting Problem, but questions about determinantal ideals had been percolating for a long time before that. Because of the success of the application of the Koszul complex to so many of the classical algebraic problems: characterization of regularity; multiplicity and depth; characterization of Cohen-Macaulay rings, and because of the existence of the generalized Cohen-Macaulay Theorem, it seemed natural to try to find a generalization of that complex that would be associated to the presentation of a (finitely presented) module, rather than just to a cyclic one (which is what the Koszul complex does). This little problem took more effort and time than one would have originally thought it should, but the project ended up with joint work with D. S. Rim, namely [5] and [11]. A little before the work with Rim appeared, there was a paper by Eagon and Northcott [12], which associated a complex to the ideal generated by the maximal minors of a matrix. The family of complexes in [5] and [11] included one of the Eagon-Northcott type (it was much "fatter"), but also included a whole family all related to each other via the ideal of maximal minors of the presentation matrix of a module. These new complexes did yield a proof of the generalized Cohen-Macaulay Theorem, as well as a generalized multiplicity, which

[5]This was first done using a theorem I had proven about determinantal ideals, which I later learned had also been proven independently by a number of other mathematicians for a number of different reasons. The first person in this list was a mathematician named L. Burch. However Kaplansky discovered that a form of this theorem had originally been proven by Hilbert, so the theorem is now known as the Hilbert-Burch Theorem.

was left in the dust for many years, but then resuscitated in the work of Kirby, Rees and Tierney, and expanded by Kleiman and Thorup. References to this work, and some discussion of this material, can be found in [4].

After the work with Eisenbud on finite free resolutions, we turned our attention briefly to these generalized Koszul complexes, and tried to "slim them down" so that we could recover the Eagon-Northcott complex in some systematic way. This project culminated in the paper [9].

The "slimming-down" process that was used led into the realm of Weyl modules, and thus into representations of the general linear group. The work was fairly technical, but because it was this development that led us back to representation theory and Hilbert, it may be worth taking a detour into some more personal anecdotes. First, let me clear up a matter of notation: why do many authors use the letter K to stand for Weyl modules instead of, say, W? After all, the Schur modules had classically been denoted by the letter S. Furthermore, the same authors who use the letter K for Weyl modules tend to use the letter L for Schur modules. How come?

This state of affairs was brought about by a combination of serendipity and ignorance. It was clear that the slimming down process we were looking for depended upon looking at the kernels of some maps whose domains were the terms in our fat complexes. As I never was much of a cherisher of notation (or terminology, for that matter), I simply denoted these kernels by K (what else?), with suitable indexing to indicate what these were the kernels of.

The ignorance factor resides in the fact that at the time, neither Eisenbud nor I had any serious knowledge of Weyl and Schur modules, so that we didn't recognize these Ks for the Weyl modules they were. However, their duals eventually became equally important to us, so the natural thing to do was to call them Ls. These Ls are what the world knows as the Schur modules of classical representation theory.

In any event, serendipity and ignorance have often been behind what can turn out to be interesting material, as is the case here.

One surprising thing is that, although the paper [9] was written in 1975, no one thought to rigourously compare the old fat complexes with the

new slim ones. It wasn't until Boffi and I were writing the book, [4], that we realized there was this gap, so we wrote [3] to fill it. It turns out that these two classes are homotopically equivalent, as we may all have expected.[6] It also became apparent from the proof why it was that so much time had elapsed between the establishment of these classes and the proof that they were essentially the same: the proofs involve fairly heavy use of representation theory and combinatorics, topics that neither Eisenbud nor I had much command of in those earlier years.

5. Determinantal ideals

During the search for a generalized Koszul complex, it became clear that it would be useful to have not only a complex that was associated to the maximal minors of a matrix, but also complexes associated to the minors of arbitrary order of a matrix. A good deal of time was spent on this problem, but little headway was made. However, after the work on [9], Eisenbud went off to Paris for the year. There, through Verdier, he met A. Lascoux, who asked him if he could suggest some application of his combinatoric and representation-theoretic results to something in commutative algebra. Eisenbud mentioned to him that certain representation modules apparently found their way into resolutions that we had been considering, so he suggested that this might also be the case with resolutions of determinantal ideals of any size. I should mention that as early as 1966, A. Andreotti and I had concluded that, "philosophically," the terms of such a resolution should be representation modules of $Gl(F) \times Gl(G)$, if the matrix represented a map from F to G, but we just couldn't see how to convert that philosophy into reality. Well, ten years later, at the suggestion of Eisenbud, Lascoux found the way to do just that. The methods Lascoux used were very much those of characteristic zero, so that, while his resolutions could be of real interest to geometers (especially differential geometers), there was still the nagging question of how to make this approach universal.

[6] As far as I know, no one has gone back to the paper, [11], to see if the definition and properties of the generalized multiplicity are easier to handle with this new class of thin complexes.

Over the next few years, two of my students, K. Akin and J. Weyman, and I, found a convenient generalization of the classical representation theory to the characteristic-free case. I say "convenient" because it had to be a theory with a sufficiently large class of modules to allow the introduction of homological technique (such as filtrations and exact sequences) that could replace the combinatorics and counting methods that are so powerful in characteristic zero. This meant that our class of shapes had to consist of far more than partitions, or even skew-partitions. In fact, a new class of shapes came into play (almost skew-shapes), and that set into motion a whole new interaction of homological methods with classical algebra, in particular with representation theory. And so we've completed a circle, and returned to the area that Hilbert purportedly "killed off."

6. Stepping further into representation theory

In fact, no sooner had Akin, Weyman and I defined these characteristic-free analogues of Weyl and Schur modules than we saw some lovely problems arise in connection with $\mathbb{Z}$-forms. What happened was that with the new definitions, it first of all became clear that the terms and maps of the Lascoux resolutions would not work as resolutions of generic determinantal ideals; a simple aping of these terms produced torsion homology, rather than trivial homology. Part of the problem, which we understood with some degree of insight, was that there are different $\mathbb{Z}$-forms of the same rational representation. For example, over the rationals, $\mathbb{Q}$, there is the representation S_n, the n-th symmetric power. However, over the integers, one has both S_n and the inequivalent n-th divided power, D_n. When you tensor over the rationals, the two become equivalent; hence the representation, D_n, is called a $\mathbb{Z}$-form of S_n.

In the case of the resolution of the ideal of submaximal minors, [2], Akin, Weyman and I found that certain $\mathbb{Z}$-forms of the hook representations obtruded, and we had to find ways to handle these so that we would rid the complex we were constructing of torsion homology.

What we had to do was prove and use the rather strange fact that the complex

$$(1) \quad 0 \to \Lambda^k \to D_1 \otimes \Lambda^{k-1} \to \cdots \to D_l \otimes \Lambda^{k-l} \to \cdots \to D_k \to 0,$$

in which the maps entail diagonalizing the exterior power and multiplying in the divided power, is exact from Λ^k up to $l = [\frac{k}{2}]$; that is, exact till halfway up. Thus, the kernels (or images) in those dimensions are universal $\mathbb{Z}$-free representations of Gl_n which, when tensored with the rationals, $\mathbb{Q}$, are isomorphic to the Schur modules of the hooks in the corresponding dimensions (since the Schur hooks are the kernels of the corresponding complex where the divided power, D, is replaced by the symmetric power, S). This is a less trivial example of what we're calling $\mathbb{Z}$-forms of the same rational representation of Gl_n.

To illustrate how to construct non-isomorphic $\mathbb{Z}$-forms and their relation to resolutions of Weyl modules, consider the following.

We have the short exact sequence

$$0 \to D_{k+2} \to D_{k+1} \otimes D_1 \to K_{(k+1,1)} \to 0$$

where $K_{(k+1,1)}$ is the Weyl module associated to the hook partition $(k+1,1)$. If we take an integer, t, and multiply D_{k+2} by t, we get an induced exact sequence and a commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & D_{k+2} & \to & D_{k+1} \otimes D_1 & \to & K_{(k+1,1)} & \to & 0 \\ & & \downarrow t & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & D_{k+2} & \to & E(t; k+1, 1) & \to & K_{(k+1,1)} & \to & 0, \end{array}$$

where $E(t; k+1, 1)$ stands for the cofiber product of D_{k+2} and $D_{k+1} \otimes D_1$. Each of these modules is a $\mathbb{Z}$-form of $D_{k+1} \otimes D_1$, but for t_1 and t_2, two such are isomorphic if and only if $t_1 \equiv t_2 \bmod k+2$ (see[1]). In fact, one can easily show that $\mathrm{Ext}^1_A(K_{(k+1,1)}, D_{k+2}) = \mathbb{Z}/(k+2)$, where A stands for the Schur algebra of appropriate degree (namely, $k+2$).

We now see how such forms are related to resolutions of Weyl modules. Consider the partition $(k, 2)$, the associated Weyl module, $K_{(k,2)}$, and its resolution (over the integers):

$$0 \to D_{k+2} \to \{D_{k+2} \oplus D_{k+1} \otimes D_1\} \to D_k \otimes D_2 \to K_{(k,2)} \to 0.$$

The map of D_{k+2} into the indicated direct sum is the usual diagonalization into the second summand (or the place polarization ∂_{21}),[7] but is multiplication by 2 into the first. The map from D_{k+2} to $D_k \otimes D_2$ is the second divided power of ∂_{21} or $\partial_{21}^{(2)}$. As a result, we see that the cokernel of this map is what we called above, $E(2; k+1, 1)$. This shows how these $\mathbb{Z}$-forms show up in resolutions of Weyl modules.

Now the problem of resolving Weyl modules at first seemed to be easy; at least it was in the case of two-rowed shapes, where our approach required a proof of exactness of a certain fundamental sequence, but did not compel us to introduce a class of shapes beyond the skew-shapes. However, once we left the two-rowed situation, everything seemed to hit the fan: the short exact sequence we had used to such advantage before required us to introduce what are now called **almost skew-shapes**; the combinatorics of overlapping rows was far more complicated; the proof of the exactness of our sequences seemed to require an ungainly spectral sequence (where the terms of the n-th filtration, F_n, were described in terms of the dyadic expansion of n). By the end of the summer of 1982, I had calculated the resolution of the skew-shape with two three-fold overlaps, and realized that the tools at our command were insufficient to proceed intelligently with this project. Akin and I put this problem aside, and turned, instead, to the study of intertwining numbers (a topic we will not discuss here, but can be found in [1], [10] and [4]). These numbers arise in modular representation theory.

In 1990, Rota and I decided to get together to study this resolution problem and, after a few months of getting to understand each other's language, Rota introduced me to letter-place techniques and, in particular, place polarizations. A rather complete description of these notions, and the combinatorical proofs of the fact that these letter-place algebras have a basis consisting of double standard double tableaux filled by "letters" and "places," can be found in the later chapters of [4]; here I will just illustrate with an example or two. In any event, using these notions, a good deal of the incomprehensible morass of the 1982 calculations was cleared away, and much progress could again be made on the problem of resolving Weyl modules. "Much progress" doesn't mean that the problem is solved; it's still open. But at least we have

[7] We'll discuss these place polarizations later in this section.

a description of all the terms that appear in these resolutions, for all almost skew-shapes of any number of rows ([4]).

Let's look now at some letter-place ideas and place polarizations.

An element $w \otimes w' \in D_p \otimes D_q$ would be written, in letter-place algebra, as $(w|1^{(p)})(w'|2^{(q)})$ to indicate that it is the tensor product of a basis element of degree p in the first factor, and one of degree q in the second. This is then collected in double tableau form as

$$\left(\begin{array}{c|c} w & 1^{(p)} \\ w' & 2^{(q)} \end{array} \right).$$

If we further agree that the symbol $(v|1^{(p)}2^{(q)})$ means $\sum v(p) \otimes v(q) \in D_p \otimes D_q$, where v is an element of degree $p+q$ and the sum represents the diagonalization of v in $D_p \otimes D_q$, then we can also talk about the double tableau

$$\left(\begin{array}{c|c} w & 1^{(p)}2^{(k)} \\ w' & 2^{(q-k)} \end{array} \right),$$

which means $\sum w(p) \otimes w(k)w'$. Ordering the basis elements of the underlying free module, we can now talk about 'standard' and 'double standard' double tableaux. A major result on letter-place algebra is that the set of double standard double tableaux form a basis for $D_p \otimes D_q$ ([4]).

In general, one could talk about $D_{p_1} \otimes D_{p_2} \otimes \cdots \otimes D_{p_n}$ in letter-place terms, where the "places" run from 1 to n.

To illustrate the basis theorem: suppose $p < q$, and we have the element $a^{(p)} \otimes b^{(q)} \in D_p \otimes D_q$. Then, although $\left(\begin{array}{c|c} a^{(p)} & 1^{(p)} \\ b^{(q)} & 2^{(q)} \end{array} \right)$ is a basis element of $D_p \otimes D_q$, it isn't a double standard tableau (even assuming $a < b$ and $1 < 2$) since $p < q$.

To write $\left(\begin{array}{c|c} a^{(p)} & 1^{(p)} \\ b^{(q)} & 2^{(q)} \end{array} \right)$ as a linear combination of standard tableaux, we clearly must have

$$\left(\begin{array}{c|c} a^{(p)} & 1^{(p)} \\ b^{(q)} & 2^{(q)} \end{array} \right) = \sum_{l=0}^{p} c_l \left(\begin{array}{c|c} a^{(p)}b^{(q-p+l)} & 1^{(p)}2^{(q-p+l)} \\ b^{(p-l)} & 2^{(p-l)} \end{array} \right),$$

and we want to determine the coefficients c_l. Rewriting the above, we get

$$a^{(p)} \otimes b^{(q)} = \sum_{l=0}^{p} c_l \sum_{k=0}^{p} \binom{q-k}{p-l} a^{(p-k)} b^{(k)} \otimes a^{(k)} b^{(q-k)};$$

we want the c_l to be such

$$\sum_{l=0}^{p} c_l \binom{q-k}{p-l} = \begin{cases} 1 \text{ for } k=0 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}.$$

Clearly, if we set $c_l = \binom{p-q}{l}$, then for $k=0$, the sum above is

$$\sum_{l=0}^{p} \binom{p-q}{l} \binom{q}{p-l} = \binom{p}{p} = 1,$$

while for $k > 0$, we get

$$\sum_{l=0}^{p} \binom{p-q}{l} \binom{q-k}{p-l} = \binom{p-k}{p} = 0$$

as we wanted.

To illustrate a place polarization, let's look at the map

$$\square : D_{p+k} \otimes D_{q-k} \to D_p \otimes D_q$$

given by the composition

$$D_{p+k} \otimes D_{q-k} \to D_p \otimes D_k \otimes D_{q-k} \to D_p \otimes D_q,$$

where the first map is diagonalization, and the second is multiplication. From a letter-place perspective, let's write an element of $D_{p+k} \otimes D_{q-k}$ as $\left(\begin{array}{c|c} w & 1^{(p+k)} \\ w' & 2^{(q-k)} \end{array} \right)$, and let's "polarize" the place, 1, to 2, k times, that is let's send $1^{(p+k)}$ to $1^{(p)}2^{(k)}$. Then our element $\left(\begin{array}{c|c} w & 1^{(p+k)} \\ w' & 2^{(q-k)} \end{array} \right)$ goes to $\left(\begin{array}{c|c} w & 1^{(p)}2^{(k)} \\ w' & 2^{(q-k)} \end{array} \right)$. If we write out what this means in terms of tensor products of divided powers, we see that this last element is precisely the element in $D_p \otimes D_q$ that is the image of the map, $\square$, applied to $w \otimes w'$.

Recognizing that the maps Akin and I had been working with were these polarizations, and then proving some Capelli-like identities for these maps, we were able to express all the inexplicable identities of the 1982 work in a coherent way, and thus able to proceed to consideration of the general case.

While all of this may seem terribly *ad hoc*, these operations can all be described in the conventional terms that algebraists are accustomed to. Again I refer the reader to [4] for the details.

7. Weyl-Schur complexes

The above discussion dealt only with the letter-place aspect of tensor products of divided powers; in this case, the letters and places are all considered to be positive. One may deal with letters and places of negative sign, as well as of mixed sign, and corresponding place polarizations. When one takes this to the extreme (that is, letter and place "alphabets" of mixed signs), one can generalize these Weyl modules to complexes, called Weyl-Schur complexes. When we do this (see [4]), we find that the fundamental exact sequences that I mentioned earlier, can be proven exact without recourse to any spectral sequence argument.

References

[1] K. Akin and D.A. Buchsbaum, *Characteristic-free representation theory of the general linear group, II. Homological considerations*, Adv. Math. **72** (1988), 171–210.

[2] K. Akin, D.A. Buchsbaum and J. Weyman, *Resolutions of determinantal ideals: The submaximal minors*, Adv. Math. **39** (1981), 1–10.

[3] G. Boffi and D.A. Buchsbaum, *Homotopy equivalence of two families of complexes*, Trans. Am. Math. Soc. **356** (2004), 3077–3107.

[4] G. Boffi and D.A. Buchsbaum, *Threading Homology Through Algebra: Selected Patterns*, Oxford University Press, 2006

[5] D.A. Buchsbaum, *A generalized Koszul complex, I*, Trans. Am. Math. Soc. **111** (1964), 183–196.

[6] D.A. Buchsbaum and D. Eisenbud, *What makes a complex exact?*, J. Alg. **25** (1973), 259-268.

[7] D.A. Buchsbaum and D. Eisenbud, *Some structure theorems for finite free resolutions.* Adv. in Math. **12** (1974), 84-139.

[8] D.A. Buchsbaum and D. Eisenbud, *Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3*, Amer. J. Math. **99** (1977), 447-485.

[9] D.A. Buchsbaum and D. Eisenbud, *Generic free resolutions and a family of generically perfect ideals.* Adv. in Math. **18** (1975), 245-301.

[10] D.A. Buchsbaum and D. Flores de Chela, *Intertwining numbers, the three-rowed case*, J. Algebra **183** (1996), 605–635.

[11] D.A. Buchsbaum and D.S. Rim, *A generalized Koszul complex, II. Depth and Multiplicity*, Trans. Am. Math. Soc. **111** (1964), 197–224.

[12] J. Eagon and D.G. Northcott, *Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them*, Proc. Royal Soc. A **269** (1962), 188–204.

[13] D. Hilbert, *Über die Theorie der algebraischen Formen*, Math. Ann. **36** (1890), 473-534.

[14] P. Samuel, *Une gnralisation des polynomes de Hilbert* C. R. Acad. Sci. Paris 225, (1947). 1111–1113.

EMMY NOETHER: DE L'ÀLGEBRA NO COMMUTATIVA A LA TEORIA DE NOMBRES

PILAR BAYER

RESUM. Els treballs d'Emmy Noether en àlgebra no commutativa constitueixen la darrera etapa de la seva producció. Resultats remarcables obtinguts en aquest període foren el càlcul del grup de Brauer d'un cos local i del grup de Brauer d'un cos global, que s'aconseguiren al mateix temps que diversos teoremes de la teoria de cossos de classes. La participació de Noether en aquestes descobertes i, molt especialment, en les tècniques inherents a les seves demostracions exercí una notable influència en el desenvolupament posterior de la cohomologia de grups i en la formulació cohomològica de la teoria de cossos de classes.

EMMY NOETHER (1882–1935)

Atès que aquesta és l'última conferència del curs Noether, faré un breu resum de la trajectòria matemàtica d'Emmy Noether, abans d'entrar a parlar de les seves recerques en àlgebra no commutativa, que corresponen a la darrera etapa de la seva producció.

Nascuda a Erlangen (Baviera, Alemanya), el 23 de març de l'any 1882, Emmy Noether era filla de Max Noether, també matemàtic. Es doctorà als 25 anys a la Universitat d'Erlangen sota la direcció de Paul Gordan, un dels especialistes de l'època en teoria d'invariants. Del 1907 al 1915 treballà a l'Institut de Matemàtiques d'Erlangen, institució de la qual el seu pare també n'era professor i al qual ella suplia en alguna de les classes. L'any 1915 s'incorporà a la Universitat de Göttingen, a instàncies de F. Klein i de D. Hilbert. El 1919, quan comptava 37 anys, esdevingué la primera dona matemàtica habilitada per la Universitat de Göttingen; el tribunal estava format per Klein, Hilbert, Courant, Landau i Debye. Li fou concedida la *venia legendi* amb el títol de *Privatdozent*, càrrec que li permetia impartir docència a l'alumnat que ho

sol·licités. L'any 1922 fou nomenada *Nichtbeamter ausserordentlicher Professor* (és a dir, professor extraordinari no funcionari).

Les seves classes solien tractar temes de la seva pròpia recerca, en els quals estava treballant. Aquest fet dotava les seves lliçons d'un caràcter poc metòdic, però viu i participatiu per part dels estudiants (que, sovint, n'editaven apunts). Durant el semestre d'hivern de l'any 1928 fou convidada a impartir un curs d'àlgebra a la Universitat de Moscou. L'any 1932 fou la primera dona matemàtica en presentar una conferència plenària en un *International Congress of Mathematicians* (ICM), celebrat aquell any a Zürich. L'any 1933, i després de l'arribada dels nazis al poder, hagué d'emigrar als EUA per la seva condició de jueva. A Amèrica la trobem com a professora del Bryn Mawr College, de Pennsylvania. Morí l'any 1935, a l'edat de 53 anys.

Emmy Noether

Sota el mestratge de Klein i de Hilbert, la Universitat de Götingen s'havia convertit en un pol d'atracció per a estudiants de matemàtiques d'arreu. Crida l'atenció la quantitat d'aquests que hi feien estades (ja fossin predoctorals o postdoctorals), becats pels seus propis governs, a banda de nombrosos professors visitants. De 1890 a 1920, Klein havia dirigít 27 tesis a Göttingen i, de 1898 a 1934, Hilbert n'hi dirigí 74.

Entre els matemàtics que col·laboraren amb Emmy Noether arran del seu pas per Götingen, esmentarem H. Weyl (1885–1955), E. Artin (1898–1962), H. Hasse (1898–1979), W. Krull (1899–1971), R. Brauer (1901–1977), B. van der Waerden (1903–1996), G. Köthe (1905–1989), Olga Taussky (1906–1995), A. Weil (1906–1998), M. Deuring (1907–1984), J. Herbrand (1908–1931) i E. Witt (1911–1991).

Artin feu estades a Göttingen els anys 1921–1922 i mantingué després un contacte permanent amb Noether.

Hasse hi feu una estada predoctoral l'any 1920 i en fou professor durant els anys 1934 al 1939, com a successor de Weyl. Tal com veurem, mantingué durant molts anys correspondència matemàtica amb Emmy Noether.

Van der Waerden hi feu una estada postdoctoral l'any 1924, becat per la fundació Rockefeller, i una altra l'any 1928, com a professor visitant. A banda, com és ben conegut, a partir dels cursos de Noether i dels d'Artin escriuria el seu famós text *Moderne Algebra*, editat en dos volums els anys 1930 i 1931, i que encara es continua reeditant.

Köthe fou alumne de Göttingen l'any 1928. Posteriorment no es dedicà a l'àlgebra, sinó que ho feu a l'anàlisi funcional.

Krull estudià a Göttingen en el decurs dels anys 1920–1921, en el seminari de Klein. Noether exercí una gran influència en l'obra de Krull sobre la teoria d'ideals i mantigué amb ell una amistat durant tota la vida.

Olga Taussky, quan ja era doctora, hi fou contractada en els anys 1931–1932, amb l'encàrrec específic de revisar i preparar l'edició de les obres de Hilbert.

Weil visità Göttigen l'any 1927, com a alumne predoctoral, i hi tornà l'any 1931, ja com a doctor. Herbrand i Deuring hi són l'any 1931 i Witt, l'any 1934.

Deuring i Witt formen part dels 13 estudiants a qui Noether dirigí la tesi, entre els quals hi trobem H. Fitting, C. Tsen i O. Schilling. Fitting és conegut per les seves recerques en grups finits. Schilling fou un dels difusors de la teoria de valoracions. De Tsen es recorda especialment el teorema fonamental de la seva tesi (llegida l'any 1936, cf. [20]) sobre

el caràcter quasi-algebraicament tancat dels cossos de funcions en una variable sobre un cos algebraicament tancat. Aquest mateix resultat es retroba anys després en la tesi de S. Lang, llegida el 1951 i publicada el 1952, i que fou dirigida per E. Artin (cf. [11]).

Weyl, que prèviament havia fet la tesi a Göttingen sota la direcció de Hilbert, fou el successor d'aquest. Fou professor de la Universitat de Göttingen durant els anys 1930 al 1933. Després tornaria a coincidir amb Noether als EUA, quan Weyl era professor a l'Institut d'Estudis Avançats de Princeton i Noether era professora del Bryn Mawr College de Pennsylvania.

Noether és una figura força propera, doncs dels matemàtics abans esmentats encara he tingut la sort de conèixer personalment Witt (a Barcelona), Deuring (a Regensburg) i Olga Taussky i Hasse (a Oberwolfach).

Hasse havia tingut dos directors de tesi: K. Hensel i E. Hecke. Del primer, que era el creador dels nombres p-àdics, recordo que li agradava rememorar que havia après a valorar la bellesa de les matemàtiques (en canvi, del segon l'espantaven les fórmules). En la seva tesi demostrà la validesa del principi local-global per a la classificació i la representació de nombres per formes quadràtiques definides sobre cossos de nombres. La seves recerques generalitzaven resultats previs, deguts a H. Minkowski, per a formes quadràtiques definides sobre el cos dels racionals (i obtinguts mitjançant congruències, sense l'ús dels nombres p-àdics).

Les cartes de Hasse a Noether s'han perdut, però no així les de Noether a Hasse. Les cartes del període 1925–1935 han estat editades recentment per P. Roquette (a qui Hasse dirigí la tesi) i per F. Lemmermeyer (a qui Roquette dirigí la tesi). Aquestes cartes, d'un alt contingut matemàtic i que posen de manifest la infatigable energia de Noether, es presenten en l'edició [12] acompanyades de comentaris molt precisos. En elles s'hi troben al·lusions de Noether a estudiants que feien estades a Götingen, com ara Herbrand o Weil.

E. Artin (1898–1962); H. Hasse (1898–1979)

R. Brauer (1901–1977)

B. van der Waerden (1903–1996)

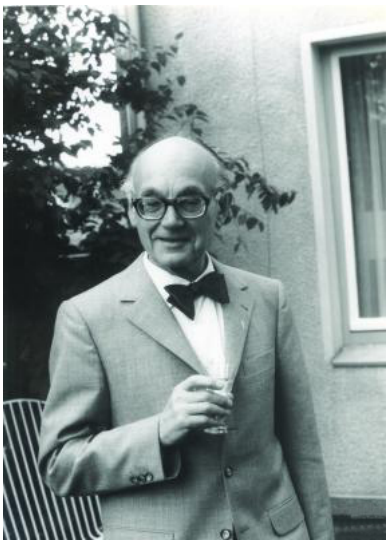
G. Köthe (1905–1989)

W. Krull (1899–1971)

O. Taussky (1906–1995)

A. Weil (1906–1998)

J. Herbrand (1908–1931)



M. Deuring (1907–1984)

E. Witt (1911–1991)

H. Weyl (1885–1955)

T. Takagi (1875–1960)

Índex

Emmy Noether (1882–1935) 169
1. Resum de la producció de Noether 176
2. Àlgebra no commutativa 178
3. La teoria de cossos de classes 183
4. Cursos de Noether a Göttingen 188
5. Treballs de Noether en àlgebra no commutativa 189
6. L'estada a Bryn Mawr 198
Referències 201

1. Resum de la producció de Noether

D'acord amb Hermann Weyl, en la producció de Noether s'hi distingeixen tres etapes:

En la primera etapa, del 1908 al 1919, el seu interès se centra en la teoria d'invariants, el problema invers de la teoria de Galois i el càlcul de variacions.

A aquesta etapa pertanyen els treballs següents:

- Noether, E.: Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Formen. *J. reine u. angew. Math.* 134 (1908), 23–90.

Aquesta extensa publicació conté la seva tesi. Gordan, el seu director, havia obtingut un sistema complet format per 54 invariants per a la forma quàrtica particular $X_1^3X_2 + X_2^3X_3 + X_3^3X_1$. Ella proporciona un sistema complet d'invariants per a qualsevol forma quàrtica en tres variables. Noether calcula sistemes complets d'invariants que contenen més de 300 fórmules. (Del seu director de tesi, Noether deia: *Er war ein Algorithmiker.*) Indirectament, és possible que el seu interès posterior per la recerca d'estructures algebraiques i per principis generals fos motivat per l'esforç de càlcul tan extraordinari que l'elaboració de la tesi li va reportar.

- Noether, E.: Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe. *Math. Ann.* 78 (1918), 221–229.

Aquest treball donà lloc a l'anomenat problema de Noether, en el context del problema invers de la teoria de Galois. Donat un grup finit G que opera en una extensió transcendent pura $k(X_1, \ldots, X_n)/k$, es tracta de trobar condicions sobre G que permetin afirmar que l'extensió proporcionada pel cos d'invariants $k(X_1, \ldots, X_n)^G/k$ és, també, transcendent pura. Noether demostrà que això és així per a $n \leq 4$. L'any 1969, R. G. Swan trobà un contraexemple per a $n = 47$ i G un grup cíclic d'aquest ordre. El problema de Noether és encara avui motiu d'una intensa recerca (cf. [10]).

- Noether, E.: Invariante Variationsprobleme. (Vorgelegt von F. Klein.) Nachr. v. d. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, 1918, 235–257.

Aquest treball fou presentat per ella a la Societat de Matemàtiques de Göttingen i per Klein, a la Societat de Ciències de Göttingen (que no la va acceptar mai entre els seus membres, per la seva condició de dona). Constitueix la contribució de Noether a la física. En el treball s'hi troba el famós teorema de Noether segons el qual tot sistema dinàmic invariant per l'acció d'un grup de Lie de n paràmetres admet n invariants, o quantitats conservades, en el decurs de la seva evolució. D'aquest teorema se n'han fet posteriorment múltiples versions i generalitzacions. En teoria de camps, el teorema descriu quina és la quantitat que es conserva quan es coneix el grup de simetries de l'equació en derivades parcials definidora del camp (cf. l'article de F. Marquès en aquest mateix volum).

En la segona etapa, del 1920 al 1926, es dedica a l'estudi dels anells commutatius i a la teoria d'ideals. En aquest període prepara també l'edició de l'obra de R. Dedekind. Els principals treballs són:

- Noether, E.: Idealtheorie in Ringbereichen. *Math. Ann.* 83 (1921), 24–66.

- Noether, E.: Abstrakter Aufbau der Idealtheorie im algebraischer Zahl-und Funktionenkörpern. *Math. Ann.* 96 (1927), 26–61.

No en parlaré perquè han estat objecte de conferències anteriors dins d'aquest cicle (cf. l'article de S. Zarzuela en aquest mateix volum).

En la tercera etapa, del 1927 al 1935, Noether treballa en sistemes hipercomplexos i en el desenvolupament de la teoria de les representacions dels grups, com a un cas particular de la teoria de mòduls. En aquest període s'hi inscriuen els articles següents, que comentarem tot seguit.

- Noether, E. (amb R. Brauer): Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen. *Sitz. Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.* (1927), 221–228.
- Noether, E.: Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. *Math. Z.* 30 (1929), 641–692.
- Noether, E. (amb R. Brauer i H. Hasse): Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. *J. für reine u. angew. Math.* 167 (1932), 399–404.
- Noether, E.: Nichtkommutative Algebren. *Math. Z.* 37 (1933), 514–541.
- Noether, E.: Der Hauptgeschlechtssatz für relativ-galoissche Zahlkörper. *Math. Ann.* 108 (1933), 411–419.

La seva producció fou editada íntegrament per l'editorial Springer, l'any 1983, sota la revisió de N. Jacobson [13]. L'obra aplega 43 treballs i, que jo conegui, es tracta de l'única recopilació que Springer ha fet de l'obra d'una matemàtica:

- Noether, E.: *Gesammelte Abhandlungen. Collected Papers.* N. Jacobson (ed.) Springer-Verlag, 1983; p. viii + 777.

2. Àlgebra no commutativa

En el comentari següent de Gauss s'hi ha llegit un primer intent d'anar més enllà dels nombres complexos:

> Per què les relaciones entre coses que representen una multiplicitat de més de dues dimensions no poden proporcionar altres tipus de quantitats permisibles en aritmètica general?
>
> C. F. Gauss, *Werke* 2, p.169–178

Les multiplicitats de més de dues dimensions en les quals les operacions aritmètiques hi són permeses s'nomenaren, primerament, nombres hipercomplexos i, més endavant, àlgebres (de dimensió finita, primer, i no necessàriament finita, posteriorment). Comportaren però haver de treballar amb estructures no commutatives. Els inicis de l'àlgebra no commutativa foren lents, precisament per la dificultat de localitzar estructures no commutatives (a banda de les obtingudes mitjançant les àlgebres de matrius).

Històricament, el primer exemple d'estructura no commutativa se situa en la invenció per part de W. R. Hamilton, l'any 1843, dels quaternions:

$$\mathbb{H} = \langle 1, i, j, k : i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Es tracta d'una àlgebra sobre el cos dels nombres reals $\mathbb{R}$, de dimensió 4, que, a més, és un cos.

Els cossos no necessàriament commutatius es coneixen en la literatura sota noms diferents: *Schiefkörper* (en alemany); *skew field* o bé *division ring* (en anglès) i *corps gauche* (en francès). En aquest treball els anomenarem *anells de divisió* i els representarem per D, reservant les lletres K, L, etc. per a designar, com és habitual, els cossos commutatius.

El terme *K-àlgebra* serà emprat per a designar les àlgebres A sobre un cos K, de dimensió finita, $[A : K] < \infty$, associatives i amb element unitat. Una K-àlgebra A serà dita *central* quan el seu centre $Z(A)$ coincideixi amb el cos K.

Recordem tanmateix que una K-àlgebra A és anomenada *simple* si no té ideals bilaterals no trivials. Una K-àlgebra A és *semisimple* si és isomorfa a una suma directa d'àlgebres simples.

Els primers exemples d'àlgebres simples són proporcionats per les àlgebres de matrius. Així, les K-àlgebres de matrius $M(n, K)$ són centrals i simples. Tota K-àlgebra de divisió D és una K-àlgebra simple i les àlgebres de matrius $M(n, D)$ són simples.

L'any 1870, B. Peirce presentà una memòria a la *National Academy of Sciences* de Washington titulada *Linear Associative Algebras* [15], que fou publicada amb caràcter pòstum l'any 1881. En aquest treball s'hi troben les nocions d'element nilpotent i d'element idempotent d'una

àlgebra, així com també les descomposicions associades a un element idempotent central:

$$A = Ae \oplus A(1-e), \quad e^2 = e.$$

El conjunt $I = Ae$ constitueix un ideal per l'esquerra de A, que satisfà la identitat $Ie = I$; el conjunt $J = A(1-e)$ és un altre ideal per l'esquerra, per al qual $Je = 0$. A la mateixa memòria, Peirce investigà els possibles tipus d'àlgebres de dimensió ≤ 6. Posteriorment, el seu fill Ch. Peirce demostrà que tota $\mathbb{R}$-àlgebra de divisió D de dimensió ≤ 7 és isomorfa a $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ o bé a $\mathbb{H}$. L'any 1884, K. Weierstraß obtenia que tota $\mathbb{R}$-àlgebra commutativa de dimensió $n > 2$ té divisors de zero.

L'any 1878, G. F. Frobenius demostrà el rellevant resultat segons el qual tota $\mathbb{R}$-àlgebra de divisió i central D és isomorfa a $\mathbb{R}$ o bé a $\mathbb{H}$. Per tant, no és estrany que Hamilton hagués tingut tantes dificultats per construir un cos no commutatiu sobre $\mathbb{R}$, car el teorema de Frobenius posa de manifest que, d'aquests, només n'hi ha un.

Th. Molien, nascut a Riga, Letònia, entrà en contacte amb Klein quan aquest era encara professor a la Universitat de Leipzig (posteriorment, Molien esdevingué professor a la Universitat de Tomsk, a Sibèria). A la seva tesi, de l'any 1893, s'hi troba el concepte d'àlgebra simple (de fet, ell en diu primitiva: *ursprünglich*). Molien obté que tota $\mathbb{C}$-àlgebra simple és isomorfa a una àlgebra de matrius $M(n, \mathbb{C})$ [14]. Són remarcables les eines que s'utilitzen en aquest treball: formes bilineals, polaritzacions, formes traça i un equivalent a la representació regular. La tesi fou valorada com a antecedent dels treballs de W. Killing en àlgebres de Lie. Part dels resultats de Molien foren redescoberts per É. Cartan, l'any 1898 (cf. [21]).

Els teoremes d'estructura per a les K-àlgebres de dimensió finita arribarien, l'any 1908, de la mà de J. H. M. Wedderburn. En el treball [25], Wedderburn demostra que tota K-àlgebra de dimensió finita A s'escriu com $A \simeq \mathrm{Rad}(A) \oplus A_{ss}$, on A_{ss} és una K-àlgebra semisimple i $\mathrm{Rad}(A)$ denota el radical (de Jacobson) de A. Wedderburn obté que, per a tota K-àlgebra A, simple, existeix una K-àlgebra de divisió D tal que $A \simeq M(n, D)$. Per tant, aquest teorema fa palès que la recerca dels anells de divisió sobre un cos commutatiu és equivalent a la de les àlgebres simples sobre aquest cos. Dels resultats de Wedderburn

se'n desprèn, així mateix, que tot cos finit és commutatiu. Posteriorment, Witt, a instàncies de Noether, donà una demostració directa de la commutativitat dels anells de divisió finits, independent dels resultats de Wedderburn, basada únicament en propietats dels polinomis ciclotòmics (cf. [1]) (tal com dèia Witt: "els fets senzills han de tenir demostracions senzilles").

Les recerques anteriors culminaren en l'anomenat teorema de Wedderburn-Artin, de l'any 1927, de classificació dels *anells* semisimples. Donats un anell semisimple per l'esquerra R i un sistema complet de R-mòduls per l'esquerra simples $\{V_i\}$, si es té que $R \simeq n_1V_1 \oplus \cdots \oplus n_rV_r$, aleshores,

$$R \simeq \prod_{i=1}^{r} M(n_i, D_i^o), \quad D_i \simeq \mathrm{End}_R(V_i),$$

on, en general, D^o denota l'anell de divisió oposat d'un anell de divisió D. Si R és simple, aleshores $r = 1$ i $R \simeq \mathrm{End}_D(V)$.

Prèviament a aquest resultat, però, hem de fer esment que es produïren els treballs de E. Dickson.

L'any 1908, Dickson obtingué que si D és una K-àlgebra de divisió central i si L és un subcòs commutatiu maximal, $K \subseteq L \subseteq D$, tal que $[L : K] = n$, aleshores $[D : K] = n^2$. En relació amb la construcció de possibles estructures no commutatives noves, Dickson compta amb dos treballs importants, del 1914 i del 1926, respectivament. En el treball [6] construeix les àlgebres cícliques, que generalitzen els quaternions. En el treball [7] introdueix els sistemes de factors.

Donada una extensió cíclica $L = K(z)$, de grau $[L : K] = n$ i de grup de Galois $G = \langle g \rangle$, i, donat un element $a \in K^*$, l'àlgebra cíclica $A = (L|K, g, a)$ es defineix segons

$$(L|K, g, a) := \langle L, u : \ u^n = a, \ zu = uz^g, \ z \in L \rangle_K.$$

Per a $z \in L$ i $g \in G$, hem denotat per z^g l'acció de g en z. De la definició es desprèn que l'àlgebra $(L|K, g, a)$ està generada pels elements de L i per un element auxiliar u, subjecte a determinades relacions. Se satisfà que $K \subseteq L \subseteq A$ i L esdevé un subcòs commutatiu maximal de A. A més, $(L|K, g, a)$ és un anell de divisió si, i només si, $a^i, 0 < i < n$, no és norma en $L|K$. Alhora, $(L|K, g, a)$ és isomorfa a l'àlgebra de matrius $M(n, K)$ si, i només si, $a \in N_{L|K}(L^*)$, és a dir, l'element a de partida

és una norma de l'extensió cíclica. Notem que, en partir d'extensions quadràtiques d'un cos K, reobtenim com a casos particulars les àlgebres de quaternions sobre aquest cos: $\left(\frac{a,b}{K}\right)$, $i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji$, alhora que un criteri per a decidir si aquestes són o no anells de divisió.

Al seu torn, les àlgebres cícliques es generalitzaren en les àlgebres producte creuat. Donada una extensió de Galois $L|K$, de grup de Galois $G = \mathrm{Gal}(L|K)$ i de grau $[L : K] = n$, es defineix l'àlgebra producte creuat $L \cdot G$ segons

$$L \cdot G := \langle \sum_{g \in G} z_g \, u_g : \; z \, u_g = u_g \, z^g; \; u_g \, u_h = u_{gh} \, a_{g,h}, \; a_{g,h} \in L^* \rangle,$$

on z, z_g denoten elements de L i u_g són indeterminades. En aquest cas, per a garantir l'associativitat del producte cal que se satisfacin les identitats

$$a_{g,hk} \, a_{h,k} = a_{gh,k} \, a_{g,h}^k, \text{ per a tot } g, h, k \in G.$$

Els elements corresponents, $\{a_{g,h}\}$, s'anomenen un sistema de factors definidor de l'àlgebra. La K-àlgebra que en resulta és simple i central, i de grau $[L \cdot G : K] = n^2$.

R. Brauer tingué la idea brillant de classificar i organitzar les K-àlgebres simples i centrals en forma de grup. Donades dues K-àlgebres simples i centrals, es defineix, d'acord amb Brauer,

$$A \sim B \Longleftrightarrow A \simeq M_n(D), \; B \simeq M_m(D).$$

Donada una K-àlgebra simple i central A, denotarem per $[A]$ la classe d'equivalència així definida i per $\mathrm{Br}(K)$ el conjunt de totes les classes. El producte tensorial dota aquest conjunt d'una estructura de grup abelià, atès que se satisfan les propietats:

$[A] \otimes [B] := [A \otimes_K B]$ és un producte ben definit en $\mathrm{Br}(K)$,

$[A] \otimes [B] = [B] \otimes [A]$,

$[A] \otimes [K] = [A]$,

$[A] \otimes [A^o] = [K]$.

En aquest context, donada una K-àlgebra simple i central A, una extensió finita L de K és un cos neutralitzador de A si $A \otimes_K L$ és isomorfa a una àlgebra de matrius sobre L. Se satisfà que tot subcòs commutatiu maximal $L \subseteq A$ és un subcòs neutralitzador de A. A més, tot cos neutralitzador L de A és subcòs maximal d'una K-àlgebra simple i central B tal que $[B] = [A]$.

La manca d'estructures no commutatives constatada inicialment es pot resumir en l'estructura dels grups de Brauer dels cossos considerants fins aleshores. Dels teoremes de Molien, Wedderburn i Frobenius se'n desprèn que

$$\mathrm{Br}(C) = (0) \text{ per a tot cos } C \text{ algebraicament tancat,}$$

$$\mathrm{Br}(\mathbb{F}) = (0) \text{ per a tot cos finit } \mathbb{F},$$

$$\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \text{ atès que } \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq M(4, \mathbb{R}).$$

La recerca de cossos susceptibles de tenir un grup de Brauer més gran es pot dir que s'inicià amb els treballs de Brauer, Hasse i Noether. Tal com veurem, d'aquests treballs en resultaren la determinació del grup de Brauer $\mathrm{Br}(K_{\mathfrak{p}})$ dels cossos $\mathfrak{p}$-àdics, i del grup de Brauer $\mathrm{Br}(K)$ d'un cos de nombres K qualsevol. En ambdós casos els grups de Brauer són infinits. Els resultats corresponents, d'obtenció gens fàcil, es provaren al mateix temps que alguns teoremes de la teoria de cossos de classes.

3. La teoria de cossos de classes

La teoria de cossos de classes descriu les extensions abelianes dels cossos de nombres. Les seves fites principals són:

(i) Relacionar les extensions abelianes dels cossos de nombres amb els seus grups de classes d'ideals.
(ii) Obtenir teoremes de densitat per als ideals primers dels anells d'enters dels cossos de nombres.
(iii) Determinar les lleis de ramificació en les extensions abelianes.
(iv) Establir lleis generals de reciprocitat, vàlides per a qualsevol extensió abeliana de cossos de nombres.

El seu desenvolupament és degut a C. F. Gauss, L. Dirichlet, E. E. Kummer, L. Kronecker, H. Weber, D. Hilbert, Ph. Furtwängler, R. Fueter, T. Takagi, N. Chebotarev, E. Artin, H. Hasse, C. Chevalley, J. Tate i J-P. Serre, entre d'altres.

A partir de resultats deguts a Gauss i Dirichlet, es demostra que tota extensió quadràtica de $\mathbb{Q}$ és ciclotòmica; és a dir, està continguda en un cos $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ d'arrels m-èsimes de la unitat.

Kronecker i Weber generalitzaren el resultat anterior en adonar-se que tota extensió abeliana de $\mathbb{Q}$ és ciclotòmica. Aquest resultat, conegut amb el nom de teorema de Kronecker-Weber, fou enunciat per Kronecker l'any 1853, donant-ne una demostració incompleta. L'any 1886, Weber en proporcionà una altra demostració, tampoc no exempta de crítiques. La primera demostració acceptada del teorema de Kronecker-Weber és de l'any 1896, deguda a Hilbert. Hilbert demostrà el teorema per mitjà de la seva teoria de la ramificació superior.

L'any 1829 es publicaren els treballs de N. Abel relatius a la construcció d'extensions abelianes de $\mathbb{Q}(i)$.

Donat un cos K de nombres, denotarem per $\mathcal{O}_K$ el seu anell d'enters; per $I(K)$, el grup dels seus ideals fraccionaris; per $P(K)$, el subgrup format pels ideals fraccionaris principals; i per $\mathrm{Cl}(K) := I(K)/P(K)$, el grup de classes d'ideals.

L'any 1880, Kronecker posà de manifest que, a diferència del cos dels racionals, els cossos quadràtics imaginaris admeten extensions no ramificades no trivials. Aquestes s'obtenen per adjunció de valors especials de la funció modular el·líptica j. Kronecker observà que, donat un cos K quadràtic imaginari, el grup de Galois de $K(j(\tau))|K$ és isomorf al grup de classes d'ideals $\mathrm{Cl}(K)$ quan s'avalua la funció j en un zero τ d'una forma quadràtica binària de discriminant D igual al discriminant del cos K. L'extensió $K(j(\tau))|K$ és no ramificada i cada ideal de K esdevé principal en $K(j(\tau))$. Els valors $j(\tau)$ són els anomenats clàssicament mòduls singulars.

Weber considerà grups de classes d'ideals més generals que $\mathrm{Cl}(K)$, a fi de tenir en compte la possible ramificació de les extensions. Segons Weber, un mòdul $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_f\mathfrak{m}_\infty$ d'un cos de nombres K és un producte d'un ideal enter no nul $\mathfrak{m}_f$ de $\mathcal{O}_K$ per un producte formal $\mathfrak{m}_\infty$ d'un

nombre de places reals de K afectades de l'exponent 1. Weber defineix quocients de la forma $I_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$, on $I_{\mathfrak{m}}$ és el grup dels ideals fraccionaris de K que són coprimers amb $\mathfrak{m}_f$ i $H_{\mathfrak{m}}$ és el subgrup dels ideals principals generats pels elements $a \in K$ tals que $a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$.

Weber demostrà que, donat un mòdul $\mathfrak{m}$, si per a una extensió de Galois $L|K$ se satisfà que $\mathrm{Spl}(L|K) \subseteq H_{\mathfrak{m}}$, aleshores

$$[I_{\mathfrak{m}} : H_{\mathfrak{m}}] \leq [L : K].$$

Si $\mathrm{Spl}(L|K) = H_{\mathfrak{m}}$, aleshores

$$[I_{\mathfrak{m}} : H_{\mathfrak{m}}] = [L : K]$$

i cada classe lateral de $I_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ conté infinits ideals primers. Aquí hem denotat per $\mathrm{Spl}(L|K)$ el conjunt dels ideals de K que descomponen completament en L. Weber estava convençut que, per a cada grup de classes d'ideals $I_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$, existia una extensió abeliana L/K, no ramificada fora de $\mathfrak{m}$, per a la qual $I_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}} \simeq \mathrm{Gal}(L|K)$.

Els resultats de Weber conduïren Hilbert a conjecturar, l'any 1898, que, per a cada cos de nombres K, hauria d'existir una extensió finita $K'|K$, única, tal que

(1) $K'|K$ és de Galois i $\mathrm{Gal}(K'|K) \simeq \mathrm{Cl}(K)$.

(2) $K'|K$ és no ramificada.

(3) Per a cada ideal primer $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$, el seu grau residual $f_{\mathfrak{p}}$ coincideix amb l'ordre de $\mathfrak{p}$ en $\mathrm{Cl}(K)$.

(4) Tot ideal de $\mathcal{O}_K$ esdevé principal en $\mathcal{O}_{K'}$.

El cos K', l'existència del qual es conjecturava, fou denominat el cos de classes de Hilbert de K. En la demostració de la seva existència hi treballaren Fueter i Takagi.

Takagi havia visitat Göttingen durant els anys 1898 al 1901. Associat a un mòdul $\mathfrak{m}$ d'un cos K de nombres i a una extensió finita $L|K$, Takagi defineix un grup d'ideals

$$H_{\mathfrak{m}}(L|K) := P_{\mathfrak{m}} N_{\mathfrak{m}}(L|K).$$

Segons Takagi, $P_{\mathfrak{m}}$ és el grup dels ideals fraccionaris principals (α/β), on α, β són enters no nuls de K tals que

(i) α i β són coprimers amb $\mathfrak{m}$.
(ii) $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{m}_f}$.
(iii) $v(\alpha/\beta) > 0$ per a totes les immersions reals $v|\mathfrak{m}_\infty$.

El grup nòrmic es defineix segons

$$N_{\mathfrak{m}}(L|K) = \{N_{L|K}(\mathfrak{a}) : \mathfrak{a} \text{ coprimer amb } \mathfrak{m}_f\}.$$

D'acord amb Takagi, una extensió abeliana de cossos de nombres $L|K$ és un cos de classes mòdul $\mathfrak{m}$ quan

$$[I_{\mathfrak{m}} : H_{\mathfrak{m}}(L|K)] = [L : K].$$

En aquest cas, el mòdul $\mathfrak{m}$ es diu que és admissible per a l'extensió $L|K$. Donada una extensió abeliana $L|K$, el mòdul admissible més petit (segons la relació de divisibilitat), $\mathfrak{f}_{L|K}$, s'anomena el conductor de l'extensió.

El 1920, Takagi demostrà els resultats següents, per a tot cos K de nombres:

(1) (Existència). Per a cada grup d'ideals H tal que $P_{\mathfrak{m}} \subseteq H \subseteq I(K)$, existeix un cos de classes L sobre K tal que Gal(L|K) $\simeq I_{\mathfrak{m}}/H$.

(2) (Completitud) Tota extensió abeliana de K és un cos de classes.

(3) (Conductor) Les places de K que divideixen el conductor $\mathfrak{f}_{L|K}$ d'una extensió abeliana son les ramificades en $L|K$.

(4) (Llei de descomposició) Si $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$, el grau residual $f_{\mathfrak{p}}(L|K)$ coincideix amb l'ordre de $\mathfrak{p}$ en $I_{\mathfrak{m}}/H$.

Takagi obtingué els resultats anteriors amb posterioritat al seu pas per Göttingen, treballant aïlladament en el seu país, en el decurs dels anys de la Primera Guerra Mundial.

Els resultats esmentats conformaren de mica en mica l'edifici de la teoria de cossos de classes. Un punt culminant d'aquesta teoria fou l'obtenció per part d'E. Artin, l'any 1927, de la llei de reciprocitat.

La llei de reciprocitat d'Artin explicita l'isomorfisme $\mathrm{Gal}(L|K) \simeq I_{\mathfrak{m}}/H$ obtingut per Takagi en el seu teorema d'existència. Concretament, donats una extensió abeliana $L|K$ de cossos de nombres i un mòdul $\mathfrak{m}$ de K, divisible per les places de K que ramifiquen en L, se satisfà que

$$\varphi : I_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}} \simeq \mathrm{Gal}(L|K), \quad \text{on } \varphi(\mathfrak{p}) := \mathrm{Frob}(\mathfrak{p}, L|K).$$

L'anomenat element de Frobenius, $\mathrm{Frob}(\mathfrak{p}, L|K)$, només està definit en les places de K que no ramifiquen en L i és un generador específic del grup de descomposició $D_{\mathfrak{P}}(L|K)$, per a $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. (Precisament en les places no ramificades tots els grups de descomposició són cíclics.)

Les aportacions de Noether i de Hasse a la teoria de cossos de classes se centraren en l'obtenció de diversos principis locals-globals. Hasse demostrà la coneguda com a *Führerdiskriminantenproduktformel*:

$$\mathcal{D}(L|K) = \prod_{\chi} f_{\chi,\mathrm{fin}},$$

segons la qual el discriminant d'una extensió relativa de cossos de nombres s'expressa com a producte dels conductors finits associats als caràcters del grup de Galois de l'extensió.

Hasse edificà la teoria local de cossos de classes, però molts resultats de la teoria local es demostraren primerament a partir de resultats de la teoria global, provats amb anterioritat. Fou sota la influència de Noether que s'obtingueren les demostracions locals, primerament, i, a partir d'aquestes, els teoremes de la teoria global. En parlarem tot seguit perquè aquest procés es desenvolupà en paral·lel al del càlcul dels grups de Brauer dels cossos $\mathfrak{p}$-àdics i dels cossos de nombres. L'any 1931, Noether escrivia a Hasse:

> *Ich mache jetzt ein zahlentheoretisches Seminar: Klassenkörpertheorie im Kleinen, Artinsche Führer, Hauptidealsatz (Frl. Taussky ist ja hier), u. s. w.; es sollen die vorliegenden Beweise vorgetragen werden, aber mein persönliches Ziel ist die Sachen dabei hyperkomplex zu verstehen.*
>
> Estic fent un seminari de teoria de nombres: teoria local de cossos de classes, conductor d'Artin, teorema de l'ideal principal (la senyoreta Taussky ja és aquí), etc.; s'exposaran les demostracions que segueixen, però el meu objectiu personal és entendre aquestes qüestions en un sentit hipercomplex.
>
> 08.11.1931, E. Noether a H. Hasse

L'any 1954, Chevalley deduí la teoria global de cossos de classes a partir de la teoria local, d'una manera unificada. Per a tal fi introduí el grup d'ideles d'un cos de nombres. Aquest grup és, alhora, el grup multiplicatiu de l'anell de les adeles del cos de nombres. El tractament adèlic de la teoria de cossos de classes permet formular-ne els resultats també per a les extensions abelianes no finites dels cossos de nombres.

Les tècniques anteriors foren unificades els anys 1950–1960 amb el tractament cohomològic, tant de la teoria local com de la teoria global. Els resultats foren presentats sota la noció de formació de classes, essent les seves primeres presentacions les dels textos d'Artin-Tate [2] i de Serre [18].

4. Cursos de Noether a Göttingen

En comparar els cursos impartits per Noether a Göttingen amb les dates i els continguts de les seves publicacions es posa de manifest l'estret lligam que ella sabia establir entre docència i recerca. Així, veiem que l'hivern del 1924–1925 imparteix un curs sobre teoria de grups i nombres hipercomplexos; l'hivern del 1927–1928, un altre sobre sistemes hipercomplexos i teoria de la representació i, tot seguit, l'any 1929 publica el treball

- E. Noether: Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. *Math. Z.* 30 (1929), 641–692.

Al mateix temps, l'estiu del 1928 imparteix un curs sobre àlgebra no commutativa, com a avançament de la publicació

- E. Noether. Nichtkommutative Algebren. *Math. Z.* 37 (1933), 514–541.

L'estiu del 1929 imparteix un curs sobre aritmètica no commutativa, en el qual hi desenvolupa la seva teoria de productes creuats (*verschränkte Produkte*). En aquest cas, els seus resultats no foren publicats per ella sinò que foren exposats (citant-ne la procedència) per Hasse a

- H. Hasse: Theory of cyclic algebras over an algebraic number field. *Trans. AMS* 34 (1932), 180–200.

i per Deuring, en el text pioner,

- M. Deuring: *Algebren.* Ergebnisse der Mathematik IV. Springer, 1935.

A l'hivern del 1929–1930, Noether impartí un curs sobre l'àlgebra dels sistemes hipercomplexos, que donà lloc a l'important text

- E. Noether: Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. *Math. Z.* 30 (1929), 641–692.

5. Treballs de Noether en àlgebra no commutativa

En aquest apartat comentarem alguns dels treballs de Noether en àlgebra no commutativa.

- R. Brauer; E. Noether: Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen. *Sitz. Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.* (1927), 221–228. (Vorgelegt von I. Schur.)

El treball de Brauer i Noether fa referència als graus dels cossos neutralitzadors minimals d'una àlgebra simple. Hi demostren que tots els cossos K_n cíclics sobre $\mathbb{Q}$, de grau 2^n i en els quals -1 és una suma de dos quadrats són cossos neutralitzadors minimals sobre $\mathbb{Q}$ del cos dels quaternions

$$\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{Q}}\right).$$

Demostren que si $2^n||(p-1)$, p primer, i el cos $K_n \subseteq \mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$ és tal que $[K_n : \mathbb{Q}] = 2^n$, aleshores K_n és un cos neutralitzador minimal del cos dels quaternions, cíclic de grau 2^n. Per tant, d'aquests n'hi ha infinits i el seu grau tendeix a infinit.

- E. Noether: Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. *Math. Z.* 30 (1929), 641–692.

Aquesta publicació conté l'aportació més significativa de Noether a l'estudi de les àlgebres i de les seves representacions. En ella, Noether retroba el teorema de Skolem (de l'any 1927) segons el qual tots els automorfismes de les àlgebres simples són interns. Per primera vegada, en aquest treball Noether dóna compte de fenòmens lligats a la inseparabilitat d'extensions del cos base. S'hi demostra la semisimplicitat de l'anell de grup $K[G]$, quan $\mathrm{car}(K) \nmid \#G$ (teorema de Maschke (1899)) i

que el nombre de representacions absolutament irreductibles d'un grup finit G és igual al nombre de classes de conjugació de G.

A la història de les matemàtiques del Bourbaki [3], aquest treball és valorat en els termes següents:

> Krull (1926) havia fet el lligam entre el concepte de grup abelià amb operadors i representacions lineals de grups; punt de vista generalitzat a àlgebres i desenvolupat en detall per E. Noether en un treball fonamental de l'any 1929 que, per la importància de les idees introduïdes i per la claredat de l'exposició mereix figurar, al costat de la memòria de Steinitz sobre els cossos commutatius, com un dels pilars de l'àlgebra lineal moderna.
>
> N. Bourbaki: *Éléments d'histoire des mathématiques*

A fi de fer-nos càrrec de manera més precisa d'aquesta aportació de Noether, en detallem el contingut:

I Kapitel. Gruppentheoretischer Grundlagen

1. Gruppen mit Operatoren. 2. Die Isomorphiesätze. 3. Kompositionensreihen. 4. Direkte Produkte und Durchschnitte. 5. Vollständig reduzible Gruppen. 6. Moduln in bezug auf einen Körper. Hyperkomplexe Systeme. 7. Matrizes.

II Kapitel. Nichtkommutative Idealtheorie

8. Homomorphiesatz für Ringe. 9. Idempotente Elemente. Direkte Summenzerlegung in Rechtsideale. 10. Zerlegung in zweiseitige Ideale. 11. Das Zentrum. 12. Nilpotente Ideale. 13. Vollständige reduzible Ringe. 14. Zweiseitig einfache vollständig reduzible Ringe mit Einheitselement.

III Kapitel. Modul- und Darstellungstheorie

15. Darstellungen und Darstellungsmoduln. 16. Reduzible Darstellungen. 17. Direkte Summenzerlegung von Darstellungsmoduln bei Ringen mit Einheitselement. 18. Modul- und Darstellungstheorie volständig reduzibler Ringe. 19. Die einfachen Kompositionsfaktoren bei Moduln und Darstellungsmoduln.

IV Kapitel. Darstellungen von Gruppen und hyperkomplexen Systemen

20. Einordnung der hyperkomplexen Systeme. 21. Erweiterung des Grundkörpers. Die Darstellungen des Zentrums 22. Anwendung auf Abelsche Gruppen. 23. Determinante eines hyperkomplexen Systems. 24. Spuren und Charaktere. 25. Diskriminanten. 26. Einordnung des Gruppenrings.

Hasse havia provat que tota àlgebra de divisió central sobre un cos de nombres $\mathfrak{p}$-àdics és cíclica i Artin havia fet notar que aquest era un resultat que podia molt bé ser vàlid en el cas dels cossos de nombres. Noether i Hasse decidiren estudiar aquest problema a fi de, en cas de resoldre'l, enviar-lo al número especial del *Journal de Crelle* que es preparava amb motiu del 70è aniversari de Hensel. P. Roquette ha recopilat en un llibre [17] les dificultats que ambdós matemàtics tingueren en provar aquest resultat. Veient que se'ls hi acabava el termini per a presentar el treball, demanaren ajut a Brauer, qui atinà amb la ideal final de la prova. D'aquesta manera es gestà la publicació

- R. Brauer; H. Hasse; E. Noether: Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. *J. für reine u. angew. Math.* 167 (1932), 399–404.

Els seus autors inicien el treball amb les paraules següents:

> Finalment, els nostres afanys conjunts han aconseguit demostrar que se satisfà el teorema següent, el qual és important per a la teoria relativa a l'estructura de les àlgebres sobre els cossos de nombres algebraics, així com també per a qüestions de fonament.

Teorema principal. *Tota àlgebra de divisió normal sobre un cos de nombres algebraics és cíclica (o, com també es diu, de tipus Dickson).*

Observem que, a l'època, s'anomenaven normals les àlgebres que avui es designen amb el nom de centrals. La demostració original del teorema de Brauer-Hasse-Noether compta amb tres reduccions:

La reducció primera és deguda a Hasse. Consisteix a veure que, per a demostrar que tota àlgebra de divisió central sobre un cos de nombres és cíclica, basta provar el

Teorema 1: *Tota àlgebra A central simple sobre un cos de nombres Ω que descompongui localment per tot, descompon sobre Ω:*

$$[A \otimes_\Omega \Omega_\mathfrak{p}] = [\Omega_\mathfrak{p}] \in \mathrm{Br}(\Omega_p), \text{ per a tot } \mathfrak{p} \Rightarrow [A] = [\Omega] \in \mathrm{Br}(\Omega).$$

La reducció segona és deguda a Brauer. Consisteix a veure que, per a demostrar el teorema 1, basta provar el

Teorema 2: *Tota àlgebra A central simple sobre un cos de nombres Ω que descompongui localment per tot, i amb un cos neutralitzador resoluble sobre Ω, descompon sobre Ω.*

La reducció tercera és deguda a Noether i, també a Brauer, independentment. Consisteix a veure que, per a demostrar el teorema 2 basta provar el

Teorema 3: *Tota àlgebra A central simple sobre un cos de nombres Ω que descompongui localment per tot, i amb un cos neutralitzador de grau primer sobre Ω, descompon sobre Ω.*

D'aquest teorema Noether en proporciona dues demostracions diferents. Una es basa en resultats de Hasse i l'altra, en resultats de Hilbert i de Furtwängler.

El treball fou redactat per Hasse i en ell hi trobem el paràgraf següent:

> *Im Zusammenhang mit dem Normensatz bemerken wir weiter, daß der Satz I als dessen richtige Verallgemeinerung auf höhere (auch nichtabelsche) Fälle anzusehen ist, während ja die wörtliche Verallgemeinerung, wie H. Hasse zeigte, nicht allgemein richtig ist.*
> En connexió amb el teorema de la norma, remarquem a més que el teorema I s'ha d'interpretar com la formulació d'aquell teorema que és correcta en casos més generals (fins i tot no abelians), ja que, com va mostrar Hasse, la seva generalització literal en general no és correcta.

Aquest paràgraf recull una idea original de Noether (cf. *bemerken wir*). En el cas de les extensions cícliques es coneixia la validesa del principi local-global per a les normes, però aquest principi deixava de satisfer-se per a les normes d'extensions més generals, tal con Hasse havia posat de manifest amb exemples de normes locals en totes les places d'un cos de nombres per a una extensió donada, que no eren normes globals per a la dita extensió. En canvi, Noether insistí en el fet que la generalització del principi local-global nòrmic calia formular-la amb àlgebres, tal i com resultà ser cert, segons el teorema 1 anterior.

En el mateix treball s'hi troben moltes altres consideracions i resultats. Entre aquests, la resposta a un pregunta de Schur formulada l'any 1906:

Teorema. *Totes les representacions absolutament irreductibles d'un grup finit G d'ordre n són realitzables en el cos de les arrels n^h-èsimes de la unitat, sempre que h sigui prou gran.*

El teorema fou reproduït per Deuring en el seu llibre *Algebren* [4].

• E. Noether: Hyperkomplexe Systeme in ihren Bezeichnungen zur kommutativen Algebra und Zahlentheorie. *Verhandl. Intern. Math.-Kongreß Zürich* 1(1932), 189–194.

El treball resumeix la seva intervenció en el Congrés Internacional de Zürich, com a conferenciant plenària. En aquest treball hi trobem el que Noether anomena "Principi de l'aplicació de la no commutativitat en la commutativitat":

> Per mitjà de la teoria d'àlgebres, s'intenten aconseguir expressions senzilles i invariants de fets coneguts sobre formes quadràtiques o sobre cossos cíclics; és a dir, fets tals que només depenen de propietats purament estructurals d'àlgebres. Un cop s'han demostrat aquestes expressions invariants, aleshores cau pel seu propi pes una transferència d'aquests fets a cossos galoisians qualssevol.

En aquesta exposició, Noether presenta un resum de les seves aportacions principals i d'aportacions de R. Brauer, H. Hasse, C. Chevalley i A. Speiser en el context de la teoria d'àlgebres.

És remarcable que Noether fou la primera matemàtica convidada a impartir una conferència plenària en un dels *International Congress of Mathematicians*. De ben segur hi deuria ajudar el fet que van der

Waerden, aleshores professor a Zürich, en fos un dels organitzadors. Fins a avui, no es pot dir que la presència femenina en aquests tipus d'actes hagi estat gaire lluïda, atesa la llista següent de conferenciants plenàries en congressos internacionals:

Conferenciants plenàries en els ICM-s:

1932 ICM Zürich: Emmy Noether,

1990 ICM Kyoto: Karen Uhlenbeck,

1994 ICM Zürich: Ingrid Daubechies; Marina Ratner.

Potser per a compensar una mica aquest desequilibri, alguns congressos internacionals han comptat amb les *Noether Lectures*, la impartició de les quals es reserva a matemàtiques. En aquest apartat, hem pogut localitzar les següents:

1994 AWM-E. Noether Lecture, ICM Zürich: Olga Ladyzhenskaya,

1998 AWM-E. Noether Lecture, ICM, Berlin: Cathleen S. Morawetz,

2002 AWM-E. Noether Lecture, ICM, Beijing: Hesheng Hu,

2006 AWM-E. Noether Lecture, ICM, Madrid: Ivonne Choquet-Bruhat.

- E. Noether: Nichtkommutative Algebren. *Math. Z.* 37 (1933), 514–541.

Aquest és un altre dels treballs cabdals de Noether en àlgebra no commutativa. Hi considera per primera vegada representacions lineals (per l'esquerra i per la dreta) d'àlgebres simples A en anells de matrius sobre cossos no commutatius D, D^0. Hi demostra teoremes d'estructura d'àlgebres simples i semisimples. Hi desenvolupa una teoria de Galois per a àlgebres simples i simplifica una demostració de Köthe segons la qual tota àlgebra simple admet un cos de descomposició minimal que és separable. A més, tots els resultats es discuteixen en qualsevol característica.

- E. Noether: Der Hauptgeschlechtssatz für relativ-galoissche Zahlkörper. *Math. Ann.* 108 (1933), 411–419.

Els resultats obtinguts en aquest treball foren reproduïts en el text de Deuring *Algebren* [4]. Es tracta de teoremes de Noether sobre sistemes de factors. Donada una extensió de Galois $L|K$ de cossos de nombres,

Noether defineix el producte creuat del grup de classes d'ideals de L pel grup de Galois $G = \mathrm{Gal}(L|K)$

$$\mathrm{Cl}(L) \cdot G.$$

Expressa els productes creuats anteriors en termes de sistemes de factors, els classifica, i analitza els que proporcionen la classe trivial. Amb l'ús de sistemes de factors obté una demostració alternativa del principi local-global de Hasse per al grup de Brauer d'un cos de nombres.

Els resultats de Noether, Hasse i Brauer relatius al grup de Brauer d'un cos local i d'un cos global solen expressar-se avui de la manera següent (per comoditat ens limitarem únicament al cas dels cossos de nombres i dels seus completats).

Siguin K cos de nombres i $\mathcal{O}_K$ el seu anell d'enters. Donat un ideal primer $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$, existeix un isomorfisme

$$\mathrm{inv}_{\mathfrak{p}} : \mathrm{Br}(K_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Si $\mathfrak{p}$ és un primer real de K, existeix un isomorfisme

$$\mathrm{inv}_{\mathfrak{p}} : \mathrm{Br}(K_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sim} \{0, \frac{1}{2}\} \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Si $[A] \in \mathrm{Br}(K_{\mathfrak{p}})$, l'element $\mathrm{inv}_{\mathfrak{p}}[A]$ n'és l'invariant de Hasse.

El grup de Brauer $\mathrm{Br}(K)$ es caracteritza per l'existència d'una successió exacta

$$0 \to \mathrm{Br}(K) \to \oplus_{\mathfrak{p}} \mathrm{Br}(K_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\mathrm{inv}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$

on $\mathrm{inv} := \sum \mathrm{inv}_{\mathfrak{p}}$.

Des dels anys 1930, l'avenç més important que s'ha produït en l'estudi del grup de Brauer d'un cos és el teorema de Merkuryev-Suslin, de l'any 1982. El teorema descriu la n-torsió, $\mathrm{Br}(F)[n]$, del grup de Brauer d'un cos F qualsevol, quan aquest conté les arrels n-èsimes de la unitat, en termes del segon grup de la teoria K d'aquest cos.

Teorema. (Merkuryev-Suslin, 1982) *Sigui F un cos arbitrari que contingui una arrel primitiva n-èsima de la unitat ζ. Existeix un isomorfisme, dit de residus nòrmics,*

$$\begin{array}{rccc} R_{F,n} : & K_2(F)/nK_2(F) & \to & H^2(F, \mu_n^2) \simeq \mathrm{Br}(F)[n] \\ & \{a, b\} & \mapsto & [A_\zeta(a, b)] \end{array}$$

on $A_\zeta(a,b)$ és la F-àlgebra (central, simple i cíclica) definida per

$$A_\zeta(a,b) = \langle i, j : i^n = a, j^n = b, ij = \zeta ji \rangle.$$

El teorema anterior té moltes conseqüències. Per a més informació sobre aquestes i la seva demostració es pot consultar el llibre *Brauergruppen von Körpern* [9], d'Ina Kersten. (Kersten es doctorà amb E. Witt; és, per tant, una néta científica d'Emmy Noether. Des de 2003, Kersten és la Degana de la Facultat de Matemàtiques i Ciències de la Computació de la Universitat de Göttingen.)

Durant els anys 1950, Artin i alguns membres de la seva escola començaren la traducció de la teoria de cossos de classes en termes de cohomologia galoisiana. Recordem que Artin havia emigrat també a Amèrica i que dos dels seus deixebles foren S. Lang i J. Tate. Per parlar d'aquestes versions, començarem per esmentar uns resultats generals de cohomologia de grups. (Per $\widehat{H}^i$ denotem els grups de cohomologia modificats o de Tate, cf. [18]).

Teorema (Tate, 1952) *Siguin G un grup finit i C un G-mòdul. Suposem que per a tots els subgrups H de G se satisfan les condicions següents:*

(i) $H^1(H,C) = 0$.
(ii) $H^2(H,C)$ *és un grup cíclic d'ordre* $\#H$.

Aleshores, per a tot $r \in \mathbb{Z}$, existeix un isomorfisme

$$\widehat{H}^r(G,\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^{r+2}(G,C),$$

obtingut per cup producte amb la classe fonamental.

En una carta datada el 2 de juny de 1931, Noether comentava a Hasse l'arribada imminent de Herbrand, un jove doctor que en aquells moments estava treballant amb Artin. Prèviament, Herbrand havia presentat una tesi en lògica matemàtica.

> *Mitte Juni will auch Herbrand kommen, der jetz bei Artin ist.*
> A mig juny també vindrà Herbrand, que ara és amb Artin.
>
> 02.06.1931, E. Noether a H. Hasse

Després de la seva estada a Göttingen, de retorn a França, Herbrand feu una excursió als Alps, en el decurs de la qual hi trobà la mort en un accident de muntanya, quan comptava 23 anys. El 24 d'agost de 1931, Noether comentava a Hasse:

> *Mir geht der Tod von Herbrand nicht aus dem Sinn.*
>
> No em puc treure del cap la mort de Herbrand.
>
> 24.08.1931, E. Noether a H. Hasse

En teoria de nombres, Herbrand és conegut pel teorema de Herbrand-Ribet, relatiu a l'estructura galoisiana del grup de classes d'ideals del cos ciclotòmic $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, per a p un nombre primer. I, també, per l'anomenat quocient de Herbrand en cohomologia de grups:

Proposició. (Herbrand) *Siguin G un grup cíclic finit i M un G-mòdul amb cohomologia finita. Sigui*

$$h(M) := \frac{\#\widehat{H}^0(G,M)}{\#\widehat{H}^1(G,M)}.$$

Aleshores,

(i) *$h(M)$ és multiplicatiu respecte de successions exactes.*
(ii) *$h(M) = 1$ per a tot G-mòdul M finit.*

Quan els resultats de cohomologia de grups s'apliquen a grups de Galois, s'obtenen teoremes relatius a cohomologia galoisiana. El teorema següent proporciona una interpretació del teorema de la base normal en termes de grups de cohomologia de Tate, atès que aquest teorema ens diu que el grup additiu $(L,+)$ d'una extensió de Galois $L|K$, de grup de Galois G, és un G-mòdul induït:

Teorema. (Speiser, 1916) *Per a tota extensió de Galois $L|K$ se satisfà que*

$$\widehat{H}^n(\mathrm{Gal}(L|K), L) = 0, \quad \textit{per a tot } n \in \mathbb{Z}.$$

D'altra banda, donada una extensió de Galois $L|K$, el grup de Brauer relatiu

$$\mathrm{Br}(L|K) := \ker(\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(L)), \quad [A] \mapsto [A \otimes_K L],$$

admet la interpretació cohomològica següent:

$$\mathrm{Br}(L|K) \simeq H^2(\mathrm{Gal}(L|K), L^*).$$

A més, si $L|K$ és cíclica

$$\mathrm{Br}(L|K) \simeq K^*/N_{L|K}(L^*),$$

la qual cosa permet recuperar, en el cas cíclic, el principi nòrmic local-global.

Donat un cos de nombres L denotem per $\mathbb{A}_L$ el seu anell d'adeles, per $\mathbb{I}_L := \mathbb{A}_L^*$ el grup d'ideles corresponent i per $\mathbb{C}_L := \mathbb{I}_L/L^*$ el grup de classes d'ideles. Aleshores, el teorema 90 de Hilbert i la generalització d'aquest deguda a Noether es reinterpreten com

Teorema. (Noether) *Per a tota extensió de Galois $L|K$ se satisfà que*

(i) $H^1(\mathrm{Gal}(L|K), L^*) = 0$.
(ii) $H^1(G, \mathbb{C}_L) = 0$, *si L i K són cossos de nombres.*

Finalment, el teorema de Tate abans esmentat i la determinació de la cohomologia de les classes d'ideles dels cossos de nombres, permeten deduir la llei de reciprocitat d'Artin:

Teorema. (Artin-Tate, 1961) *Siguin $L|K$ una extensió de Galois de cossos de nombres; $G = \mathrm{Gal}(L|K)$. Aleshores,*

(i) $H^1(G, \mathbb{C}_L) = 0$.
(ii) $H^2(G, \mathbb{C}_L)$ *és un grup cíclic d'ordre $\#G$.*
(iii) *Si L/K és abeliana, existeix un isomorfisme*

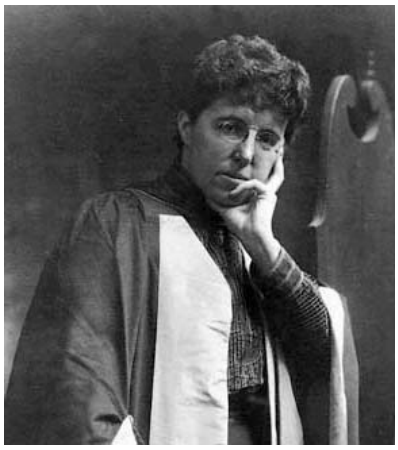
$$\phi : \mathbb{C}_K/N_{L|K}(\mathbb{C}_L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L|K)$$

els components locals del qual són donats pels símbols d'Artin.

6. L'estada a Bryn Mawr

Charlotte A. Scott havia estat la primera doctora anglesa en matemàtiques. Es traslladà als EUA on fundà els estudis de matemàtiques en el Bryn Mawr College de Pennsylvania, dedicat a l'educació de les noies. Scott, que era geòmetra, compta amb una extensa producció matemàtica.

Emmy Noether aconseguí una plaça a Bryn Mawr l'any 1933, dos anys després que Scott hagués mort. En aquells moments, a Bryn Mawr s'hi trobava Olga Taussky. El mateix any, Weyl també havia emigrat als EUA, era professor a Princeton i tenia a Brauer com a ajudant. Com que Princeton està relativament a prop de Bryn Mawr i comunicat per tren, convidà Emmy Noether a impartir cursos d'àlgebra a l'Institut, la qual cosa ella feia setmanalment.



Charlotte A. Scott (1858–1931)

Laboratori de Bryn Mawr

Per les seves cartes a Hasse, coneixem que, a Bryn Mawr, Noether dóna classe a tres noies. Els explica el primer volum del text d'àlgebra de van der Waerden [22], els primers capítols del text de teoria algebraica de nombres de Hecke [8], i es mostra molt satisfeta per l'interès de les seves alumnes per resoldre problemes. També dirigeix la tesi a una estudiant: Ruth Stauffer.

El 7 d'abril de l'any 1935, Noether escrivia a Hasse

> Lieber Herr Hasse,
>
> Vielen Dank für Ihre Separatensendung –ich bewundere immer wieder wieviel Sie schaffen– und für die Abschrift des Briefes an Albert [...]
>
> Brauer läßt darauf aufmerksam machen, daß der Zusammenhang zwischen quadratischen Formen und Algebren (S.18) inkl. des Beweises der Produktarstellung $H = \prod_{i \leq k}(a_i, a_k)$ (Artin) den Physikern

wohlbekannt ist: Dirac has das benutz und in einer Note von Weyl und ihm (als Assitenten) [...] wird es in der Theorie der Spinoren benutz. Im Spezialfall der Summe von Quadraten soll es schon in dem Artikel von Cartan über hyperkomplexe Systeme in der fraonzösischen Enzyklopädie stehen.

Daß das Zerfallen der Faktorensysteme im multipl[ikativen] Fall als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Erweiterung bekannt ist, weiß Witt wohl? Das ist ja das Resultat von Brauer, das Sie Jahresber[icht] 44 erwähnen. [...]

Waren Sie in Helsinki und was machen Sie im Sommer? Ich weiß nicht ob ich dieses Jahr wieder komme; wenn ja wird es Ende Juni. Ich muß beim Schlußfeier besagte Doktorandin [Ruth Stauffer] feierlich zum Doktorhut (Hood eine Art Kapuze) vorschlagen; aufgesetzt bekommt sie den vor der Präsidentin.

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether

07.04.1935, Noether a Hasse

Benvolgut Sr. Hasse,

Moltes gràcies per enviar-me els seus extrets –com sempre m'admira el molt que treballa– i per la còpia de la carta a Albert [...]

Sobre aquest punt, Brauer es permet remarcar que la relació entre formes quadràtiques i àlgebres (p. 18) inclosa en la demostració de la descomposició en producte $H = \prod_{i \leq k}(a_i, a_k)$ (Artin) és ben coneguda pels físics: Dirac l'ha utilitzada i serà emprada en la teoria d'espinors en una nota de Weyl i seva (com a ajudant). En el cas especial de les sumes de quadrats, ja es deu trobar en l'article de Cartan sobre sistemes hipercomplexos de l'Enciclopèdia francesa.

Ho sap Witt que és conegut que, en el cas multiplicatiu, la descomposició dels sistemes de factors és condició necessària i suficient per a l'existència d'extensions? Aquest és el resultat de Brauer que vostè esmenta en el seu informe anual 44 [...]

[segueixen uns resultats sobre bases normals explícites de la seva alumna de doctorat]

Va anar a Helsinki i què farà a l'estiu? Jo no sé si aquest any tornaré; en tot cas, a finals de juny. Penso que hauré d'estar present en la festa de graduació de l'esmentada doctoranda [Ruth Stauffer] en què la Presidenta li imposa una mena de caputxa.

Cordialment, Emmy Noether

07.04.1935, Noether a Hasse

Al cap d'uns dies, Hasse s'assabentava que Noether havia mort, concretament el 14 d'abril de l'any 1935, arran d'una intervenció quirúrgica a l'hospital de Bryn Mawr.

Witt, Weyl, Artin, Noether, Tsen, *et.al.*, l'estiu de l'any 1932

A la Universitat de Göttingen i des del curs 2001/2002 funciona una càtedra de matemàtiques per a professores visitants, que porta el nom d'Emmy Noether:

> *In honour of the great mathematician Emmy Noether the Faculty of Mathematics of the University of Göttingen has created a visiting professorship named after the scientist, who studied, taught and researched in Göttingen from 1915 until 1933. Once a year the Faculty awards the Emmy Noether professorship to an outstandig female mathematician who will visit Göttingen for 3 to 4 weeks to present a current field of research in talks and seminars.*

Referències

[1] Artin, E.: *Geometric Algebra.* Interscience Publishers, Inc., 1957.
[2] Artin, E.; Tate, J.: *Class field theory.* Benjamin, 1961.
[3] Bourbaki, N: *Éléments d'histoire des mathématiques.* Paris, Hermann, 1969.

[4] Deuring, M.: *Algebren.* Zweite, korrigierte Auflage. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 41. Springer-Verlag, Berlin-New York 1968, viii+143 pp. (Primera edició: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 4. Springer, 1935.)

[5] Dick, A.: *Emmy Noether: 1882–1935.* Elem. Math. Beiheft No. 13 (1970) Birkhäuser Verlag, Basel 1970, 72 pp.

[6] Dickson, E.: Linear Algebras and Abelian Extensions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 15 (1914), 31–46.

[7] Dickson, E.: New division algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 28 (1926), 207–234.

[8] Hecke, H.: *Lectures on the theory of algebraic numbers.* Translated from the German by George U. Brauer, Jay R. Goldman and R. Kotzen. Graduate Texts in Mathematics, 77. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. xii+239 pp. ISBN: 0-387-90595-2.

[9] Kersten, I.: *Brauergruppen von Körpern.* Aspects of Mathematics, D6. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1990. viii+176 pp. ISBN: 3-528-06380-7.

[10] Kersten, I.: Noether's problem and normalization. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein* 100 (1998), no. 1, 3–22.

[11] Lang, S.: *On quasi algebraic closure.* Ann. of Math. 55 (1952), 373–390.

[12] Lemmermeyer, F.; Roquette, P.: *Helmut Hasse und Emmy Noether: Die Korrespondenz 1925–1935.* Edited and with commentary, and an introduction in English, by Franz Lemmermeyer and Peter Roquette. Universitätsverlag Göttingen, Göttingen, 2006. 301 pp. ISBN: 3-938616-35-0.

[13] Noether, E.: *Gesammelte Abhandlungen.* [Collected papers]. Edited and with an introduction by Nathan Jacobson. With an introductory address by P. S. Alexandrov. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983. viii+777 pp.

[14] Molin, Th.: Über Systeme höherer komplexer Zahlen. *Math. Ann.* 41 (1893), 83–156.

[15] Peirce, B.: Linear Associative Algebras. *Amer. J. Math.* 4 (1881), 97–215.

[16] Reid, C.: *Hilbert.* With an appreciation of Hilbert's mathematical work by Hermann Weyl. Springer-Verlag, New York-Berlin 1970 xi+290 pp.

[17] Roquette, P.: *The Brauer-Hasse-Noether theorem in historical perspective.* Schriften der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Publications of the Mathematics and Natural Sciences Section of Heidelberg Academy of Sciences, 15. Springer-Verlag, Berlin, 2005. vi+92 pp. ISBN: 3-540-23005-X.

[18] Serre, J-P.: *Corps locaux.* Hermann, 1968.

[19] Teicher, M.: *On Emmy Noether. The heritage of Emmy Noether* (Ramat-Gan, 1996), 1–3, Israel Math. Conf. Proc., 12, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.

[20] Tsen, C.: Zur Stufentheorie der Quasi-algebraisch-Abgeschlossenheit kommutativer Körper. *J. Chinese Math. Soc.* 171 (1936), 81–92.

[21] van der Waerden, B. L.: *A History of Algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether.* Springer-Verlag, Berlin, 1985. xi+271 pp. ISBN: 3-540-13610-X.

[22] van der Waerden, B. L.: *Algebra.* Vol. I. Based in part on lectures by E. Artin and E. Noether. Translated from the seventh German edition by Fred Blum and John R. Schulenberger. Springer-Verlag, New York, 1991. xiv+265 pp.

[23] van der Waerden, B. L.: *Algebra.* Vol. II. Based in part on lectures by E. Artin and E. Noether. Translated from the fifth German edition by John R. Schulenberger. Springer-Verlag, New York, 1991. xii+284 pp.

[24] van der Waerden, B. L.: *Meine Göttinger Lehrjahre.* With an epilogue by Peter Roquette. Mitt. Dtsch. Math.-Ver. 1997, no. 2, 20–27.

[25] Wedderburn, J. H. M.: On hypercomplex numbers. *Proc. London Math. Soc.* 6 (1908), 77–118.

UPC