



Estudio para el desarrollo y aplicación de técnicas de vorticidad a problemas de separación de flujo en perfiles

REPORT

Grado en Ingeniería en Vehículos Aeroespaciales

Trabajo Final de Grado

Alumno: Somoza Pérez, Gonzalo

Director: Ortega, Enrique

Tutor: Garcia Almiñana, Daniel

20-01-2016

Tabla de Contenidos

Lista de Tablas	iii
Lista de Figuras	v
Resumen	vii
Objetivo	ix
Justificación	xi
Alcance	xiii
1 Introducción	1
2 Flujo potencial y método de paneles	2
2.1 Aspectos Preliminares	2
2.2 Flujo Potencial	4
2.2.1 Principio de superposición	4
2.2.2 Condiciones de contorno	5
2.2.3 Conservacion de la circulación	5
2.2.4 Soluciones de la ecuación de Laplace. Elección de los elementos singulares	6
2.2.5 Método de paneles	9
2.2.5.1 Geometría y discretización del perfil	10
2.2.5.2 Implementación de las condiciones de contorno	12
2.2.5.3 Conservación de la circulación y vorticidad	14
3 Generación y desarrollo de la vorticidad	15
3.1 Efecto del desprendimiento de vórtices	16
3.2 Conservacion de la circulación y vorticidad. Efecto de los vórtices desprendidos .	17
3.3 Tratamiento de vórtices cercanos a la superficie del perfil	18
3.4 Convección de los vórtices desprendidos	20
3.4.1 Control de vórtices en el interior del perfil	21
3.4.2 Fusión de vórtices cercanos	22
3.5 Difusión de vorticidad	22
3.5.1 Implementación de la difusión	23
4 Cálculo de fuerzas aerodinámicas	26

Modelo de separación de flujo para perfiles mediante "vortex methods"– REPORT

5	Resultados numéricos	29
5.1	Modelo potencial estacionario	29
5.2	Modelo potencial con separación de flujo	31
6	Conclusiones y trabajo futuro	35
7	Bibliografía	36
	Apéndice A: Presupuesto e impacto ambiental	36
	Apéndice B: Código computacionall	36

Lista de Tablas

5.1 Variación del c_l en función de α para un perfil NACA2412. 33

Modelo de separación de flujo para perfiles mediante "vortex methods"– REPORT

Lista de Figuras

2.1	Esquema del algoritmo	3
2.2	(a) integral de la circulación sobre la curva de fluido 'C' (b) circulación generada sobre un perfil y la estela formada corriente abajo [2]	5
2.3	Flujo cerca de una superficie sólida. (a) Caso con número de Reynolds finito, formación de la capa límite. (b) Caso con número de Reynolds infinito, la capa límite se reduce a una lámina de espesor infinitesimal [2].	7
2.4	Velocidades inducidas por: (a) un vórtice de intensidad $\Delta\Gamma$ situado en (x_0, z_0) ; (b) un panel de intensidad γ con coordenadas de inicio y final, respectivamente, (x_1, z_1) and (x_2, z_2) , con un punto de control en (x_0, z_0) . [2]	7
2.5	Información geométrica de un panel i	9
2.6	Discretización del perfil [2]	9
2.7	Circulación alrededor una una curva cerrada [2].	14
3.1	Desprendimiento de un vórtice de intensidad $\Delta\Gamma$ a una distancia ε de un panel de intensidad γ [2].	16
3.2	Velocidad tangencial inducida por un vórtice sobre un panel para diferentes ε	18
3.3	Velocidad media tangencial a un panel m debido a un vórtice Γ utilizando subelementos [1]	19
3.4	Trayectoria de un vórtice debida a la convección utilizando un corrección iterativa [1].	21
3.5	Difusión de la vorticidad para un vórtice de intensidad unitaria, $\Delta\Gamma = 1$ y viscosidad cinemática unitaria, $\nu = 1$, en un tiempo $t = 1s$. (a) vista lateral; (b) vista superior [2].	24
4.1	Diagrama coeficientes de las fuerzas que actuan sobre el perfil y de la relación entre ellos.	28
5.1	c_l en función del número de paneles N y error relativo.	29
5.2	c_l vs. α para el tramo lineal.	30
5.3	c_p vs. x/c para el modelo analizado y la referencia Xfoil.	31
5.4	Coefficiente de sustentación en función del tiempo para un perfil NACA2412, con $N = 100$ paneles, cuerda $c = 1.0$, velocidad incidente $v_w = 1.0$, ángulo de incidencia $\alpha = 3^\circ$ y 100 pasos temporales con un $\Delta t = 0.05s$	32
5.5	Viste de la estela formada aguas abajo de un perfil NACA2412, con $N = 100$ paneles, cuerda $c = 1.0$, velocidad incidente $v_w = 1.0$, ángulo de incidencia $\alpha = 3^\circ$ y 100 pasos temporales con un $\Delta t = 0.05s$	32
5.6	Curva c_l vs. α para un perfil NACA2412.	33

Modelo de separación de flujo para perfiles mediante "vortex methods"– REPORT

5.7 Patrón de la estala formada aguas abajo de un perfil NACA2412, con $N = 100$ paneles, cuerda $c = 1.0$, velocidad incidente $v_w = 1.0$, ángulo de incidencia $\alpha = 25^\circ$ y 100 pasos temporales con un $\Delta t = 0.05s$ 34

Resumen

En el presente trabajo se desarrolla un modelo basado en los denominados “vortex methods” para su aplicación a problemas bidimensionales (perfiles alares) que impliquen separación de flujo. Ello permite superar las limitaciones, en este sentido, de modelos potenciales clásicos. Este método calcula la solución en varios pasos. Primero, la superficie del perfil deseado se discretiza en N paneles y a través de métodos potenciales clásicos, se obtiene la vorticidad sobre cada panel; seguidamente, la vorticidad es concentrada en un solo punto y se desprende a cierta distancia del panel. Este proceso emula la generación de vorticidad en la capa límite del perfil. El siguiente paso consiste en la convección de estos puntos de vorticidad desprendidos, bajo la influencia del campo de flujo, los paneles y los otros vórtices desprendidos. Por último, se calcula el coeficiente de presión de cada panel y las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre el perfil. Además de la descripción teórica y de la implementación numérica, al final del trabajo se presenta una verificación y validación básica de la metodología desarrollada utilizando un perfil naca no simétrico.

Modelo de separación de flujo para perfiles mediante "vortex methods"– REPORT

Objetivo

El objetivo primordial de este trabajo es desarrollar una metodología basada en los denominados ‘vortex methods’ para su aplicación a problemas bidimensionales (perfiles alares) que impliquen separación de flujo. De manera complementaria, durante el trabajo se profundizará en numerosos aspectos de la aerodinámica y conceptos de programación que por lo general están más allá de los contenidos curriculares de las asignaturas durante la carrera.

Modelo de separación de flujo para perfiles mediante "vortex methods"– REPORT

Justificación

Los métodos de paneles permiten abordar problemas típicos de flujos aerodinámicos a altos números de Reynolds con eficiencia y exactitud. Sin embargo, dado que estos métodos se basan en un modelo potencial del campo de fluido, su aplicación está restringida a casos en los cuales la viscosidad del fluido y el comportamiento de la capa límite juegan un papel secundario. La necesidad de desarrollar un modelo de análisis para separación de flujo nace de dicha restricción, puesto que problemas en los que se tengan bajos números de Reynolds y/o elevados ángulos de ataque quedarían excluidos. Los métodos de tipo ‘vortex cloud’ permiten resolver estos problemas de forma eficiente, aprovechando todas las ventajas de métodos potenciales clásicos.

Modelo de separación de flujo para perfiles mediante "vortex methods"– REPORT

Alcance

El alcance de este estudio se limita a las aplicaciones de la aerodinámica bidimensional con separación de flujo. Las áreas de trabajo que se abordarán son:

- Estudio de los conceptos básicos de los problemas de flujo potencial y método de paneles.
- Desarrollo de un modelo de análisis potencial de perfiles utilizando el método de paneles.
- Estudio de los procesos de generación, convección y difusión de vorticidad que se produce a través de la capa límite en un fluido real.
- Implementación en un modelo de potencial bidimensional de un modelo de torbellinos discretos que permita simular el efecto de separación de flujo.
- Verificar/Validar el código con casos prácticos de aerodinámica bidimensional con separación de flujo.
- Entrega del algoritmo final.

1 Introducción

Los métodos de paneles permiten abordar problemas típicos de flujos aerodinámicos a altos números de Reynolds con eficiencia y exactitud. Sin embargo, dado que estos métodos se basan en un modelo potencial del campo de fluido, su aplicación está restringida a casos en los cuales la viscosidad del fluido y el comportamiento de la capa límite juegan un papel secundario. La necesidad de desarrollar un modelo de análisis potencial para separación de flujo nace de dicha restricción, puesto que problemas en los que se tengan bajos números de Reynolds y/o grandes ángulos de ataque quedarían excluidos. De esta manera, estos problemas se pueden analizar de forma relativamente sencilla y económica desde el punto de vista computacional. En este trabajo se desarrolla una metodología potencial para analizar problemas bidimensionales con separación de flujo basada en los denominados ‘vortex methods’ [1]. Básicamente la metodología propuesta se basa en [1] y [2].

Para poder llevar a cabo dicho objetivo, en este trabajo se estudian las características de los problemas de flujo potencial y las principales técnicas propuestas para su solución, así como también las características de flujos reales que presentan separación de capa límite y los principios que gobiernan la dinámica de fluidos en dichas condiciones (convección, difusión, etc). El presente documento se estructura de la siguiente manera. En el capítulo 2 se describen los aspectos básicos de la formulación potencial y modelo de torbellinos desprendidos que utilizaremos. La descripción teórica y de implementación numérica se completa en los capítulos 3 y 4. En el capítulo 5 se presenta un ejemplo de aplicación numérica destinado a demostrar el comportamiento de la metodología desarrollada. Finalmente en el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo y se brindan algunos lineamientos para trabajo futuro.

2 Flujo potencial y método de paneles

2.1 Aspectos Preliminares

La metodología utilizada para modelar el flujo en este trabajo se basa en una simplificación del modelo de flujo real gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas consisten en un conjunto de 3 ecuaciones diferenciales a derivadas parciales (dos escalares y una vectorial) que plantean conservación de masa, cantidad de movimiento y energía en el fluido [3]. Si suponemos que el fluido es incompresible, la ecuación de conservación de masa se convierte en una restricción sobre el campo de velocidades ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) y si además no suponemos efectos térmicos y de transferencia de calor relevantes, la ecuación de la energía queda desacoplada del sistema. Bajo tales hipótesis, las ecuaciones quedan reducidas a la ecuación de cantidad de movimiento sujeta a la mencionada restricción sobre el campo de velocidades. En forma vectorial y despreciando fuerzas másicas la ecuación de cantidad de movimiento puede escribirse como

$$\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.1)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad del fluido, p la presión, ρ la densidad del fluido y ν la viscosidad cinemática del fluido. Los términos de la izquierda de la ecuación (2.1) representan los efectos de aceleración local y convectiva y están relacionados con los terminos situados a la derecha de la igualdad, que representan, las fuerzas (por unidad de masa) actuantes sobre la partícula debido a los gradientes de presión y las tensiones viscosas dentro del fluido. A pesar de que en el movimiento real de los fluidos todos estos términos ocurren simultáneamente, y continuamente interactuando entre ellos, desde un punto de vista práctico el procedimiento del cálculo que represente dicha interrelación puede ser simplificado. Por ejemplo, separando el cálculo de cada uno de los términos e iterando para una serie de pequeños incrementos temporales Δt . Para cada paso temporal, los diferentes términos de la ecuación (2.1) se evalúan siguiendo la siguiente secuencia [1]:

- Primero, se congela el sistema en un preciso instante de tiempo, obteniendo de esta forma la representación del campo de flujo inducido por el perfil, así como otras perturbaciones externas. En estas condiciones el flujo se puede aproximar como potencial, por lo que se resolverá utilizando los métodos de paneles clásicos y se obtendrá la vorticidad producida en el perfil.
- Esta vorticidad se desprende al fluido como una serie de elementos de vorticidad. Todos estos vórtices se dejan interactuar libremente por convección bajo la influencia de todos los otros vórtices, los paneles y el flujo de corriente libre. De esta forma se introduce en el cálculo el efecto inestacionario del problema.

- Se calcula la difusión de todos los vórtices previamente desprendidos.
- Seguidamente se calcula la distribución de la presión en la superficie del perfil (objeto aerodinámico) y las fuerzas resultantes de sustentación y arrastre.
- Finalmente, se avanza un diferencial de tiempo Δt y se vuelve a comenzar.

La Figura 2.1 muestra el esquema que seguirá el algoritmo desarrollado. En las posteriores secciones se explicará detalladamente cada bloque del esquema.

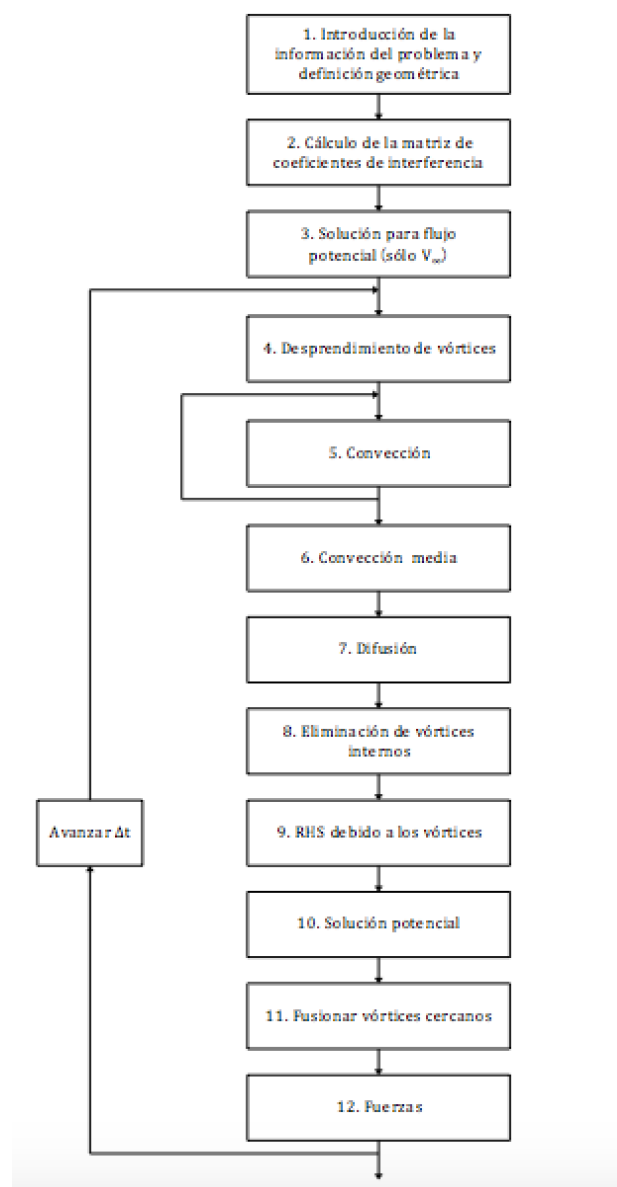


Figura 2.1: Esquema del algoritmo

2.2 Flujo Potencial

El modelo de flujo potencial describe el comportamiento físico de los fluidos no viscosos e irrotacionales. Bajo estas suposiciones, las ecuaciones de un fluido incompresible se reducen a:

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.3)$$

donde la ecuación (2.2) expone la dinámica de un fluido irrotacional y la ecuación (2.3) garantiza la conservación de la masa. Puesto que el rotacional de un gradiente es igual a zero, la condición irrotacional dada se puede satisfacer definiendo el campo de velocidad cómo:

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \quad (2.4)$$

donde Φ es un campo escalar llamado potencial de velocidad, que es función de las coordenadas del problema. Finalmente, sustituyendo (2.4) en la ecuación de continuidad (2.3), se obtiene la siguiente expresión:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.5)$$

que es conocida en la literatura como la ecuación de Laplace.

2.2.1 Principio de superposición

La ecuación de gobierno de flujos potenciales es una ecuación lineal, por lo que se le puede aplicar el principio de superposición. Esta propiedad es de gran importancia en la aplicación de los métodos de paneles: si la ecuación de Laplace tiene 2 soluciones diferentes, póngase Φ_1 y Φ_2 , la suma de ellos es también una solución del sistema. Extendiendo esto a N soluciones diferentes:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i \quad (2.6)$$

siendo c_i constantes arbitrarias. Substituyendo (2.6) en (2.5) se obtiene

$$\nabla^2 \Phi = \sum_{i=1}^N c_i \nabla^2 \Phi_i = 0 \quad (2.7)$$

Este resultado de la ecuación de Laplace es muy importante, puesto que demuestra que es posible solucionar problemas complejos como la suma de problemas más simples. De este modo, un problema complejo se reduce a una búsqueda algebraica de la combinación lineal correcta de estas soluciones simples.

2.2.2 Condiciones de contorno

La combinación de soluciones en la Ec. (2.7) debe satisfacer las condiciones de contorno del problema, que dependerán del caso que se tenga en consideración. Para problemas aerodinámicos, las condiciones de contorno típicas son las siguientes ([1][2][4]):

- Condiciones de Dirichlet: se prescribe el valor del potencial, lo que conduce a fijar una velocidad constante. Pueden ser utilizadas por ejemplo para definir la velocidad de corriente libre.
- Condiciones de tipo Neumann: estas condiciones fijan el valor de la derivada del potencial, es decir de la velocidad. Se pueden utilizar para definir cuerpos sólidos (velocidad normal nula) o condiciones de no deslizamiento (velocidad normal y tangencial nulas).

En problemas de flujo potencial existen diferentes formas de imponer condiciones equivalentes a través de fijar el potencial o su derivada. En general, el escoger una opción u otra responde a cuestiones de modelado físico y de conveniencia numérica (véase [5]).

2.2.3 Conservación de la circulación

Para flujos potenciales simples, la combinación de la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno arriba mencionadas lleva a una solución no única a menos que se fije una circulación alrededor del perfil [6]. En los métodos de tipo 'vortex cloud' como el que se plantea en este trabajo, la cantidad correcta de circulación en el perfil se obtiene de la aplicación de la conservación de circulación en los elementos desprendidos al fluido junto con los paneles.

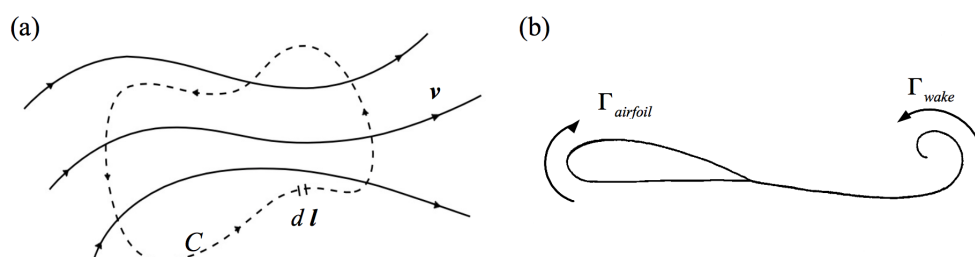


Figura 2.2: (a) integral de la circulación sobre la curva de fluido 'C' (b) circulación generada sobre un perfil y la estela formada corriente abajo [2]

La convección de circulación se puede demostrar de la siguiente manera, considerando la circulación Γ , en torno a una curva de fluido, como la que muestra la Figura 2.2-a, que siempre

pasa por las mismas partículas de fluido, en un fluido no viscoso e incompresible, con fuerzas conservativas, su derivada temporal es:

$$\dot{\Gamma} = \frac{d}{dt} \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_c \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{l} + \oint_c \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{l} \quad (2.8)$$

siendo $d\mathbf{l}$ el vector tangente a una sección infinitesimal de la curva. Puesto que 'C' es una curva de fluido, tenemos

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}; \quad \frac{d}{dt} d\mathbf{l} = d\mathbf{v} \quad (2.9)$$

substituyendo estas relaciones en la ecuación (2.8), obtenemos

$$\dot{\Gamma} = \oint_c \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} + \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \quad (2.10)$$

Puesto que la integral de línea sobre una curva cerrada de un diferencial exacto es igual a cero, el segundo término de la ecuación (2.10) se cancela. Para el primer término, la aceleración \mathbf{a} se obtiene de la ecuación de Euler

$$\mathbf{a} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) = -\frac{d}{d\mathbf{l}}\left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (2.11)$$

y substituyendo la Ec.(2.11) en la Ec.(2.10) se obtiene la integral de un diferencial perfecto alrededor de una trayectoria cerrada, llegando al resultado que la variación de circulación sobre una curva de fluido cerrada es cero (2.12) y, por consiguiente, la circulación se mantiene constante, tal y como se puede observar en la Figura 2.2-b.

$$\dot{\Gamma} = -\oint_c d\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0 \quad (2.12)$$

2.2.4 Soluciones de la ecuación de Laplace. Elección de los elementos singulares

En el modelo desarrollado en el presente trabajo se necesita reproducir el flujo externo que rodea el perfil y la vorticidad que se genera en la capa límite y se convecta al fluido. Desde el punto de vista del flujo externo y de la generación de vorticidad en la capa límite, un método de paneles que emplee elementos de distribución uniforme de vorticidad es adecuado ya que modela un flujo potencial con alto número de Reynolds en el cual la capa límite permanece adherida (Figura 2.3-b). Por otro lado, la vorticidad generada que se convecta al fluido y aquella adicional debido a separación de flujo se puede modelar mediante vórtices puntuales.

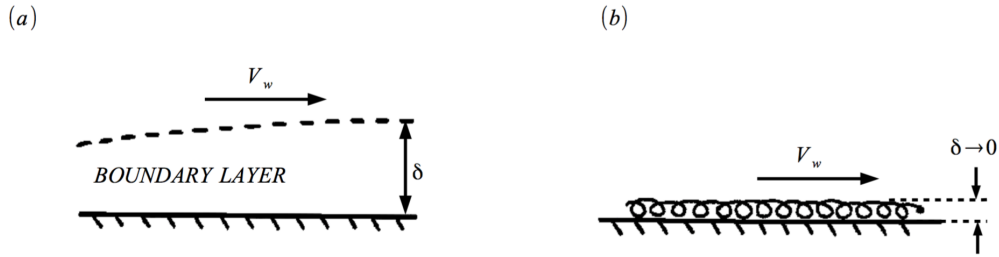


Figura 2.3: Flujo cerca de una superficie sólida. (a) Caso con número de Reynolds finito, formación de la capa límite. (b) Caso con número de Reynolds infinito, la capa límite se reduce a una lámina de espesor infinitesimal [2].

De este modo todos estos efectos conjuntamente se pueden tener en cuenta mediante: puntos de vorticidad concentrada (vórtices) para modelar el flujo desprendido y la estela (Figura 2.4-a), y elementos longitudinales con distribución constante de vorticidad (paneles) para modelar el perfil aerodinámico (Figura 2.4-b).

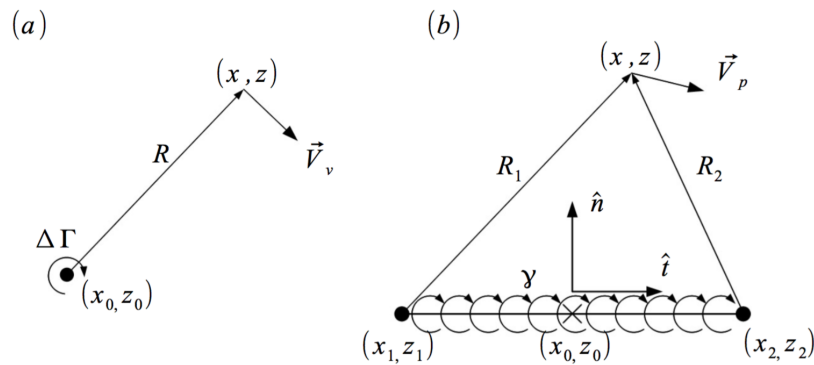


Figura 2.4: Velocidades inducidas por: (a) un vórtice de intensidad $\Delta\Gamma$ situado en (x_0, z_0) ; (b) un panel de intensidad γ con coordenadas de inicio y final, respectivamente, (x_1, z_1) and (x_2, z_2) , con un punto de control en (x_0, z_0) . [2]

Es importante mencionar que tanto los vórtices como los paneles inducen un movimiento particular del fluido. El campo de velocidades generado por los vórtices discretos se expresa en la Ec.(2.13) en coordenadas cartesianas [4].

$$\begin{aligned}
 u^v &= \frac{\Delta\Gamma}{2\pi} \frac{z - z_0}{(z - z_0)^2 + (x - x_0)^2} = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi} \frac{z - z_0}{R^2} \\
 w^v &= -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi} \frac{x - x_0}{(z - z_0)^2 + (x - x_0)^2} = -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi} \frac{x - x_0}{R^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Un vórtice situado en (x_0, z_0) , inducirá una velocidad de componentes (u^v, w^v) en un punto de coordenadas (x, z) , ver Figura 2.4-a. R representa la distancia entre la posición del vórtice

y la posición donde se desea calcular la velocidad inducida. $\Delta\Gamma$ representa la variación de vorticidad introducida en el fluido por el vórtice, también llamada intensidad del vórtice. A fines prácticos, es útil definir estas velocidades inducidas de la siguiente manera ($\Delta\Gamma$ en general es una incógnita del problema).

$$\begin{aligned}\tilde{u}^v &= \frac{1}{2\pi} \frac{z - z_0}{R^2} & \rightarrow & \quad u^v = \Delta\Gamma \cdot \tilde{u}^v \\ \tilde{w}^v &= -\frac{1}{2\pi} \frac{x - x_0}{R^2} & \rightarrow & \quad w^v = \Delta\Gamma \cdot \tilde{w}^v\end{aligned}\tag{2.14}$$

Antes de avanzar, observese en la Ec. (2.14) que si la distancia entre el vórtice y el punto evaluado se reduce a zero, la velocidad inducida tiende a infinito. Por esta razón a los vórtices también se les conoce como singularidades de vorticidad.

Para paneles con distribución constante de vorticidad, las expresiones para calcular las velocidades inducidas se derivan en coordenadas del propio panel [4]:

$$\begin{aligned}u^p &= \frac{\gamma}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{z}{x - x_2} - \tan^{-1} \frac{z}{x - x_1} \right] \\ w^p &= \frac{\gamma}{4\pi} \ln \frac{(x - x_2)^2 + z^2}{(x - x_1)^2 + z^2} = \frac{\gamma}{2\pi} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2}\end{aligned}\tag{2.15}$$

donde las componentes de la velocidad (u^p, w^p) son evaluadas en un cierto punto de coordenadas (x, z) , (x_1, z_1) y (x_2, z_2) son, respectivamente, las coordenadas del nodo inicial y final del panel (vease Figura 2.4-b), γ es la vorticidad por unidad de longitud (también se puede llamar intensidad del panel). Como en el caso de los vórtices, también es conveniente expresar:

$$\begin{aligned}\tilde{u}^p &= \frac{1}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{z}{x - x_2} - \tan^{-1} \frac{z}{x - x_1} \right] & \rightarrow & \quad u^p = \gamma \cdot \tilde{u}^p \\ \tilde{w}^p &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - x_2)^2 + z^2}{(x - x_1)^2 + z^2} & \rightarrow & \quad w^p = \gamma \cdot \tilde{w}^p\end{aligned}\tag{2.16}$$

Las expresiones (2.15) y (2.16) están dadas en el plano de referencia local de cada panel, pero como las coordenadas de los nodos del panel y la posición donde se desea calcular la velocidad están dadas en coordenadas globales, el primer paso para el cálculo de las velocidades inducidas es transformarlas al sistema de coordenadas local del panel. En la Figura 2.4-b están representados los vectores unitarios normal, $\hat{n} = (\hat{n}_x, \hat{n}_z)$, y tangente, $\hat{t} = (\hat{t}_x, \hat{t}_z)$. El origen de las coordenadas locales esta situado en el nodo de inicio del panel (x_1, z_1) . De esta forma, la posición expresada en coordenadas globales de un punto dado, $P_g = (x_g, z_g)$, se puede transformar al sistema panel de la siguiente forma:

$$P_l = (x_g - x_1)\hat{t}_x + (z_g - z_1)\hat{t}_z, (x_g - x_1)\hat{n}_x + (z_g - z_1)\hat{n}_z = (x_l, z_l)\tag{2.17}$$

siendo (x_l, z_l) las coordenadas del punto P expresadas en el sistema de referencia local. Una vez las velocidades inducidas han sido calculadas, las componentes de estas se tienen que volver a transformar al sistema de coordenadas global:

$$(u_g^p, w_g^p) = (u_l^p \cdot \hat{t}_x + w_l^p \cdot \hat{n}_x, u_l^p \cdot \hat{t}_z + w_l^p \cdot \hat{n}_z) \quad (2.18)$$

siendo (u_g^p, w_g^p) y (u_l^p, w_l^p) las componentes de la velocidad inducida por el panel en coordenadas global y local, respectivamente. Para poder simplificar la notación, el subíndice 'g' se obviará cuando nos refiramos a las coordenadas globales.

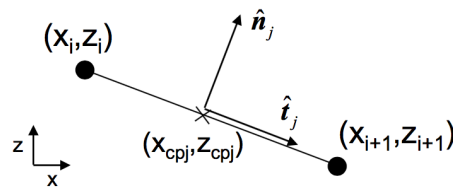


Figura 2.5: Información geométrica de un panel i

2.2.5 Método de paneles

Las singularidades anteriormente descritas son solución de la Ec. de Laplace, con lo cual sólo resta aplicar las condiciones de contorno, para ello se deben seleccionar el dominio y condiciones apropiadas. Por lo tanto, el límite del dominio es seleccionado para que identifique la región interior al perfil, y así mantener la capa de vorticidad de cada panel fuera del mismo. Una vez definido el contorno, el perfil se discretiza dividiéndolo en N paneles, cada uno con su sistema de referencia local (Figura 2.6). Cada uno de estos paneles es un segmento recto con una distribución constante de vorticidad asociada. El procedimiento se detalla a continuación.

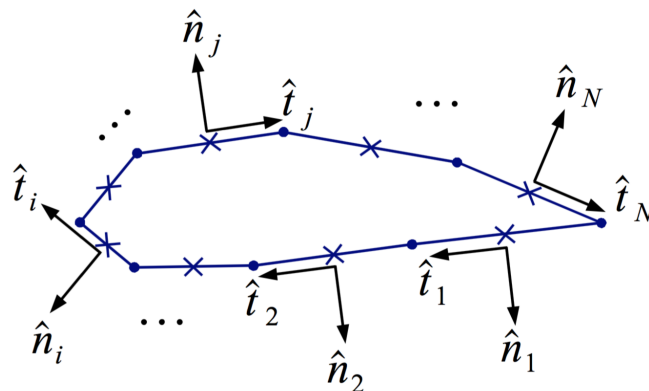


Figura 2.6: Discretización del perfil [2]

2.2.5.1 Geometría y discretización del perfil

En el método de paneles el modelo aerodinámico a resolver es arbitrario y su geometría debe ser siempre definida como dato de entrada para el cálculo. En este trabajo, adicionalmente a la posibilidad de trabajar con geometrías arbitrarias, se desarrolla un simple generador de perfiles NACA de 4 dígitos. Este último permite simplificar el procedimiento de verificación y validación del algoritmo. La familia de perfiles aerodinámicos NACA de 4 dígitos se designa según $MPXX$, siendo:

- M la combadura máxima dividida entre 100.
- P el punto de máxima curvatura dividido entre 10.
- XX el espesor relativo dividido entre 100. Más adelante se utilizará $T = XX/100$.

La sección del perfil NACA se crea a partir de la línea de curvatura y una distribución de espesor proyectada en dirección perpendicular a la línea de curvatura [5]. La línea de curvatura se compone de dos parábolas que se unen en el punto de máxima curvatura (P). Para poder calcular la posición final de los puntos del perfil más adelante, se necesita también el gradiente de la línea de curvatura. Para el caso de ($0 \leq x_1 \leq P$) las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{M}{P^2}(2Px_1 - x_1^2) \\ \frac{dz_c}{dx_1} &= \frac{2M}{P^2}(P - x_1) \end{aligned} \quad (2.19)$$

y para ($P \leq x_1 \leq 1$):

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{M}{(1-P)^2}(1 - 2P + 2Px_1 - x_1^2) \\ \frac{dz_c}{dx_1} &= \frac{2M}{(1-P)^2}(P - x_1) \end{aligned} \quad (2.20)$$

La distribución del espesor viene dada por la siguiente expresión:

$$z_t = \frac{T}{0.2}(a_0x_1^{0.5} + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^4) \quad (2.21)$$

donde $a_0 = 0.2969$, $a_1 = -0.126$, $a_2 = -0.3516$, $a_3 = 0.2843$ y $a_4 = -0.1036$ son las constantes para obtener un perfil con borde de salida cerrado [5].

Utilizando las ecuaciones descritas previamente, para un valor dado de x_1 , es posible calcular su posición en la línea de curvatura z_c , el gradiente de esta y el espesor. La posición para el extradós se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= x_c - z_t \sin \theta \\ z &= z_c + z_t \cos \theta \end{aligned} \quad (2.22)$$

y para el intradós:

$$\begin{aligned}x &= x_c + z_t \sin \theta \\z &= z_c - z_t \cos \theta\end{aligned}\tag{2.23}$$

donde $\theta = \arctan\left(\frac{dy_c}{dx_1}\right)$.

Para generar el perfil NACA en el código desarrollado, se definirá la designación ($MPXX$) en formato *string* para poder acceder más rápidamente a los diferentes terminos. Una vez definida la designación, los valores numéricos de M , P y XX se obtendrán utilizando la función *str2num* de MATLAB®(que transforma de *string* a *num* el valor desado) de la siguiente forma:

- $M = \text{str2num}(\text{designation}(1))/100$
- $P = \text{str2num}(\text{designation}(2))/10$
- $XX = \text{str2num}(\text{designation}(3 : 4))/100$

Una vez separada la información del perfil, la mejor opción será generar $N + 1$ puntos x_1 siendo

$$x_1 = \frac{1 - \cos \beta}{2}\tag{2.24}$$

donde $-\pi \leq \beta \leq \pi$. De esta forma se obtendrán N paneles empezando por el borde de salida y en el sentido de las agujas del reloj. Una vez se han creado los paneles del perfil, se deberá calcular, para cada panel j , cierta información geométrica de gran importancia, concretamente:

- Longitud del panel.
- Vectores unitarios normal y tangente.
- Coordenadas del punto de control del panel.

A modo de ejemplo, y con el fin de explicar el proceso para calcular dicha información, se tomará un panel j (Figura 2.5)del que se conocen las coordenadas de su punto inicial, (x_j, z_j) , y final, (x_{j+1}, z_{j+1}) . La longitud del panel sera:

$$lp_j = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}\tag{2.25}$$

donde $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ y $\Delta z_j = z_{j+1}$. Una vez obtenidos estos valores, los vectores unitarios se calculan directamente cómo

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}}_j &= \begin{pmatrix} -\frac{\Delta z_j}{lp_j} \\ \frac{\Delta x_j}{lp_j} \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{t}}_j &= \begin{pmatrix} \frac{\Delta x_j}{lp_j} \\ \frac{\Delta z_j}{lp_j} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.26}$$

El punto de control (sobre el que se calcularán las velocidades inducidas al panel j) se situará en la mitad de la longitud del panel, por lo que sus coordenadas serán:

$$(x_{cpj}, z_{cpj}) = \frac{1}{2}(x_{j+1} + x_j, z_{j+1} + z_j) \quad (2.27)$$

Los vectores unitarios normal y tangente definirán un sistema de coordenadas local para cada panel j con origen en el punto inicial de éste (x_j, z_j) .

2.2.5.2 Implementación de las condiciones de contorno

Como se mencionó anteriormente, el movimiento de fluido generado por cada panel inducirá una cierta velocidad en el resto de paneles. Es importante tener en cuenta esta contribución para poder aplicar las condiciones de contorno de Neumann. La velocidad inducida por un panel a otro se puede calcular de diferentes formas, por ejemplo a través de la integración de la velocidad inducida sobre la longitud del panel y así encontrar la contribución media. Sin embargo, por razones numéricas, esto no resulta práctico. Una forma de aproximar esta contribución consiste en definir un punto de control, de coordenadas (x_0, z_0) , situado en el medio de cada panel (vease Figura 2.6). Después de esto, la contribución de un panel j a un panel i se considerará como la velocidad inducida por el panel j en el punto de control del panel i . Teniendo en cuenta la contribución de todos los paneles sobre un panel i , se obtiene la siguiente expresión

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_{ij}^p + \mathbf{v}_w \quad (2.28)$$

donde \mathbf{v}_i es la velocidad total en el punto de control del panel i , N es el número total de paneles, \mathbf{v}_{ij}^p es la velocidad inducida por el panel j en el punto de control del panel i , obtenida mediante (2.16) y \mathbf{v}_w es la velocidad de la corriente libre, siendo $v_w \cos \alpha$ y $v_w \sin \alpha$, con α el ángulo de ataque, sus componentes en las direcciones x y z , respectivamente.

Una vez la velocidad total que actúa en el panel se ha calculado, se pueden aplicar las condiciones de contorno. Dichas condiciones se implementarán mediante (2.29), donde la ecuación de la parte superior representa la condición no deslizamiento, por la cual la proyección de la velocidad tangente al panel tiene que ser zero. Por otro lado, la ecuación inferior representa la condición de contorno del sólido.

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_{ij}^p + \mathbf{v}_w \right\} \cdot \hat{\mathbf{t}}_i &= 0 \\ \left\{ \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_{ij}^p + \mathbf{v}_w \right\} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Expandiendo los diferentes términos presentes en (2.29) obtenemos la siguiente expresión de las condiciones de contorno de Neumann para el panel i :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N K_{ij}^t \cdot \gamma_j + (v_w \cos \alpha \cdot \hat{t}_{ix} + v_w \sin \alpha \cdot \hat{t}_{iz}) \\ \sum_{j=1}^N K_{ij}^n \cdot \gamma_j + (v_w \cos \alpha \cdot \hat{n}_{ix} + v_w \sin \alpha \cdot \hat{n}_{iz}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

K_{ij}^t and K_{ij}^n son, respectivamente, los coeficientes de influencia tangencial y normal, y son funciones solamente geométricas. Estos representan la velocidad inducida por el panel j , con distribución de vorticidad unitaria, sobre el panel i . Sus respectivas expresiones son:

$$\begin{aligned} K_{ij}^t &= \tilde{u}_{ij}^p \cdot \hat{t}_{ix} + \tilde{w}_{ij}^p \cdot \hat{t}_{iz} \\ K_{ij}^n &= \tilde{u}_{ij}^p \cdot \hat{n}_{ix} + \tilde{w}_{ij}^p \cdot \hat{n}_{iz} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ahora (2.30) se aplica a todos los paneles. Para el caso tangencial, el sistema global de ecuaciones obtenido, (2.32), se expresa de forma matricial.

$$\begin{pmatrix} K_{11}^t & \cdots & K_{1j}^t & \cdots & K_{1N}^t \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ K_{i1}^t & \cdots & K_{ij}^t & \cdots & K_{iN}^t \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1}^t & \cdots & K_{Nj}^t & \cdots & K_{NN}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_i \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(v_w \cos \alpha \cdot \hat{t}_{1x} + v_w \sin \alpha \cdot \hat{t}_{1z}) \\ \vdots \\ -(v_w \cos \alpha \cdot \hat{t}_{ix} + v_w \sin \alpha \cdot \hat{t}_{iz}) \\ \vdots \\ -(v_w \cos \alpha \cdot \hat{t}_{Nx} + v_w \sin \alpha \cdot \hat{t}_{Nz}) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Con la proyección de la velocidad del viento sobre los ejes del panel como término conocido y, por ello, puesto en la parte derecha de la ecuación. De forma compacta:

$$\mathbf{K}^t \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{v}_w^t \quad (2.33)$$

donde \mathbf{v}_w^t es la contribución del viento en dirección tangencial. La expresión para la condición de contorno del sólido no se presentará ya que es equivalente a la de no deslizamiento.

La aplicación de las condiciones de contorno 2.32 conduce a un problema de N ecuaciones lineales con N incógnitas (la intensidad de cada panel, γ_i). Sin embargo, en el caso de trabajar con paneles de intensidad de vorticidad constante, dado que la velocidad normal inducida sobre sí mismos es nula, la imposición de dicha ecuación puede llevar a problemas numéricos porque los términos correspondientes a la diagonal de la matriz de coeficientes normales son cero. Por ello, una forma más ventajosa de fijar velocidad nula es utilizando condiciones de tipo Dirichlet. Para ello se impone que el potencial en el interior del cuerpo es un valor constante igual a cero (su gradiente, es decir la velocidad, es nulo) y se extiende dicha condición al contorno. Si bien esta condición debe ser aplicada ligeramente en el interior del cuerpo, desde un punto de vista

práctico puede ser aplicada en el punto de control del panel. Luego, dado que la velocidad normal ya es nula en dicho punto, simplemente resta aplicar la condición de velocidad tangente 2.32 , que conduce a términos de la diagonal diferentes de cero ($-\gamma/2$) y a una matriz de coeficientes bien condicionada.

2.2.5.3 Conservación de la circulación y vorticidad

Teniendo en cuenta las suposiciones hechas, el procedimiento hasta este momento mostrado debería cumplir implícitamente la conservación de circulación y vorticidad (la cantidad total de vorticidad debe ser zero); sin embargo, debido a la discretización y a errores de cálculo podría no ser cierto. Con el fin de evitar éste problema, se debe implementar explícitamente ambas condiciones [1][2].

Si se observa la matriz de coeficientes de influencia (2.32), cada columna representa la velocidad tangencial inducida por el panel j , con una intensidad unitaria, en el punto de control de todos los paneles, incluido él mismo. Si se integra ésta velocidad a lo largo de la longitud de cada panel i , la suma representa la circulación total Γ_j producida por el panel j en el contorno cerrado del perfil (Figura 2.7), concretamente

$$\Gamma_j = \gamma_j \sum_{i=1}^N K_{ij} \cdot \Delta l_i \quad (2.34)$$

siendo Δl_i la longitud del panel i . Como se ha dicho anteriormente, debido a la conservación de la circulación, este valor tiene que ser igual a cero. Por ello, se seleccionará el coeficiente de influencia con mayor valor de cada columna (excluyendo los presentes en la diagonal) y se reemplazará por una combinación lineal del resto de coeficientes de la columna [1][2], concretamente

$$K_{max,j} = -\frac{1}{\Delta l_{max}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq max}}^N K_{ij} \cdot \Delta l_i \quad (2.35)$$

asegurando de esta forma que la circulación neta alrededor del contorno del perfil es idénticamente igual a cero en cada paso de tiempo.

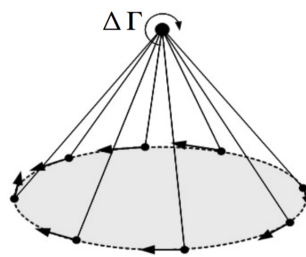


Figura 2.7: Circulación alrededor una una curva cerrada [2].

Como se menciona anteriormente, la vorticidad generada sobre un panel j con una distribución constante de vórtices se calcula cómo:

$$\Delta\Gamma_j = \gamma_j \cdot \Delta l_j \quad (2.36)$$

Dado que la cantidad total de vorticidad producida por todo el perfil debe ser nula

$$\sum_{j=1}^N \Delta\Gamma_j = \sum_{j=1}^N \gamma_j \cdot \Delta l_j = 0 \quad (2.37)$$

añadiendo (2.37) a cada una de las ecuaciones (2.32) aseguramos la conservación de la vorticidad. De esta forma, la ecuación para un panel i queda:

$$\sum_{j=1}^N (K_{ij} + \Delta l_j) \cdot \gamma_j + (v_w \cos \alpha \cdot \hat{t}_{ix} + v_w \sin \alpha \cdot \hat{t}_{iz}) \quad (2.38)$$

Esta ecuación resulta en un sistema de ecuaciones análogo a (2.33), concretamente

$$\tilde{\mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{v}^w \quad (2.39)$$

donde $\tilde{K}_{ij} = K_{ij} + \Delta l_j$. Llegados a este punto sólo queda invertir la matriz $\tilde{\mathbf{K}}$, con cualquiera de los métodos que MATLAB® proporciona, para encontrar la intensidad γ de las distribuciones de vorticidad y con ella el campo de velocidades y presiones.

$$\boldsymbol{\gamma} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \cdot \mathbf{v}^w \quad (2.40)$$

3 Generación y desarrollo de la vorticidad

Como se ha mencionado al principio de este capítulo, la vorticidad se genera continuamente en la superficie del perfil, se desprende al fluido y se deja interactuar mediante convección libre. Numéricamente hablando, en cada paso de tiempo se produce un incremento de vorticidad en la superficie de cada panel. El valor de este incremento de vorticidad, obtenido de (2.34), se concentra en forma de vórtices y posteriormente son desprendidos al fluido (Figura 3.1), generando N nuevos vórtices durante el siguiente paso de tiempo. De ahí que, en un cierto instante de tiempo haya N_v vórtices. Una vez desprendidos, la intensidad asociada al vórtice permanece constante durante el resto de los cálculos.

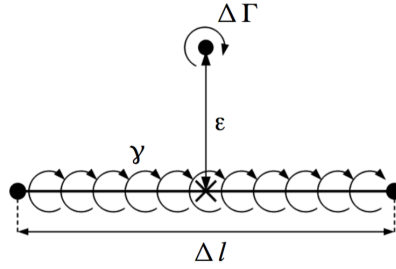


Figura 3.1: Desprendimiento de un vórtice de intensidad $\Delta\Gamma$ a una distancia ε de un panel de intensidad γ [2].

De forma ideal, la distancia respecto al panel, a la que se desprende cada vórtice viene dada por la trayectoria media (ε) que ha viajado una partícula en un fluido debido a la difusión.

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{4}{3}\nu\Delta t} \quad (3.1)$$

No obstante, para números de Reynolds altos, esta distancia se vuelve muy pequeña y, como se explicará en la siguiente sección, esto da lugar a una sobreestimación en el cálculo de las velocidades inducidas por el vórtice al panel del que se ha desprendido. Por tanto, es mejor escoger una distancia mayor para poner los nuevos vórtices desprendidos. Empíricamente, una buena solución a este problema es situarlos a una distancia igual a un cuarto de la longitud media de los paneles [1][2].

3.1 Efecto del desprendimiento de vórtices

Estos nuevos vórtices introducen una perturbación en el fluido que necesita tenerse en cuenta cuando se aplican las condiciones de contorno. Por lo tanto, la Ec. (2.38) se modifica para introducir la velocidad inducida por cada vórtice en todos los puntos de control. Para un panel dado i tenemos

$$\sum_{j=1}^N (\tilde{K}_{ij}) \cdot \gamma_j = -(v_w \cos \alpha \cdot \hat{t}_{ix} + v_w \sin \alpha \cdot \hat{t}_{iz}) - \sum_{k=1}^{N_v} \Delta\Gamma_k \cdot (\tilde{u}_{ik}^v \cdot \hat{t}_{ix} + \tilde{w}_{ik}^v \cdot \hat{t}_{iz}) \quad (3.2)$$

Definiendo la velocidad unitaria inducida por el vórtice k sobre el panel i en la dirección tangencial del mismo como $v_{ik}^v = (\tilde{u}_{ik}^v \cdot \hat{t}_{ix} + \tilde{w}_{ik}^v \cdot \hat{t}_{iz})$, la velocidad tangencial total resultará de $\mathbf{v}^t = \mathbf{v}^w + \sum_{k=1}^{N_v} \Delta\Gamma_k \cdot \mathbf{v}_k^v$. De este modo, la matriz obtenida en la Ec. (3.2) se puede expresar de la siguiente forma

$$\tilde{\mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{v}^t \quad (3.3)$$

El cálculo de las intensidades de los paneles es directa a partir de la Ec. 3.3.

$$\boldsymbol{\gamma} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \cdot \mathbf{v}^t \quad (3.4)$$

3.2 Conservación de la circulación y vorticidad. Efecto de los vórtices desprendidos

Igual que en el caso de los paneles, la vorticidad y circulación producida por los vórtices a menudo no se conserva debido a errores de cálculo, y de ahí que tenga que imponerse, de una manera similar al caso precedente [1][2]. Para ello, si se expresa por separado la contribución de cada vórtice desprendido tenemos

$$\tilde{\mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{v}^w + \Delta\Gamma_1 \mathbf{v}_1^v + \cdots + \Delta\Gamma_k \mathbf{v}_k^v + \cdots + \Delta\Gamma_{N_v} \mathbf{v}_{N_v}^v \quad (3.5)$$

Luego, la circulación total producida por un vórtice k sobre el perfil se calcula como la suma de todos los términos del vector $\Delta\Gamma_k \mathbf{v}_k^v$ multiplicados por su longitud de panel correspondiente

$$\Gamma_k = \Delta\Gamma_k \sum_{i=1}^N v_{ik}^v \cdot \Delta l_i = 0 \quad (3.6)$$

Ahora, con el fin de imponer una circulación nula se procede de igual forma que en 2.35, el elemento con mayor valor del vector \mathbf{v}_k^v se sustituye por una combinación lineal del resto de elementos, concretamente

$$v_{max,k}^v = -\frac{1}{\Delta l_{max}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq max}}^N v_{ik}^v \cdot \Delta l_i \quad (3.7)$$

En cuanto la conservación de la vorticidad, hay que tener en cuenta el sistema total, es decir, la cantidad de vorticidad producida por los paneles y los vórtices desprendidos serán

$$\sum_{j=1}^N \gamma_j \cdot \Delta l_j + \sum_{k=1}^N \Delta\Gamma_k = 0 \quad (3.8)$$

Introduciendo (3.8) en (3.2)

$$\sum_{j=1}^N (\tilde{K}_{ij}) \cdot \gamma_j = -(v_w \cos \alpha \cdot \hat{t}_{ix} + v_w \sin \alpha \cdot \hat{t}_{iz}) - \sum_{k=1}^{N_v} \Delta\Gamma_k \cdot \tilde{v}_{ik}^v \quad (3.9)$$

siendo $\tilde{v}_{ik}^v = (\tilde{u}_{ik}^v \cdot \hat{t}_{ix} + \tilde{w}_{ik}^v \cdot \hat{t}_{iz} + 1)$, y aplicando (3.9) en todos los paneles se obtiene la forma compacta

$$\tilde{\mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{v}^w + \sum_{k=1}^{N_v} \Delta\Gamma_k \cdot \mathbf{v}_k^v = \tilde{\mathbf{v}}^t \quad (3.10)$$

De este modo, las intensidades de los paneles se calcularán de la siguiente forma

$$\boldsymbol{\gamma} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}^t \quad (3.11)$$

3.3 Tratamiento de vórtices cercanos a la superficie del perfil

La velocidad inducida por un vórtice en un panel se calcula respecto un punto de control situado en la mitad de la longitud del panel, asumiendo este como el valor medio sobre todo el panel. Esta suposición es razonable cuando el vórtice se encuentra lo suficientemente lejos, puesto que la variación en la velocidad inducida entre diferentes partes del panel es baja. No obstante, si el vórtice se encuentra cerca del punto de control, estas variaciones son altas, resultando en una sobrestimación de la velocidad inducida y, en consecuencia, de la vorticidad calculada sobre dicho panel. A modo de ejemplo, en la Figura (3.2) se muestran las velocidades calculadas para un vórtice de intensidad unitaria situado a $\epsilon = 0.1$ y $\epsilon = 1.0$ de un panel de longitud unitaria (adimensional), y como se ha comentado anteriormente, la velocidad inducida en el panel cuando el vórtice se encuentra cerca de este varía dependiendo de la parte del panel en la que se calcula.

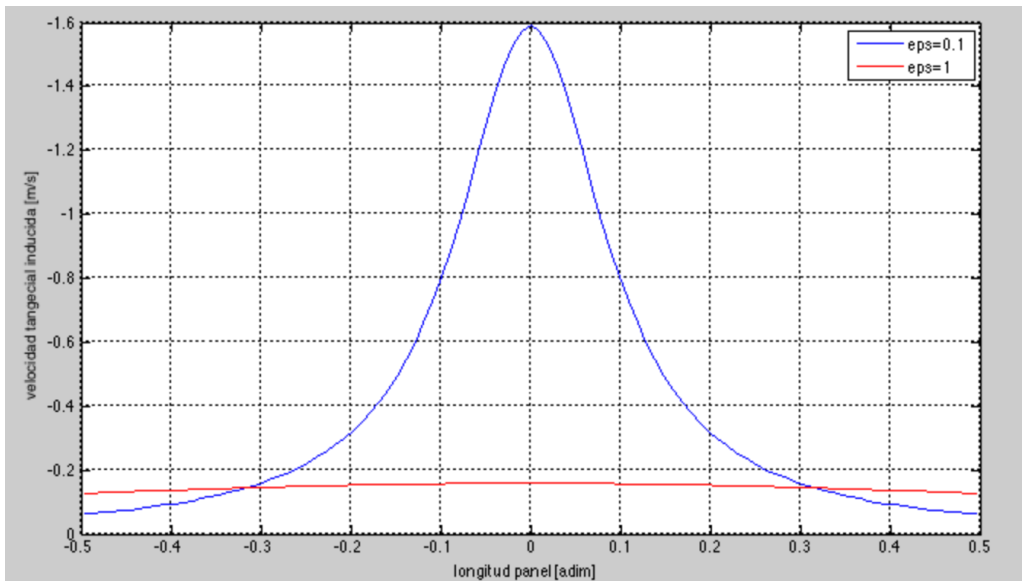


Figura 3.2: Velocidad tangencial inducida por un vórtice sobre un panel para diferentes ϵ

Una forma de superar este problema es dividir el panel en subelementos, cada uno con su propio punto de control (véase Figura 3.3) en el que se calculará la velocidad inducida. Haciendo el promedio de todas estas velocidades se mejora la estimación de la velocidad inducida.

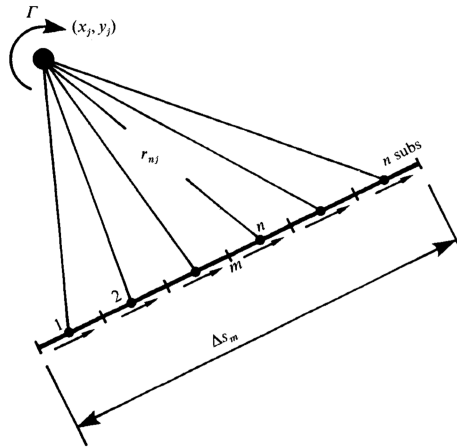


Figura 3.3: Velocidad media tangencial a un panel m debido a un vórtice Γ utilizando subelementos [1]

El número mínimo de subelementos ($nsub$) que se utilizan se puede calcular de la siguiente forma [1][2]:

$$nsub = 1 + round\left(\frac{2\Delta l_i}{r_i k}\right) \quad (3.12)$$

Las velocidades inducidas \tilde{u}_{ik}^v y \tilde{w}_{ik}^v utilizadas para obtener $\tilde{\mathbf{v}}_k^v$ son reemplazadas por los valores promedio calculados en todos los subelementos, concretamente

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ik}^v &= \frac{1}{2\pi n s} \sum_{n=1}^{nsub} \left\{ \frac{z_n - z_k}{r_{nk}^2} \right\} \\ \tilde{w}_{ik}^v &= \frac{1}{2\pi n s} \sum_{n=1}^{nsub} \left\{ \frac{x_n - x_k}{r_{nk}^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde (x_n, z_n) son las coordenadas del punto de control del subelemento n . A partir de este punto, el cálculo de la vorticidad se hace de la misma forma que en la sección previa.

A modo de resumen, los diferentes casos y sus consideraciones para calcular correctamente la influencia de los vórtices sobre los paneles, siendo ahora ε la distancia entre el vórtice k y el punto de control del panel i más cercano, se explican a continuación:

- Para relaciones de $\varepsilon/\Delta l_i > 1.0$, el uso de subelementos no es necesario y la velocidad inducida normal se calcula según (2.14).
- Para $1.0 > \varepsilon/\Delta l_i > 0.4$, hace falta utilizar subelementos cuando se calcule la velocidad inducida por el vórtice k en el panel i .
- Para relaciones de $\varepsilon/\Delta l_i < 0.4$, el uso de subelementos apenas introduce mejoras en el cálculo de la velocidad inducida, y por ello, con el fin de no introducir grandes errores en el modelo, el efecto del vórtice desprendido se desprecia.

3.4 Convección de los vórtices desprendidos

Los vórtices desprendidos se mueven libremente dentro del dominio del fluido bajo la acción del viento de corriente libre y la velocidad inducida por los paneles del perfil y el resto de vórtices desprendidos. Dicha se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u_i^c &= v_w \cos \alpha + \sum_{j=1}^N \gamma_j \tilde{u}_{ij}^p + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_v} \Delta \Gamma_k \tilde{u}_{ik}^v \\ w_i^c &= v_w \sin \alpha + \sum_{j=1}^N \gamma_j \tilde{w}_{ij}^p + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_v} \Delta \Gamma_k \tilde{w}_{ik}^v \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde (u_i^c, w_i^c) son las componentes de la velocidad de convección del vórtice i situado en las coordenadas (x_i, z_i) (nótese que, en el cálculo de las velocidades inducidas debido a los vórtices, no existe velocidad autoinducida). Luego, las coordenadas de las nuevas posiciones (x'_i, z'_i) del vórtice i se pueden obtener utilizando un esquema de diferencias finitas de primer orden mediante

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i + u_i^c \Delta t \\ z'_i &= z_i + w_i^c \Delta t \end{aligned} \quad (3.15)$$

Con este método, la curva de la trayectoria de cada vórtice se aproxima como una línea recta dentro del paso temporal dado. Este esquema de primer orden conduce a un error acumulado en dicha trayectoria. Para reducir este error se utilizará el siguiente procedimiento: considerando que se han calculado la convección de todos los vórtices, se recalculan las velocidades de convección en la nueva posición y se hace un promedio con las velocidades originales. De este modo se hace una mejor aproximación de la convección de los vórtices puesto que se tiene en cuenta curvatura de la trayectoria. Este esquema es equivalente al método de integración con diferencias finitas progresivas de segundo orden

$$\begin{aligned} x'_{id} &= x_{ia} + \frac{1}{2}(u_{ia}^c + u_{ib}^c) \Delta t \\ z'_{id} &= z_{ia} + \frac{1}{2}(z_{ia}^c + w_{ib}^c) \Delta t \end{aligned} \quad (3.16)$$

Cada promedio calculado cuenta como una corrección iterativa. Repitiendo este proceso y cogiendo el promedio de la velocidad de convección inicial, de componente (u_{ia}^c, w_{ia}^c) , y la última estimada (u_{ib}^c, w_{ib}^c) , se obtiene que la trayectoria final concuerda con la trayectoria real que sigue un vórtice.

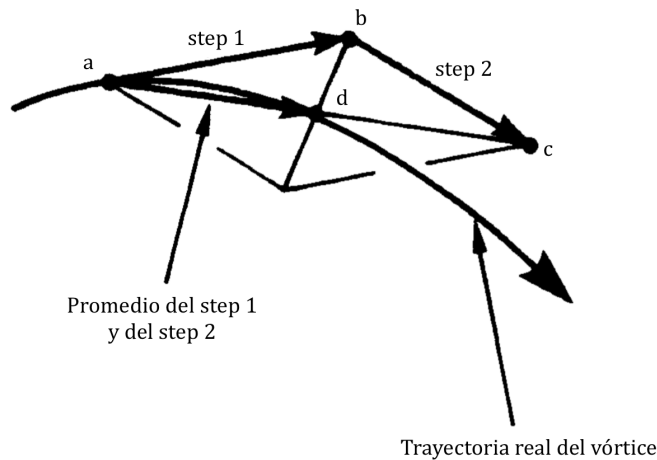


Figura 3.4: Trayectoria de un vórtice debida a la convección utilizando un corrección iterativa [1].

Como es de esperar, este método tiene el inconveniente de requerir más tiempo de cálculo, ya que para cada corrección iterativa se tiene que calcular la convección de todos los vórtices. Sin embargo, cuando el número de vórtices presentes en el fluido es alto, dos correcciones iterativas ofrecen resultados que son suficiente precisos.

3.4.1 Control de vórtices en el interior del perfil

Debido a la convección libre, algunos vórtices pueden introducirse en el interior del perfil, conduciendo a una situación no física. Para evitar esto se debe detectar si un vórtice se encuentra dentro o fuera del perfil. En este trabajo, de forma simplificada, esta comprobación se realizará geométricamente, utilizando las ecuaciones de espesor y curvatura que definen la geometría del perfil. A modo de ejemplo, considérese un vórtice de intensidad $\Delta\Gamma_k$ cuya posición es (x_k, z_k) , el proceso a seguir, paso a paso, es el siguiente:

1. Tomando la expresión (2.21) se obtiene el espesor correspondiente a x_k .
2. Utilizando las expresiones (2.19) o (2.20), según convenga, se calcula la posición en la línea de curvatura y el gradiente de esta para x_k .
3. Se calculan los valores de z del extradós (z_e) e intradós (z_i) correspondientes a x_k con las expresiones (2.22) y (2.23) respectivamente.
4. Si $z_e > z_k > z_i$ el vórtice k se encuentra dentro del perfil.

Una vez se ha comprobado si los vórtices se encuentran dentro o fuera del perfil, una estrategia usada con frecuencia es eliminar cualquier vórtice interior al perfil. Entonces, el control de

la circulación, que previamente se ha hecho, se tiene que modificar para tener en cuenta esta reducción de vorticidad:

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i \Delta l_i + \sum_{v=1}^{N_v} \Delta \Gamma_k = \Delta \Gamma_{elim} \quad (3.17)$$

donde $\Delta \Gamma_{elim}$ es la suma de la vorticidad de todos los vórtices eliminados. De ahí, que (3.9) ahora será

$$\sum_{j=1}^N (\tilde{\mathbf{K}}_{ij}) \cdot \gamma_j = -(v_w \cos \alpha \cdot \hat{t}_{ix} + v_w \sin \alpha \cdot \hat{t}_{iz}) - \sum_{k=1}^{N_v} \Delta \Gamma_k \cdot \tilde{v}_{ik}^v + \Delta \Gamma_{elim} = \tilde{\mathbf{V}}_i^t \quad (3.18)$$

Finalmente, las intensidades de los paneles se calculan de la forma usual

$$\gamma = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}^t \quad (3.19)$$

3.4.2 Fusión de vórtices cercanos

Debido a la convección, algunos vórtices se pueden situar muy cerca uno del otro, y debido a su naturaleza singular, las velocidades inducidas serán muy elevadas. Por ello, cuando sucede esto se estila fusionar los vórtices [1][2]. Esto mejora los resultados obtenidos y, además, reduce el tiempo de cálculo. El criterio utilizado para fusionar vórtices es el siguiente: si la distancia entre un vórtice i y un vórtice k (r_{ik}) es menor que una cierta tolerancia Δr , estos se fusionarán. Se definen para ello dos límites de tolerancia dependiendo de la distancia x a la que se encuentran los vórtices del borde de entrada:

- Para $x < 1.5c$ se fusionarán si $r_{ik} < \Delta r$
- Para $x > 1.5c$ se fusionarán si $r_{ik} < 4 \cdot \Delta r$

siendo $\Delta r = \frac{1}{2\pi N} \sum_{j=1}^N l p_j$ y c la cuerda del perfil. La razón de separar en estos dos tramos es que los vórtices lejanos tienen muy poco impacto en la velocidad inducida sobre los paneles, por lo que una fusión más agresiva no introduce errores importantes, y de esta manera se reduce el número de vórtices desprendidos, y en consecuencia, el tiempo de cálculo.

3.5 Difusión de vorticidad

La trayectoria de los torbellinos libres se ve afectada por efecto disipativo del fluido. En este trabajo el método utilizado para la simulación de la difusión es el llamado modelo de 'random walk' (movimiento aleatorio) [1][2]. El principio con el que trabaja este modelo es el de someter a todos los vórtices desprendidos a un pequeño movimiento aleatorio, el cual producirá un desplazamiento equivalente a la difusión de la vorticidad en el medio que se representa.

Para describir dicho flujo se calcula el rotacional de la ecuación de cantidad de movimiento de Navier-Stokes y, después, se reorganizan todos los elementos expresando la variación de vorticidad en el tiempo como una función de la convección y la difusión. El término de la presión desaparece puesto que el rotacional de un gradiente siempre es cero. De esta forma obtenemos:

$$\dot{\omega} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega + \nu \nabla^2 \omega \quad (3.20)$$

Para comparar la importancia relativa entre los términos de convección y difusión -primer y segundo término, respectivamente, de la parte derecha de (3.20)- es conveniente normalizar la ecuación anterior por medio de la longitud característica (cuerda del perfil, c) y velocidad que define el problema (velocidad incidente, v_w), obteniendo así la forma adimensional siguiente:

$$\dot{\bar{\omega}} = -(\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\bar{\omega} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{\omega} \quad (3.21)$$

donde el número de Reynolds se ha definido como

$$Re = \frac{v_w c}{\nu} \quad (3.22)$$

Para un número de Reynolds infinito, la Ec. (3.21) describe la convección de vorticidad en un flujo viscoso. En el otro lado de la escala Reynolds, para números muy bajos, predominará el término de la difusión viscosa. Por ello, volviendo a la ecuación dimensional, para movimientos puramente difusivos, (3.20) se reduce al laplaciano de la vorticidad,

$$\dot{\omega} = \nu \nabla^2 \omega \quad (3.23)$$

3.5.1 Implementación de la difusión

El movimiento por difusión de un vórtice, con una intensidad inicial $\Delta\Gamma$, centrado en el origen del plano (r, θ) está descrito por la Ec. (3.23). En coordenadas polares,

$$\dot{\omega} = \nu \left\{ \frac{\delta^2 \omega}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta \omega}{\delta r} \right\} \quad (3.24)$$

Integrando, se obtiene la distribución de vorticidad (Figura 3.5) en el espacio y tiempo:

$$\omega(r, t) = \frac{\Delta\Gamma}{4\pi\nu t} e^{(-\frac{r^2}{4\nu t})} \quad (3.25)$$

Físicamente, esta ecuación representa cómo una cierta cantidad de vorticidad, inicialmente concentrada en el origen de coordenadas ($t = 0$), se extiende uniformemente en todas las direcciones del dominio a medida que pasa el tiempo. Sin embargo, puesto que se puede apreciar el parecido de (3.25) con la función de densidad de probabilidad Gaussiana (FDP), es

posible otra interpretación de la ecuación. De hecho, si la distribución de vorticidad, $\omega(r, t)$, se divide por la vorticidad total concentrada en el vórtice $\Delta\Gamma$, esta ecuación se puede ver como la distribución de la probabilidad de encontrar un vórtice, con toda la vorticidad concentrada en él, en una posición dada dentro del dominio para un tiempo dado. Esta interpretación es coherente, ya que se tiene mayor probabilidad de encontrar el vórtice cerca de su posición original (de hecho, inicialmente la probabilidad es 1) y la probabilidad de encontrarlo más lejos se va aumentando a medida que el tiempo transcurrido incrementa, interpretando el tiempo como un tipo de desviación estandar.

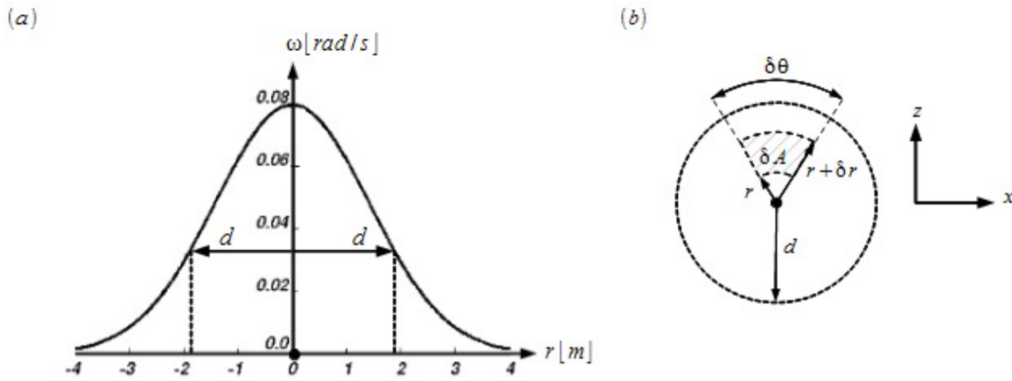


Figura 3.5: Difusión de la vorticidad para un vórtice de intensidad unitaria, $\Delta\Gamma = 1$ y viscosidad cinemática unitaria, $\nu = 1$, en un tiempo $t = 1$ s. (a) vista lateral; (b) vista superior [2].

De este modo, tomando un diferencial de área δA (véase Figura 3.5-b) e integrando la FDP sobre dicha área, se obtiene la probabilidad total p de encontrar el vórtice dentro:

$$p = \int_A \frac{\nu(r, t)}{\Delta\Gamma} \delta A = \int_r \int_\theta \left[\frac{1}{4\pi\nu t} e^{(-\frac{r^2}{4\nu t})} \right] r \delta\theta \delta r \quad (3.26)$$

Una estrategia apropiada es desplazar cada vórtice i , en las direcciones radial y angular, unas cantidades r_i y θ_i respectivamente, para un intervalo de tiempo Δt tal que se satisfaga la FDP dada por (3.26). Se puede observar que la función de densidad de probabilidad (3.26) no depende de la dirección tomada, por tanto, la elección en la dirección θ debería hacerse con igual probabilidad. De este modo, para cada vórtice i , se puede definir un valor de θ , independientemente de r , con la siguiente ecuación:

$$\theta_i = 2\pi\tilde{Q}_i \quad (3.27)$$

siendo \tilde{Q}_i un número aleatorio dentro del rango $0 < \tilde{Q}_i < 1$.

La dispersión radial de los vórtices es mejor determinarla integrando (3.26) respecto θ , entre $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$, obteniendo así

$$p' = \int_r \left\{ \frac{1}{2\nu t} e^{(-\frac{r^2}{4\nu t})} \right\} r \delta r \quad (3.28)$$

p' es la probabilidad de que un elemento dado este dentro del área comprendida entre r y $r + \delta r$. Sin embargo, es más útil encontrar la probabilidad P que un elemento se encuentre dentro de un círculo de radio r . Dicha probabilidad se puede obtener integrando p' respecto r desde $r = 0$ hasta r , concretamente

$$P = \int_{r=0}^r \left\{ \frac{1}{2\nu t} e^{(-\frac{r^2}{4\nu t})} \right\} r \delta r = 1 - e^{(-\frac{r^2}{4\nu t})} \quad (3.29)$$

donde la constante de integración se ha fijado en 1 para asegurar probabilidad cero a medida que el radio r del área se acerca a cero y probabilidad total ($P = 1$) cuando r tiende a infinito, es decir, se está considerando todo el dominio. Llegado a este punto, el valor de P se determina seleccionando un número aleatorio \tilde{P}_i dentro del rango $0 < \tilde{P}_i < 1$. De este modo, para un vórtice i , (3.29) será

$$\tilde{P}_i = 1 - e^{(-\frac{r_i^2}{4\nu t})} \quad (3.30)$$

y a partir de la cual se obtiene el desplazamiento aleatorio radial

$$r_i = \left\{ 4\nu t \ln(1/\tilde{P}_i) \right\}^2 \quad (3.31)$$

El desplazamiento de N_v vórtices se determina seleccionando N_v números aleatorios dentro del rango $0 - 1.0$ tanto para \tilde{Q}_i como \tilde{P}_i . Estos valores aleatorios se generan de la siguiente forma: Primero, para poder empezar el proceso, se escoge un número real arbitrario \tilde{P}_1 dentro del rango $0.0 - 1.0$. Con el fin de asegurar la arbitrariedad de éste número se utilizará la función $\tilde{P}_1 = rand$ de MATLAB®, que devuelve un valor aleatorio dentro del rango $(0, 1)$. Después, se usará la siguiente expresión

$$P_2 = (A + \tilde{P}_1)^5 \quad (3.32)$$

donde A es una constante 'real' con suficientes decimales, en este trabajo se ha tomado $A = 1.01316$ [1]. El valor aleatorio final \tilde{P}_2 se obtiene tomando sólo la parte decimal de P_2 . Este proceso se repetirá indefinidamente utilizando \tilde{P}_2 como semilla del siguiente número aleatorio. La expresión general para un número aleatorio i es:

$$P_i = (A + \tilde{P}_{i-1})^5 \quad (3.33)$$

Hasta ahora se ha considerado la difusión sobre un tiempo finito t dado en sólo un paso. Si se considera la difusión sobre una sucesión de pequeños incrementos de tiempo Δt , los desplazamientos angulares y radiales de un elemento i durante el tiempo Δt serán

$$\begin{cases} \Delta\theta_i = 2\pi Q_i \\ \Delta r_i = \left\{ 4\nu \Delta t \ln(1/\tilde{P}_i) \right\}^{1/2} \end{cases} \quad (3.34)$$

Por lo tanto, después de un incremento Δt las coordenadas de la nueva posición (x_i^d, z_i^d) del vórtice i serán:

$$\begin{cases} x_i^d = x_i + \Delta r_i \cos \Delta \theta_i \\ z_i^d = z_i + \Delta r_i \sin \Delta \theta_i \end{cases} \quad (3.35)$$

La aplicación de este procedimiento a todos los N_v vórtices desprendidos a lo largo de los pasos temporales ofrece una buena aproximación de la difusión de la vorticidad en el fluido.

4 Cálculo de fuerzas aerodinámicas

El último paso es el cálculo de las fuerzas que actúan sobre el perfil. Este cálculo se realiza mediante la ecuación de cantidad de movimiento, de la que se obtiene la distribución de presión, y con ella los coeficientes de presión, sustentación y resistencia. Siguiendo el mismo procedimiento que en las secciones precedentes, una vez se ha completado la simulación numérica de la convección, ésta se puede eliminar de la ecuación de Navier-Stokes. Luego, esta ecuación escrita a lo largo de una línea de corriente que rodea el perfil queda

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = \dot{\mathbf{v}} \quad (4.1)$$

En cualquier punto de la superficie del perfil, la velocidad paralela a la superficie, siguiendo el análisis de flujo potencial planteado viene dada por $\mathbf{v} = \gamma(l)$ (la velocidad es nula en el interior del perfil). Luego, de la Ec. (4.1) se puede obtener el gradiente de presión en la dirección del contorno del perfil l , i.e.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta l} = -\dot{\gamma} \quad (4.2)$$

De forma numérica, la variación de la presión de superficie (Δp) en un panel i para un paso temporal Δt , se puede aproximar según

$$\Delta p_i = -\rho \frac{\gamma_i \Delta l_i}{\Delta t} = -\rho \frac{\Delta \Gamma_i}{\Delta t} \quad (4.3)$$

Para el modelo utilizado en este estudio, en el que se genera continuamente vorticidad y se desprende como una distribución de vórtices discretos $\Delta \Gamma_i$ cada paso de tiempo, esta expresión proporciona una forma simple de calcular la distribución de la presión de superficie para un flujo inestacionario. Para obtener la presión superficial en cualquier punto, la Ec. (4.3) se integrará directamente, obteniendo, para un panel i la siguiente expresión:

$$p_i = p_1 + \sum_{j=1}^i \Delta p_j = p_1 - \frac{\rho}{\Delta t} \sum_{j=1}^i \Delta \Gamma_j \quad (4.4)$$

A partir de ahora, el sumatorio del término de la vorticidad se expresará implícitamente de la siguiente forma:

$$\Delta\Gamma_i = \sum_{j=1}^i \Delta\Gamma_j \quad (4.5)$$

La presión de todos los paneles se expresa relativa al valor de la presión p_1 de un panel 1 (inicial) arbitrario. Una técnica adecuada es tomar $p_1 = 0$ como valor inicial, de esta forma (4.4) será:

$$p_i = -\frac{\rho}{\Delta t} \Delta\Gamma_i \quad (4.6)$$

Una vez obtenidas todos los valores de p_i se localizará el valor máximo p_{max} , que corresponderá con el panel donde tenemos el punto de remanso (donde se conoce la presión correspondiente). Este valor se debe incrementar un cierto Δp para igual la presión de remanso del flujo incidente

$$\Delta p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\infty v^2 - p_{max} = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\infty v^2 + \frac{\rho_\infty}{\Delta t} \Delta\Gamma_{max} \quad (4.7)$$

y esta misma cantidad se le añade al resto de valores p_i calculada según la Ec. 4.6. De esta manera, la presión de referencia será la estática de corriente libre, y así directamente se puede calcular el coeficiente de presión (c_P) para cada panel i .

$$\begin{aligned} p_i &= -\frac{\rho_\infty}{\Delta t} \Delta\Gamma_i + \Delta p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\infty v^2 - \frac{\rho_\infty}{\Delta t} (\Delta\Gamma_i - \Delta\Gamma_{max}) \\ p_i - p_\infty &= \frac{1}{2}\rho_\infty v^2 - \frac{\rho_\infty}{\Delta t} (\Delta\Gamma_i - \Delta\Gamma_{max}) \\ c_{Pi} &= \frac{p_i - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty v^2} = 1 - \frac{2}{v^2 \Delta t} (\Delta\Gamma_i - \Delta\Gamma_{max}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para poder calcular los coeficientes de sustentación y resistencia primero se tienen que calcular los coeficientes de la fuerza normal debida a las presiones, Pds , en las direcciones x y z (véase Figura 4.1). Para ello se integrara la diferencia de c_P entre extradós e intradós en la dirección normal a lo largo de toda la superficie del perfil, concretamente

$$\overline{c_F} = \frac{1}{c} \oint \Delta c_P d\bar{s} \quad (4.9)$$

y se proyecta en la dirección x y z para obtener los coeficientes c_{Fx} y c_{Fz} respectivamente. Este proceso, numericamente se realizará, tal como muestran las expresiones (4.10), mediante un sumatorio de los coeficientes de presión de cada panel (c_{Pi}) multiplicados por la componente deseada del vector normal del propio panel ($\hat{\mathbf{n}}_i$)

$$c_{Fx} = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^N c_{Pi} \hat{n}_{ix} l p_i \quad c_{Fz} = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^N c_{Pi} \hat{n}_{iz} l p_i \quad (4.10)$$

Modelo de separación de flujo para perfiles mediante "vortex methods"– REPORT

donde lp_i es la cuerda de cada panel. Una vez obtenidos estos valores, para obtener los coeficientes de sustentación, c_l , y resistencia, c_d , sólo se tendrá que proyectar c_{F_x} y c_{F_z} en los ejes viento.

$$\begin{aligned}c_l &= c_{F_z} \cos \alpha - c_{F_x} \sin \alpha \\c_d &= c_{F_z} \sin \alpha + c_{F_x} \cos \alpha\end{aligned}\tag{4.11}$$

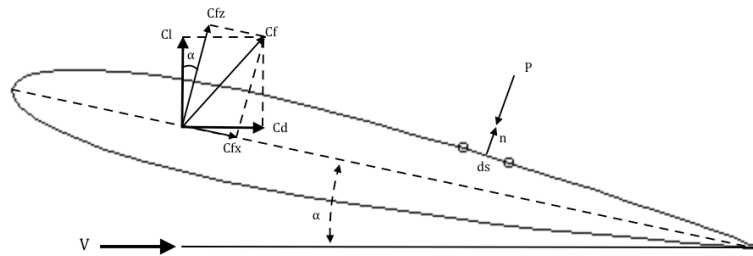


Figura 4.1: Diagrama coeficientes de las fuerzas que actúan sobre el perfil y de la relación entre ellos.

5 Resultados numéricos

Con el objetivo de comprobar el funcionamiento del código computacional desarrollado, se presenta en esta sección un análisis de la convergencia de malla y una verificación y validación de los resultados obtenidos, ya que el modelo de separación de flujo se inicializa con una solución del caso potencial.

5.1 Modelo potencial estacionario

Dado que el modelo de separación de flujo se inicializa con el modelo potencial estacionario, a continuación se realiza una verificación básica, utilizando resultados numéricos obtenidos mediante el código de cálculo Xfoil [7]. Para ello, en primer lugar se llevará a cabo un análisis de convergencia de malla y se determinará el número de paneles N apropiados para el análisis de un perfil NACA2412 a un ángulo de ataque $\alpha = 3^\circ$. Si se grafica el c_l en función de N (véase figura 5.1), se observa que para un valor de $N = 240$ el c_l se estabiliza. No obstante, se ha decidido trabajar con $N = 100$, puesto que no implica un error considerable en el c_l , y se reduce el tiempo de cálculo. También se ha graficado el error relativo respecto el valor del c_l obtenido mediante Xfoil [7] con el mismo número de paneles.

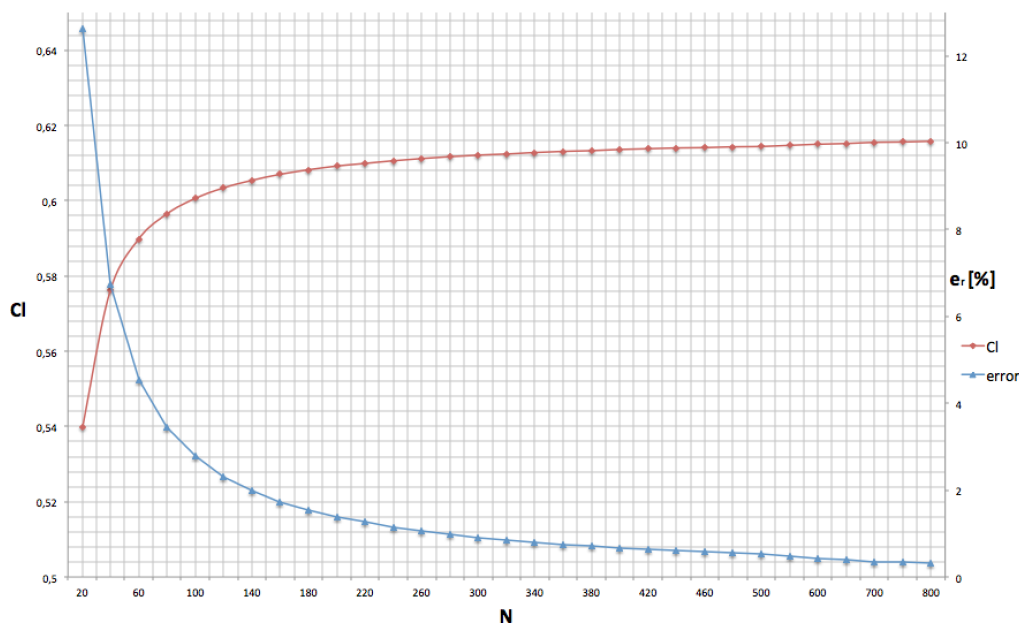


Figura 5.1: c_l en función del número de paneles N y error relativo.

La pendiente de sustentación $c_{l,\alpha}$, el ángulo de sustentación nula α_{0l} y el coeficiente de momentos c_m respecto a $c/4$ y se comparan a continuación con los obtenidos.

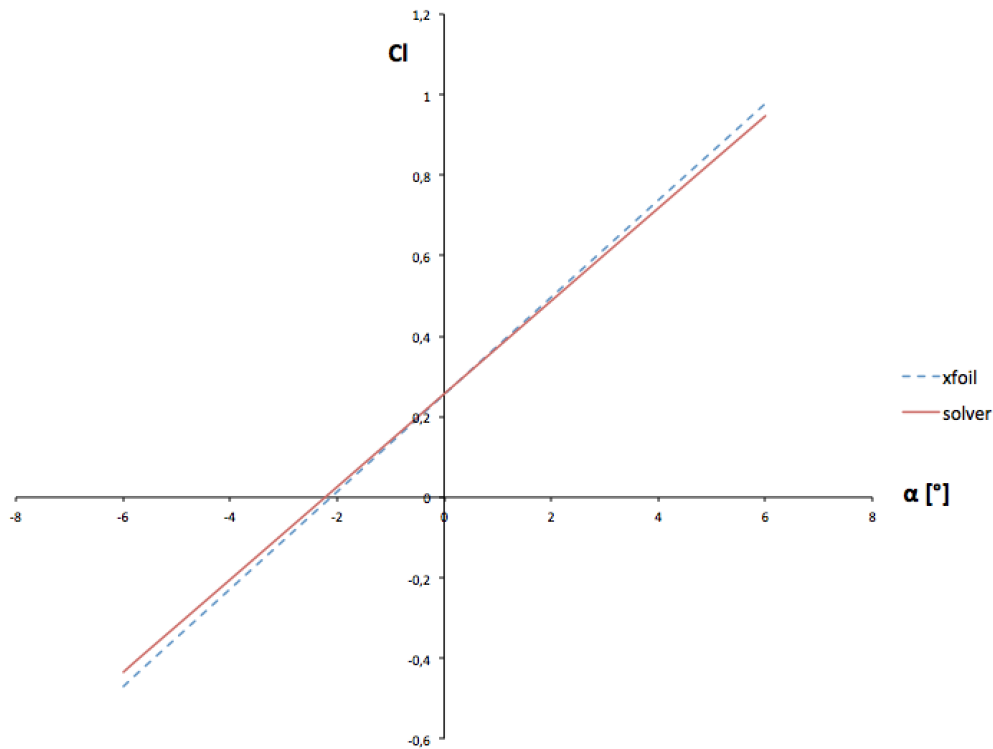


Figura 5.2: c_l vs. α para el tramo lineal.

Los valores de $c_{l,\alpha}$ y α_{0l} , se calculan a partir de la ecuación $c_l = c_{l,\alpha}\alpha + k$ que define el tramo lineal del gráfico del coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque. Dicha ecuación se obtiene de la figura 5.2, que, para los resultados del modelo y de Xfoil será respectivamente:

$$\begin{aligned} c_l &= 0.1153\alpha + 0.2568 \\ c_l &= 0.1207\alpha + 0.2551 \end{aligned} \tag{5.1}$$

La pendiente se obtiene directamente de las ecuaciones 5.1, y para el modelo y Xfoil, respectivamente, será:

$$\begin{aligned} c_{l,\alpha} &= 0.1153 \left(\frac{1}{\circ} \right) \\ c_{l,\alpha} &= 0.1207 \left(\frac{1}{\circ} \right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

con un error relativo del 4.47%. Para encontrar el valor de α_{0l} basta con igualar las ecuaciones 5.1 a cero, y sus valores para el modelo y Xfoil son -2.27° y -2.12° respectivamente. No obstante, simulando con el valor de α_{0l} del modelo calculado se obtiene un $c_l = -0,00537$, por lo que se ajustará comprobando valores cercanos hasta obtener un valor más próximo a cero. Finalmente se tomará $\alpha_{0l} = -2.223^\circ$, con el que el error relativo es del 4.85%.

En cuanto a los coeficientes de momento, se ha obtenido para el modelo analizado y Xfoil,

respectivamente, unos valores de:

$$\begin{aligned} c_{m_0} &= -0.0623 \\ c_{m_0} &= -0.0601 \end{aligned} \quad (5.3)$$

por lo que el error relativo de éste es del 3.66%. Añadir que estos errores pueden reducirse ligeramente aumentando el número de paneles.

A modo de comparación, se presenta a continuación una gráfica comparativa del coeficiente de presión calculado c_p en función de x/c para el modelo propuesto y Xfoil. En ella se puede observar una desviación en el pico de succión debido principalmente a que la panelización del perfil no es la misma. Además, cabe mencionar que Xfoil utiliza un modelo de vorticidad de mayor orden, lo cual puede explicar las diferencias obtenidas entre los resultados numéricos presentados.

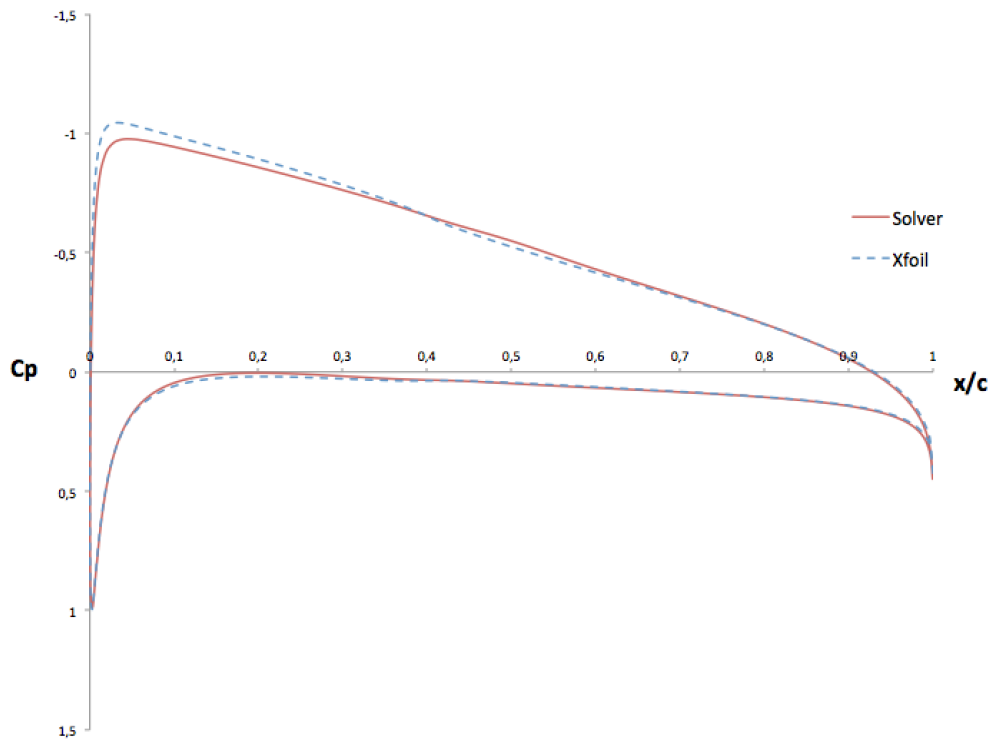


Figura 5.3: c_p vs. x/c para el modelo analizado y la referencia Xfoil.

5.2 Modelo potencial con separación de flujo

Una vez verificado el modelo de flujo potencial estacionario, se repetirá el caso anterior (NACA2412 con $\alpha = 3^\circ$) pero con los torbellinos desprendidos con un diferencial de tiempo $\Delta t = 0.05s$. Debido a la constante creación de vórtices el c_l presenta fluctuaciones a lo largo del tiempo respecto al valor obtenido para el modelo de flujo potencial estacionario, aunque al

final tiende a un valor muy similar (de hecho cabe esperar que sea ligeramente inferior). Dicha fluctuación se puede observar en la Figura 5.4.

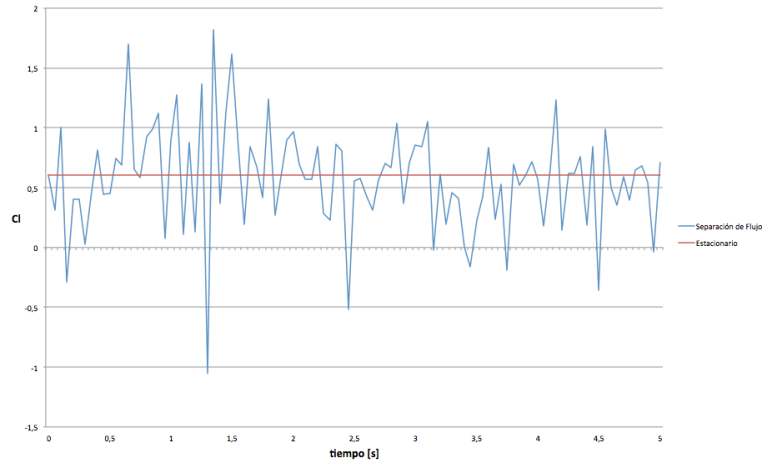


Figura 5.4: Coeficiente de sustentación en función del tiempo para un perfil NACA2412, con $N = 100$ paneles, cuerda $c = 1.0$, velocidad incidente $v_w = 1.0$, ángulo de incidencia $\alpha = 3^\circ$ y 100 pasos temporales con un $\Delta t = 0.05s$.

Una vista de la estela del perfil aguas abajo se muestra en la Figura 5.5 para el último paso de tiempo ($t = 5.0$). A una cierta distancia aguas abajo del borde de ataque, se puede distinguir la separación de la capa límite.

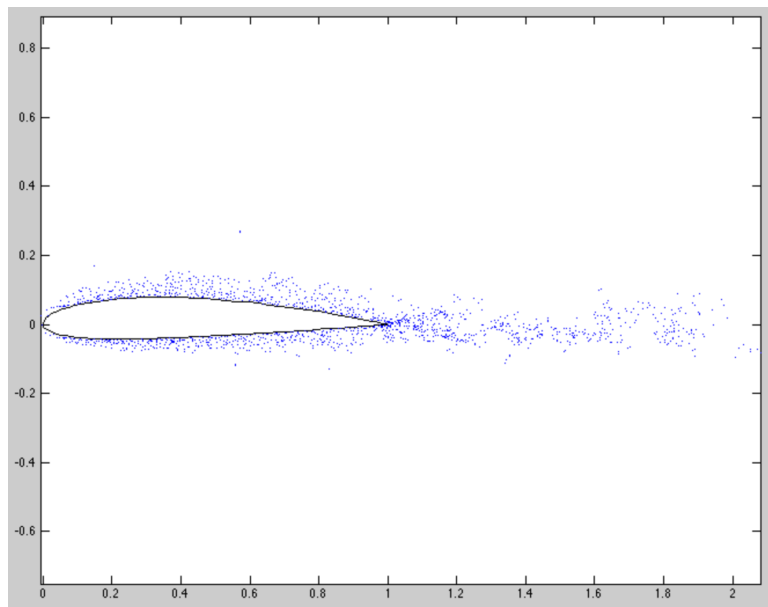


Figura 5.5: Viste de la estela formada aguas abajo de un perfil NACA2412, con $N = 100$ paneles, cuerda $c = 1.0$, velocidad incidente $v_w = 1.0$, ángulo de incidencia $\alpha = 3^\circ$ y 100 pasos temporales con un $\Delta t = 0.05s$.

A continuación se realizan simulaciones para diferentes ángulos de ataque. En la tabla 5.1 se muestran los valores del coeficiente de sustentación obtenidos en función del ángulo de ataque.

Tabla 5.1: Variación del c_l en función de α para un perfil NACA2412.

α [°]	c_l
-5	-0.3121
0	0.2195
5	0.7426
10	1.1932
15	1.5188
20	1.1903
25	1.2123

Estos valores se grafican en la figura 5.6 y se comparan con valores experimentales con el fin de comprobar su validez. Los valores representados bajo el nombre *Experimental1* son los obtenidos de [5].

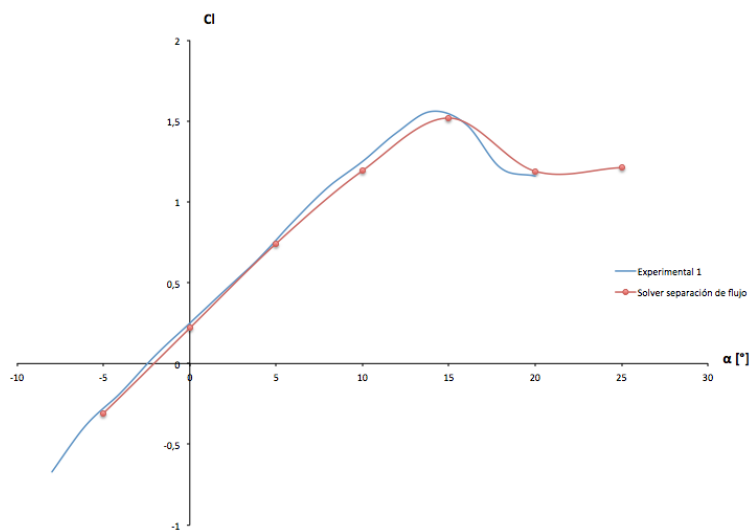


Figura 5.6: Curva c_l vs. α para un perfil NACA2412.

En la figura 5.6 se puede observar como concuerdan los datos experimentales con los obtenidos para bajos ángulos de ataque y pequeñas variaciones para grandes ángulos de ataque. Sin embargo, se observa una variación significativa alrededor del ángulo de ataque crítico ($\alpha = 14^\circ$), que representa el punto en el que se desprende el flujo y provoca una caída de la sustentación.

A continuación se presenta la estela formada aguas abajo del perfil en la figura 5.7, en la que se puede observar el desprendimiento de flujo para un ángulo de ataque mayor al de entrada en pérdida.

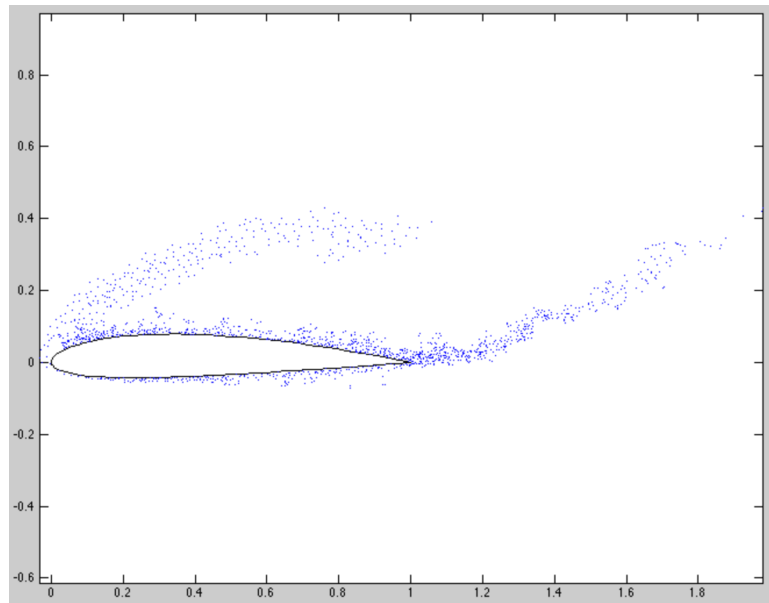


Figura 5.7: Patrón de la estela formada aguas abajo de un perfil NACA2412, con $N = 100$ paneles, cuerda $c = 1.0$, velocidad incidente $v_w = 1.0$, ángulo de incidencia $\alpha = 25^\circ$ y 100 pasos temporales con un $\Delta t = 0.05s$

6 Conclusiones y trabajo futuro

El presente trabajo resuelve problemas bidimensionales (perfiles alares) que impliquen separación de flujo potencial. El procedimiento seguido consiste en: primero, la superficie del perfil deseado se discretiza en N paneles y a través de métodos potenciales clásicos, se obtiene la vorticidad sobre cada panel; seguidamente, la vorticidad es concentrada en un solo punto y se desprende a cierta distancia del panel (este proceso emula la generación de vorticidad en la capa límite del perfil). El siguiente paso consiste en la convección de estos puntos de vorticidad desprendidos, bajo la influencia del campo de flujo, los paneles y los otros vórtices desprendidos. Por último, se calcula el coeficiente de presión de cada panel y las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre el perfil.

La motivación de este trabajo nace de la necesidad de superar una de las carencias más importantes relacionada con los métodos potenciales, en concreto, la imposibilidad de hacer frente a la separación de flujo. De esta manera, al final del proyecto, se ha desarrollado un modelo basado en el método 'full vortex cloud'. Este método es capaz de aproximarse a una solución de la ecuación de Navier-Stokes calculando por separado cada uno de los efectos representados en ésta. En este trabajo se ha realizado un estudio en el campo aerodinámico y también desde el punto de vista de la implementación numérica, principalmente en los procedimientos de convección y cálculo de fuerzas aerodinámicas, y para obtener buen resultado de ellas. Los resultados se han comparado con los obtenidos con métodos potenciales clásicos y también con datos experimentales, obteniendo una buena concordancia. Si bien muchos aspectos de la metodología desarrollada y de la implementación pueden ser mejorados, podemos decir que el método que hemos obtenido ofrece una solución potente y económica en comparación con otros métodos teóricos disponibles para el análisis de perfiles a altos ángulos de ataque.

Como trabajo futuro, existen algunos procedimientos del esquema desarrollado que pueden ser mejorados. Podemos mencionar por ejemplo la extensión a casos generales de los procedimientos destinados a ver si los torbellinos desprendidos se introducen dentro del perfil, y también se pueden hacer diferentes mejoras al código para mejorar su eficiencia. Es necesario realizar comprobaciones más exhaustivas con diferentes casos de validación (sobretudo de problemas no estacionarios) que no se han realizado aquí por falta de tiempo. Cabe mencionar también que la metodología desarrollada admite también extensiones muy interesantes, por ejemplo al caso tridimensional. Algunos lineamientos para llevarla a cabo de brindan en [2].

7 Bibliografía

- [1] R. Lewis, *Vortex Element Eethods for Eluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1991. ISBN 978-0-52-101754-1.
- [2] Pérez Gordo, José, “Flow separation modelling through discrete vortex methods,” master thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, BarcelonaTECH, Julio 20115.
- [3] Y. A. Çengel and J. M. Cimbala, *Fluid Mechanics. Fundamentals and Applications*. Singapore: McGraw-Hill, 2006. ISBN 978-0-07-338032-6.
- [4] J. Katz and A. Plotkin, *Low-Speed Aerodynamics*. Singapore: Butterworth-Heinemann, 1991. ISBN 978-0-07-050446-6.
- [5] I. Abbot and A. von Doenhoff, *Theory of Wing Sections*. U.S.A: Dover Publications, 1959. ISBN 978-0-48-660586-9.
- [6] J. Anderson Jr., *Fundamentals of Aerodynamics*. Singapore: McGraw-Hill, 1995. ISBN 978-0-07-237335-6.
- [7] Mark Drela, “Xfoil,” Diciembre 2013. URL: <http://web.mit.edu/drela/Public/web/xfoil>.
- [8] J. da Paz Sêna, “Experimental analysis or airfoil for high angle of attack,” *Scientific Iniciation Magazine of UFPA*, vol. 1, Julio 2012. Revista Virtual de Iniciación Académica de UFPA. URL: <http://www.ufpa.br/revistaic>.
- [9] Wind and Wet, “NACA 4 digit airfoil generator,” Mayo 2015. URL: <http://airfoiltools.com/airfoil/naca4digit>.
- [10] Xycoon, “Statistics - Econometrics - Forecasting ,” Diciembre 2015. URL: http://www.resacorp.com/overview_densdistr.htm.
- [11] David Legland, “geom2d,” Junio 2015. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7844-geom2d>.