Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 12,2, 215–238(1996)

UN MÉTODO DE EVALUACIÓN DEL DAÑO SÍSMICO EN ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO

SERGIO OLLER *
BIBIANA LUCCIONI **
y
ALEX H. BARBAT *

* *Universidad Politécnica de Cataluña*
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Gran Capitán s/n - 08034 Barcelona, España

** *Universidad Nacional de Tucumán*
Laboratorio de Estructuras
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Av. Independencia 1800 - 4000 Tucumán, Argentina

RESUMEN

En este artículo se presenta un método que permite evaluar el daño sísmico global en estructuras de barras de hormigón armado. Se denomina estado dañado de un punto del sólido a aquel estado termodinámico resultante de la entrada del material en estado de comportamiento no lineal. A partir del concepto de daño local en un punto del sólido, se deduce por extensión el índice de daño global estructural. Se utiliza la técnica de elementos finitos para aproximar el campo de desplazamientos. Se trabaja con un elemento de barra Timoshenko en 3-D subdividido en capas entrecruzadas (fibras), donde en cada una de ellas se aplica un modelo constitutivo general formulado en tensión-deformación. Esto último permite incluir cualquier fenómeno que acerque más la simulación numérica a la realidad del problema (plasticidad, degradación de rigidez, problemas viscosos, etc.). Al final se incluyen ejemplos de cálculo que demuestran la capacidad del método numérico que se presenta, para la obtensión del nivel de daño global en las estructuras.

SUMMARY

A method for the evaluation of the global seismic damage in reinforced concrete beam structures is presented in this paper. The damage state in a point of the continuum is defined as the thermodynamic state due to the nonlinear behaviour of the material. The global damage index of a structure is deduced from the local damage corresponding to each point of the structure. The finite element technique is used to approximate the displacement field, employing a layered threedimensional Timoshenko beam element. In each layer a general constitutive model is applied, formulated in the stress-strain field. This formulation permits to consider

Recibido: Marzo 1996

©Universitat Politècnica de Catalunya (España) ISSN 0213–1315

phenomena such as plasticity, damage, viscous problems, etc. Finally examples are included, which demostrate the efficiency of the presented numerical method in obtaining the global damage level building structures.

INTRODUCCIÓN

En otros trabajos[1,3,-7,8,-9,24] se ha desarrollado una metodología de simulación del daño ocurrido en estructuras de hormigón armado durante terremotos. Dicha metodología se apoyaba en un modelo constitutivo de degradación isótropo[16,19] , que partía de la teoría de Kachanov[11] . En aquellos trabajos, se entendía por *daño* el *grado de degradación estructural -pérdida de rigidez-* y se caracterizaba por un índice escalar que variaba entre 0 y 1, según el material esté en estado virgen o totalmente degradado sin resistencia. En el presente trabajo, se extiende dicho concepto con la finalidad de que este índice pueda incluir otros fenómenos disipativos como la plasticidad y la degradación a la vez, permitiendo un mejor acercamiento al concepto de deterioro en un punto de la estructura. Este nuevo índice más general, preserva la definición del *índice de daño local* con la misma objetividad que se había propuesto en trabajos previos[1,3,-7,8,-9] , es decir como un escalar que varía entre cero y uno, donde los extremos inferior y superior definen los límites correspondientes a un material en estado virgen y totalmente dañado, respectivamente. Así pues, la definición del índice global, como concepto deducido a partir del índice local, mantiene todas las características propuestas en trabajos anteriores.

Al principio este trabajo presenta la definición del equilibrio dinámico para comportamiento no lineal de la barra de Timoshenko que a continuación se profundiza sobre la definición de la fuerza interna y el acoplamiento que allí se produce entre la plasticidad el daño y la visco elasticidad. En los apartados siguientes se introducen dos definiciones del daño global estructural y se presentan tres ejemplos de comprobación del concepto de daño global. Dos de ellos son orientados a completar la idea teórica presentada en los puntos anteriores y el tercero es un ejemplo basado en un ensayo experimental. Por último se presentan las conclusiones y las referencias bibliográficas.

ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO

Balance de potencia

De la *primera ley de la termodinámica*[12,13,-15,17,-21] , se tiene el siguiente balance de potencia

$$\dot{\Pi} = \mathcal{Q} + P_{in} \tag{1}$$

tal que para problemas isotérmicos la *potencia calórica* se hace nula $\mathcal{Q} = 0$, quedando el cambio temporal de *energía total interna* $\dot{\Pi}$, igual a la *potencia mecánica introducida* P_{in} e igual a

$$\dot{\Pi} = P_{in} = \oint_S \boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dS + \int_V m\, \boldsymbol{b} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dV \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{t}$ es la fuerza de superficie (siendo $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$, tal que $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy y $\boldsymbol{n}$ el vector normal a la superficie S del sólido); $\boldsymbol{b}$ son las fuerzas de volumen por unidad de masa; $m = dM/dV$ es la masa volúmica aparente o densidad; $\dot{\boldsymbol{u}}$ es el campo de velocidades (si $t = cte.$, $\dot{\boldsymbol{u}}$ se transforma en un incremento temporal del campo de los desplazamientos y la potencia introducida se transforma en el incremento temporal de trabajo introducido); M es la masa del sólido; V es el volumen del sólido y S la superficie que lo envuelve.

Sustituyendo las fuerzas de superficie por su expresión y transformando, a través del teorema de Green[17] , la integral de superficie de la ecuación (2) en una integral sobre el volumen del sólido, queda expresado el *cambio temporal de energía total* como

$$\frac{d}{dt}(\Pi) = \frac{d}{dt}\int_v m\, \pi\, dV = P_{in} = \int_V \Big[\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{x}} + m\, \boldsymbol{b}\right)}_{m(\partial \dot{\boldsymbol{u}}/\partial t)} + \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \dot{\boldsymbol{u}}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big] dV \tag{3}$$

(Ec. de Cauchy)

o, de otra forma, el equilibrio de potencias queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_v m\, \pi\, dV &= \int_V \Big[\dot{\boldsymbol{u}} \cdot\ m\ \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \dot{\boldsymbol{u}}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big] dV \\ &= \int_V \dot{\boldsymbol{u}} \cdot\ m\ \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}\, dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\, dV = \oint_S \boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dS + \int_V m\, \boldsymbol{b} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dV \end{aligned} \tag{4}$$

donde $\pi = k + w$ es la *densidad de energía total*, compuesta por la densidad de energía específica cinética $k = 1/2\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}$ más la densidad de energía específica interna w. La ecuación (4) es una forma particular de escribir en forma integral la primera ley de la termodinámica o ecuación de conservación para el caso en que la potencia calórica sea nula.

Discretización espacial

La estructura se modeliza con elementos finitos lagrangeanos C^o del tipo barra Timoshenko[10] , de tres nodos y seis grados de liberdad por nodo para el caso tri-dimensional (3-D) y con tres grados de libertad por nodo para el caso bi-dimensional (2-D). El hecho de que el modelo constitutivo precise información del tensor de tensión y del de deformación a nivel de cada punto de integración, hace necesaria una discretización secundaria a nivel de la sección transversal del elemento de barra. Es decir que en el caso 3-D necesita una cuadrícula y en el 2-D es suficiente con una discretización por capas (ver la Figura 1). Este procedimiento evita la formulación de leyes constitutivas en esfuerzos seccionales (momentos flectores, esfuerzos cortantes,

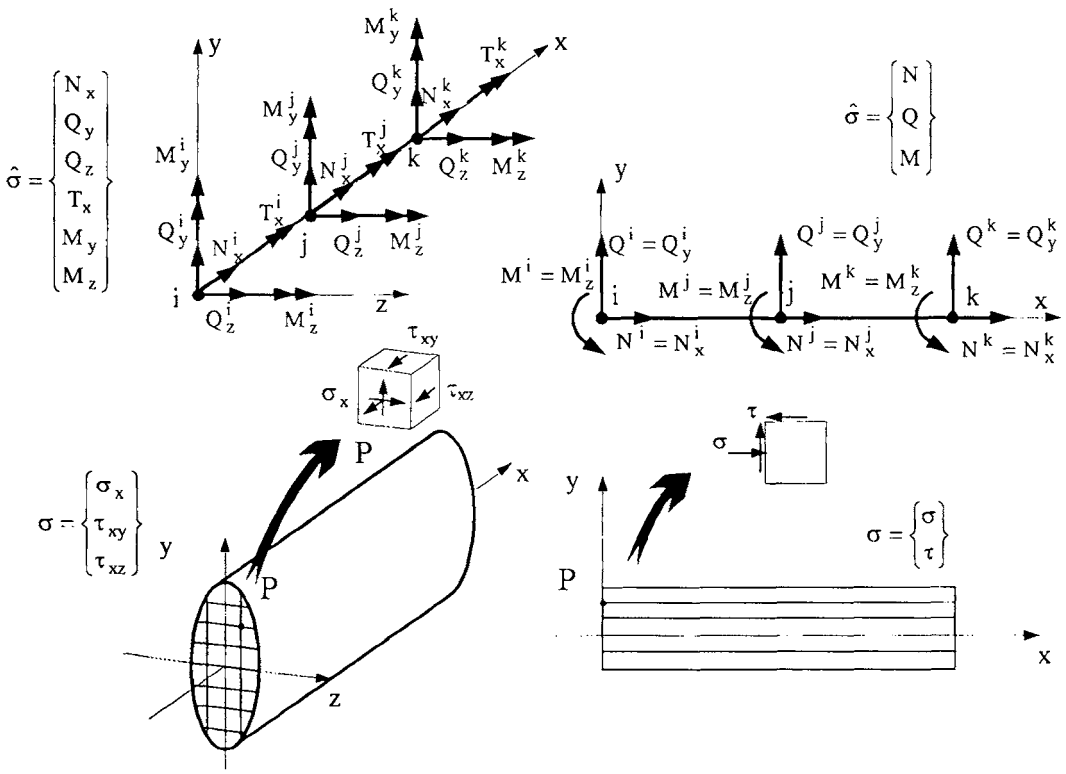

Figura 1. Sub-discretización a nivel elemental

esfuerzo axial y momento torsor), dado que las mismas suelen ser válidas sólo en ciertos casos particulares de comportamiento.

El desarrollo siguiente, enfocado para una barra de Timoshenko en 3-D, describe las relaciones existentes entre las variables puntuales y las seccionales. La barra se considera en un sistema local de coordenadas, con el eje x longitudinal formando con los otros dos ejes un triedro derecho (ver Figura 1). La relación entre los campos de desplazamientos y de deformación, de acuerdo a los signos de la Figura 2, es

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_o + z\theta_y - y\theta_z \\ v_o - z\theta_x \\ w_o + y\theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \\ w_o \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{u}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{du_o}{dx} + z\frac{d\theta_y}{dx} - y\frac{d\theta_z}{dx} \\ \frac{dv_o}{dx} - \theta_z - z\frac{d\theta_x}{dx} \\ \frac{dw_o}{dx} + \theta_y + y\frac{d\theta_x}{dx} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{du_o}{dx} \\ \frac{dv_o}{dx} - \theta_z \\ \frac{dw_o}{dx} + \theta_y \\ \frac{d\theta_x}{dx} \\ \frac{d\theta_y}{dx} \\ \frac{d\theta_z}{dx} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{6}$$

donde $\boldsymbol{u}$ es el vector de desplazamientos de un punto P de la sección transversal; $\boldsymbol{\epsilon}$ es la parte simétrica del tensor de deformaciones en el punto P del sólido; $\hat{\boldsymbol{u}}$ es el vector de desplazamientos generalizado del elemento finito de barra, correspondiente al eje central de la sección; $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ es el vector de deformaciones generalizadas seccionales; $\boldsymbol{S}$ es la matriz geométrica que relaciona el campo de desplazamiento entre un punto del sólido y el correspondiente a una sección generalizada transversal que pasa por él.

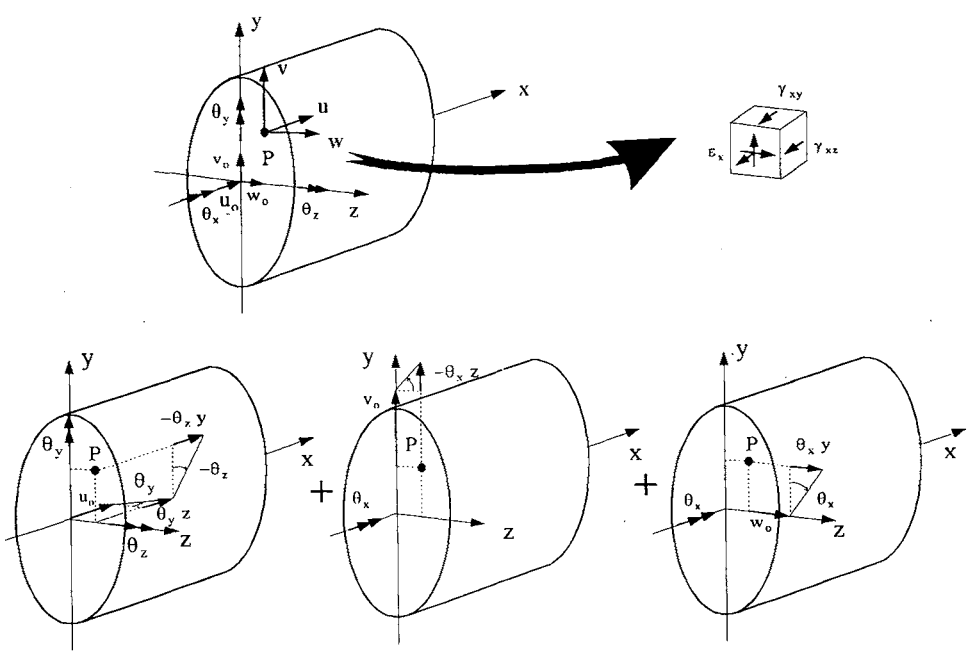

Figura 2. Esquema de relación entre el campo de desplazamiento y deformación

Sustituyendo las ecuaciones (5) y (6) en la del equilibrio de potencias (4), resulta

$$\int_V \left(\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \cdot m \cdot \boldsymbol{S} \cdot \hat{\ddot{\boldsymbol{u}}} \right) dV + \int_V \left(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \right) dV = \oint_S \left(\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \right) \, dS + \int_V \left(m \, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \right) \, dV$$

tal que aplicando esta ecuación al dominio de la barra de Timoshenko, se obtiene

$$\int_\ell \hat{\boldsymbol{u}} \underbrace{\left(\int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{S} \cdot m \cdot \boldsymbol{S} \, d\mathcal{A} \right)}_{\hat{\boldsymbol{m}}} \cdot \hat{\ddot{\boldsymbol{u}}} \, d\ell + \int_\ell \underbrace{\left(\int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{S} \, d\mathcal{A} \right)}_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} : \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \, d\ell = \int_\ell \left(\hat{\boldsymbol{t}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \right) \, d\ell + \int_\ell \left(m \, \hat{\boldsymbol{b}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \right) \, d\ell \tag{7}$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = \{ \sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \}^T$ es la parte simétrica del tensor de tensiones ya simplificado para estructuras de barra, $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{ N_x \quad Q_y \quad Q_z \quad T_x \quad M_y \quad M_z \}^T$ es el vector de esfuerzos seccionales correspondiente al conjugado energético del vector de deformaciones seccionales $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\hat{\boldsymbol{m}}$ la matriz de densidad seccional que relaciona las fuerzas seccionales inerciales con el vector de aceleraciones $\ddot{\boldsymbol{u}}$, ℓ la longitud de la barra y $\mathcal{A}$ la sección transveral de la misma.

Si se define una función polinomial de soporte local $\boldsymbol{N}(x)$ en el dominio $0 \leq x \leq \ell$ para aproximar el campo de desplazamientos discreto generalizado $\hat{\boldsymbol{U}}$ en la forma $\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{N} \cdot \hat{\boldsymbol{U}}$; $\hat{\ddot{\boldsymbol{u}}} = \boldsymbol{N} \cdot \hat{\ddot{\boldsymbol{U}}}$; $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \hat{\boldsymbol{L}} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \hat{\boldsymbol{U}} = \hat{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{U}}$ y se sustituye esta aproximación en la ecuación (7), se obtiene la siguiente expresión de potencias para el sólido discretizado

$$\begin{gathered} \hat{\boldsymbol{\mathcal{V}}} \cdot \left[\int_\ell \boldsymbol{N} \cdot \hat{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{N} \, d\ell \right] \cdot \hat{\ddot{\boldsymbol{U}}} + \left[\int_\ell \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\boldsymbol{B}} \, d\ell \right] \cdot \hat{\boldsymbol{\mathcal{V}}} = \left[\int_\ell \hat{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{N} \, d\ell + \int_\ell m \, \hat{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{N} \, d\ell \right] \cdot \hat{\boldsymbol{\mathcal{V}}} \\ \hat{\boldsymbol{M}} \cdot \hat{\ddot{\boldsymbol{U}}} + \hat{\boldsymbol{f}}_{int} = \hat{\boldsymbol{f}}_{ext} \qquad \forall \, t \end{gathered} \tag{8}$$

donde $\hat{\boldsymbol{L}}$ y $\hat{\boldsymbol{B}}$ son el operador y la matriz de compatibilidad cinemática para la viga de Timoshenko, respectivamente; $\hat{\boldsymbol{M}}$ es la matriz de masa, $\hat{\boldsymbol{f}}_{int}$ y $\hat{\boldsymbol{f}}_{ext}$ son las fuerzas internas y externas respectivamente. Como se puede ver en la expresión (8), la ecuación de equilibrio dinámico no contiene explícitamente el término de amortiguamiento, sino que este está contenido dentro de la fuerzas internas y, por lo tanto, debe ser tratado a nivel constitutivo. De esta forma, es posible incluir en la formulación el fenómeno de disipación provocado por la acción de la fricción interna y que puede simularse mediante la plasticidad y/o un fenómeno de pérdida de rigidez mediante una teoría de degradación y fractura, más otro fenómeno de disipación que produce amortiguamiento dependiente de la velocidad y del término de viscosidad. De esta manera queda diseñada una herramienta de cálculo muy potente, que cubre los principales fenómenos que caracterizan el comportamiento dinámico del hormigón.

El proceso de cálculo no lineal consiste en la evaluación de las deformaciones generalizadas seccionales $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ correspondientes a los desplazamientos $\hat{\boldsymbol{U}}$, tal que con éstas se calculan las deformaciones en cada punto del sólido $\boldsymbol{\epsilon}$ mediante la ecuación (6) y

las tensiones correspondientes $\boldsymbol{\sigma}$ mediante un apropiado modelo constitutivo que será tratado en el próximo apartado. Conocida la tensión verdadera en cada punto que se encuentra sobre una sección transversal de la viga, se recompone la tensión en coordenadas generalizadas $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, es decir, esfuerzos seccionales, para un punto sobre el eje de la viga, mediante la expresión $\int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{S}\, d\mathcal{A}$. De esta manera se puede exigir ahora el cumplimiento de la ecuación de fuerza residual nula $\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}} = 0 = \hat{\boldsymbol{M}} \cdot \hat{\ddot{\boldsymbol{U}}} + \hat{\boldsymbol{f}}_{int} - \hat{\boldsymbol{f}}_{ext}$, mediante algoritmos estándar.

Para realizar una modelización 3D de las vigas, dentro del contexto que se ha descripto, la sección de éstas debe discretizarse con una malla ortogonal como se indica en la Figura 1. Cada rectángulo de la red está caracterizado por un material y dimensiones distintas y está definido por la posición de sus cuatro esquinas, considerándose que todas las tensiones involucradas tienen una variación lineal entre dichos puntos extremos. Esta misma red sirve también para calcular todas las demás medidas seccionales.

ANÁLISIS DEL TÉRMINO CORRESPONDIENTE A LAS FUERZAS INTERNAS

Introducción

La no linealidad constitutiva está incluída en el término de *fuerza interna* $\hat{\boldsymbol{f}}_{int}$ de la ecuación (8). En él pueden estar contenidos todos los fenómenos constitutivos que aproximen la modelización numérica al comportamiento real del material. Dicho término puede ser formulado de modo tal que el material sea o no sensible a problemas dependientes del tiempo. El límite de las posibilidades que brinda este concepto sólo está en contradicción con el grado de complejidad y dificultad de su implementación. En forma general se puede presentar una ecuación constitutiva afectada por fenómenos independientes y dependientes del tiempo a la vez. Esto es

$$\hat{\boldsymbol{f}}_{int} = \int_{\ell} \left(\int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{S}\, d\mathcal{A} \right) : \hat{\boldsymbol{B}}\, d\ell = \int_{\ell} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\boldsymbol{B}}\, d\ell \tag{9}$$

tal que la tensión en un punto del sólido $\boldsymbol{\sigma}$, así como también su generalización a problemas de barra de Timoshenko $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, puede escribirse como

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{it} + \boldsymbol{\sigma}^{dt} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{it} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{dt} \tag{10}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{it}$ y $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{dt}$ representan los estados de tensión generalizada que se desarrollan por fenómenos *independientes* y *dependientes del tiempo*, respectivamente (para mas detalle ver el apartado que se refiere a la ecuación constitutiva). Sus expresiones generales son

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{it} = \hat{\boldsymbol{C}}^{s} : \hat{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\boldsymbol{U}}; \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{dt} = \hat{\boldsymbol{\eta}} : \hat{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{\dot{\boldsymbol{U}}} \tag{11}$$

donde $\hat{\boldsymbol{C}}^{s} = \int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{C}^{s} \cdot \boldsymbol{S}\, d\mathcal{A}$ es el tensor constitutivo secante integrado para la teoría de barras, $\boldsymbol{C}^{s}$ es el tensor constitutivo secante para un punto del sólido, $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{S}\, d\mathcal{A}$

representa el tensor de viscosidad integrado para la sección y $\boldsymbol{\eta}$ es el tensor de viscocidad en un punto del sólido, tal que una de sus formas –denominada amortiguamiento proporcional a la rigidez del material– coincide con $\boldsymbol{\eta} = \tau \boldsymbol{C}^s$, donde τ es el denominado *tiempo de retardo* o *tiempo de relajación*, según se trate de una formulación viscoelástica escrita en el campo de las tensiones o de las deformaciones respectivamente y cuya definición será tratada más adelante. Sustituyendo las expresiones de la tensión –ecuaciones (10) y (11)– en la ecuación de la *fuerza interna* (9), resulta

$$\hat{\boldsymbol{f}}_{int} = \underbrace{\left[\int_\ell \hat{\boldsymbol{B}} : \overbrace{\hat{\boldsymbol{C}}^s}^{\int_A S\cdot C^s\cdot SdA} : \hat{\boldsymbol{B}}\, d\ell\right]}_{\hat{\boldsymbol{K}}} \cdot \hat{\boldsymbol{U}} + \underbrace{\left[\int_\ell \hat{\boldsymbol{B}} : \overbrace{\hat{\boldsymbol{\eta}}}^{\int_A S\cdot \eta\cdot SdA} : \hat{\boldsymbol{B}}\, d\ell\right]}_{\hat{\boldsymbol{D}}} \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{U}}} \qquad (12)$$

donde $\hat{\boldsymbol{K}}$ y $\hat{\boldsymbol{D}}$ representan las matrices de rigidez y amortiguamiento, respectivamente. Sustituyendo la ecuación (12) en la ecuación de equilibrio dinámico (8), resulta la expresión clásica, pero con la ventaja de que esta proviene de una formulación adecuada a las características constitutivas del material. Esto es

$$\hat{\boldsymbol{M}} \cdot \ddot{\hat{\boldsymbol{U}}} + \hat{\boldsymbol{D}} \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{U}}} + \hat{\boldsymbol{K}} \cdot \hat{\boldsymbol{U}} = \hat{\boldsymbol{f}}_{ext} \qquad \forall\, t \qquad (13)$$

Haciendo una discretización temporal, dicha ecuación puede integrarse numéricamente, obteniéndose la respuesta para cada instante[2,3] .

Ecuación constitutiva. Modelo de degradación-plasticidad-viscosidad

En esta sección se presentan las bases de un modelo constitutivo que trata de una manera unificada los fenómenos de plasticidad, degradación y viscosidad elástica, que ocurren a la vez en un punto del sólido. Este modelo debe ser tenido en cuenta dentro de las fuerzas internas, ecuaciones (9) y (10). Dicho modelo, que está basado en la teoría de la degradación- plástica más viscosidad y está formulado en una configuración material usando una cinemática lagrangeana total, es apropiado para describir el comportamiento de geomateriales y metales en pequeñas deformaciones. La ecuación constitutiva secante y la disipación se obtienen en forma estándar[12,16,21] verificando el cumplimiento de la desigualdad de Clasius-Planck, para problemas térmicamente estables, adiabáticos e isentrópicos. Es decir, que dada la disipación mecánica $\delta\Xi_m = -\delta\Psi + (\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon})/m$, la energía libre de Helmholz $\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e, \alpha^n, \beta^r)$, y su variación $\delta\Psi = \partial_{\epsilon^e}\Psi : \delta\boldsymbol{\epsilon}^e + \partial_{\dot{\epsilon}^e}\Psi : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \partial_{\alpha^n}\Psi \cdot \delta\alpha^n + \partial_{\beta^r}\Psi \cdot \delta\beta^r$, resulta la ley constitutiva y la expresión explícita de dicha disipación para problemas plásticos y/o degradación y/o viscoelásticos

$$\boldsymbol{\sigma} = m\, \frac{\partial\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e, \alpha^n, \beta^r)}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^e} \qquad (14)$$

$$\delta\Xi_m = \delta\Xi_m^p + \delta\Xi_m^{np} = \underbrace{\underbrace{\frac{\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon}^p}{m} - \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha^n}\,\delta\alpha^n}_{\delta\Xi_m^p} - \underbrace{\frac{\partial\Psi}{\partial\beta^r}\,\delta\beta^r}_{\delta\Xi_m^d}}_{\delta\Xi_m^{it}} - \underbrace{\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e} : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e}_{\delta\Xi_m^{vi} \equiv \delta\Xi_m^{dt}} \geq 0 \qquad (15)$$

En la última ecuación $(\cdot)^p$, $(\cdot)^d$, $(\cdot)^{np}$, $(\cdot)^{vi}$, $(\cdot)^{it}$ y $(\cdot)^{dt}$ representan las contribuciones plásticas, de daño, no plásticas, viscosas, independiente del tiempo y dependiente del tiempo, respectivamente, de la disipación mecánica $\delta\Xi_m$; Ψ es la energía libre de Helmholtz, $\boldsymbol{\epsilon}^e$ es la deformación elástica adoptada como variable libre del problema, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy, α^n es el grupo de n variables internas plásticas, β^r es el grupo de r variables internas no plásticas (degradación) y m es la densidad del material.

Energía libre y deformación

Para el caso particular que aquí se presenta, se escribe la energía libre como la suma de una parte correspondiente al fenómeno elástico más otra independiente, correspondiente al fenómeno plástico, lo que se denomina *concepto de elasticidad desacoplada*

$$\Psi\left(\boldsymbol{\epsilon}^e, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e, \alpha^n, \beta^r\right) = \overbrace{\frac{1}{2m}\boldsymbol{\epsilon}^e : \boldsymbol{\mathcal{C}}^s(\beta^r) : \boldsymbol{\epsilon}^e + \frac{\tau}{m}\boldsymbol{\epsilon}^e : \boldsymbol{\mathcal{C}}^s(\beta^r) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e}^{\Psi^e(\epsilon^e,\beta^r)} + \Psi^p\left(\alpha^n\right) \qquad (16)$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}^e$ y $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ son el tensor de deformaciones elástico y su velocidad, respectivamente. Sus relaciones con la deformación total y con su variación temporal vienen dadas por la clásica forma aditiva: $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$ y $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$, respectivamente y $\boldsymbol{\mathcal{C}}^s$ el tensor constitutivo secante que interviene en las expresiones (11 y 12) y que depende de la variable interna no plástica, denominada variable de degradación, de la siguiente manera

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^s \equiv \boldsymbol{\mathcal{C}}^s(\beta^r) = f(\beta^r)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}^o \qquad (17)$$

donde $\boldsymbol{\mathcal{C}}^o$ es la rigidez constitutiva inicial de un material no degradado y $f(\beta^r)$ es una función de transformación entre el espacio real degradado y el ficticio no degradado[23] . La expresión más simple para la función $f(\beta^r)$ coincide con la forma de degradación isótropa propuesta por Kachanov en 1958 como $f(\beta^r) = (1-d)_{r=1}$ y en este caso $d \equiv \{\beta^r\}$. Nótese que en adelante el superíndice s representará a las variables en la configuración degradada.

Función de fluencia, potencial y variables internas para el problema puramente plástico

Las funciones de fluencia y potencial se expresan como funciones homogéneas de primer grado en tensiones

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^s(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^n) &= f^s(\boldsymbol{\sigma}, \phi) - c(\kappa^p) = 0 \\ \mathcal{G}^s(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^n) &= g^s(\boldsymbol{\sigma}, \phi) = K \end{aligned} \tag{18}$$

donde c y ϕ representan la cohesión y la fricción interna si se trata de un geomaterial, respectivamente. Si se trata de metales, c es la resistencia a tensiones tangenciales, en tanto que la fricción interna es nula. Ejemplos de estas funciones son las de Tresca o de Von Mises para metales y de Mohr-Coulomb o Drucker-Prager para geomateriales.

La definición de la ley de evolución de las variables internas plásticas se obtiene a partir de una extensión conceptual de la definición de la regla de evolución de la deformación plástica

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\epsilon}^p &= \delta\lambda\ \boldsymbol{R}^s(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^n) = \delta\lambda\ \frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \delta\alpha_i^n &= \delta\lambda\ H_i^s(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^n) = \delta\lambda\ [\boldsymbol{h}_i^s(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^n) : \boldsymbol{R}^s(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^n)] \end{aligned} \tag{19}$$

donde la variación del factor de consistencia plástica $\delta\lambda$ resulta de la propia condición de consistencia y el tensor $\boldsymbol{h}_i{}^s$ debe ser definido para cada variable interna que se quiera introducir al modelo.

Función límite de degradación y ley de evolución de las variables internas para el problema puramente de degradación

Se define una función límite escalar para activar la degradación[19,27] en la siguiente forma

$$\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^r(\beta^r) = 0 \qquad \text{o} \qquad \mathcal{G}^D(\bar{\sigma}, \beta^r) = g(\bar{\sigma}) - g(\beta^r) = 0 \tag{20}$$

donde $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^o)$ es una función de tensión equivalente, $\boldsymbol{\sigma}^o = \boldsymbol{C}^o : \boldsymbol{\epsilon}$ es el predictor de tensiones no degradadas, $g(\cdot)$ es una función escalar positiva con derivada positiva a definir. En este caso particular $g(\bar{\sigma})$ define la función de degradación y $g(\beta^r) = g(\bar{\sigma}^r(\beta^r))$ define el umbral de degradación en función de la resistencia uniaxial $\bar{\sigma}^r(\beta^r)$ que puede interpretarse como función de endurecimiento de degradación.

La ley de evolución para las variables internas de degradación se define de la siguiente forma

$$\delta\beta^r = \delta\mu \left(\frac{\partial \mathcal{G}^D}{\partial \bar{\sigma}}\right)_r = \underbrace{\left\langle \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^o} : \boldsymbol{C}^o : \delta\boldsymbol{\epsilon} \right\rangle}_{\langle \delta\bar{\sigma} \rangle} \left(\frac{\partial \mathcal{G}^D}{\partial \bar{\sigma}}\right)_r \tag{21}$$

donde $\delta\mu$ resulta de la condición de consistencia de degradación $\delta\mathcal{G}^D = 0$. Más detalles pueden encontrarse en las referencias[2,3,-8,16,-19,27] .

Definición de la variable viscosa del material

El amortiguamiento proporcional a la rigidez de la estructura puede incorporarse a la formulación que simula el comportamiento de una estructura mediante el concepto de amortiguamiento viscoso de Kelvin (ver Figura 3), tratado a nivel de un punto material del sólido.

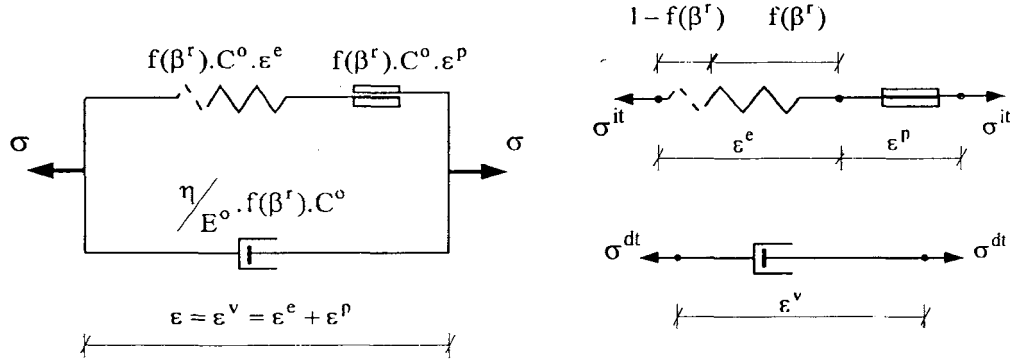

Figura 3. Presentación esquemática del modelo de Kelvin para materiales elasto-plásticos

En este modelo, el estado tensional puede descomponerse aditivamente $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{it} + \boldsymbol{\sigma}^{dt}$ como lo muestra la ecuación (10) y, por lo tanto, se inserta dentro del tratamiento mecánico que se está realizando. Todas las características del modelo independiente en el tiempo $(\cdot)^{it}$ han sido puntualizadas en subapartados anteriores, quedando ahora por definir las correspondientes al modelo dependiente del tiempo $(\cdot)^{dt}$. Para este propósito se hace una analogía con el comportamiento uniaxial viscoso del material y se admite, en este caso particular, un amortiguamiento proporcional a la rigidez del material

$$\tau = \frac{\eta}{E^o} \tag{22}$$

En problemas de *elasticidad retardada* donde la variable libre es la tensión (o su equivalente deformación elástica), τ es el *tiempo de retardo*, es decir, el tiempo que tarda el punto del sólido en alcanzar una configuración estable. Por el contrario, en problemas donde la variable libre es la deformación, τ es el *tiempo de relajación*, es decir, el tiempo que tarda el punto del sólido en relajar el estado tensional impuesto. Por otro lado η es la viscosidad del material y E^o el modulo de Young al iniciar el proceso de carga.

Ecuación constitutiva secante y tangente para todo el problema acoplado

Sustituyendo la energía libre de la ecuación (16), en la ecuación (14), se deduce la siguiente ecuación constitutiva secante[16,21]

$$\boldsymbol{\sigma} = m\frac{\partial \Psi\left(\boldsymbol{\epsilon}^e, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e, \alpha^n, \beta^r\right)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} = \underbrace{\boldsymbol{C}^s(\beta^r) \ : \boldsymbol{\epsilon}^e}_{\boldsymbol{\sigma}^{it}} + \underbrace{\tau\, \boldsymbol{C}^s(\beta^r) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e}_{\boldsymbol{\sigma}^{dt}} = f(\beta^r)\, \boldsymbol{C}^o \ : [\boldsymbol{\epsilon}^e + \tau \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e] \tag{23}$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}^{dt} = \tau\ \boldsymbol{C}^s(\beta^r) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ la denominada ley de Newton. La forma tangente de la ecuación(23) resulta de tomar la variación de la tensión total secante

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma} &= [\delta\boldsymbol{C}^s(\beta^r)\ : \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{C}^s(\beta^r)\ : \delta\boldsymbol{\epsilon}^e] + \tau\,[\delta\boldsymbol{C}^s(\beta^r)\ : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \boldsymbol{C}^s(\beta^r)\ : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e] = \\ &= \left\{ \underbrace{\sum_r \frac{\partial \boldsymbol{C}^s(\beta^r)}{\partial \beta^r}\delta\beta^r}_{\delta f(\beta^r)\boldsymbol{C}^o} : \underbrace{(\boldsymbol{\epsilon}^e + \tau\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e)}_{\boldsymbol{C}^{s\,-1}:\boldsymbol{\sigma}} \right\} + \left\{ \boldsymbol{C}^s(\beta^r) : [(\delta\boldsymbol{\epsilon} - \delta\boldsymbol{\epsilon}^p) + \tau\,(\delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)] \right\} \end{aligned} \tag{24}$$

Sustituyendo en esta última las ecuaciones (17) y (23), se tiene

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma} &= \delta f(\beta^r)\boldsymbol{C}^o : \left[\frac{1}{f(\beta^r)}\boldsymbol{C}^{o-1} : \boldsymbol{\sigma}\right] + \boldsymbol{C}^s(\beta^r) : [(\delta\boldsymbol{\epsilon} - \delta\boldsymbol{\epsilon}^p) + \tau\,(\delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)] = \\ &= \frac{\delta f(\beta^r)}{f(\beta^r)}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{C}^s(\beta^r) : [(\delta\boldsymbol{\epsilon} - \delta\boldsymbol{\epsilon}^p) + \tau\,(\delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)] \end{aligned} \tag{25}$$

Operando algebraicamente y sustituyendo en esta última la ecuación de la variación de la función de degradación que resulta de la ecuación (21)

$$\delta f(\beta^r) = \sum_r \frac{\partial f(\beta^r)}{\partial \beta^r}\ \delta\beta^r = \left[\sum_r \frac{\partial f(\beta^r)}{\partial \beta^r}\left(\frac{\partial \mathcal{G}^D}{\partial \bar{\sigma}}\right)_r \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^o} : \boldsymbol{C}^o\right] : \delta\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{T} : \delta\boldsymbol{\epsilon}$$

queda la siguiente expresión para la forma tangente

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma} &= \frac{\boldsymbol{T} : \delta\boldsymbol{\epsilon}}{f(\beta^r)}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{C}^s(\beta^r) : \delta\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{C}^s(\beta^r) : \delta\boldsymbol{\epsilon}^p + \tau\boldsymbol{C}^s(\beta^r) : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \tau\boldsymbol{C}^s(\beta^r) : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \\ &= \underbrace{\left[\frac{\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{T}}{f(\beta^r)} + \boldsymbol{C}^s(\beta^r)\right]}_{\boldsymbol{C}^s(\beta^r)} : \delta\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{C}^s(\beta^r) : \delta\boldsymbol{\epsilon}^p + \tau\boldsymbol{C}^s(\beta^r) : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \tau\boldsymbol{C}^s(\beta^r) : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \\ \delta\boldsymbol{\sigma} &= [\boldsymbol{C}^e(\beta^r) : \delta\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{C}^s(\beta^r)\ : \delta\boldsymbol{\epsilon}^p] + \tau\,[\boldsymbol{C}^s(\beta^r) : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{C}^s(\beta^r)\ : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p] \end{aligned} \tag{26}$$

donde $\boldsymbol{C}^e(\beta^r)$ es un tensor de cuarto orden que contiene los cambios que producen la degradación de rigidez. Además, cuando no hay daño el tensor $\boldsymbol{T}$ es idénticamente nulo y resulta $\boldsymbol{C}^e \equiv \boldsymbol{C}^s$.

Usando la condición de consistencia plástica y de consistencia de degradación, se obtiene la siguiente expresión para la ley constitutiva tangente

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{C}}^{ep}(\beta^r) : \delta\boldsymbol{\epsilon} + \tau\boldsymbol{C}^{ep}(\beta^r) : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{27}$$

donde

$$\tilde{\boldsymbol{C}}^{ep}(\beta^r) = \boldsymbol{C}^e - \frac{\left[\boldsymbol{C}^s : \left\{\frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\right] \otimes \left[\boldsymbol{C}^e : \left\{\frac{\partial \mathcal{F}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\right]}{\underbrace{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathcal{F}^s}{\partial \alpha^n}\boldsymbol{h}_n\frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)}_{A} + \left[\left\{\frac{\partial \mathcal{F}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} : \boldsymbol{C}^s : \left\{\frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\right]}$$

$$\boldsymbol{C}^{ep}(\beta^r) = \boldsymbol{C}^s - \frac{\left[\boldsymbol{C}^s : \left\{\frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\right] \otimes \left[\boldsymbol{C}^s : \left\{\frac{\partial \mathcal{F}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\right]}{\underbrace{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathcal{F}^s}{\partial \alpha^n}\boldsymbol{h}_n\frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)}_{A} + \left[\left\{\frac{\partial \mathcal{F}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} : \boldsymbol{C}^s : \left\{\frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\right]} \tag{28}$$

Cuando no hay daño $\tilde{\boldsymbol{C}}^{ep} \equiv \boldsymbol{C}^{ep}$.

Esta formulación isótropa resulta de la evolución de otros modelos que pueden ser consultados en las referencias (14,16,-19,20,-21,22,-23). Una extensión para el tratamiento anisótropo p uede ser consultada en las referencias (16) y (26).

DAÑO LOCAL Y GLOBAL

El daño local se expresa mediante un *índice* que mide en forma objetiva la degradación de rigidez que sufre un punto material de un sólido sometido a acciones externas. Si se estudia con detalle este índice que resulta de la mecánica (conceptos presentados en el apartado anterior), se puede observar que el mismo deriva directamente del concepto de disipación o, dicho de otro modo, se trata de una normalización objetiva de la definición de la disipación para materiales que solamente sufren degradación de rigidez.

Ampliando el concepto presentado en el párrafo anterior, y a solo efecto de establecer una medida escalar del deterioro, se entiende en este trabajo por *índice de daño local* a una medida normalizada y objetiva de la disipación total, producida por la plasticidad más la degradación de rigidez, que deriva de la ecuación (15). Esto es

$$\delta d = m\left[\frac{r(\boldsymbol{\sigma})}{g_f^*} + \frac{(1-r(\boldsymbol{\sigma}))}{g_c^*}\right]\delta\Xi_m^{it} = \frac{m}{g^*(\boldsymbol{\sigma})}\ \delta\Xi_m^{it} =$$

$$= \underbrace{\frac{m}{g^*(\boldsymbol{\sigma})}\left[\frac{\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon}^p}{m} - \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \alpha^n}\delta\alpha^n\right]}_{\delta d^p} - \underbrace{\frac{m}{g^*(\boldsymbol{\sigma})}\left[\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \beta^r}\delta\beta^r\right]}_{\delta d^r} \tag{29}$$

donde g_f^* y g_c^* son las densidades de energía máxima que puede disipar un punto del sólido sometido a tracción y a compresión respectivamente, δd es la variación del índice total de daño local y que, como puede verse, se descompone en una parte que corresponde al daño provocado por la plasticidad δd^p y otra al daño provocado por la degradación de rigidez δd^r. De esta forma se puede ver que el daño total local depende de una contribución aditiva de los índices de daño correspondientes a cada fenómeno independiente del tiempo

$$\delta d = \begin{cases} \delta d^p = \dfrac{1}{g^*(\boldsymbol{\sigma})} \left[\dfrac{\boldsymbol{\sigma} \,:\, \delta\boldsymbol{\epsilon}^p}{m} - \dfrac{\partial \Psi}{\partial \alpha^n}\, \delta\alpha^n \right] \\ \delta d^r = -\dfrac{1}{g^*(\boldsymbol{\sigma})} \left\{ \delta f(\beta^r) \left[\dfrac{1}{2m} \boldsymbol{\epsilon}^e : \boldsymbol{C}^o : \boldsymbol{\epsilon}^e + \dfrac{\tau}{m} \boldsymbol{\epsilon}^e : \boldsymbol{C}^o : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \right] \right\} \\ \quad = -\dfrac{1}{g^*(\boldsymbol{\sigma})} \left\{ \boldsymbol{T} : \delta\boldsymbol{\epsilon} \left[\dfrac{1}{2m} \boldsymbol{\epsilon}^e : \boldsymbol{C}^o : \boldsymbol{\epsilon}^e + \dfrac{\tau}{m} \boldsymbol{\epsilon}^e : \boldsymbol{C}^o : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \right] \right\} \end{cases} \tag{30}$$

$$\delta d = \delta d^p + \delta d^r$$

Desde el punto de vista mecánico, este índice constituye una variable única, común a los dos fenómenos independientes del tiempo que se determinan a la vez y que además, conceptualmente, da la magnitud de la parte de energía disipada al dañarse el material (debe observarse que no se trata de una variable de cálculo).

El *índice de daño global* $0 \leq \mathcal{D} \leq 1$, resulta de hacer una extensión conceptual del problema del daño local, mediante una integración sobre toda la estructura de la disipación de energía local

$$\mathcal{D} = \frac{E_{dis}}{E_{dis}^{max}} \tag{31}$$

donde E_{dis} es la energía total disipada para un instante cualquiera del proceso en el dominio ocupado por el volumen deñado V^d

$$E_{dis} = \int_{V^d} \left[\int_0^{\Xi_m^{it}} \delta\Xi_m^{it} \right] dV = \int_{V^d} \Xi_m^{it} dV \tag{32}$$

y $0 \leq [E_{dis}^{max} = \int_{V^d} \alpha(\boldsymbol{x}) g^*(\boldsymbol{\sigma}) dV] \leq \mathbb{E}_{dis}^{max}$, es la máxima energía que puede disipar la estructura, para un determinado volumen de puntos dañados, donde $\mathbb{E}_{dis}^{max}$ es la energía que disiparía la estructura si todos sus puntos alcanzaran el daño máximo local. El *índice de peligrosidad* $0 \leq \alpha(\boldsymbol{x}) \leq 1$ depende de la posición del punto y se define mediante un estudio no determinístico.

Sustituyendo E_{dis} y E_{dis}^{max} por sus valores, la ecuación (31) queda expresada como

$$\mathcal{D} = \frac{E_{dis}}{E_{dis}^{max}} = \frac{\int_{V^d} d\; g^*(\boldsymbol{\sigma})\; dV}{\int_{V^d} \alpha(\boldsymbol{x})\; g^*(\boldsymbol{\sigma})\; dV} \tag{33}$$

de donde se deduce que se trata de una extensión a toda la estructura, del concepto de *índice local.*

Este índice mantiene el carácter objetivo que tiene el índice de daño local, variando entre cero y uno según la estructura se encuentre en estado no dañado o totalmente dañado, respectivamente.

En este trabajo se presenta también una forma alternativa de medir el índice global, basado en el concepto de la *norma de la fuerza interna*. Este indicador representa el nivel de resistencia que posee la estructura en cualquier instante del proceso termodinámico, respecto de un estado idealmente elástico

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = 1 - \frac{\|\hat{\boldsymbol{f}}_{int}\|}{\|\hat{\boldsymbol{f}}^{e}_{int}\|} = 1 - \frac{\| \int_\ell \left(\int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{S} \, d\mathcal{A} \right) : \hat{\boldsymbol{B}} \, d\ell \|}{\| \int_\ell \left(\int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\sigma}^e \cdot \boldsymbol{S} \, d\mathcal{A} \right) : \hat{\boldsymbol{B}} \, d\ell \|} = \\ = 1 - \frac{\| \int_\ell \left(\int_{\mathcal{A}} \{ f(\beta^r) \, \boldsymbol{C}^o \, : [\epsilon^e + \tau \dot{\epsilon}^e] \} \cdot \boldsymbol{S} \, d\mathcal{A} \right) : \hat{\boldsymbol{B}} \, d\ell \|}{\| \int_\ell \left(\int_{\mathcal{A}} \{ \boldsymbol{C}^o \, : \epsilon \} \cdot \boldsymbol{S} \, d\mathcal{A} \right) : \hat{\boldsymbol{B}} \, d\ell \|} \end{aligned} \tag{34}$$

Otra forma de definir el índice de daño global, puede consultarse en las referencias (1,3,-6,7,-8,9).

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Ejemplo simple de verificación del concepto de daño global

Este primer ejemplo tiene por objetivo comprobar y mostrar la relación que hay entre las medidas del daño global obtenidas siguiendo los dos caminos expuestos en el apartado que se refiere al daño local y global:

a) Daño global establecido en función de la *fuerzas internas* (ecuaqción 34);

b) Daño global establecido en función de la *energía disipada* (ecuación 33).

Es necesario recordar que ambas definiciones del daño global son generales e independientes de cualquier proceso mecánico en particular, pues una de las medidas se refiere a la fuerza interna en tanto la otra tiene en cuenta la energía disipada durante el proceso. Esto hace que puedan aplicarse a procesos mecánicos con degradación de rigidez, plasticidad, mixtos, etc. Para ejemplificar ambas formas de daño se ha elegido, por su simplicidad, un problema elasto-plástico. Tanto para el caso a) como en el b) se normaliza el daño global a la unidad y se lo aplica a materiales con las siguientes características:

1) Elasto-plástico perfecto y con energía máxima acotada,

2) Elasto-plástico con endurecimiento y con energía máxima acotada,

3) Elasto-plástico con ablandamiento y con energía máxima acotada.

Los datos y características fundamentales de cada problema, pueden verse en la Figura 4.

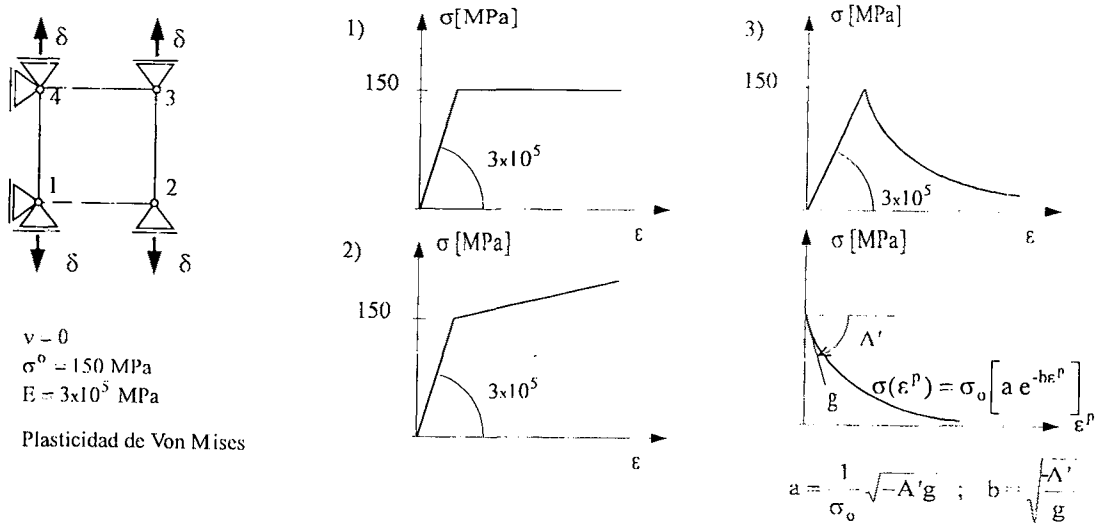

Figura 4. Geometría y características mecánicas de los materiales: a) Elasto-plástico perfecto, b) Elasto-plástico con endurecimiento, c) Elasto-plástico con ablandamiento

Los tres casos resueltos muestran que el daño global basado en las fuerzas internas tiene una tendencia evolutiva indiferente a la forma de la curva de endurecimiento del material. Para el índice de daño global basado en la disipación energética, se observa que su evolución está fuertemente condicionado por la curva de endurecimiento del material (ver Figuras 5, 6, 7)

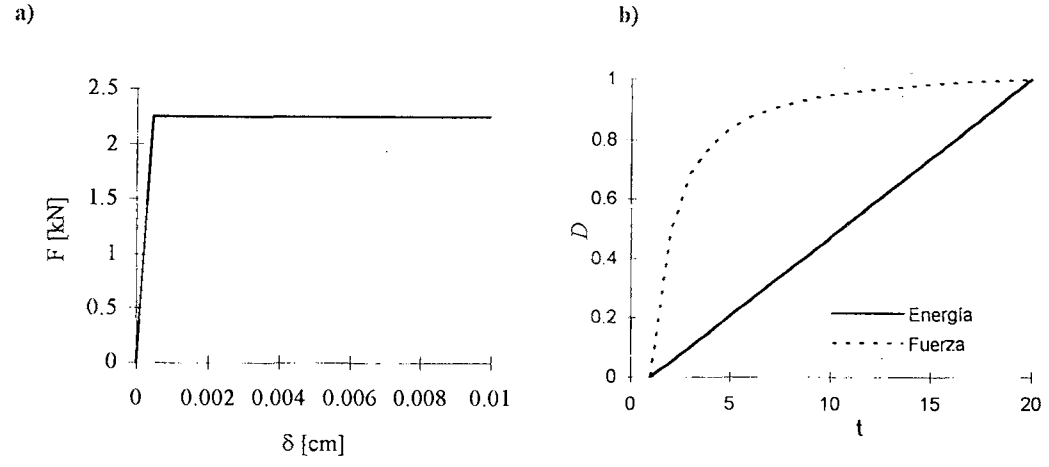

Figura 5. Elasto-plástico perfecto: a) curva Fuerza-desplazamiento, b) curvas de daño global basadas en las fuerzas internas y en la disipación de energía

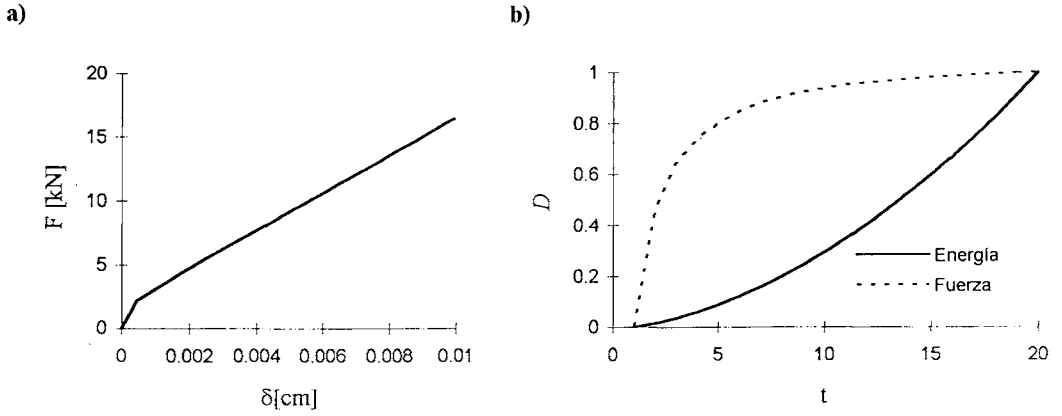

Figura 6. Elasto-plástico con endurecimiento: a) curva Fuerza-desplazamiento, b) curvas de daño global basadas en las fuerzas internas y en la disipación de energía

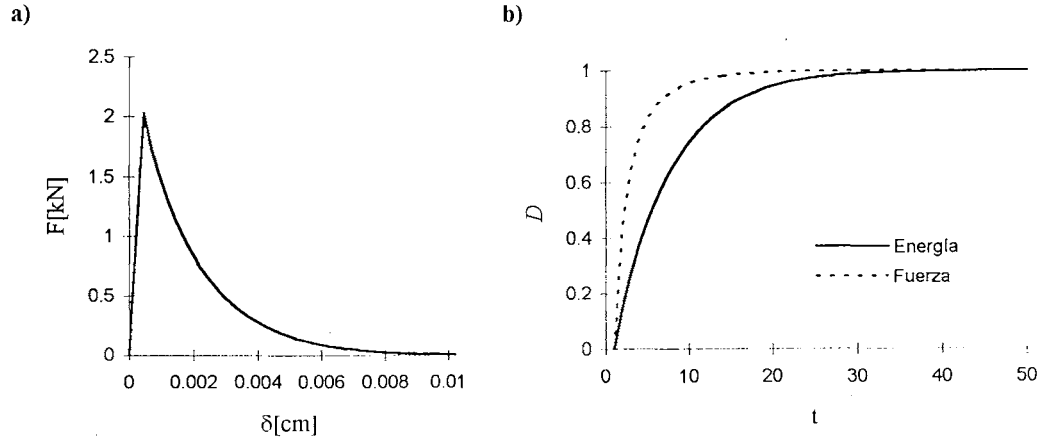

Figura 7. Elasto-plástico con ablandamiento: a) curva Fuerza-desplazamiento, b) curvas de daño global basadas en las fuerzas internas y en la disipación de energía

Daño en un pórtico

En este ejemplo se soluciona un pórtico discretizado mediante elementos finitos de barra de Timoshenko y también mediante elementos planos (ver Figura 8), donde se evalua el daño global por los dos caminos presentados en el presente trabajo.

En la Figura 9, se puede observar la respuesta carga desplazamiento $(F - \delta)$, donde se manifiesta el error que se comete en la integración por capas para la barra de Timoshenko.

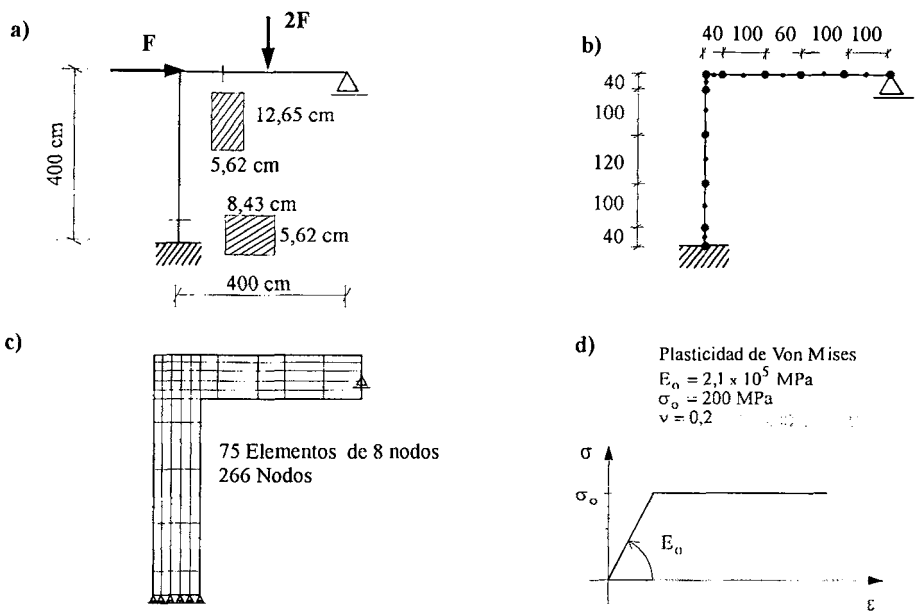

Figura 8. a) Esquema del portico a resolver, b) malla de elementos finitos con vigas de Timoshenko de tres nodos, c) malla de elementos finitos con elementos planos de ocho nodos, d) características mecánicas del material

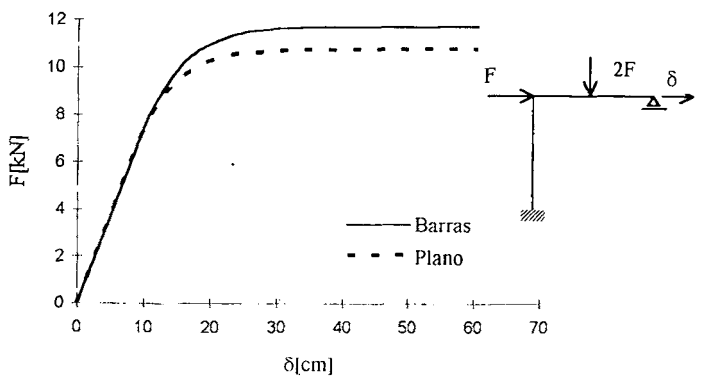

Figura 9. Respuesta carga desplazamiento para el pórtico discretizado con las mallas de elementos finitos de Timoshenko y planos

En la Figura 10 se observa como el daño o deterioro estructural son equivalente para ambos tipos de elementos finitos, pero aparece la diferencia entre evaluarlo a nivel de fuerzas o a nivel de disipación de energía. La irregularidad que aparece en la curva de daño por disipación energética, se debe a la forma numérica en que se trata la ecuación (33). Esto se debe a que el denominador de la misma crece en forma de función escalón, cada vez que se incorpora un nuevo elemento finito al volumen dañado de la estructura. En este caso el índice de peligrosidad $\alpha(\boldsymbol{x})$, se ha tomado igual a la unidad para todos los puntos de la estructura.

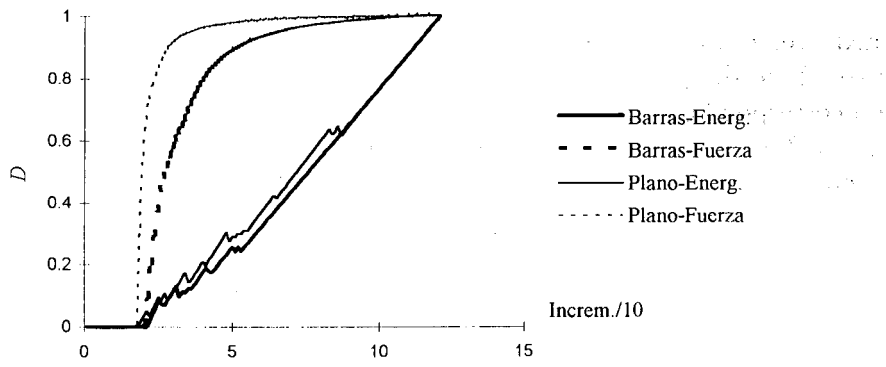

Figura 10. Daño global evaluado para el pórtico discretizado con las mallas de elementos finitos de Timoshenko y planos, a través del concepto de fuerzas internas y energía disipada

En la Figura 11 se puede observar que, a medida que el proceso mecánico profundiza

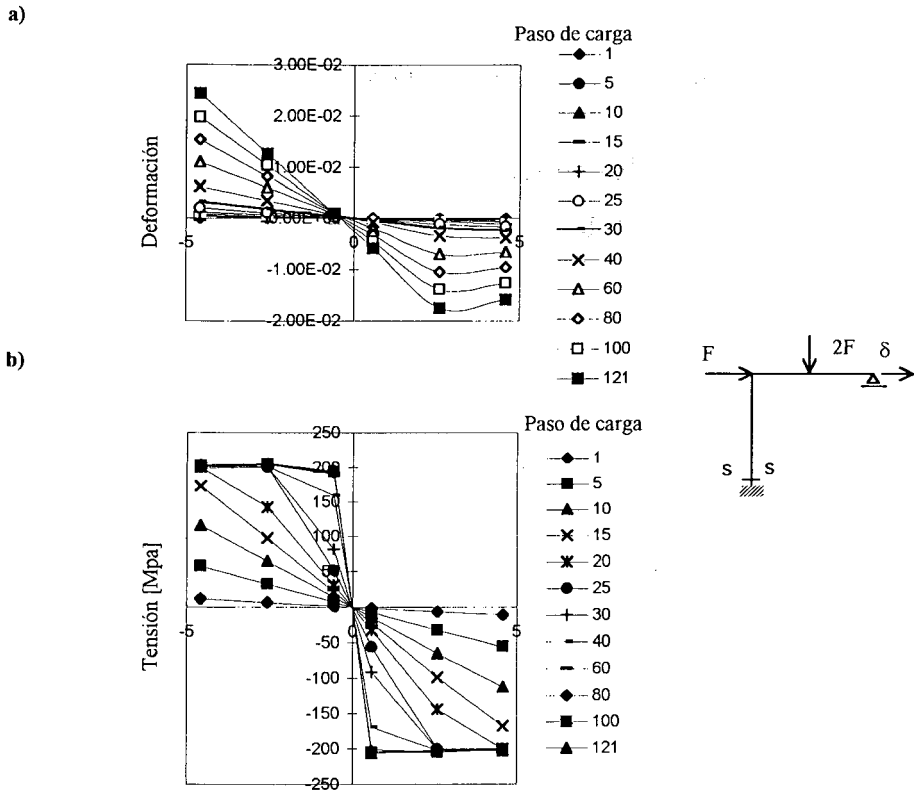

Figura 11. Sección transversal de la columna a nivel del empotramiento en la base: a) campo de deformaciones, b) campo de tensiones

su comportamiento en régimen inelástico, la sección transversal de la barra empotrada en la base deja de ser plana por influencia del esfuerzo cortante. En la misma figura

se puede ver el diagrama de tensiones que alcanza el pie de la columna al final del proceso. Este diagrama bi-rectangular puede entenderse como representativo de un estado correspondiente a una rótula plástica.

En la Figura 12 se presenta el diagrama momento curvatura para las secciones transversales de la base y del extremo izquierdo de la viga superior. La primera de las secciones muestra su clásico comportamiento plástico, donde se alcanza el máximo nivel de momento flector; en tanto la sección correpondiente a la viga superior no llega al límite de plasticidad y además se puede ver la mayor rigidez de esta barra, respecto de la columna.

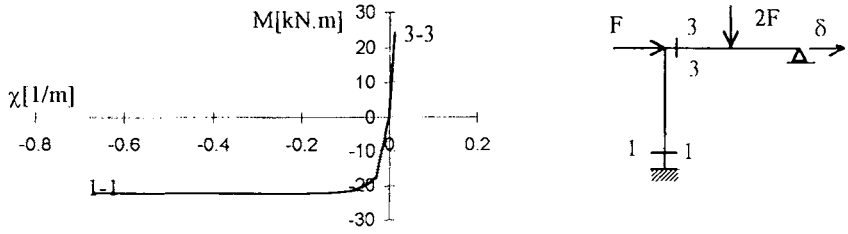

Figura 12. Diagrama de momento-curvatura

Daño en un pórtico de dos niveles – comparación experimental

El pórtico de la Figura 13 ha sido estudiado experimentalmente por Vecchio y Emara[28] y luego reestudiado numéricamente por Cipollina *et al.*[5] . En el presente

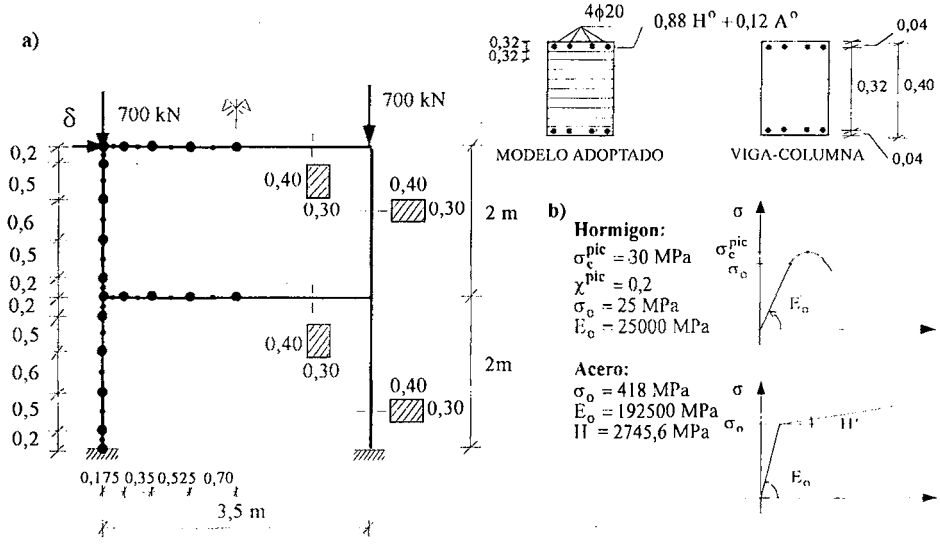

Figura 13. Pórtico de dos niveles: a) geometría y malla de elementos finitos, b) propiedades mecánicas

trabajo se realiza nuevamente este estudio en forma numérica utilizando el concepto de daño global que aquí se introduce y que luego se compara con los resultados obtenido por los autores antes citados. Los datos geométricos y mecánicos se presentan en la Figura 13, como así también la malla de elementos finitos utilizada para este caso.

La marcha del ensayo consiste en aplicar inicialmente dos cargas en el segundo nivel, exactamente sobre las columnas. Seguidamente se inicia la aplicación de una carga horizontal al nivel del dintel del segundo piso. Se fuerza el pórtico hasta alcanzar la rotura y se comparan las curvas de evolución carga-desplazamiento en el punto de aplicación de la fuerza horizontal (ver Figura 14). En la Figura 15 se puede ver la curva de momento curvatura en la sección transversal situada en el empotramiento de la columna derecha, donde se produce un fenómeno de aplastamiento del hormigón.

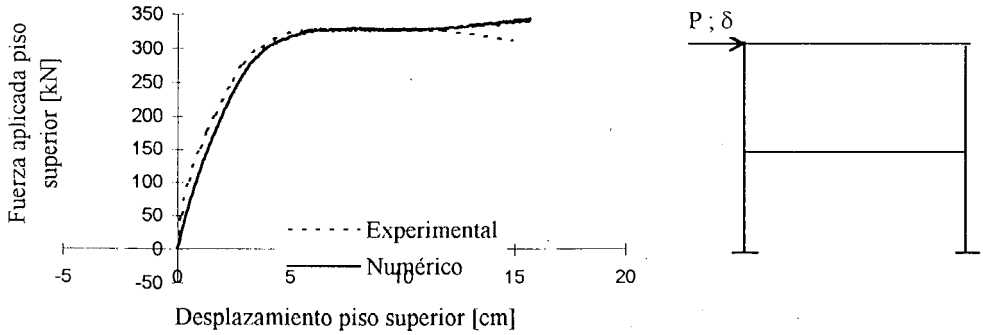

Figura 14. Curva carga-desplazamiento en el punto de aplicación de la fuerza horizontal

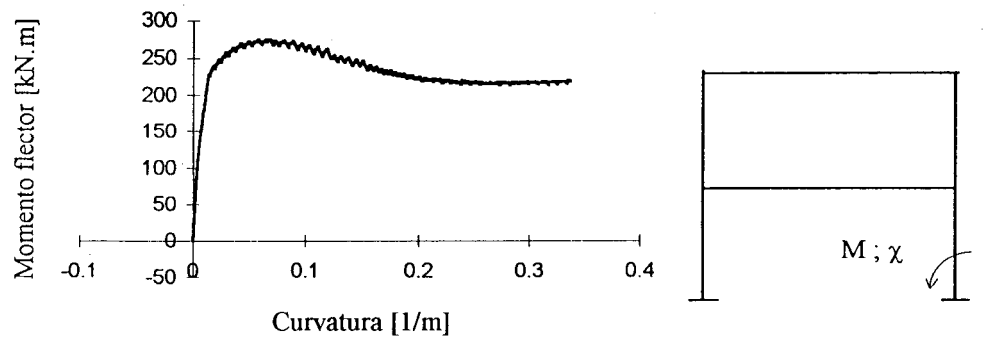

Figura 15. Curva de momento-curvatura en la sección transversal correspondiente al empotramiento de la columna derecha

En la Figura 16 se muestra la deformada del pórtico en el estado de carga último. La cualidad más importante a resaltar en este caso es la formación de las rótulas al pie de cada columna, permitiendo que estas giren como sólido rigido alrededor de sendos empotramientos (observar cómo las deformadas de las columna son practicamente dos rectas).

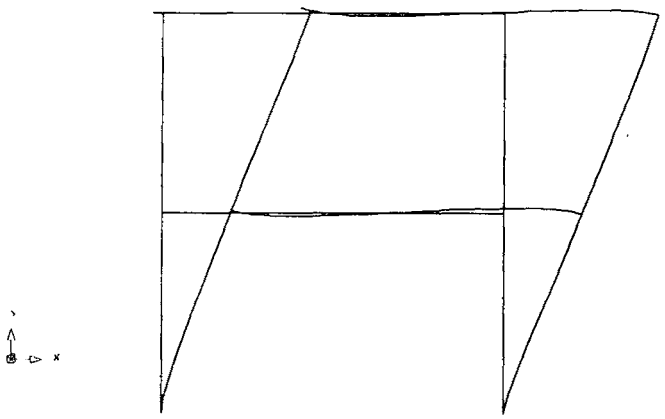

Figura 16. Deformada del pórtico en el último estado de carga

Por último, en la Figura 17 se expresa el nivel de daño global en la estructura.

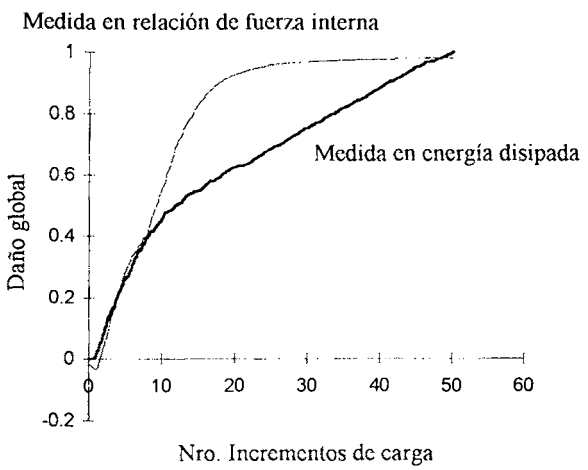

Figura 17. Curva de evolución daño global en la estructura

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado una forma objetiva, basada en la mécanica de los sólidos, de formular el daño (deterioro de las propiedades mecánicas iniciales del material) en una estructura. En el índice de daño propuesto se pueden incluír distintos tipos de fenómenos que producen disipación de energía. En particular, se ha considerado el daño producido por la plasticidad y la degradación, que juntas pueden simular el concepto de fractura difusa. Además, se puede observar una forma natural de incluir el concepto de amortiguamiento proporcional a la rigidez y la manera en que éste participa en la disipación total de la energía.

REFERENCIAS

1. A.H. Barbat, S. Oller, E. Oñate and A. Hanganu, "Simulation of Damage Phenomena in Reinforced Concrete Buildings Subjected to Seismic Actions", *Proc. ICNMEAS Concepción, Chile*, (1992).
2. A.H. Barbat, A. Hanganu, S. Oller and E. Oñate, "Rigurous Damping Matrix for Finite Element Models with Viscous Behaviour", *Computing*, No. 5,Bucarest, (1993).
3. A.H. Barbat, A. Hanganu, E. Oñate and S. Oller, "Evaluation of the Damage Degree in Buildings Structures Subjected to Earthquakes", *Revue Roumaine des Sciences Techniques - Méc. Appl.*, VOL. **39**, No. 1, pp. 23–36, Bucharest, (1994).
4. A.H. Barbat y J. Miquel, "Estructuras sometidas a acciones sísmicas", CIMNE, Barcelona, España, (1994).
5. A. Cipollina, A. López-Inojosa, J. Flórez-López, "A Simplified Damage Mechanics Approach to Non-Linear Analysis of Frames", *Computers and Structures*, Vol. **54**, No. 6, pp. 1113–1126, (1995).
6. E. DiPasquale and A.S. Cakmak, "On the Relation Between Local and Global Damage Indices", *Technical Report NCEER-89-0034*, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, (1989).
7. A. Hanganu, S. Oller, E. Oñate y A.H. Barbat "A Finite Element Model for Damage Analysis of Nuclear Reactor Containment Shells", *Proc. 2nd National Conference on Boundary and Finite Element*, Sibiu, Rumanía, (1992).
8. A. Hanganu, A.H. Barbat, S. Oller y E. Oñate, "Simulación del daño sísmico en edificios de hormigón armado", *CIMNE*, Barcelona, España, (1993) .
9. A. Hanganu, S. Oller, E. Oñate y A.H. Barbat, "Evaluación del daño sísmico en modelos 3D de edificios de hormigón armado", *2do. Congreso español de Métodos Numéricos en Ingeniería*, La Coruña, España, (1993).
10. T.J.R. Hughes, R.L. Taylor and S. Kanoknukulchai, "A Simple and Efficient Finite Element for Bending", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **11**, pp. 1529–1543, (1977).
11. L. Kachanov, "Time of the Rupture Process Under Creep Conditions", *Otd. Tech. Nauk.*, No. 8, pp. 26–31, (1958).
12. J. Lubliner, "On Thermodynamics Foundations of Non-Linear Solid Mechanics", *Int. Journal Non-Linear Mechanics*, No. 7, pp. 237–254, (1972).
13. J. Lubliner, "*Thermomechanics of Deformable Bodies*", Department of Civil Engineering University of California, Berkeley USA, (1985).
14. J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, E. Oñate, "A Plastic Damage Model for Non-Linear Analysis of Concrete", *Int. Solids and Structures*, Vol. **25**, No. 3, pp. 299–326, (1989).
15. J. Lubliner, "*Plasticity Theory*", Macmillan Publishing, USA, (1990).
16. B. Luccioni, "Formulación de un modelo constitutivo para materiales ortótropos", *Tésis Doctoral*, Universidad de Tucumán Argentina, (1993).
17. L. Malvern, "*Introduction to the Mechanics of Continuos Medium*", Prentice Hall, USA, (1969).
18. J. Mazars, "Damage Models for Concrete and their Usefulness for Seismic Loading", *Experimental and Numerical Methods in Earthquake Engineering*, Brussels and Luxemburg: ECSC, EEC, EAEC, J. Donea y P.M. Jones (eds.), pp. 199–221, (1991).
19. J. Oliver, M. Cervera, S. Oller and J. Lubliner, "Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete", *SCI-C 1990, Second Int. Conf. on Computer Aided Design of Concrete Structure*, Zell am See, Austria, pp. 945–957, (1990).

20. S. Oller, " Un modelo de daño continuo para materiales friccionales" *Tésis Doctoral*, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona, (1988).
21. S. Oller, "Nuevos materiales estructurales, cerámicos en ingeniería", Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España, (1989).
22. S. Oller, J. Oliver, M. Cervera, E. Oñate, "Simulación de procesos de localización en mecánica de sólidos, mediante un modelo plástico", *I Congreso Español de Métodos Numéricos*, Gran Canaria, España, pp. 423–431, (1990).
23. S. Oller, E. Oñate, J. Oliver, J. Lubliner, "Finite Element Non-Linear Analysis of Concrete Structures Using a Plastic-Damage Model", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. **35**, No. 1/2/3, pp. 219-231, Pergamon Press, (1990).
24. S. Oller, A.H. Barbat, E. Oñate and A. Hanganu, "A Damage Model for the Seismic Analysis of Building Structures", *Proc. 10th WCEE*, Madrid, España, (1992).
25. S. Oller, E. Oñate, J. Miquel and S. Botello, "A Plastic Dmage Constitutive Model for Composite Materials" *Int. J. Solid and Structures*, Vol. **33**, No. 17, pp. 2501-2518, (1996).
26. S. Oller, S. Botello, J. Miquel and E. Oñate, "An Anisotropic Elasto-Plastic Model Based on an Isotropic Formulation", *Int. Jour. Engineering Computation*, Vol. **12**, pp. 245-262, (1995).
27. J. Simo, J. Ju, "Strain and Stress - Based Continuum Damage Models I. Formulation", *Int. J. Solids Structures*, Vol. **23**, No. 7, pp. 821–840, (1987).
28. F.J. Vecchio, M. Basil Emara, "Shear Deformations in Reinforced Concrete Frames", *ACI Structural Journal*, Vol. **89**, No. 1, pp. 46–56, (1992).