

A1 Conceptos básicos de Mecánica de Medios Continuos

A1.1 Definiciones básicas

Se entiende por medio continuo a un conjunto infinito de partículas cuyo estudio supone la ausencia de espacios vacíos y se suponen continuas y de derivada continua a todas las funciones que se consideran en la teoría¹².

Existen tres conceptos independientes:

Continuidad: Un material es continuo si se llena completamente en el espacio que ocupa no dejando poros o espacios vacíos y si además si propiedades pueden ser descritas por funciones continuas.

Homogeneidad: Un material es homogéneo si tiene propiedades idénticas en todos sus puntos.

Isotropía: Un material es isótropo con respecto a ciertas propiedades si éstas son las mismas en todas direcciones.

A1.1.1 Notación indicial

La notación indicial o de Einstein se utiliza en el desarrollo de este trabajo por razones de precisión en la definición y de comodidad a la hora de la programación.

Esta consiste en que todo índice repetido en un mismo monomio de una expresión algebraica supone la sumatoria con respecto a ese índice.

Ejemplo:

$$\text{Vector } a : \quad a = a_1 + a_2 + a_3 = a_i \quad (\text{A1.1})$$

$$\text{Producto escalar :} \quad a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i \quad (\text{A1.2})$$

¹ Malvern, L.E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

² Oliver Olivella, X y Argelet de Saracibar Bosch, C, (2000). *Mecánica de los medios continuos para ingenieros*. Ediciones UPC.

A1.1.2 Símbolo de permutación

$$e_{mnr} = \begin{cases} 0 & \text{para dos índices iguales} \\ 1 & \text{cuando } mnr \text{ van en orden ascendente} \\ -1 & \text{cuando } mnr \text{ van en orden inverso} \end{cases} \quad (\text{A1.3})$$

Ejemplo:

Producto vectorial:
$$c = a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\tilde{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\tilde{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\tilde{k}$$

$$c_p = e_{qrp} a_q b_r \quad (\text{A1.4})$$

A1.1.3 Delta de Kronekner

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{si } p = q \\ 1 & \text{si } p \neq q \end{cases} \quad (\text{A1.5})$$

Ejemplo:

Igualdad e- δ :
$$e_{ijk} e_{irs} = \delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kr} \quad (\text{A1.6})$$

A1.2 Ecuaciones de movimiento

Se puede describir el movimiento del medio continuo a través de funciones matemáticas que describen la posición de cada partícula a lo largo del tiempo.

Se define como configuración del medio continuo en el instante t al lugar geométrico de las posiciones que ocupan en el espacio los puntos materiales del medio continuo en dicho instante y se denota por Ω .

A un cierto instante $t = t_0$ del intervalo de tiempo de interés se lo denomina instante de referencia y a la configuración en dicho instante Ω_0 se la denomina configuración inicial, material o de referencia.

Dado el sistema de coordenadas cartesianas (X, Y, Z) y los correspondientes versores (e_1, e_2, e_3) .

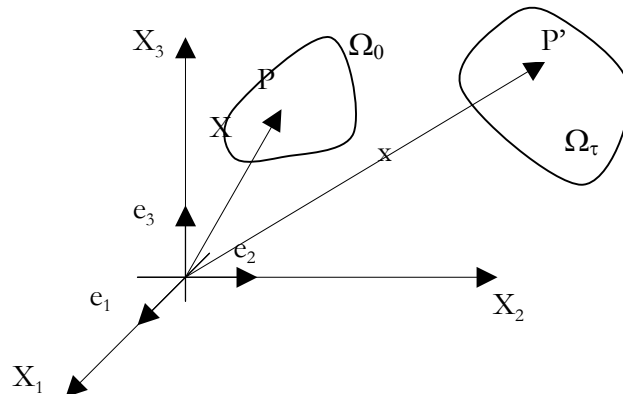


Figura A1.1– Configuraciones del medio continuo.

En la configuración de referencia Ω_0 el vector posición X de una partícula que ocupa un punto P en el espacio viene dado por:

$$X = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3 = X_i e_i \quad (\text{A1.7})$$

donde las componentes (X_1, X_2, X_3) se las denomina coordenadas materiales de la partícula.

En la configuración actual Ω_t , la partícula situada originalmente en el punto material P ocupa el punto espacial P' y su vector de posición x viene dado por:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x_i e_i \quad (\text{A1.8})$$

donde a (x_1, x_2, x_3) se las denomina coordenadas espaciales de la partícula en el instante de tiempo t .

De esta forma puede describirse el movimiento de las partículas del medio continuo mediante la evolución de sus coordenadas espaciales, o de su vector posición, a lo largo del tiempo. Matemáticamente esto requiere conocer una función para que cada partícula proporcione sus coordenadas espaciales x_i en los sucesivos instantes de tiempo.

Puede hacerse en función de las coordenadas materiales o en función de las coordenadas espaciales.

En función de las coordenadas materiales X_i : Ecuaciones de movimiento

$$x = \varphi(X, t) = x(X, t) \quad (\text{A1.9})$$

$$x_i = \varphi_i(X_1, X_2, X_3, t)$$

En función de las coordenadas espaciales x_i : Ecuaciones de movimiento inversas

$$X = \varphi^{-1}(x, t) = X(x, t) \quad (\text{A1.10})$$

$$X_i = \varphi_i^{-1}(x_1, x_2, x_3, t)$$

Con φ cumpliendo las siguientes condiciones:

$\varphi(X, 0) = X$ por definición X es el vector posición en el instante de referencia.

φ es continua y con derivadas primeras continuas en todo punto e instante.

φ es biunívoca: a cada punto del dominio le corresponde un y solo un punto de la imagen y viceversa.

El cambio de esta función respecto de la posición de referencia recibe el nombre de Jacobiano.

Por principio de la conservación de la masa:

$$J = \det \left[\frac{\partial \varphi(X, t)}{\partial X} \right] = \left| \frac{\partial \varphi(X, t)}{\partial X} \right| > 0 \quad (\text{A1.11})$$

La definición del Jacobiano implica la ecuación de continuidad o por principio de la conservación de la masa en la configuración referencial.

DESCRIPCIÓN MATERIAL

Configuración referencial: la que ocupa en el tiempo $t = 0$

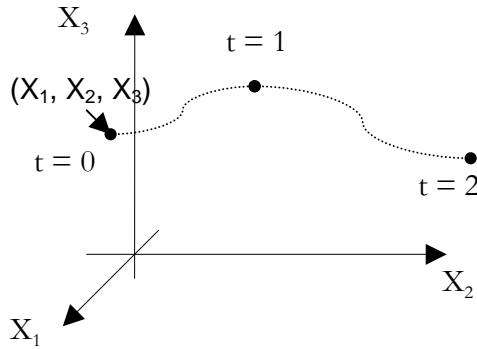


Figura A1.2– Descripción material: trayectoria

DESCRIPCIÓN ESPACIAL

Configuración actualizada: fija la atención en una dada región y toma como variables independientes a la posición x y el tiempo t

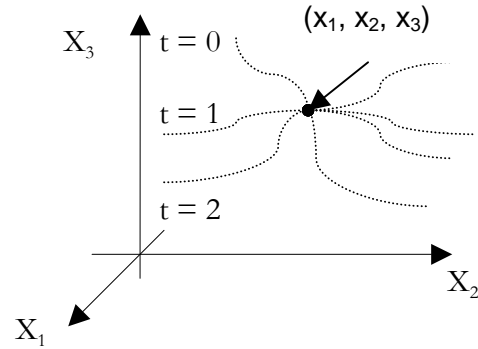


Figura A1.3– Descripción espacial: fotografía

A1.2.1 Descripción de propiedades

La descripción matemática de las propiedades del medio continuo puede hacerse a través de estas dos formas alternativas, material y espacial, según qué argumento se utilice en las funciones matemáticas que describen estas propiedades.

Descripción *material* de la propiedad ρ : $\rho_X = \rho(X, t) = (X_1, X_2, X_3, t)$ (A1.12)

Descripción *espacial* de la propiedad ρ : $\rho_x = \rho(x, t) = (x_1, x_2, x_3, t)$ (A1.13)

A1.2.2 Derivada temporal objetiva

La derivada material respecto del tiempo se define como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho(X, t)}{\partial t} \right)_X \tag{A1.14}$$

Pero si sólo conocemos la descripción espacial de la propiedad, no la material, no se puede calcular a través de la derivada clásica.

Asumiendo que existe una función diferenciable $x(X, t)$ para definir el movimiento, aunque estos valores sean desconocidos para nosotros, se puede expresar la derivada a través de la función que relaciona las coordenadas materiales con las espaciales (A.9):

$$\left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \right)_X = \frac{\partial \rho(x(X, t))}{\partial t} \quad \text{y por regla de la cadena del cálculo:}$$

$$\left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \right)_X = \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \right)_x + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial x(X, t)}{\partial t} \right)_X \quad \text{Como: } \left(\frac{\partial x(X, t)}{\partial t} \right)_X = v(x, t)$$

Podemos expresar la derivada material como:

$$\left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \right)_X = \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \right)_x + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \cdot v(x, t) \tag{A1.15}$$

Siendo:

$$\text{Derivada material: } \left(\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} \right)_x = \frac{d\rho}{dt} \quad (\text{A1.16})$$

$$\text{Derivada local: } \left(\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} \right)_x \quad (\text{A1.17})$$

$$\text{Derivada convectiva: } \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} \cdot v(x,t) \quad (\text{A1.18})$$

Generalización:

$$\text{Para escalar } f: \dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial t} + v_k \cdot \partial_k f \quad (\text{A1.19})$$

$$\text{Para vector } \underline{u}: \dot{\underline{u}} = \frac{d \cdot \underline{u}}{dt} = \frac{\partial \cdot \underline{u}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \underline{u} \quad (\text{A1.20})$$

$$\underline{u}_m \dot{=} \frac{\partial u_m}{\partial t} + v_k \cdot \partial_k u_m \quad (\text{A1.21})$$

$$\text{Para tensor } \underline{T}: \dot{\underline{T}} = \frac{d \cdot \underline{T}}{dt} = \frac{\partial \cdot \underline{T}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \underline{T} \quad (\text{A1.22})$$

$$T_{km} \dot{=} \frac{\partial T_{km}}{\partial t} + v_r \cdot \partial_r T_{km} \quad (\text{A1.23})$$

A1.2.3 Derivada objetiva de Lie

Otra forma de realizar la derivación de una variable cuyo sistema de referencias se encuentra en movimiento es la derivación objetiva de Lie. Cuando la variable temporal se encuentra en la configuración actualizada y su sistema de referencias no está fijo, se puede realizar trasladando la variable a un sistema de referencias fijo, por ejemplo el referencial, derivar con respecto al tiempo y luego volver a transportar estas variables a la configuración actualizada. Esto se hace a través de los operadores de transporte de una configuración a la otra.

A1.3 Tensión

A1.3.1 Esfuerzos:

Se puede clasificar a las fuerzas en *externas*, si actúan sobre un cuerpo o *internas* si actúan entre dos partes del mismo cuerpo. Mediante la elección de un adecuado cuerpo libre todas las fuerzas pueden ser consideradas como externas.

Las fuerzas externas que actúan en cualquier instante de una cuerpo libre elegido se clasifican en la mecánica del continuo como *fuerzas másicas* y *fuerzas superficiales*.

Fuerzas másicas: Son aquellas que actúan sobre los elementos de volumen o de masa. Por ejemplo las fuerzas gravitatorias, las fuerzas inerciales o las de atracción magnética.

Fuerzas superficiales: Son fuerzas de contacto que actúan sobre el contorno del volumen del material considerado por unidad de área.

En mecánica, las fuerzas reales siempre se ejercen de un cuerpo a otro (o de una parte del cuerpo a otra). Se cumple la 3ra Ley de Newton: la fuerza que se ejerce de un cuerpo a otro es igual en magnitud y opuesta en dirección a la ejercida de éste al primero. Pero las fuerzas de inercia o fuerzas ficticias que se crean para mantener el equilibrio en dinámica, no son fuerzas reales porque no son ejercidas por cuerpos y la 3ra ley de Newton no es aplicable a estas fuerzas.

Sea $b(x,t)$ la descripción espacial del campo vectorial de las fuerzas másicas por unidad de masa. Si se multiplica este vector por la masa por unidad de volumen ρ , se obtiene la fuerza másica en el volumen: $dV: \rho \cdot \vec{b} \cdot dV$. El vector suma de todas las fuerzas de cuerpo que actúan en un volumen V es:

$$\int_V \rho \cdot \vec{b} \cdot dV = i_k \cdot \int_V \rho \cdot b_k \cdot dV \tag{A1.24}$$

Sea $t(x,t)$ la descripción espacial del campo vectorial de las fuerzas superficiales por unidad de área. La fuerza superficial sobre un elemento de superficie dS será: $\vec{t} \cdot dS$. El vector suma de todas las fuerzas a través de una porción finita S de superficie es:

$$\int_S \vec{t} \cdot dS = i_k \cdot \int_S t_k \cdot dS \tag{A1.25}$$

A1.3.2 Momentos de fuerzas de masa y de superficie

El momento m de una fuerza f alrededor de un punto A se define como el producto vectorial:

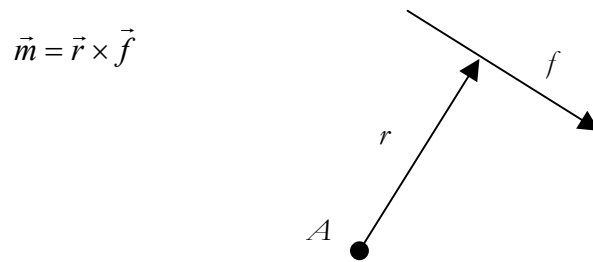


Figura A1.4– Momento de la fuerza f alrededor del punto A

siendo r la distancia del punto A al vector de la fuerza f .

El momento de una fuerza alrededor de cualquier eje es la suma algebraica de los momentos que ejercen las componentes de la fuerza alrededor de ese eje.

El momento total de todas las fuerzas de cuerpo b alrededor del origen O :

$$\int_V (\vec{p} \times \vec{b}) \cdot \rho \cdot dV = i_r \cdot \int_V e_{rmn} \cdot x_m \cdot b_n \cdot \rho \cdot dV \tag{A1.26}$$

El momento de todas las fuerzas de superficie t alrededor del origen O :

$$\int_V (\vec{p} \times \vec{t}) \cdot \rho \cdot dV = i_r \cdot \int_V e_{rmn} \cdot x_m \cdot t_n \cdot \rho \cdot dV \tag{A1.27}$$

El momento total de todas las fuerzas externas en un cuerpo de volumen V , rodeado de una superficie cerrada S , es la suma de las dos expresiones de momento de las fuerzas de masa y de superficie.

A1.3.3 Tensión

Si se separan dos porciones del medio, cada una ejerciendo una tensión sobre la otra y se toma una de ellas aislada se puede observar un dS en la cara que se separa.

Se considera como positiva la dirección de la normal a la superficie hacia afuera.

El concepto de vector tensión actuando en una superficie dS alrededor del punto Q , con normal n saliendo de ese punto se considera como el límite de la relación:

$$\vec{t} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\Delta f}{\Delta S} \right] \quad (\text{A1.28})$$

donde tanto el numerador como el denominador tienden a cero pero el cociente tiene un límite finito que es independiente de las superficies consideradas.

Así para el cubo elemental:

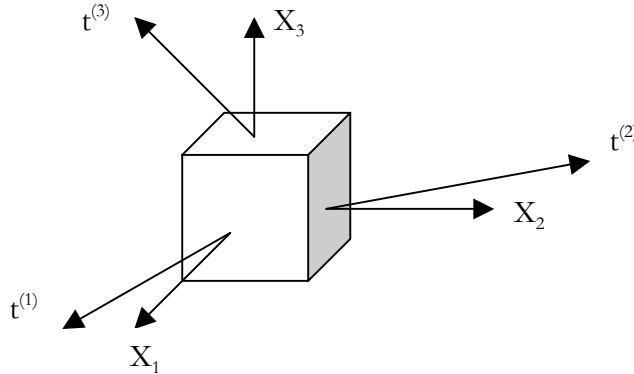


Figura A1.5- Tensiones en las caras del cubo elemental

Indicar los vectores de tensión actuando en planos perpendiculares a los ejes coordinados es muy útil porque cuando están dados los vectores que actúan en tres planos mutuamente perpendiculares, el vector tensión de ese punto para cualquier plano inclinado arbitrariamente con respecto a los ejes coordinados puede expresarse en función de esos tres vectores especiales.

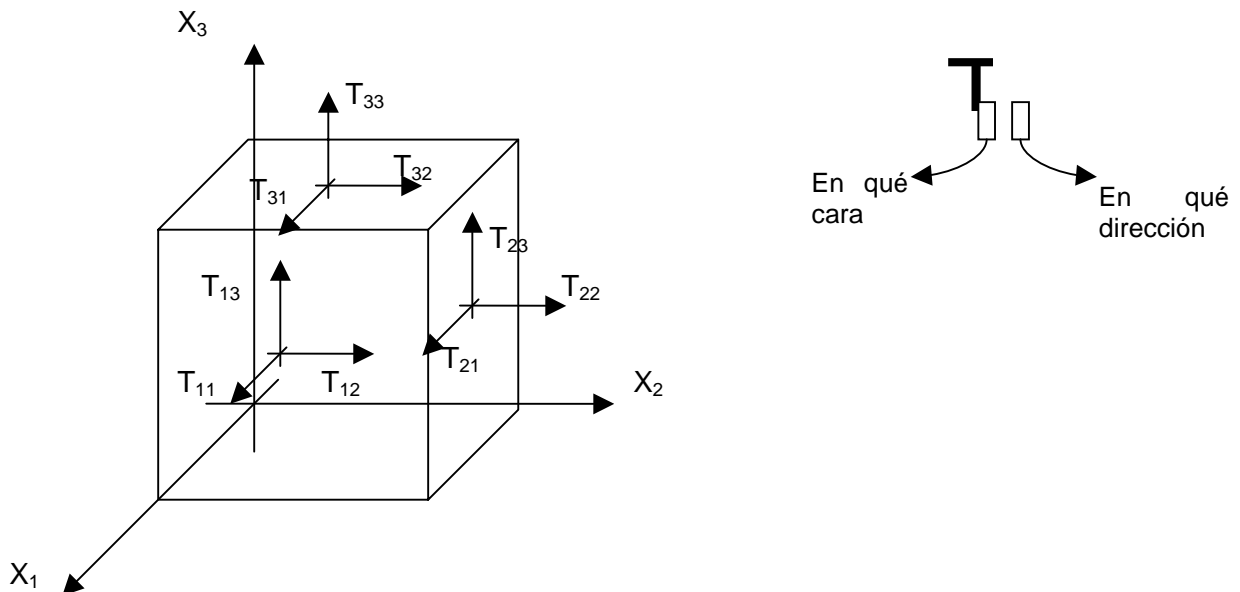


Figura A1.6- Componentes cartesianas de las tensiones en las caras del cubo elemental y nomenclatura.

Las componentes de los tres vectores en el punto se disponen generalmente en un arreglo o matriz T según:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.29})$$

A1.3.4 Tetraedro de Cauchy: Tensión en un plano arbitrario

Se considera ahora el caso de un volumen material constituido por un tetraedro elemental situado alrededor de la partícula Q , con el origen de coordenadas sobre la misma.

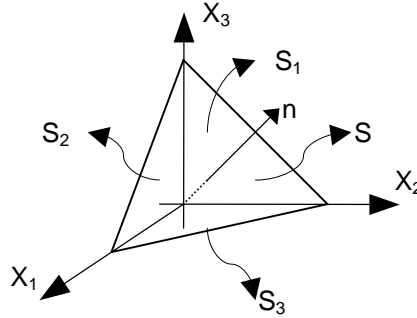


Figura A1.7- Tetraedro de Cauchy

Las caras del tetraedro quedan definidas mediante un plano normal n que interseca con los planos coordinados definiendo una superficie genérica de área S a una distancia h del punto Q . Los planos coordinados definen las otras caras del tetraedro de áreas S_1 , S_2 y S_3 .

Por consideraciones geométricas pueden establecerse las relaciones:

$$\begin{cases} \Delta S_1 = \Delta S \cdot n_1 \\ \Delta S_2 = \Delta S \cdot n_2 \\ \Delta S_3 = \Delta S \cdot n_3 \end{cases} \quad (\text{A1.30})$$

$$\Delta S_i = \Delta S \cdot n_i \quad (\text{A1.31})$$

Operando con las tensiones promedio de los tres planos coordinados puede hallarse la tensión del punto Q actuando en un plano arbitrario, conociendo sólo la tensión en tres planos perpendiculares entre sí a través del punto.

$$t^{(n)} = t^{(1)} \cdot n_1 + t^{(2)} \cdot n_2 + t^{(3)} \cdot n_3 \quad (\text{A1.32})$$

$$t^{(n)} = t^{(k)} \cdot n_k$$

Utilizando el tensor de tensiones se expresa la ecuación vectorial:

$$\begin{cases} t_1^{(n)} = T_{11} \cdot n_1 + T_{21} \cdot n_2 + T_{31} \cdot n_3 \\ t_2^{(n)} = T_{12} \cdot n_1 + T_{22} \cdot n_2 + T_{32} \cdot n_3 \\ t_3^{(n)} = T_{13} \cdot n_1 + T_{23} \cdot n_2 + T_{33} \cdot n_3 \end{cases} \quad (\text{A1.33})$$

$$t_i^{(n)} = T_{ij} \cdot n_j \quad (\text{A1.34})$$

A1.3.4.1 Simetría de tensiones:

Cuando no existen cuplas distribuidas, de cuerpo o de superficie, para que se cumpla el equilibrio, la matriz de tensiones debe ser simétrica, esto es:

$$\begin{cases} T_{21} = T_{12} \\ T_{31} = T_{13} \\ T_{32} = T_{23} \end{cases} \quad (\text{A1.35})$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Notación Científica:} & & \text{Notación Ingenieril:} \\
 \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} & (A1.36) & \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} & (A1.37)
 \end{array}$$

A1.3.4.2 Teorema de las tensiones conjugadas de corte:

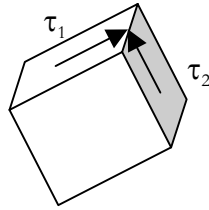


Figura A1.8- Tensiones tangenciales en planos perpendiculares

Cuando dos planos se intersecan en ángulo recto significa que las tensiones actuando sobre ellos son de igual magnitud y actúan contra la arista o en sentido contrario ambas.

A1.3.4.3 Teorema de Cauchy (más general):

$$t^{(i)} \cdot \tilde{n}^{(j)} = t^{(j)} \cdot \tilde{n}^{(i)} \quad (A1.38)$$

A1.3.5 Ejes principales de esfuerzos y esfuerzos principales

Independientemente del estado de tensiones (y siempre y cuando el tensor de tensiones sea simétrico) para un punto dado siempre es posible elegir una terna sobre ese punto tal que las componentes de corte desaparezcan cuando se refieren los esfuerzos a esa terna. Esos ejes especiales se llaman *ejes principales* o *direcciones principales*. Para un plano perpendicular a un eje principal, el vector tensión es puramente normal y por lo tanto igual a un número multiplicado por la normal unitaria. Los tres planos principales y las tensiones normales a los tres planos principales se llaman tensiones principales y se denotan por:

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \text{ ó } T_1, T_2, T_3$$

σ_1 : mayor algebraica

σ_3 : menor algebraica

Las direcciones principales en cualquier punto pueden hallarse si se conocen las nueve componentes T_n en algún sistema de ejes.

Dado \tilde{n} : vector unitario de una de las direcciones principales desconocidas y λ : tensión principal correspondiente a ese plano.

Como no debe existir corte, la componente de la tensión en el plano perpendicular a n , debe ser paralelo a n .

$$t^{(\tilde{n})} = \lambda \cdot \tilde{n} \quad (A1.39)$$

Generalizando para todos los ejes:

$$\begin{aligned} \tilde{n} \cdot T &= \lambda \cdot \tilde{n} \\ n_r \cdot T_{rs} &= \lambda \cdot n_s \end{aligned} \tag{A1.40}$$

$$\begin{aligned} \tilde{n} \cdot (T - \lambda \cdot I) &= 0 \\ (T_{rs} - \lambda \cdot \delta_{rs}) \cdot n_r &= 0 \end{aligned} \tag{A1.41}$$

que representa a un grupo de ecuaciones lineales homogéneas. Debe cumplirse para las direcciones de los cosenos que:

$$\begin{aligned} (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 &= 1 \\ n_i \cdot n_i &= 1 \end{aligned} \tag{A1.42}$$

Que se resuelven según:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ |T_{rs} - \lambda \cdot \delta_{rs}| &= 0 \end{aligned} \tag{A1.43}$$

Como la matriz de tensiones es simétrica y compuesta de valores reales, el sistema cúbico de ecuaciones tiene tres soluciones reales.

Las llamamos σ_1 , σ_2 y σ_3 que son las tensiones principales.

Cuando se halla una de ellas, σ_i , se sustituye por λ en (A1.442) y (A1.45):

para hallar la dirección principal $n^{(i)}$. De la misma manera se hallan $n^{(2)}$ sustituyendo por σ_2 y $n^{(3)}$ se halla como la perpendicular a las otras dos direcciones:

$$n^{(1)} \times n^{(2)} = n^{(3)} \tag{A1.46}$$

Pueden darse tres casos de tensiones principales:

<p>Cuando las tres direcciones son perpendiculares y las tres tensiones principales son distintas:</p>	<p><i>Estado cilíndrico</i> cuando no existe corte en ningún plano paralelo al dado por las dos direcciones principales cuyas tensiones coinciden.</p>	<p><i>Estado esférico o hidrostático</i> se da cuando no existe corte en ningún plano pasante por Q.</p>
--	--	---

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$$

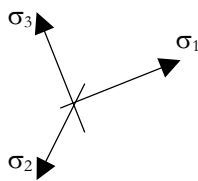


Figura A1.9- Estado de tensiones principales distintas

$$\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$$

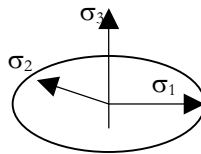


Figura A1.10- Estado de tensiones cilíndrico

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

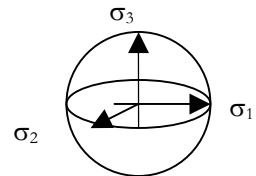


Figura A1.11- Estado de tensiones esférico o hidrostático

Tensión media: es el valor medio de las tensiones principales.

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{A1.47}$$

A1.3.6 Descomposición del tensor de tensiones en sus partes esférica y desviadora

El tensor de tensiones puede descomponerse en una *parte esférica* y una *parte desviadora*:

$$\sigma = \sigma_{esf} + \sigma' \quad (A1.48)$$

donde la parte esférica se define como:

$$\sigma_{esf} = \frac{1}{3} \cdot Tr(\sigma) \cdot 1 = \sigma_m \cdot 1 \equiv \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (A1.49)$$

La parte esférica del tensor de tensiones σ_{esf} es un tensor isótropo y por lo tanto es invariante frente a un cambio de la base ortogonal.

Por definición la parte desviadora del tensor de tensiones será:

$$\sigma' = \sigma - \sigma_{esf} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x' & \tau_{xy}' & \tau_{xz}' \\ \tau_{yx}' & \sigma_y' & \tau_{yz}' \\ \tau_{zx}' & \tau_{zy}' & \sigma_z' \end{bmatrix} \quad (A1.50)$$

La componente desviadora del tensor es un indicador de cuanto se aparta el estado tensional de uno hidrostático. Las direcciones principales del tensor de tensiones y de la componente desviadora coinciden.

A1.3.7 Invariantes

Las tensiones principales son invariantes con respecto al sistema en el cual son representados. Si se expresa la ecuación (A1.51) en su forma expandida:

$$\lambda^3 - I_T \cdot \lambda^2 - II_T \cdot \lambda - III_T = 0 \quad (A1.52)$$

los coeficientes que multiplican a las potencias de λ son lo que se llaman invariantes *del estado tensional* en el punto Q .

Siendo la expresión de estos invariantes en función del estado tensional:

$$I_T = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{kk}$$

$$II_T = -(T_{11} \cdot T_{22} + T_{22} \cdot T_{33} + T_{33} \cdot T_{11}) + T_{23}^2 + T_{31}^2 + T_{12}^2 = \frac{1}{2} \cdot (T_{ij} \cdot T_{ij} - T_{ii} \cdot T_{jj}) \quad (A1.53)$$

$$III_T = \det(T) = \frac{1}{6} \cdot e_{ijk} \cdot e_{pqr} \cdot T_{ip} \cdot T_{jq} \cdot T_{kr}$$

Si los ejes de referencia se eligen de forma que coincidan con los ejes principales, los invariantes pueden expresarse en función de las *tensiones principales*.

$$\begin{aligned} \text{Primer invariante:} & \quad I_T = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ \text{Segundo invariante:} & \quad II_T = -(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \\ \text{Tercer invariante:} & \quad III_T = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \end{aligned} \quad (A1.54)$$

A1.4 Desplazamientos y deformaciones

A1.4.1 Desplazamientos:

Un desplazamiento es la diferencia entre los vectores de posición de una misma partícula en las configuraciones actual y de referencia.

El desplazamiento de una partícula P en un instante determinado viene dado por el vector \mathbf{u} que une los puntos del espacio P (posición inicial) y P' (posición en el instante actual) de la partícula:

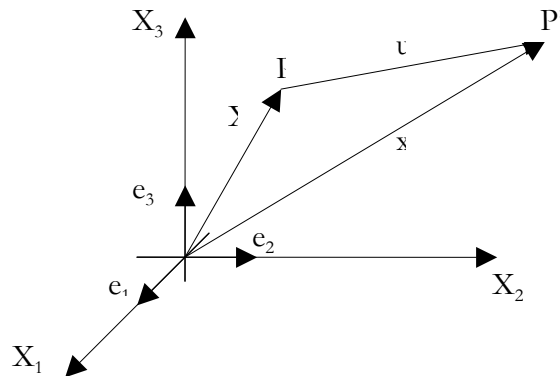


Figura A1.12- Desplazamiento del punto P

El desplazamiento de todas las partículas del medio continuo define el campo vectorial de desplazamientos que, como cualquier propiedad del medio continuo, puede escribirse en forma material $U(X,t)$ o en forma espacial $u(x,t)$:

$$\begin{cases} U(X,t) = x(X,t) - X \\ U_i(X,t) = x_i(X,t) - X_i \end{cases} \quad (\text{A1.55})$$

$$\begin{cases} u(x,t) = X(x,t) - x \\ u_i(x,t) = X_i(x,t) - x_i \end{cases} \quad (\text{A1.56})$$

A1.4.1.1 Tensores gradiente material y espacial de desplazamientos

La derivación del vector desplazamiento U_i con respecto a las coordenadas materiales da lugar a:

que define el *tensor gradiente material de los desplazamientos* como:

$$\begin{cases} J(X,t) = U(X,t) \otimes \bar{\nabla} = F - 1 \\ J_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij} \end{cases} \quad (\text{A1.57})$$

y:

$$\begin{cases} dU = J \cdot dX \\ dU_i = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} dX_j = J_{ij} dX_j \end{cases} \quad (\text{A1.58})$$

De forma análoga, diferenciando la expresión de u_i con respecto a las coordenadas espaciales se obtiene:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - F_{ij}^{-1} = j_{ij} \quad (\text{A1.59})$$

que define el *tensor gradiente espacial de los desplazamientos* como:

$$\begin{cases} j(x,t) = u(x,t) \otimes \nabla = 1 - F^{-1} \\ j_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - F_{ij}^{-1} \end{cases} \quad (\text{A1.60})$$

$$\text{y:} \begin{cases} du = j \cdot dx \\ du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = j_{ij} dx_j \end{cases} \quad (\text{A1.61})$$

A1.4.2 Deformación:

A1.4.2.1 Desplazamientos relativos:

Las componentes de la deformación son las medidas cuantitativas de ciertos tipos de desplazamientos relativos entre partes vecinas de un material. Un sólido, en general, resiste a ese tales desplazamientos relativos. Como resultado aparecen las tensiones en el sólido.

A1.4.2.2 Desplazamientos relativos unitarios:

Consideremos dos partículas vecinas P y Q pertenecientes a un medio continuo y también suponiendo que ese medio se desplaza y deforma y que estas partículas se mueven para ocupar las posiciones P' y Q' de la configuración actualizada. La partícula P esta separada de Q por el vector dX de longitud dS y la partícula P' está separada de Q' por el vector dx de longitud ds .

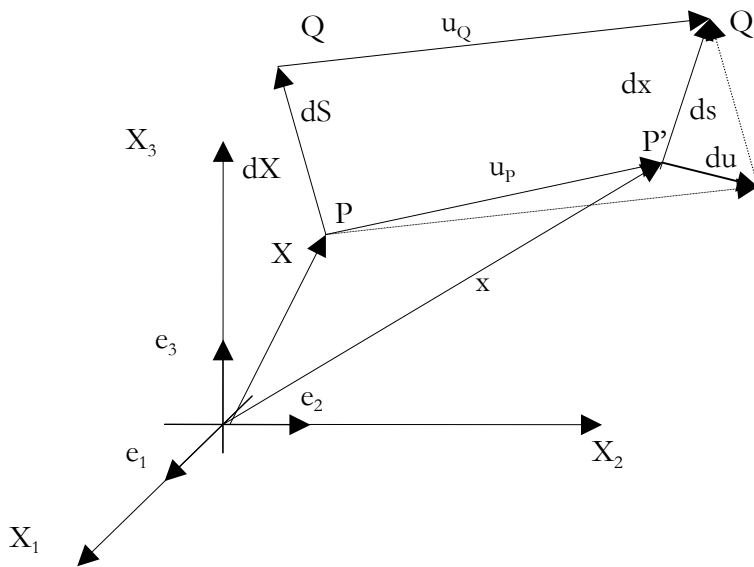


Figura A1.13- Desplazamiento relativo del punto Q con respecto al punto P
Se define el desplazamiento relativo de Q con respecto a P a:

$$d \bar{u} = \bar{u}_Q - \bar{u}_P \quad (\text{A1.62})$$

El desplazamiento unitario será:

$$\frac{du_i}{dS} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \cdot \frac{dX_j}{dS} \quad (A1.63)$$

$$\frac{d \cdot \vec{u}}{dS} = \vec{u} \vec{\nabla} \cdot \vec{n}$$

Y sus componentes explícitas son:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_1}{dS} \\ \frac{du_2}{dS} \\ \frac{du_3}{dS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dX_1} & \frac{du_1}{dX_2} & \frac{du_1}{dX_3} \\ \frac{du_2}{dX_1} & \frac{du_2}{dX_2} & \frac{du_2}{dX_3} \\ \frac{du_3}{dX_1} & \frac{du_3}{dX_2} & \frac{du_3}{dX_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dS} \\ \frac{dX_2}{dS} \\ \frac{dX_3}{dS} \end{bmatrix} \quad (A1.64)$$

$$\frac{du}{dS} = J_u \cdot n$$

Siendo J_u la matriz Jacobiana o de desplazamientos relativos unitarios.

Ahora se busca separar J_u como suma de dos matrices:

Una que tenga en cuenta la *deformación en las vecindades de P*

y otra que tenga en cuenta el *movimiento como cuerpo rígido sin deformación*.

$$J_u = E + \Omega \quad (A1.65)$$

Matriz de deformación E: Simétrica. Tiene en cuenta solo la deformación en el entorno del punto.

$$E = \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dX_1} & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du_1}{dX_2} + \frac{du_2}{dX_1} \right) & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du_1}{dX_3} + \frac{du_3}{dX_1} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du_2}{dX_1} + \frac{du_1}{dX_2} \right) & \frac{du_2}{dX_2} & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du_2}{dX_3} + \frac{du_3}{dX_2} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du_3}{dX_1} + \frac{du_1}{dX_3} \right) & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du_3}{dX_2} + \frac{du_2}{dX_3} \right) & \frac{du_3}{dX_3} \end{bmatrix} \quad (A1.66)$$

$$E = \frac{1}{2} (\vec{u} \vec{\nabla} + \vec{u} \vec{\nabla})$$

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

Matriz Rotación Ω : Antimétrica. Tiene en cuenta los desplazamientos relativos (solo de rotación ya que los de traslación no se tienen en cuenta en la Matriz Jacobiana) de cuerpo rígido.

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du_1}{dX_2} - \frac{du_2}{dX_1} \right) & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du_1}{dX_3} - \frac{du_3}{dX_1} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du_2}{dX_1} - \frac{du_1}{dX_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du_2}{dX_3} - \frac{du_3}{dX_2} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du_3}{dX_1} - \frac{du_1}{dX_3} \right) & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{du_3}{dX_2} - \frac{du_2}{dX_3} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (A1.67)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} (\vec{u} \vec{\nabla} - \vec{u} \vec{\nabla})$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

Como la matriz deformación es un tensor simétrico de segundo orden, todo el desarrollo de tensiones principales, de invariantes, de tensiones esféricas y desviadoras y la circunferencia de Mohr vale para deformaciones.

Deformaciones principales: e_1, e_2, e_3

Invariantes de la deformación: I_E, II_E, III_E

Se le llama *deformación principal normal* α :

$$\frac{e}{3} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{3} I_E = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} \quad (A1.68)$$

Deformación esférica:

$$\frac{1}{3} \cdot \vec{e} \cdot \vec{1} = \frac{1}{3} \cdot e \cdot \delta_{ij} \quad (A1.69)$$

Las componentes ε_{ij}' de la *deformación desviadora* E' :

$$\varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \cdot e \cdot \delta_{ij} \quad (A1.70)$$

donde:

$$E' = E - \frac{1}{3} \cdot \vec{e} \cdot \vec{1} \quad (A1.71)$$

La deformación desviadora E' muestra el cambio de forma del elemento mientras que la deformación esférica representa el cambio de volumen.

Para deformaciones pequeñas la *deformación de volumen*, también llamada *dilatación*, es igual a e .

$$e = I_E = tr(E) = \frac{V - V_0}{V_0} \quad (A1.72)$$

que es un invariante.

A1.4.3 Tensor velocidad de deformación y tensor vorticidad:

Para conocer la deformación de un sólido es necesario especificar el proceso y seguir la historia de la deformación.

Las componentes de las velocidades de deformación describen al movimiento tangencial

son: $v_i = \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$.

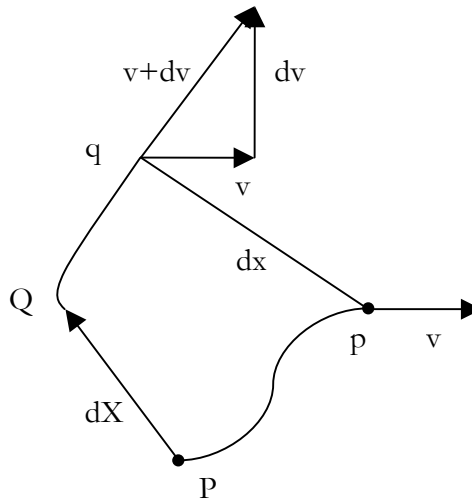


Figura A1.14- Desplazamiento relativo del punto q con respecto al punto p

Las componentes de la velocidad relativa de q con respecto a p vienen dadas por

$$dv_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_m} dx_m$$

En forma matricial:

$$[dv_k] = [v_{k,m}][dx_m] = [dx_m][\partial_m v_k] \tag{A1.73}$$

Que representan las ecuaciones tensoriales:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \bullet d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \bullet \mathbf{L}^T$$

Donde:

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} \nabla_x \quad \text{y} \quad \mathbf{L}^T = \nabla_x \mathbf{v}$$

Con componentes cartesianas:

$$L_{km} = v_{k,m} \quad \text{y} \quad (L^T)_{km} = \partial_k v_m = v_{m,k} \tag{A1.74}$$

Que son los gradientes espaciales de velocidad.

Escribimos L como la suma de un tensor simétrico D llamado tensor velocidad de deformación y un tensor altimétrico W que llamamos tensor verticidad.

$$L = D + W \tag{A1.75}$$

Con:

Tensor velocidad de deformación

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \tag{A1.76}$$

$$D_{km} = \frac{1}{2} (v_{k,m} + v_{m,k})$$

Descomposición polar por derecha:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \tag{A1.77}$$

$$W_{km} = \frac{1}{2} (v_{k,m} - v_{m,k})$$

A1.4.4 Tensor gradiente de deformación:

Consideremos las mismas partículas vecinas P y Q pertenecientes a un medio continuo en la configuración referencial. Suponiendo que ese medio se desplaza y deforma y que estas partículas se mueven para ocupar las posiciones P' y Q' de la configuración actualizada.

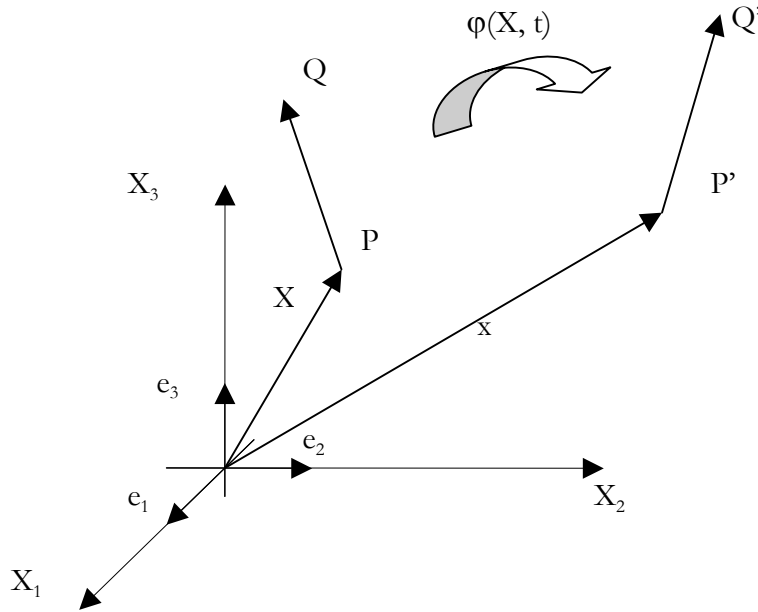


Figura A1.15- Desplazamiento de las partículas vecinas P y Q de la configuración de referencia a la configuración actual.

Si:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(X, t) = x(X, t) \\ x_i &= \varphi_i(X_1, X_2, X_3, t) \end{aligned} \quad (A1.78)$$

son las ecuaciones de movimiento, diferenciando con respecto a las coordenadas materiales X , resulta:

$$\begin{aligned} dx &= F \cdot dX \\ dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \end{aligned} \quad (A1.79)$$

lo que define el tensor *gradiente material de la deformación* $F(X, t)$:

$$\begin{aligned} F &= x \otimes \nabla_X \\ F_{ij} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \end{aligned} \quad (A1.80)$$

Las componentes explícitas de F vienen dadas por:

$$[F] = [x \otimes \nabla_X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (A1.81)$$

El tensor gradiente de deformación $F(X, t)$ contiene la información del movimiento relativo, a lo largo del tiempo t , de todas las partículas materiales en el entorno diferencial de una dada, identificada por sus coordenadas materiales X .

A1.4.5 Tensor gradiente de deformación inverso

Considerando ahora las ecuaciones de movimiento inversas:

$$\begin{aligned} X &= \varphi^{-1}(x, t) = X(x, t) \\ X_i &= \varphi_i^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \end{aligned} \quad (\text{A1.82})$$

Y diferenciándolas con respecto a las coordenadas espaciales x_j , resulta:

$$\begin{aligned} dX &= F^{-1} \cdot dx \\ dX_i &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \end{aligned} \quad (\text{A1.83})$$

y se define el *tensor gradiente espacial de deformación o tensor gradiente de deformación inverso* $F^{-1}(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned} F^{-1} &= X \otimes \nabla_x \\ F_{ij}^{-1} &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (\text{A1.84})$$

Las componentes explícitas de F^{-1} vienen dadas por:

$$[F^{-1}] = [X \otimes \nabla_x] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.85})$$

El tensor gradiente espacial de la deformación F^{-1} es el inverso del gradiente material de deformación F :

$$\begin{aligned} F \cdot F^{-1} &= [\mathbf{1}] \\ F_{ik} \cdot F_{kj}^{-1} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A1.86})$$

A1.4.6 Tensores de deformación:

Se vuelven a considerar las partículas vecinas P y Q del medio continuo en la configuración referencial, que ocupan las posiciones P' y Q' de la configuración actualizada. La partícula P esta separada de Q por el vector dX de longitud dS y la partícula P' está separada de Q' por el vector dx de longitud ds .

Siendo:

$$dS = \sqrt{dX \cdot dX} \quad (\text{A1.87})$$

$$ds = \sqrt{dx \cdot dx} \quad (\text{A1.88})$$

Los dos vectores diferenciales dX y dx están relacionados por el gradiente de deformación según (A1.79) y (A1.83)

Puede escribirse entonces:

$$(ds)^2 = dx \cdot dx = [dx]^T \cdot [dx] = [F \cdot dX]^T \cdot [F \cdot dX] = dX \cdot F^T \cdot F \cdot dX \quad (\text{A1.89})$$

$$(ds)^2 = dx_k \cdot dx_k = F_{ki} \cdot dX_i \cdot F_{kj} \cdot dX_j = dX_i \cdot F_{ki} \cdot F_{kj} \cdot dX_j = dX_i \cdot F_{ik}^T \cdot F_{kj} \cdot dX_j \quad (\text{A1.90})$$

Y análogamente,

$$(dS)^2 = dX \cdot dX = [dX]^T \cdot [dX] = [F^{-1} \cdot dx]^T \cdot [F^{-1} \cdot dx] = dx \cdot F^{-T} \cdot F^{-1} \cdot dx \quad (\text{A1.91})$$

$$(dS)^2 = dX_k \cdot dX_k = F_{ki}^{-1} \cdot dx_i \cdot F_{kj}^{-1} \cdot dx_j = dx_i \cdot F_{ki}^{-1} \cdot F_{kj}^{-1} \cdot dx_j = dx_i \cdot F_{ik}^{-T} \cdot F_{kj}^{-1} \cdot dx_j \quad (\text{A1.92})$$

A1.4.6.1 Tensor material de deformación: Tensor de deformación de Green Lagrange

Restando las expresiones de longitud cuadrada (A1.90) y (A1.91):

$$(ds)^2 - (dS)^2 = dX \cdot F^T \cdot F \cdot dX - dX \cdot dX = dX \cdot F^T \cdot F \cdot dX - dX \cdot 1 \cdot dX = dX \cdot \underbrace{\left(\frac{F^T \cdot F - 1}{2E} \right)}_C \cdot dX \quad (A1.93)$$

Se define tensor deformada material C a:

$$C = F^T \cdot F \quad (A1.94)$$

$$C = F_{ki}^T \cdot F_{kj} \quad (A1.95)$$

Y se define el *tensor material de deformación o tensor de deformación de Green Lagrange* a:

$$E(X, t) = \frac{1}{2} (F^T \cdot F - 1) \quad (A1.96)$$

$$E_{ij}(X, t) = \frac{1}{2} (F_{ki} \cdot F_{kj} - \delta_{ij}) \quad (A1.97)$$

Este tensor de deformación de Green Lagrange es la matriz de deformación definida anteriormente.

A1.4.6.2 Tensor espacial de deformación: Tensor de deformación de Almansi

Restando las otras expresiones de longitud cuadrada (A1.89) y (A1.92):

$$(ds)^2 - (dS)^2 = dx \cdot dx - dx \cdot F^{-T} \cdot F^{-1} \cdot dx = dx \cdot 1 \cdot dx - dx \cdot F^{-T} \cdot F^{-1} \cdot dx = dx \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{F^{-T} \cdot F^{-1}}{2E} \right)}_B \cdot dx \quad (A1.98)$$

Se define tensor deformada espacial B^{-1} a:

$$B^{-1} = F^{-T} \cdot F^{-1} \quad (A1.99)$$

$$B^{-1} = F_{ki}^{-T} \cdot F_{kj}^{-1} \quad (A1.100)$$

Y se define el *tensor espacial de deformación o tensor de deformación de Almansi* a:

$$e(x, t) = \frac{1}{2} (1 - F^{-T} \cdot F^{-1}) \quad (A1.101)$$

$$e_{ij}(x, t) = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - F_{ki}^{-T} \cdot F_{kj}^{-1}) \quad (A1.102)$$

Tensores referenciales-Lagrangeanos

$$C = F_{ki}^T \cdot F_{kj}$$

$$E_{ij}(X, t) = \frac{1}{2} (F_{ki} \cdot F_{kj} - \delta_{ij})$$

C y E tienen los mismos ejes principales

Son todos tensores simétricos y vale todo el desarrollo de ejes principales, invariantes y circunferencia de Mohr

Tensores actualizados- Eulerianos

$$B^{-1} = F_{ki}^{-T} \cdot F_{kj}^{-1}$$

$$e_{ij}(x, t) = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - F_{ki}^{-T} \cdot F_{kj}^{-1})$$

B^{-1} y e tienen los mismos ejes principales

A1.4.6.3 Tensores Rotación y Estiramiento

Cuando los gradientes de desplazamiento son finitos ya no puede descomponerse la matriz gradiente de desplazamiento en la suma de una deformación pura y una rotación pura.

Sin embargo siempre se puede descomponer la matriz F en una multiplicación de matrices en la que una de ellas representa la rotación pura.

R es el tensor de rotación ortogonal que gira los ejes principales de C en X a la dirección de los ejes principales de B^I en x .

Existen dos tensores U y V simétricos:

$$U = \sqrt{C} \quad (A1.103)$$

$$V = \sqrt{B} \quad (A1.104)$$

con B la inversa de B^I : $B = F \cdot F^T$

tal que:

$$F = R \cdot U = V \cdot R \quad (A1.105)$$

Esta descomposición es única para cada tensor F y se denomina:

Descomposición polar por izquierda: $F = R \cdot U \quad (A1.106)$

Descomposición polar por derecha: $F = V \cdot R \quad (A1.107)$

Considerando la relación fundamental del gradiente de deformación (A1.79) entonces:

$$dx = (R \cdot U) \cdot dX = (V \cdot R) \cdot dX \quad (A1.108)$$

$$dx_k = (R_{kq} \cdot U_{qp}) \cdot dX_p = (V_{kq} \cdot R_{qp}) \cdot dX_p \quad (A1.109)$$

$$dx = V \cdot \underbrace{(R \cdot dX)}_{\substack{\text{rotación} \\ \text{deformación}}}$$

Establece que el movimiento relativo entono de una partícula durante el proceso de deformación, caracterizado por el tensor F , puede entenderse como la *composición* de una rotación, caracterizada por el tensor de rotación rígida R (mantiene ángulos y distancias) y una deformación propiamente dicha (modifica ángulos y distancias) caracterizada por el tensor V .

$$dx = R \cdot \underbrace{(U \cdot dX)}_{\substack{\text{deformación} \\ \text{rotación}}}$$

Establece que el movimiento relativo entono de una partícula durante el proceso de deformación, caracterizado por el tensor F , puede entenderse como la *superposición* de una deformación propiamente dicha (modifica ángulos y distancias) caracterizada por el tensor U y una rotación, caracterizada por el tensor de rotación rígida R (mantiene ángulos y distancias).

A1.4.7 Calculo de los invariantes de un tensor

Se denomina invariante de un tensor a una entidad escalar cuya magnitud no varía al cambiar el sistema de coordenadas. Sean así dos entidades mecánicas, el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{rs} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (A1.110)$$

Como se sabe esta forma tensorial es solo una representación convencional del estado de tensiones y de deformaciones de un punto del sólido a través de sus componentes, según tres planos ortogonales.

Para independizarse de esta forma no objetiva de medición se utilizan los denominados invariantes de los tensores de deformación y de tensión.

Invariantes del tensor de tensiones

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} \sigma_{ji} - \sigma_{kk}^2)$$

$$I_3 = \det[\sigma_{ij}] = |\sigma_{ij}|$$

Invariantes del tensor desviador de tensiones

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji}$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki}$$

Invariantes del tensor de deformaciones

$$I'_1 = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$I'_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} - \varepsilon_{kk}^2)$$

$$I'_3 = \det[\varepsilon_{ij}] = |\varepsilon_{ij}|$$

(A1.111)

Invariantes del tensor desviador de deformaciones

$$J'_1 = 0$$

$$J'_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ji}$$

$$J'_3 = \frac{1}{3} e_{ij} e_{jk} e_{ki}$$

(A1.112)

Donde el tensor desviador de tensiones se representa según $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij}$, y el tensor desviador de deformaciones se expresa como $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij}$.

A1.5 Principios Generales

A1.5.1 Teoremas útiles

A1.5.1.1 Teorema de Gauss Generalizado

Transformación de una integral de superficie a una integral de volumen.

Dada la función \mathcal{A} con primeras derivadas parciales continuas se demuestra que:

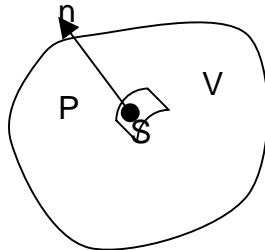


Figura A1.16- Volumen V rodeado de la superficie S que en el punto P tiene normal n

$$\int_S \tilde{n} * \mathcal{A} \cdot dS = \int_V \nabla * \mathcal{A} \cdot dV \quad (\text{A1.113})$$

Siendo \mathcal{A} :

Teorema de Gauss

(A1.114)

$$A = f(x_i): \text{ función } \int_S \tilde{n} \cdot f \cdot dS = \int_V \tilde{\nabla} \cdot f \cdot dV$$

escalar

$$\int_S n_i \cdot f \cdot dS = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dV \tag{A1.115}$$

$A = \vec{v}(x_i):$ función Para producto escalar ($* = \cdot$)
vectorial **Teorema de la divergencia**

$$\int_S \tilde{n} \cdot \vec{v} \cdot dS = \int_V \tilde{\nabla} \cdot \vec{v} \cdot dV \tag{A1.116}$$

$$\int_S n_i \cdot v_i \cdot dS = \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \cdot dV$$

Para producto vectorial ($* = \times$)

$$\int_S \tilde{n} \times \vec{v} \cdot dS = \int_V \tilde{\nabla} \times \vec{v} \cdot dV \tag{A1.117}$$

$$\int_S e_{ijk} \cdot n_i \cdot v_k \cdot dS = \int_V e_{ijk} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \cdot dV$$

$$A = T(x_i): \text{ función } \int_S \tilde{n} \cdot T \cdot dS = \int_V \tilde{\nabla} \cdot T \cdot dV$$

tensorial

$$\int_S n_i \cdot T \cdot dS = \int_V \frac{\partial T}{\partial x_i} \cdot dV \tag{A1.118}$$

A1.5.1.2 Teorema de Stokes

Dada una superficie orientada arbitrariamente:

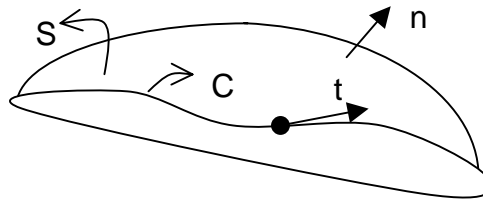


Figura A1.17- Superficie S orientada de modo que al circular por su curva extrema sea acorde a la regla de la mano derecha con respecto a n

$$\int_S (\tilde{n} \cdot \nabla) * A \cdot dS = \int_C \tilde{t} * A \cdot dV \tag{A1.119}$$

Siendo A un campo continuo escalar, vectorial o tensorial.

Recordando que: $a \cdot b \times c = a \times b \cdot c$

La forma habitual del teoremas de Stokes es:

$$\int_S \tilde{n} \cdot (\nabla \times \vec{v}) \cdot dS = \int_C \tilde{t} \cdot \vec{v} \cdot dV \tag{A1.120}$$

A1.5.2 Flujo a través de una superficie

Sea \mathcal{A} una propiedad arbitraria del medio continuo y $\Psi(\mathbf{x},t)$ la cantidad de dicha propiedad por unidad de masa del medio continuo. Se considera una superficie de control fija en el espacio \mathcal{S} . Debido al movimiento de las partículas del medio, estas atraviesan a lo largo del tiempo dicha superficie. Existirá, entonces, una cierta cantidad de la propiedad \mathcal{A} que atraviesa la superficie de control \mathcal{S} por unidad de tiempo.

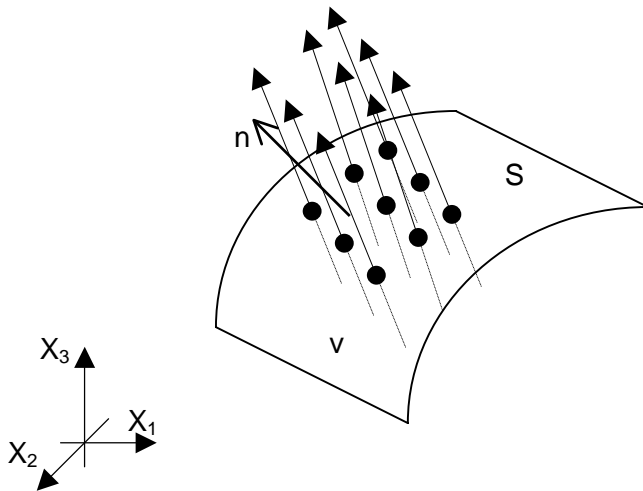


Figura A1.18- Flujo a través de la superficie S

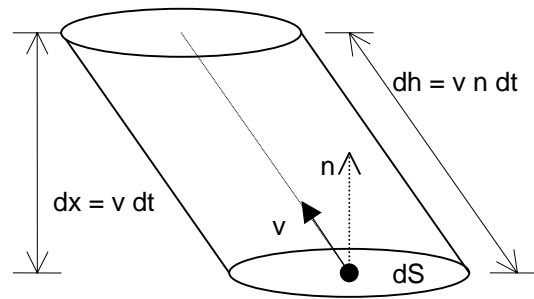


Figura A1.19- Volumen de material que fluye a través de dS

Se define *flujo de transporte de masa (o convectivo)* de la propiedad genérica \mathcal{A} a través de la superficie de control S a la cantidad \mathcal{A} que debido al transporte de masa atraviesa la superficie S por unidad de tiempo.

Se calcula el *volumen de material* que fluye a través de la superficie infinitesimal dS en el tiempo dt como el volumen del cilindro de base dS y altura $v dt$ paralela al vector v .

El volumen por unidad de tiempo es

$$\mathbf{v}_n \cdot d\mathbf{S} = \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{A1.121})$$

El *flujo total de volumen* viene dado por la integral

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_S v_j \cdot n_j \cdot dS \quad (\text{A1.122})$$

Que multiplicado por la densidad local da lugar al flujo de masa

$$\int_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_S \rho \cdot v_j \cdot n_j \cdot dS \quad (\text{A1.123})$$

A1.5.3 Conservación de la masa. Ecuación de continuidad

El principio de conservación de la masa dice que la masa del medio continuo es siempre la misma

Sea un volumen material V_t que en los instantes de tiempo t y $t+\Delta t$ ocupa los volúmenes en el espacio V_t y $V_t+\Delta t$.

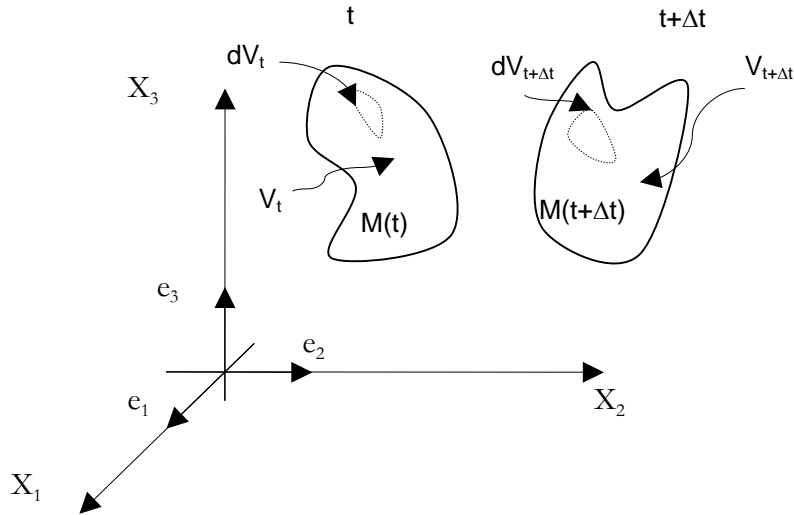


Figura A1.20- Volumen material V_t en el instante de tiempo t y $V_{t+\Delta t}$ en el instante de tiempo $t+\Delta t$

Sea $\rho(\mathbf{x},t)$ la descripción espacial de la densidad. La masa encerrada por el volumen material V en los instantes de tiempo t y $t+\Delta t$ es:

$$M(t) = \int_{V_t} \rho(\mathbf{x},t) dV \tag{A1.124}$$

$$M(t + \Delta t) = \int_{V_{t+\Delta t}} \rho(\mathbf{x},t + \Delta t) dV \tag{A1.125}$$

Por el principio de conservación de la masa se verifica que:

$$M(t) = M(t + \Delta t) \tag{A1.126}$$

A1.5.4 Forma espacial del principio de conservación de la masa. Ecuación de continuidad

La igualdad (A1.123) se expresa matemáticamente con la nulidad de la variación de masa en el tiempo.

Esto es:

$$M'(t) = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \cdot dV = 0 \tag{A1.127}$$

La expresión de la derivada material de una integral de volumen es:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \cdot dV = \int_{V_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \cdot dV = 0 \tag{A1.128}$$

Como esta ecuación debe cumplirse para cualquier volumen de control arbitrario que se considere, para que se cumpla la igualdad el integrando debe ser nulo.

Escribimos la ecuación de continuidad como:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{A1.129}$$

Utilizando la expresión de la derivada material de la descripción espacial de una propiedad $\left(\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right)$ se sustituye en (A1.126):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{v \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot v}_{\nabla(\rho \cdot v)} = 0 \quad (\text{A1.130})$$

Expresión de la ecuación de continuidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot v) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A1.131})$$

Si el material es *incompresible* la densidad en los alrededores de la partícula se mantiene constante $\frac{d\rho}{dt} = 0$ mientras se produce el movimiento. En este caso la *ecuación de continuidad* toma la forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v &= 0 \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A1.132})$$

A1.5.5 Forma material del principio de conservación de la masa

Si se expresa la ecuación (A1.125) en coordenadas materiales, considerando que $\frac{d|F|}{dt} = |F| \cdot \nabla \cdot v$:

$$\int_{V_i} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot v \right) \cdot dV = \int_{V_i} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{1}{|F|} \frac{d|F|}{dt} \right) dV = \int_{V_i} \frac{1}{|F|} \left(\underbrace{|F| \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d|F|}{dt}}_{\frac{d(\rho|F|)}{dt}} \right) dV = 0 \quad (\text{A1.133})$$

Entonces, para el recinto de integración V_0 :

$$\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} [\rho|F|](X, t) dV_0 = 0 \quad (\text{A1.134})$$

Como debe cumplirse la igualdad para cualquier volumen diferencial perteneciente al volumen material debe anularse el integrando:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho|F|](X, t) dV_0 = 0 \quad (\text{A1.135})$$

Esto se cumple para todo X perteneciente a V_0 y para todo el tiempo t :

$$\underbrace{\rho(X, 0)|F|(X, 0)}_1 = \rho(X, t)|F|(X, t) \quad (\text{A1.136})$$

La *forma local material del principio de conservación de la masa* es:

$$\rho_0 = \rho_t \cdot |F_t| \quad (\text{A1.137})$$

A1.5.6 Ecuación de balance. Teorema del transporte de Reynolds

Sea A una cierta propiedad genérica (escalar, vectorial o tensorial) de un medio continuo, y sea $\Psi(x,t)$ la cantidad de esta propiedad A por unidad de masa. Por consiguiente, $\rho\Psi(x,t)$ es la cantidad de la propiedad por unidad de volumen.

A1.5.6.1 Lema de Reynolds

Se considera un volumen material arbitrario de medio continuo que en el instante t ocupa el espacio un volumen $V=V_t$.

La cantidad de la propiedad genérica A en el volumen material V_t en el instante t será:

$$Q(t) = \int_{V_t=V} \rho\Psi dV \quad (\text{A1.138})$$

La derivada material en el tiempo de una integral se define de forma que mida la velocidad de cambio de la cantidad total que se mueva a través del sistema másico. La variación a lo largo del tiempo del contenido de la propiedad A en el volumen material V_t vendrá dada por la derivada temporal de $Q(t)$:

$$Q'(t) = \frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \rho\Psi dV = \int_V \left[\frac{d(\rho\Psi)}{dt} + \rho\Psi \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV \quad (\text{A1.139})$$

Operando:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \rho\Psi dV = \int_V \left[\rho \frac{d\Psi}{dt} + \Psi \frac{d\rho}{dt} + \rho\Psi \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV = \int_V \left[\rho \frac{d\Psi}{dt} + \underbrace{\Psi \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right)}_{=0} \right] dV \quad (\text{A1.140})$$

$$\text{Lema de Reynolds:} \quad \frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \rho\Psi dV = \int_V \rho \frac{d\Psi}{dt} dV \quad (\text{A1.141})$$

A1.5.6.2 Teorema de Reynolds:

Consideremos el volumen arbitrario V , fijo en el espacio. La cantidad de la propiedad A que atraviesa este volumen de control será:

$$Q(t) = \int_V \rho\Psi dV \quad (\text{A1.142})$$

La variación de la cantidad de la propiedad A en el volumen material V_t que en cada instante coincide con en el instante t con el volumen de control $V(V_t=V)$, vendrá dada por la derivada material es:

$$Q'(t) = \frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \rho\Psi dV = \int_V \frac{\partial(\rho\Psi)}{\partial t} + \int_V \nabla \cdot (\rho\Psi \mathbf{v}) dV \quad (\text{A1.143})$$

Utilizando el Lema de Reynolds y el teorema de la divergencia:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \rho\Psi dV = \int_V \rho \frac{d\Psi}{dt} dV = \int_V \frac{d(\rho\Psi)}{dt} + \int_V \nabla \cdot (\rho\Psi \mathbf{v}) dV = \int_V \frac{\partial(\rho\Psi)}{\partial t} + \int_{\partial V} \rho\Psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot dV \quad (\text{A1.144})$$

Que puede ser ordenada como:

$$\text{Teorema del transporte de Reynolds:} \quad \int_V \frac{\partial(\rho\Psi)}{\partial t} = \int_V \rho \frac{d\Psi}{dt} dV - \int_{\partial V} \rho\Psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot dV \quad (\text{A1.145})$$

A1.5.7 Balance de la cantidad de movimiento

Se supone el sistema discreto formado por n partículas tal que cada partícula i tiene una masa m_i , una aceleración a_i y esta sometida a una fuerza f_i .

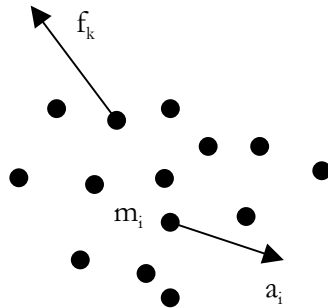


Figura A1.21- Fuerzas f_k de cada partícula m_i y sus aceleraciones a_i

La segunda ley de Newton establece que la fuerza que actúa sobre una partícula es igual a la masa de la misma por su aceleración ($f_i = m_i a_i$). Utilizando la definición de aceleración como derivada material de la velocidad y teniendo en cuenta el principio de conservación de la masa ($\frac{dm_i}{dt} = 0$) se tiene para el sistema formado por n partículas:

$$R(t) = \sum_i f_i = \sum_i m_i a_i = \sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i v_i = \frac{dP(t)}{dt} \quad (\text{A1.146})$$

Definiendo la cantidad de movimiento de la partícula $P(t)$ como el producto de su masa por su velocidad ($m_i v_i$), ecuación anterior expresa que *la fuerza que actúa sobre la partícula es igual a la variación de la cantidad de movimiento de la misma*.

Generalizando para sistema de fuerzas f_i cuya resultante sea R , si el sistema se encuentra en equilibrio:

$$R(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \frac{dP(t)}{dt} \Rightarrow \sum_i m_i v_i = P = cte \quad (\text{A1.147})$$

Que es la conservación de la cantidad de movimiento.

Si en lugar de ser un sistema discreto de puntos es un **medio continuo** donde podemos tomar un dV afectado por la fuerza de masa $b(\mathbf{x}, t)$ y su superficie dS afectada por la fuerza de superficie $t(\mathbf{x}, t)$.

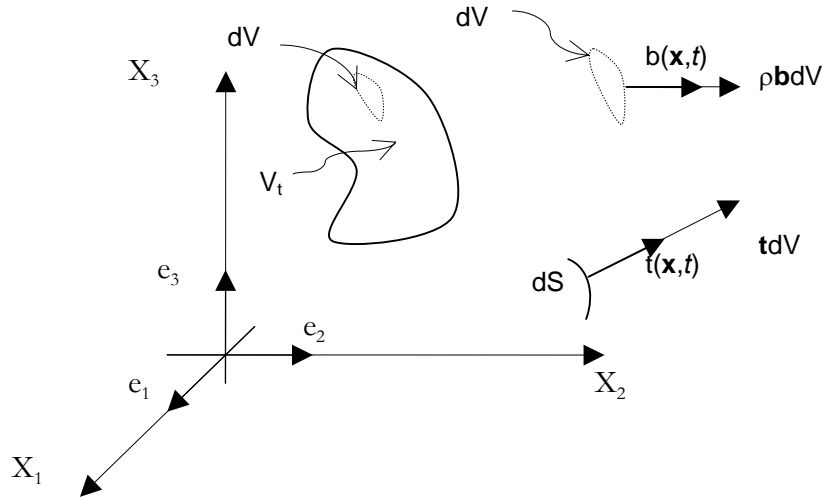


Figura A1.22- Medio Continuo sobre el que actúan las fuerzas de masa \mathbf{b} y las de superficie \mathbf{t}

se cumple que $dM = \rho dV$ por lo que se puede expresar la variación de la cantidad de movimiento según:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} dV \quad (\text{A1.148})$$

La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el medio continuo es:

$$\mathbf{R}(t) = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t} dS \quad (\text{A1.149})$$

Y el *principio de balance de cantidad de movimiento* establece que la resultante \mathbf{R} de todas las fuerzas que actúan sobre un volumen material del medio continuo es igual a la variación por unidad de tiempo de su cantidad de movimiento:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{dP(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} dV \quad (\text{A1.150})$$

En su forma global:

Principio de balance de la cantidad de movimiento:

$$\int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t} dS = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} dV \quad (\text{A1.151})$$

En notación indicial:

$$\int_V \rho b_i dV + \int_S t_i dS = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho v_i dV \quad (\text{A1.152})$$

Si sustituimos $t_i = T_{ij} n_j$ y transformamos la integral de superficie en una de volumen usando el teorema de la divergencia $\int_S T_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV$:

$$\int_V \left(\rho b_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \right) dV = \int_{V_t} \rho \frac{dv_i}{dt} dV \quad (\text{A1.153})$$

Quedando:

$$\int_V \left(\rho b_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{d v_i}{dt} \right) dV = 0 \quad (\text{A1.154})$$

Como debe valer para cualquier arbitrario volumen V se obtiene la *Ecuación de Cauchy*:

Ecuación de movimiento de Cauchy

$$\text{1ra ley de movimiento de Cauchy: } \rho b_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{d v_i}{dt} \quad \text{ó} \quad \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{d \mathbf{v}}{dt} \quad (\text{A1.155})$$

A1.5.8 Balance del momento de la cantidad de movimiento (momento angular)

Se supone el sistema discreto formado por n partículas tal que cada partícula i tiene una masa m_i , una aceleración a_i y esta sometida a una fuerza f_i .

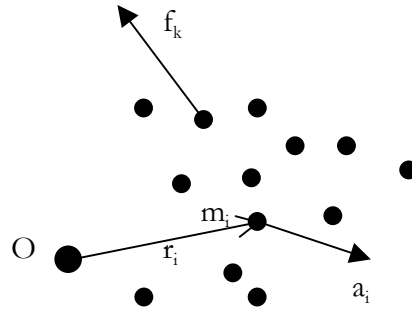


Figura A1.23- Fuerzas f_k de cada partícula m_i y sus aceleraciones a_i con respecto al origen O

El momento con respecto al origen de la fuerza que actúa sobre una partícula será $M_i = r_i \times f_i$ y el momento con respecto al origen de la cantidad de movimiento de la partícula será $L_i = r_i \times m_i v_i$.

Generalizando el momento de todas las fuerzas para las n partículas:

$$M_o(t) = \sum_i r_i \times f_i = \sum_i r_i \times m_i a_i = \sum_i r_i \times m_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i r_i \times m_i v_i}_{L(t)} \quad (\text{A1.156})$$

$$M_o(t) = \frac{dL(t)}{dt}$$

Esto representa que el momento resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un sistema discreto de partículas es igual a la variación por unidad de tiempo del momento de la cantidad de movimiento o momento angular.

Si el sistema se encuentra en equilibrio:

$$M_o(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \frac{dL(t)}{dt} \Rightarrow \sum_i r_i \times m_i v_i = L = cte \quad (\text{A1.157})$$

Que es la conservación del momento angular.

Si en lugar de ser un sistema discreto de puntos es un **medio continuo** donde podemos tomar un dV afectado por la fuerza de masa $b(\mathbf{x}, t)$ y su superficie dS afectada por la fuerza de superficie $t(\mathbf{x}, t)$.

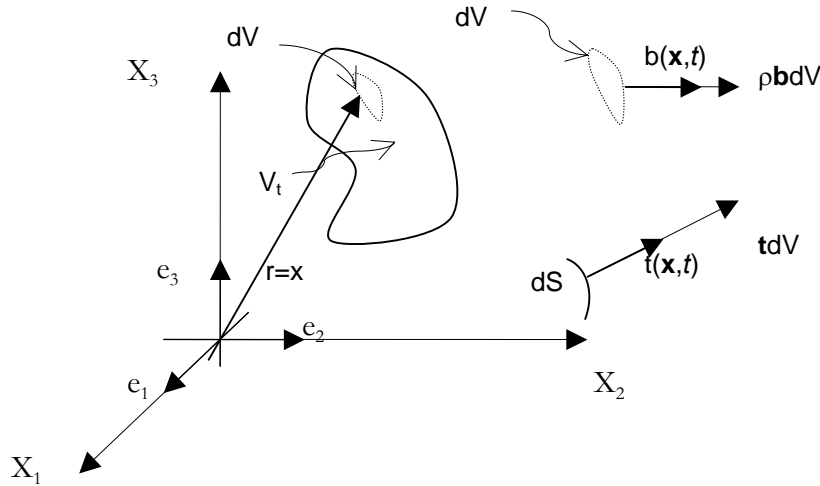


Figura A1.24- Medio Continuo sobre el que actúan las fuerzas de masa \mathbf{b} y las de superficie \mathbf{t} con respecto al origen O

se cumple que $dM = \rho dV$ por lo que se puede expresar la cantidad de movimiento según:

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \quad (A1.158)$$

El momento resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el medio continuo es:

$$\mathbf{M}_O(t) = \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS \quad (A1.159)$$

Y el *principio de balance de cantidad del momento angular* establece que el momento resultante M con respecto a un punto O de todas las fuerzas que actúan sobre un volumen material del medio continuo es igual a la variación por unidad de tiempo del momento de la cantidad de movimiento.

En su forma global:

Principio de balance del momento de la cantidad de movimiento:

$$\int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \quad (A1.160)$$

Expresado en notación indicial:

$$\int_V e_{rmn} x_m b_n \rho dV + \int_S e_{rmn} x_m t_n dS = \frac{d}{dt} \int_V e_{rmn} x_m \rho v_n dV \quad (A1.161)$$

Haciendo $t_n = T_{jn} n_j$ y usando el teorema de la divergencia según

$$\int_S e_{rmn} x_m t_n dS = \int_V e_{rmn} \frac{\partial(x_m T_{jn})}{\partial x_j} dV \text{ se puede escribir:}$$

$$\int_V e_{rmn} \left(x_m b_n \rho + \frac{\partial(x_m T_{jn})}{\partial x_j} \right) dV = \int_V e_{rmn} \frac{d(x_m v_n)}{dt} \rho dV \quad (A1.162)$$

Como $\frac{dx_m}{dt} = v_m$ la última ecuación queda:

$$\int_V e_{rmn} \left[x_m \left(\frac{\partial T_{jn}}{\partial x_j} + b_n \rho \right) + \delta_{mj} T_{jn} \right] dV = \int_V e_{rmn} \left(v_m v_n + x_m \frac{d v_n}{dt} \right) \rho dV \quad (A1.163)$$

Pero como $e_{rmn} v_m v_n = 0$ porque el producto $v_m v_n$ es un tensor simétrico mientras que e_{rmn} es antimétrico y así el último término de la derecha se cancela con el primero de la izquierda, quedando solo (ver que $\delta_{mj} T_{jn} = T_{mn}$):

$$\int_V e_{rmn} T_{mn} dV = 0 \quad (A1.164)$$

Como esto debe valer para cualquier volumen arbitrario V:

$$e_{rmn} T_{mn} = 0 \quad (A1.165)$$

Que debe cumplirse en cada punto. Desarrollado esto es:

2da ley de movimiento	Para r=1	$T_{23} - T_{32} = 0$	
de Cauchy:	Para r=2	$T_{31} - T_{13} = 0$	(A1.166)
	Para r=3	$T_{12} - T_{21} = 0$	

Queda establecida la simetría de la matriz de tensión T, exista o no balance del momento angular.

A1.5.9 Potencia

Potencia se define como la capacidad de realizar trabajo por unidad de tiempo. Para un medio continuo se define la potencia entrante $W(t)$ en él como:

$$W(t) = \frac{\text{Trabajo realizado en el sistema}}{\text{unidad de tiempo}}$$

Supondremos que existen dos procedimientos por los cuales el medio continuo absorbe potencia de su exterior y realiza con ella un trabajo por unidad de tiempo:

Potencia Mecánica: mediante el trabajo realizado por las acciones mecánicas (fuerzas másicas y superficiales) que actúan sobre el medio.

Potencia Calórica: mediante la entrada de calor transferida a través de los límites o a través de fuentes internas distribuidas.

A1.5.9.1 Potencia Mecánica: Teorema de las fuerzas vivas

Introducción de potencia mecánica: es la velocidad a la cual las tensiones superficiales internas t por unidad de área y las fuerzas de masa b por unidad de masa, están ejerciendo trabajo sobre el sistema que instantáneamente ocupa el volumen V , rodeado por la superficie S .

Potencia entrante:

$$P_e = \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV = \int_S t_i \cdot v_i dS + \int_V \rho b_i \cdot v_i dV \quad (A1.167)$$

Haciendo $t_i = T_{ij} n_j$ y usando el teorema de la divergencia según

$$\int_S T_{ij} n_j \cdot v_i dS = \int_V v_i \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} dV \text{ se puede escribir:}$$

$$P_e = \int_V \left[v_i \cdot \left(\rho b_i + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) + T_{ij} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dV \quad (A1.168)$$

Según la 1er ecuación de movimiento de Cauchy (A1.152) $\rho b_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{dv_i}{dt}$

$$P_e = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \int_V T_{ij} v_{i,j} dV$$

$$P_e = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \mathbf{T} \cdot \bullet \mathbf{L} dV$$
(A1.169)

Donde \mathbf{L} es el gradiente espacial de deformación definido en la ecuación (A1.74) que puede descomponerse en la suma de un tensor simétrico \mathbf{D} denominado tensor velocidad de deformación y un tensor altimétrico \mathbf{W} llamado tensor verticidad $v_{i,j} = D_{ij} + W_{ij}$ ó $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$.

Dado que \mathbf{T} es un tensor simétrico se cumple la igualdad $\mathbf{T} \cdot \bullet \mathbf{L} = \mathbf{T} : \mathbf{L}$ y entonces $T_{ji} W_{ij} = 0$ y $T_{ji} D_{ij} = T_{ij} D_{ij}$ y podemos escribir la ecuación (A1.66) de la forma:

$$P_e = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \int_V T_{ij} D_{i,j} dV$$

$$P_e = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV}_{\substack{\text{derivada material del tiempo} \\ \text{de la energía cinética}}} + \underbrace{\int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV}_{\text{energía interna}}$$
(A1.170)

A1.5.9.2 Potencia Calorífica

La *potencia calorífica entrante* es la velocidad de conducción a través de la superficie S y una fuente interna de calor de fuerza r por unidad de masa.

Potencia entrante:

$$Q_e = - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho r dV$$
(A1.171)

Donde \mathbf{q} es el vector flujo de calor.

La potencia total entrante en el sistema es:

$$P_e + Q_e = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho r dV$$
(A1.172)

A1.5.9.3 Primer Principio de la Termodinámica

Experimentalmente se demuestra que tanto la potencia mecánica como la potencia calorífica no son diferenciales exactas, esto es que el trabajo desarrollado por el sistema en un ciclo cerrado (finalmente vuelve al estado inicial) no es igual a cero:

$$\oint P_e dt \neq 0$$

$$\oint Q_e dt \neq 0$$
(A1.173)

Sin embargo, también se demuestra experimentalmente que la suma de la potencia mecánica más la potencia calorífica, es decir la potencia total entrante en el sistema, es efectivamente una diferencial exacta:

$$\oint [P_e + Q_e] dt = 0$$
(A1.174)

y que por lo tanto puede definirse a partir de ella una función de estado y se denomina **energía total del sistema**, E_{total} tal que:

$$\begin{aligned}
E_{total} &= P_e + Q_e \\
y \\
dE_{total} &= (P_e + Q_e)dt
\end{aligned}
\tag{A1.175}$$

Es un diferencial exacto, con lo que para cualquier cambio del estado 1 al estado 2 el cambio total en la energía del sistema es:

$$\Delta E_{total} \equiv (E_{total})_2 - (E_{total})_1 = \int_{t_1}^{t_2} [P_e + Q_e] dt
\tag{A1.176}$$

Estas ultimas son distintas expresiones de la *Primera Ley de la Termodinámica*.

La energía total del sistema va a ser considerada como la suma de dos partes, una *energía cinética* K y una *energía interna* U . Por energía cinética entendemos la energía cinética que puede observarse microscópicamente como la velocidad del continuo. La energía interna comprende la energía elástica almacenada y otras formas de energía no especificadas explícitamente y además incluye la energía cinética de los movimientos térmicos aleatorios, asociados con la medición de las temperaturas.

La energía cinética se expresa matemáticamente según:

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV
\tag{A1.177}$$

La energía interna por unidad de masa o energía interna específica se denota con u ; entonces ρu es la energía interna por unidad de volumen. Podemos volver a expresar la primera ley de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left[\frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho u \right] dV = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV}_{\frac{dK}{dt}} + \underbrace{\int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho r dV}_{\frac{dU}{dt}}
\tag{A1.178}$$

De aquí se desprende que la variación por unidad de tiempo de la energía interna esta compuesta por una variación de la potencia tensional y una variación del contenido de calor del medio.

$$\frac{dU}{dt} = \underbrace{\int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV}_{\text{variación de potencia tensional}} - \underbrace{\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho r dV}_{\text{variación del contenido de calor del medio}}
\tag{A1.179}$$

Si en la ecuación transformamos la integral de superficie en una de volumen a través del teorema de la divergencia y agrupamos todos los términos de un solo lado de la igualdad:

$$\int_V \left[\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho \frac{du}{dt} - \mathbf{T} : \mathbf{D} - \rho r \right] dV = 0
\tag{A1.180}$$

Esto debe valer para cualquier volumen que se elija arbitrariamente dentro del medio continuo, dando lugar a la *ecuación de energía*:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{du}{dt} &= \mathbf{T} : \mathbf{D} + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} \\
\rho \frac{du}{dt} &= T_{ij} D_{ij} + \rho r - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}
\end{aligned}
\tag{A1.181}$$

Es la ecuación de campo que expresa para cada punto la conservación de energía implicada por la primera Ley de la Termodinámica.

A1.5.10 Entropía y la Segunda Ley de la Termodinámica

La primera ley conduce a una ecuación de balance de energía que debe cumplirse para todos los procesos físicos que se producen en la realidad $\dot{E}_{total} = P_e + Q_e = \frac{dU}{dt} + \frac{dK}{dt}$. En particular si se considera un sistema aislado la variación temporal de la energía total del sistema será nula: $\frac{d}{dt} E_{total} = 0$, por lo que la primera ley impone que toda variación de energía interna $\frac{dU}{dt}$ se tiene que compensar con una variación de la energía cinética $\frac{dK}{dt}$ y viceversa. Pero el primer principio no dice si este intercambio de energías puede producirse indistintamente en cualquier sentido. Lo único que establece es la satisfacción del balance de energía en el caso de que el proceso se produzca.

Cuando el fenómeno térmico sucede la situación puede ser distinta. Por ejemplo por medio de la fricción de un freno aplicado sobre una rueda, toda la energía cinética de la rueda se transforma en energía interna, la cual se traduce en un aumento de la temperatura si el sistema está aislado. Considerando la 1ra ley el proceso podría ser el reverso, de modo que si se le quita la temperatura a la rueda, ésta comenzaría a moverse. Este proceso no ocurre en la realidad por lo que es un proceso *irreversible*. La segunda ley pone límites a la dirección del proceso.

Proceso reversible: El proceso termodinámico $A \rightarrow B$ es reversible si es posible volver desde el estado termodinámico final B al estado termodinámico inicial A, por el mismo camino.

Proceso irreversible: El proceso termodinámico $A \rightarrow B$ es irreversible si no es posible volver desde el estado termodinámico final B al estado termodinámico inicial A, por el mismo camino, aunque pueda volverse por un camino distinto.

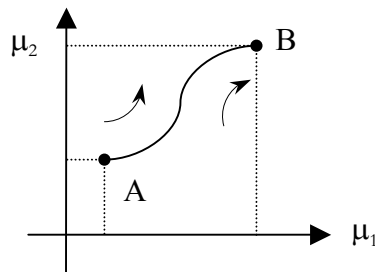


Figura A1.25- Proceso reversible

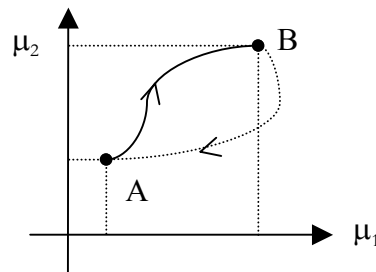


Figura A1.26- Proceso irreversible

La Segunda Ley de la Termodinámica postula la existencia de la entropía como función de estado que satisface una igualdad para procesos reversibles y una desigualdad para procesos irreversibles.

La entropía específica (por unidad de masa) se va a denotar por s y la entropía total del sistema por S . Esto es:

$$S = \int_V s \rho dV \quad (A1.182)$$

Existe una función de estado denominada temperatura absoluta $\theta(\mathbf{x}, t)$ que es intensiva y estrictamente positiva ($\theta > 0$).

La *Segunda Ley de la Termodinámica* establece que la generación de entropía por unidad de tiempo en un medio continuo es siempre mayor o igual a la cantidad de calor por unidad de temperatura que entra en el sistema por unidad de tiempo:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V s \rho dV \geq \int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_S \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A1.183})$$

Donde:

- = Para procesos reversibles
- > Para procesos irreversibles
- < Para procesos no factibles físicamente

Esta definición de la segunda ley de la termodinámica recibe el nombre de *Desigualdad de Clausius-Duheim*.

Si se transforma la integral de superficie en una de volumen a través del teorema de la divergencia se consigue la forma local de la segunda ley de la termodinámica.

$$\frac{ds}{dt} \geq \frac{r}{\theta} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} \quad (\text{A1.184})$$

Se puede considerar la descomposición de la entropía total del sistema S en dos componentes:

$S^{(i)}$: entropía generada interiormente por el medio continuo

$S^{(e)}$: entropía generada por la interacción del medio continuo con su exterior.

$$S = S^{(i)} + S^{(e)}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS^{(i)}}{dt} + \frac{dS^{(e)}}{dt} \quad (\text{A1.185})$$

Se cumple que la variación de la entropía generada por la interacción con el medio es igual a la magnitud de calor por unidad de temperatura absoluta:

$$\dot{S}^{(e)} = \frac{Q_e}{\theta} = \int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_S \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A1.186})$$

En un sistema *completamente aislado* no hay interacción con el exterior y la variación de la entropía por interacción con el exterior es nula $\frac{dS^{(e)}}{dt} = 0$. En este caso, la segunda ley establece que la entropía total en un sistema completamente aislado siempre aumenta $\frac{dS^{(i)}}{dt} = \frac{dS}{dt} \geq 0$.

Tomando la ecuación (A1.181) y resolviendo la divergencia del cociente entre el flujo de calor y temperatura, se tiene:

$$\rho \dot{s} - \rho \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (\text{A1.187})$$

Reordenando los términos se obtiene el cambio temporal en la disipación térmica mecánica.

$$\Xi = \theta \dot{s} - \left(r + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} \right) - \frac{1}{\rho \theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (\text{A1.188})$$

Reordenando la ecuación (A1.178): $\dot{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \mathbf{D} + \left(r - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q} \right)$ y reemplazando la parte de la disipación correspondiente a la potencia calórica:

$$\Xi = \theta \dot{s} - \dot{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \mathbf{D} - \frac{1}{\rho \theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (\text{A1.189})$$

Para procesos termomecánicos donde puede desacoplarse el problema térmico del mecánico, se puede desacoplar la desigualdad anterior en la conocida forma de *Clausius-Planck*.

$$\text{Disipación Mecánica} \quad \Xi_m = \theta s - \dot{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \mathbf{D} \geq 0 \quad (\text{A1.190})$$

$$\text{Disipación Térmica} \quad \Xi_\theta = -\frac{1}{\rho\theta} \mathbf{q} \nabla \theta \geq 0 \quad (\text{A1.191})$$

Otra posibilidad es expresar la desigualdad de Clausius-Planck en función de la *energía libre específica de Helmholtz*, $\Psi(x,t)$ y que se define en función de la energía interna, de la entropía y de la temperatura según:

$$\Psi = u - s\theta \quad (\text{A1.192})$$

Derivando esta definición con respecto al tiempo:

$$\dot{\Psi} = \dot{u} - s\dot{\theta} - \dot{s}\theta \Rightarrow s\dot{\theta} - \dot{u} = -\dot{s}\theta - \dot{\Psi} \quad (\text{A1.193})$$

Y reemplazando en la expresión de disipación mecánica (A1.187):

$$\Xi_m = -(s\dot{\theta} + \dot{\Psi}) + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \mathbf{D} \geq 0 \quad (\text{A1.194})$$

Que es la ecuación de *Clausius-Planck* en función de la energía libre.