

# Caminos de desviación mínima local\*

Manuel Abellanas<sup>†</sup>

Gregorio Hernández<sup>‡</sup>

Vera Sacristán<sup>§</sup>

## Resumen

Un camino que conecta dos puntos  $s$  y  $t$  en el plano es de *desviación mínima* respecto de un conjunto de puntos  $S$  si la mayor de las distancias entre un punto del camino y  $S$  es la menor posible entre todos los caminos que conectan  $s$  y  $t$ . En este trabajo estudiamos los caminos de desviación mínima que satisfacen además que todo subcamino es también de desviación mínima, a los que llamamos *caminos de desviación mínima local*.

## 1 Introducción

Consideremos un conjunto  $S$  de  $n$  puntos del plano. La desviación respecto de  $S$  de un camino en el plano que conecta dos puntos  $s$  y  $t$  es la máxima distancia entre un punto del camino y el conjunto  $S$  (entendiendo que la distancia de un punto a un conjunto de puntos es la menor entre el punto y los puntos del conjunto). Nos interesan los caminos que conectan puntos del plano alejándose lo menos posible del conjunto  $S$ . Esta situación ocurre, por ejemplo, cuando se quiere desplazar un receptor de un punto a otro dentro de una región en la que hay una red de antenas emitiendo una señal. Cuanto más próximos estén los puntos del camino a las antenas, mejor será la señal que reciba el receptor en su desplazamiento. En [1] y [5] se describe cómo obtener caminos de desviación mínima entre dos puntos. En general, existen muchos caminos de desviación mínima entre dos puntos, por lo que tiene interés seleccionar entre todos ellos los que satisfagan otras propiedades, como por ejemplo: longitud mínima, giro total mínimo, exposición mínima o máxima a la señal de las antenas, etc..

Este tipo de problemas aparecen en el diseño y análisis de redes de sensores. En [4] se plantean dos problemas: Entre todos los caminos de desviación mínima, hallar el que se mantiene más alejado de los sitios (*Maximal Breach Path*), que se aplica como test a una red de sensores para medir hasta qué punto es fácil escapar a su vigilancia, y hallar el que se mantiene más próximo a los sitios (*Maximal Support Path*), que se aplica para medir la mejor cobertura. En [3] se demuestra que existe un camino de desviación mínima en el grafo de Gabriel, por lo que se puede calcular localmente. También abordan los autores la minimización de la longitud del camino, pero se restringen al grafo de discos unidad (*Unit Disk Graph*), obteniendo una  $5/2$ -aproximación del camino óptimo en dicho grafo. En [5] se subraya que la solución sobre el grafo de discos unidad no se corresponde con la solución al problema en el plano, se mejora el algoritmo de [4] para el problema *Maximal Breach Path* y se calcula el de mínima longitud. Además se indica, sin detallar, cómo hallar el camino de desviación mínima de mínima longitud.

En este trabajo nos interesamos por los caminos que, además de ser de desviación mínima, son tales que cualquier subcamino suyo hereda dicha propiedad. Es decir, todo subcamino es a su vez un camino de desviación mínima entre sus extremos. A estos caminos los llamamos de desviación mínima local. En el apartado 2 damos las definiciones y algunas propiedades. En el apartado 3 damos dos caracterizaciones: una a partir de los diagramas de Voronoi de alcance limitado (el diagrama de Voronoi de alcance limitado  $r$  está formado por las intersecciones de las regiones del diagrama de Voronoi

---

\*Parcialmente subvencionado por los proyectos MEC MTM2008-05043, MEC MTM2006-01267 y DURSI 2005SGR00692

<sup>†</sup>Universidad Politécnica de Madrid, [manuel.abellanas@upm.es](mailto:manuel.abellanas@upm.es)

<sup>‡</sup>Universidad Politécnica de Madrid, [gregorio@fi.upm.es](mailto:gregorio@fi.upm.es)

<sup>§</sup>Universitat Politècnica de Catalunya, [Vera.Sacristan@upc.edu](mailto:Vera.Sacristan@upc.edu)

ordinario con los discos de radio  $r$  centrados en los sitios. En [2] se construye y se analiza su estructura combinatoria y en [6] los denominan *aberrant Voronoi graphs* y los emplean para resolver de forma local el *Maximal Breach Path*) y otra en función de los máximos locales de la desviación del camino. La segunda caracterización nos permite obtener en la sección 4 un algoritmo de complejidad  $O(nk)$  para el problema de decisión para caminos formados por segmentos de recta y arcos de circunferencia concéntricos con los puntos de  $S$ . Finalmente, en la sección 5 planteamos el problema de optimizar la longitud del camino de desviación mínima local y damos algunas propiedades que esperamos conduzcan a resolver el problema.

## 2 Definiciones y propiedades

**Definición 2.1.** Sean  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  un conjunto de  $n$  puntos y  $\Gamma$  un camino en el plano. La *desviación* de  $\Gamma$  respecto de  $S$  es  $d(\Gamma, S) = \max_{t \in \Gamma} \min_{i=1 \dots n} d(t, s_i)$ . Considerando todos los caminos  $\Gamma$  entre dos puntos dados del plano,  $x$  e  $y$ , la desviación de  $x$  e  $y$  respecto de  $S$  es  $d(x, y, S) = \min_{\Gamma} d(\Gamma, S)$ .

**Definición 2.2.** Diremos que  $\Gamma$  es de *desviación mínima local* si, para cada par de puntos  $x$  e  $y$  de  $\Gamma$ , el camino  $\Gamma_{|xy}$  es de desviación mínima, esto es, si  $d(\Gamma_{|xy}, S) = d(x, y, S)$ .

Empecemos dando algunos ejemplos de caminos de desviación mínima local.

**Lema 2.3.** *Dados dos sitios  $s = s_i$  y  $t = s_j$ , el camino entre  $s$  y  $t$  contenido en el árbol generador euclídeo mínimo de  $S$  es de desviación mínima local.*

**Lema 2.4.** *Dados dos puntos  $s$  y  $t$  pertenecientes, respectivamente, a las regiones de Voronoi de dos sitios  $s_i$  y  $s_j$ , sea  $\Gamma_1$  el camino entre  $s$  y  $t$  formado por el segmento  $ss_i$ , el segmento  $s_jt$  y el camino entre  $s_i$  y  $s_j$  contenido en el árbol generador euclídeo mínimo de  $S$ . El camino  $\Gamma_1$  es de desviación mínima local.*

**Lema 2.5.** *Dados dos puntos  $s$  y  $t$  pertenecientes, respectivamente, a las regiones de Voronoi de dos sitios  $s_i$  y  $s_j$ , sea  $\Gamma_2$  el camino entre  $s$  y  $t$  formado por los segmentos que unen los puntos medios de los segmentos de  $\Gamma_1$ , junto con los segmentos que unen sus extremos a  $s$  y a  $t$ , respectivamente. El camino  $\Gamma_2$  es de desviación mínima local.*

**Lema 2.6.** *Todo camino a lo largo del cual la desviación sea una función monótona es de desviación mínima local.*

**Proposición 2.7.** *Todo camino a lo largo del cual la desviación sea una función unimodal con un solo mínimo es de desviación mínima local.*

## 3 Caracterizaciones de la desviación mínima local

### 3.1 Caracterización por diagramas de Voronoi de alcance limitado

**Definición 3.1.** Dado un conjunto  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  de  $n$  puntos del plano y un número real  $r \geq 0$ , el *diagrama de Voronoi de  $S$  de alcance  $r$* ,  $Vor(S, r)$ , está formado por las regiones:

$$Vor(s_i, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, s_i) \leq d(x, s_j) \forall j \neq i \wedge d(x, s_i) \leq r\}.$$

**Definición 3.2.** Con la notación anterior, llamaremos *puntos críticos* a los puntos medios de las aristas del árbol generador euclídeo mínimo de  $S$ . Asimismo, llamaremos *valores críticos* a la mitad de las longitudes de las aristas de dicho árbol, que consideraremos ordenadas de forma creciente,  $r_1, \dots, r_{n-1}$ .

**Definición 3.3.** Con la notación anterior, llamaremos  $G_i$  a la unión de los círculos con centro en los puntos de  $S$  y radio  $r_i$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ . Asimismo,  $G_0 = \emptyset$  y  $G_n = \mathbb{R}^2$ . Denotaremos  $F_i$  la diferencia  $F_i = G_i - G_{i-1}$ , donde  $i = 1, \dots, n$ .

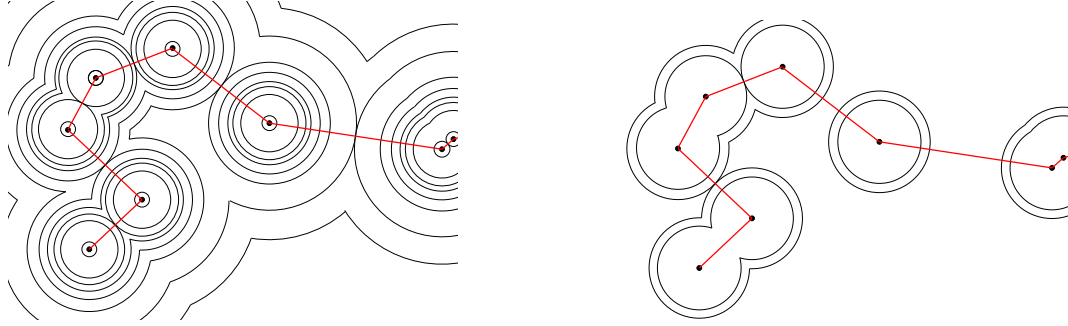


Figura 1: Los conjuntos  $G_i$  y  $F_i$  en un caso concreto.

La Figura 1 ilustra los conjuntos  $G_i$  y  $F_i$  de un conjunto de 9 puntos, para todos los valores  $i = 1, \dots, 8$ . También se muestra el árbol generador euclídeo mínimo.

**Definición 3.4.** Cada conjunto  $G_i$  tiene exactamente una componente conexa,  $C_i$ , a la que pertenece el punto medio,  $m_i$ , de la arista  $a_i$  de longitud  $2r_i$  del árbol generador euclídeo mínimo de  $S$ . Llamaremos *semicomponentes* de  $G_i$  a las dos componentes conexas de  $C_i - \{m_i\}$ .

Estamos en condiciones de presentar la caracterización de los caminos simples de desviación mínima local entre dos puntos  $s$  y  $t$ , en términos de su comportamiento a lo largo de las regiones  $G_i$  y  $F_i$ .

**Teorema 3.5.** *Un camino  $\Gamma$  simple entre dos puntos  $s$  y  $t$  del plano es de desviación mínima local si, y sólo si,*

1. *La intersección de  $\Gamma$  con cada componente conexa de  $G_i$  es conexa.*
2. *En la intersección de  $\Gamma$  con cada componente conexa del interior de cada  $F_i$ , la desviación es una función unimodal con un único mínimo, sea o no la intersección continua.*

*Demostración.* La primera condición es necesaria. Supongamos que la intersección de  $\Gamma$  con una de las componentes conexas de  $G_i$  tuviera dos componentes correspondientes, en cierta parametrización de  $\Gamma$ , a los intervalos del parámetro  $t \in [a, b]$  y  $t \in [c, d]$ , donde  $b < c$ . En tal caso, la porción del camino correspondiente a  $t \in [b, c]$  pasaría por  $F_{i+1}$  y, por lo tanto, el camino entre los puntos  $x = \Gamma(b)$  y  $y = \Gamma(c)$  no sería de desviación mínima, ya que, tal como se ilustra en la Figura 2, sería posible establecer un camino entre  $x$  e  $y$  de desviación constante, recorriendo la frontera de  $G_i$ , mientras que  $\Gamma$  conecta  $x$  e  $y$  con desviación mayor.

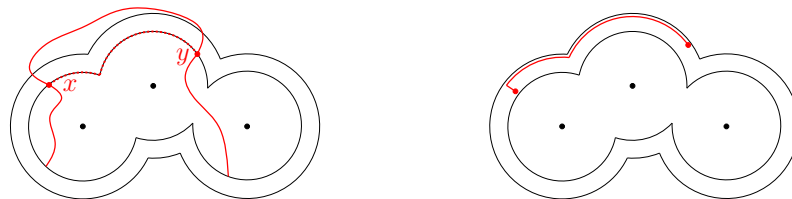


Figura 2: A la izquierda, ejemplo de camino de desviación constante entre  $x$  e  $y$  en una componente de  $G_i$ . A la derecha, ejemplo de camino monótono entre dos puntos de una misma componente del interior de una franja  $F_i$ .

La segunda condición es necesaria. Si  $\Gamma$  no cumpliera dicha condición, tendría un máximo estricto. En un entorno de ese máximo, y dentro de la componente de  $F_i$ , existirían dos puntos del camino,  $x$  e  $y$ , a lados distintos del máximo, con desviación menor a la del máximo. Entre estos dos puntos, el camino no sería de desviación mínima ya que, dada la forma de  $F_i$ , sería posible establecer un camino alternativo entre ellos, con desviación menor a la desviación a través del máximo (que es la única a lo largo del camino, ya que éste es simple). Se trata del camino siguiente: de los dos puntos, se toma el

que más dista del sitio  $s_i$  de la región de Voronoi en que se encuentra, y se avanza de forma equidistante a la frontera de  $F_i$  hasta poder acercarse de forma monótona al otro punto, tal como se ilustra en la Figura 2.

Estas condiciones son, además, suficientes. Tomemos dos puntos cualesquiera,  $x$  e  $y$ , en un camino  $\Gamma$  que las satisfaga. Se trata de demostrar que  $\Gamma|_{xy}$  es de desviación mínima. Sea  $i$  el índice más pequeño tal que  $x$  e  $y$  pertenecen a la misma componente conexa de  $G_i$ . Hay dos casos.

Si  $x$  e  $y$  pertenecen cada uno a una semicomponente distinta de  $G_i$ , entonces la propiedad 1 garantiza que el camino entre  $x$  e  $y$  está totalmente contenido en la componente de  $G_i$  y también que su desviación máxima se alcanza en el punto medio,  $m_i$ , de la arista  $a_i$ , que no es otro que el punto de tangencia entre las dos semicomponentes. Por consiguiente, el camino entre  $x$  e  $y$  es de desviación mínima, ya que cualquier camino entre  $x$  e  $y$  que salga de la componente conexa de  $G_i$  tiene desviación mayor, y cualquiera que no salga debe pasar por  $m_i$ .

En caso contrario,  $x$  e  $y$  pertenecen a la misma componente del interior de  $G_i$ . Recuérdese que  $i$  es el mínimo índice tal que  $x$  e  $y$  pertenecen a la misma componente conexa de  $G_i$ . Eso garantiza que al menos uno de los dos pertenece a la franja  $F_i$ . En el caso de que ambos pertenezcan a  $F_i$ , consideremos el más alejado del sitio  $s_i$  de la región de Voronoi en que se encuentra. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que se trata de  $x$ . En el caso de que sólo uno pertenezca a  $F_i$ , sea éste  $x$ . La propiedad 2 garantiza que el camino  $\Gamma$  es unimodal con un único mínimo en  $F_i$ , de modo que la desviación de  $\Gamma|_{xy}$  viene dada por  $d(x, s_i)$  y, por consiguiente, es mínima.  $\square$

La segunda condición de la caracterización anterior de los caminos de desviación mínima local puede reescribirse del modo siguiente:

**Proposición 3.6.** *Son equivalentes:*

- 2) *En la intersección de  $\Gamma$  con cada componente conexa del interior de cada  $F_i$ , la desviación es una función unimodal con un único mínimo, sea o no la intersección continua.*
- 2') *La intersección de  $\Gamma$  con cada componente conexa del interior de cada  $F_i$  puede tener una única componente conexa, en cuyo caso es unimodal con un único mínimo, o tener dos componentes conexas, en cuyo caso ambas son monótonas con el mínimo en la frontera entre  $F_i$  y  $F_{i-1}$ .*

## 3.2 Otras caracterizaciones

También es posible caracterizar los caminos simples de desviación mínima local en términos de sus máximos locales. Para ello se requiere la siguiente

**Definición 3.7.** Un punto  $p \in \Gamma$  es un *máximo local estricto* de  $\Gamma$  si existe un entorno (a ambos lados) de  $p$  en  $\Gamma$  en el que todos los puntos tienen desviación estrictamente inferior a la desviación de  $p$ .

Esta definición se extiende de forma natural a intervalos de puntos del camino.

**Definición 3.8.** Un intervalo (esto es, una porción conexa)  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  es un *máximo local estricto* de  $\Gamma$  si todos los puntos de  $\Gamma'$  tienen la misma desviación y existe un entorno (a ambos lados) de  $\Gamma'$  en el que todos los puntos tienen desviación estrictamente inferior.

De este modo, en ambos casos se tienen puntos a lo largo de  $\Gamma$ , a un lado y a otro del máximo estricto, con desviación estrictamente inferior. En particular, los extremos del camino no son ni pertenecen a un máximo estricto.

Estamos ya en condiciones de ofrecer una segunda caracterización de los caminos simples de desviación mínima local.

**Teorema 3.9.** *Un camino simple  $\Gamma$  es de desviación mínima local si, y sólo si, todos sus máximos locales estrictos son o contienen un punto crítico y, en él,  $\Gamma$  cambia de región de Voronoi.*

*Demostración.* La condición es suficiente. Considérense dos puntos  $x$  e  $y$  de  $\Gamma$ . Si entre ellos  $\Gamma$  no tiene ningún máximo local estricto, entonces  $\Gamma|_{xy}$  es unimodal con un único mínimo y, por lo tanto, de desviación mínima local. En particular, es de desviación mínima.

Si entre ellos hay algún máximo local estricto, consideremos el que corresponde al valor crítico mayor,  $r_i$ . En este caso, veremos que la desviación del par de puntos  $x$  e  $y$  es igual a  $r_i$ . Para ello demostraremos que  $x$  e  $y$  pertenecen necesariamente a semicomponentes distintas de  $G_i$ . Obsérvese que, si  $x$  e  $y$  pertenecieran a componentes distintas de  $G_i$ , entonces  $\Gamma$ , para conectar  $x$  e  $y$ , tendría que atravesar la franja  $F_{i+1}$  y, por consiguiente,  $\Gamma|_{xy}$  alcanzaría un máximo estrictamente mayor que  $r_i$ , contradiciendo el hecho de que todos los máximos se alcanzan en puntos críticos. Por otro lado, si  $x$  e  $y$  pertenecieran a una misma semicomponente de  $G_i$ , y puesto que  $\Gamma|_{xy}$  pasa, a través del punto crítico, a la otra semicomponente y es simple, el camino, en su recorrido entre  $x$  e  $y$ , debe volver a entrar en la semicomponente inicial y, para hacerlo, debe pasar por  $F_{i+1}$ , lo cual, como se ha visto ya, no puede ocurrir. En conclusión,  $x$  e  $y$  pertenecen a semicomponentes distintas de  $G_i$ , tal como se quería demostrar.

La condición es necesaria. Si  $\Gamma$  tiene un máximo local estricto  $p$  que no es o no contiene un punto crítico, o bien si dicho máximo local es un punto crítico pero el camino no cruza por él de una región de Voronoi a otra, entonces  $\Gamma$  no es de desviación mínima local, pues podemos utilizar el razonamiento usado en la demostración del Teorema 3.5 para comprobar que la condición segunda es necesaria.  $\square$

Para finalizar este apartado de caracterizaciones, observaremos que la desviación mínima local es una propiedad local (valga la aparente redundancia).

**Definición 3.10.** Un camino simple  $\Gamma$  es *localmente* de desviación mínima si para cada punto  $p \in \Gamma$  y para cada intervalo  $I \subset \Gamma$  de desviación constante, existe un número real  $\delta > 0$  tal que  $\Gamma' = \Gamma \cap B(p, \delta)$  (respectivamente,  $\Gamma' = \Gamma \cap B(I, \delta)$ ) es un camino de desviación mínima entre sus extremos.

**Teorema 3.11.** *Un camino simple es de desviación mínima local si, y sólo si, es localmente de desviación mínima.*

*Demostración.* Obviamente, todo camino de desviación mínima local es localmente de desviación mínima. En cuanto al recíproco, sea  $\Gamma$  un camino localmente de desviación mínima, y sean  $x$  e  $y$  dos puntos de  $\Gamma$ . Supongamos que el camino  $\Gamma|_{xy}$  no fuera de desviación mínima. Entonces tendría un máximo estricto que no coincidiría ni contendría un punto crítico, o bien que lo contendría pero el camino no cruzaría por él de una región de Voronoi a otra. En cualquiera de estos casos, es trivial comprobar que  $\Gamma$  no sería localmente de desviación mínima en  $p$  (respectivamente, en  $I$ ).  $\square$

## 4 El problema de decisión

**Teorema 4.1.** *Sea  $\Gamma$  un camino simple formado por segmentos de recta y arcos de circunferencias de radios arbitrarios, centrados en los sitios de  $S$  y contenidos en la región de Voronoi correspondiente a su centro, y sea  $k$  la complejidad de  $\Gamma$ . Conocidos  $Vor(S)$  y las aristas del árbol generador euclídeo mínimo de  $S$ , es posible decidir en tiempo  $O(nk)$  si  $\Gamma$  es o no de desviación mínima local.*

*Demostración.* El algoritmo de decisión comienza localizando el origen del camino en  $Vor(S)$ , es decir, hallando la región de Voronoi en la que se encuentra. A partir de aquí, se va recorriendo la zona de  $\Gamma$ , es decir, el conjunto de las regiones de Voronoi atravesadas por  $\Gamma$ , y se va comprobando, región por región, si  $\Gamma$  tiene máximos locales estrictos y si éstos coinciden o incluyen puntos críticos.

El coste de este algoritmo es trivialmente  $O(nk)$ .  $\square$

**Proposición 4.2.** *La intersección de un camino poligonal de complejidad  $k$  de desviación mínima local con el 1-esqueleto del diagrama de Voronoi de un conjunto de  $n$  puntos tiene complejidad  $O(nk)$  y existen ejemplos de complejidad  $\Omega(nk)$ .*

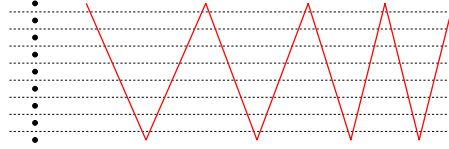


Figura 3: Camino de desviación mínima local que corta  $nk$  veces el 1-esqueleto del diagrama de Voronoi de  $S$ .

*Demostración.* La cota superior es obvia. La inferior se ilustra en la Figura 3. □

Así, pues, aunque no podemos asegurar que el problema de decisión tenga complejidad  $\Omega(nk)$ , sí podemos garantizar que cualquier algoritmo que pretenda resolverlo en tiempo  $o(nk)$  deberá ser capaz de responder la cuestión sin explorar todos los puntos de corte del camino con las aristas de Voronoi de  $S$ .

## 5 Optimización de la longitud del camino

Obsérvese que si los puntos  $s$  y  $t$  están muy alejados de los sitios de las regiones de Voronoi a las que respectivamente pertenecen, o bien si la arista más larga del camino que conecta en el árbol generador euclídeo mínimo los sitios correspondientes a las regiones de Voronoi que contienen a  $s$  y a  $t$  (denotada arista crítica entre  $s$  y  $t$  en [1]) es muy larga, entonces existen caminos no sólo de desviación mínima sino incluso de desviación mínima local entre  $s$  y  $t$  muy alejados de los sitios, tal como se ilustra en la Figura 4.

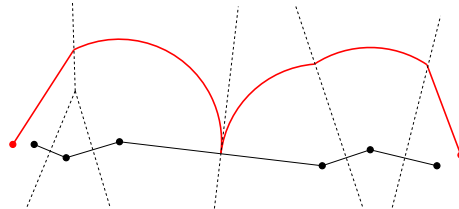


Figura 4: Ejemplo de camino de desviación mínima local que se mantiene muy alejado de los sitios.

Se plantea entonces la cuestión de hallar el camino entre dos puntos  $s$  y  $t$  que, siendo de desviación mínima local, cumpla algún criterio adicional de optimización, el más natural de los cuales es, posiblemente, el de minimización de la longitud.

**Proposición 5.1.** *El camino de desviación mínima local más corto entre dos puntos de una misma región de Voronoi es rectilíneo.*

*Demostración.* Dentro de una misma región de Voronoi, todo segmento es unimodal con un único mínimo y, por consiguiente, es de desviación mínima local. □

Sin embargo, eso no significa que el camino de desviación mínima local de longitud mínima entre dos puntos situados en regiones de Voronoi distintas sea siempre rectilíneo, ni siquiera poligonal, como se verá más adelante.

**Proposición 5.2.** *Sean  $s_i$  y  $s_j$  dos sitios adyacentes. Sea  $p$  un punto de la arista de Voronoi definida por  $s_i$  y  $s_j$ , distinto del punto medio de los dos sitios. Un camino de desviación mínima local puede pasar por  $p$  en línea recta si, y sólo si, su pendiente se encuentra entre las de las rectas tangentes en  $p$  a las circunferencias con centro en  $s_i$  y  $s_j$  que pasan por  $p$ . Si, en cambio,  $p$  es el punto medio de  $s_i$  y  $s_j$ , no hay restricciones sobre la pendiente de la recta.*

La situación se ilustra en la Figura 5.

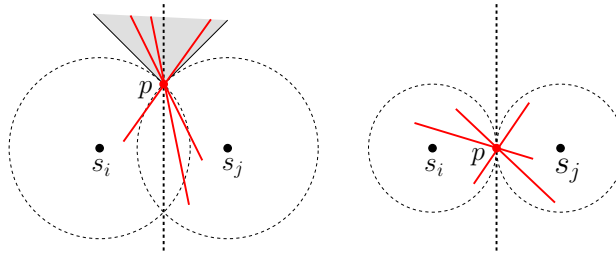


Figura 5: Pendientes permitidas en un camino de desviación mínima local rectilíneo al cruzar una arista de Voronoi.

La tangencia indicada en la proposición anterior se describe mejor en términos de la parábola de foco  $s_i$  y cuya directriz es la recta que pasa por  $s_j$  y es perpendicular al segmento  $s_i s_j$ . Denotamos por  $par(s_i, s_j)$  esta parábola.

**Lema 5.3.** Sean  $s_i$  y  $s_j$  dos sitios adyacentes, y  $p$  un punto de su arista de Voronoi, distinto del punto crítico. Una recta  $r$  que pase por  $p$  es tangente en  $p$  a la circunferencia que pasa por  $p$  y tiene centro en  $s_i$  si, y sólo si,  $r$  es tangente a la parábola  $par(s_i, s_j)$ .

Con esta herramienta podemos describir cómo son los codos de un camino poligonal simple de desviación mínima local y longitud mínima. El siguiente teorema, que se ilustra en la Figura 6, se presenta sin demostración.

**Teorema 5.4.** Sea  $\Gamma$  un camino poligonal simple. Si  $\Gamma$  es de longitud mínima de entre los de desviación mínima local, entonces todos sus vértices se encuentran sobre aristas de Voronoi y, o bien son puntos críticos, o bien son puntos  $p$  de la arista de Voronoi de sitios contiguos,  $s_i$  y  $s_j$ , tales que:

1. El segmento  $p^- p$  es tangente a la parábola  $par(s_i, s_j)$  y no contiene el punto de tangencia de su recta de soporte con dicha parábola.
2. El segmento  $pp^+$  corta al interior del círculo que pasa por  $p$  y está centrado en  $s_j$ , y el giro  $p^- pp^+$  aleja el camino  $\Gamma$  de  $par(s_i, s_j)$ .

Los puntos  $p^-$  y  $p^+$  son los puntos de intersección de  $\Gamma$  con la frontera de las regiones de Voronoi de  $s_i$  y  $s_j$ , respectivamente, o bien los puntos inicial o final de  $\Gamma$ , si éstos se encuentran en el interior de dichas regiones. Lo mismo puede darse intercambiando los papeles de  $s_i$  y  $s_j$ .

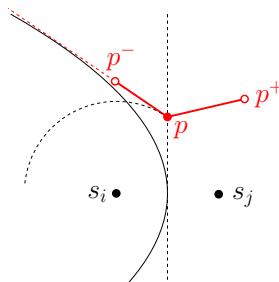


Figura 6: Codo permitido en un camino poligonal de desviación mínima local y longitud mínima.

**Observación 5.5.** El camino de desviación mínima local más corto entre dos puntos puede no ser poligonal.

En la Figura 7 se muestra un ejemplo con dos sitios  $s_1$  y  $s_2$ . Elegimos  $s \in Vor(s_1)$  y  $t \in Vor(s_2)$  situados de tal forma que 1) cada uno de ellos se encuentra en el interior de la región convexa delimitada por la parábola correspondiente a su sitio, 2) ambos están suficientemente alejados de sus sitios

respectivos y 3) ambos se encuentran a un mismo lado de la recta que une los dos sitios. Cualquier camino entre  $s$  y  $t$  debe cortar la mediatriz de  $s_1s_2$  en algún punto  $p$ . Dada la posición relativa de  $s$  y  $t$  respecto de las parábolas  $par(s_1, s_2)$  y  $par(s_2, s_1)$ , los segmentos  $sp$  y  $pt$  inciden en  $p$  por el interior de los círculos que pasan por  $p$  y tienen centros en  $s_1$  y  $s_2$ , de forma que el único camino poligonal entre  $s$  y  $t$  que es de desviación mínima local es el que pasa por el punto medio de  $s_1$  y  $s_2$ . Sin embargo, es posible construir caminos de desviación mínima local más cortos entre  $s$  y  $t$ . En particular, el camino indicado de color rojo en la Figura 7, que se obtiene por concatenación del segmento  $sq$ , el arco de circunferencia  $qp$  y el segmento  $pt$ , donde  $sq$  es tangente a la circunferencia.

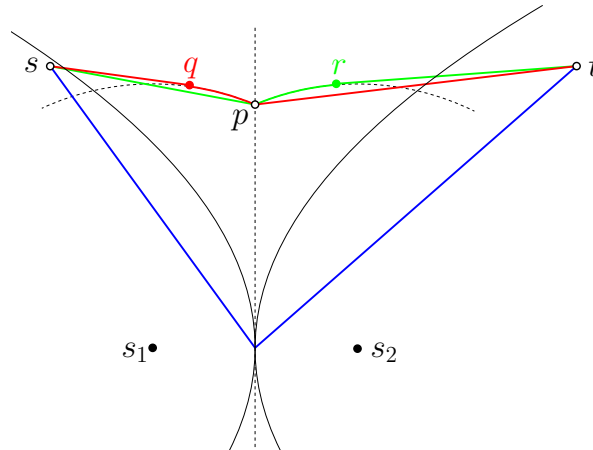


Figura 7: El camino de desviación mínima local más corto entre  $s$  y  $t$  no es poligonal, ya que los caminos  $sqpt$  y  $sprt$  son de desviación mínima.

## Referencias

- [1] M. Abellanas, G. Hernández. Optimización de rutas de evacuación, *Actas XII Encuentros de Geometría Computacional, EGC'07*, pp. 273-280, 2007.
- [2] M. Abellanas, G. Hernández, J. L. Moreno, S. Ordóñez, V. Sacristán. DVALon: una herramienta para diagramas de Voronoi y grafos de proximidad de alcance limitado, presentado a *XIII Encuentros de Geometría Computacional, EGC'09*.
- [3] X.-Y. Li, P.-J. Wan, O. Frieder. Coverage in Wireless Ad Hoc Sensor Networks, *IEEE Transactions on Computers*, 52, 6, pp. 753-763, 2003.
- [4] S. Meguerdichian, F. Koushanfar, M. Potkonjak, M. B. Srivastava. Coverage Problems in Wireless Ad-hoc Sensor Networks, *Proc. Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, INFOCOM 2001*, pp. 1380-1387, 2001
- [5] D. P. Mehta, M. A. Lopez, L. Lin. Optimal Coverage Paths in Ad-hoc Sensor Networks, *Proc. IEEE International Conference on Communications, ICC'03*, pp. 507- 511, 2003.
- [6] H. Xu, L. Huang, Y. Wan, K. Lu. Localized Algorithm for Coverage in Wireless Sensor Networks, *Proc. IEEE Sixth International Conference on Parallel and Distributed Computing, Applications and Technologies (PDCAT'05)*, pp. 750-754, 2005.