

Multiresolució de corbes i superfícies
Bsplines cúbiques
mitjançant Wavelets

Jordi Esteve i Cusiné

Report LSI-97-18-T

1. Introducció

Aquest informe descriu la implementació d'una multiresolució mitjançant Wavelets per dos tipus de corbes i superfícies B-splines cúbiques: uniformes (seqüència de nusos uniformement espiada) i interpoladores dels extrems (seqüència de nusos uniformement espiada excepte en el seus extrems, on els nusos tenen multiplicitat 4).

En realitat, el tractament dels dos tipus de Bsplines cúbics és força diferent. La multiresolució aplicada als Bsplines interpoladors dels extrems basada en l'article [FiS94] ho fa sobre espais finits de funcions originant una implementació en forma de producte de matrius banda i resolució de sistemes lineals banda diagonal. La multiresolució aplicada als Bsplines uniformes s'extret de [Chui92] i considera espais infinits de funcions donant lloc a una implementació similar a l'aplicació d'un filtre convencional: una ponderació que es va desplaçant (moving average).

Al llarg de l'informe es descriu amb més detall aquestes dues multiresolucions amb wavelets, les implementacions realitzades d'elles i una comparació entre elles.

2. Multiresolució per Bsplines interpoladors dels extrems

Aquesta multiresolució està basada en l'article [FiS94], on es descriu les tècniques d'anàlisi multiresolució i wavelets en general i la seva aplicació al cas de les corbes B-splines cúbiques interpoladores dels extrems. Wavelets és una eina matemàtica amb una gran varietat d'aplicacions en diferents camps. A continuació es descriuen les idees bàsiques sobre l'anàlisi multiresolució amb wavelets amb espais de funcions finits.

A partir del vector columna de m punts de control d'un B-spline C^n volem obtenir una versió de més baixa resolució C^{n-1} amb una menor quantitat de punts de control m' . Això es fa mitjançant un filtratge que el podem representar amb una matriu A de dimensió $m' \times m$

$$C^{n-1} = A^n C^n$$

Si la matriu A^n s'escull de manera adequada, els detalls que es perden en el procés de filtratge es poden capturar en un altre vector D^{n-1} aplicant una matriu B de dimensió $(m-m') \times m$ al B-spline inicial C^n

$$D^{n-1} = B^n C^n$$

El procés de convertir el B-spline C^n en un de més baixa resolució C^{n-1} i en detall D^{n-1} s'anomena anàlisi o descomposició. A^n i B^n són els filtres d'anàlisi i si s'han triat correctament, el B-spline original C^n es pot recuperar a partir de C^{n-1} i D^{n-1} amb els filtres de síntesi P^n i Q^n d'aquesta forma:

$$C^n = P^n C^{n-1} + Q^n D^{n-1}$$

Aquest procés s'anomena síntesi o reconstrucció.

El procés d'anàlisi pot ser aplicat recursivament al B-spline C^{n-1} i obtenir al final un conjunt de Bsplines de més baixa resolució C^{n-1}, \dots, C^0 i de detalls D^{n-1}, \dots, D^0 amb els quals sempre és possible reconstruir els Bsplines de més alta resolució. Tenim una multiresolució del B-spline original C^n .

$$\begin{array}{l}
\text{Anàlisi} \quad C^n \xrightarrow{A^n} C^{n-1} \quad \dots \quad \xrightarrow{A^1} C^0 \\
\quad \quad \quad \searrow B^n \quad \quad \quad \searrow B^1 \quad \quad \quad \searrow B^0 \\
\quad \quad \quad D^{n-1} \quad \quad \quad D^{n-2} \quad \quad \quad D^{n-3} \quad \quad \quad D^{n-4} \quad \dots \quad D^0 \\
\\
\text{Síntesi} \quad C^n \xleftarrow{P^n} C^{n-1} \quad \dots \quad \xleftarrow{P^1} C^0 \\
\quad \quad \quad \searrow Q^n \quad \quad \quad \searrow Q^1 \quad \quad \quad \searrow Q^0 \\
\quad \quad \quad D^{n-1} \quad \quad \quad D^{n-2} \quad \quad \quad D^{n-3} \quad \quad \quad D^{n-4} \quad \dots \quad D^0
\end{array}$$

Les dades C^0, D^0, \dots, D^{n-1} són la transformada wavelet del Bspline C^n , ja que són suficients per poder recuperar C^n . No es necessita espai addicional per la transformada wavelet, doncs C^0, D^0, \dots, D^{n-1} ocupa el mateix espai que els punts de control del Bspline original C^n .

Per poder implementar la multiresolució amb wavelets necessitem uns filtres d'anàlisi i síntesi A^n, B^n, P^n i Q^n adequats. Per construir aquest filtres cal estudiar les funcions i els espais lineals que representen els valors dels vectors de dades C^n i de detall D^n .

Cada vector C^n de m coeficients representa una funció que es construeix a l'aplicar aquests coeficients a unes funcions base també dites funcions d'escalat (en la nostra aplicació els m punts de control de C^n representaran un Bspline cúbic uniforme doncs per ponderar s'utilitzaran les funcions base dels Bsplines cúbics uniformes). Sent $\Phi^n(u)$ el vector fila de les funcions d'escalat que depenen del paràmetre u , la funció $f^n(u)$ s'expressa com

$$f^n(u) = \Phi^n(u) C^n$$

Les funcions d'escalat cal que siguin refinables (cada funció d'escalat en el nivell $i-1$ -funció amb menys resolució- és una combinació lineal de les funcions d'escalat del nivell i -funcions amb més resolució-). Per tant, per $i \in [1, n]$ es compleix

$$\Phi^{i-1}(u) = \Phi^i(u) P^i$$

Aquesta relació ens permet construir el filtre de síntesi P^i .

Les funcions d'escalat del nivell i són una base de l'espai lineal V^i . El fet de que aquestes funcions siguin refinables implica que els espais lineals que formen estiguin uns inclosos amb els altres: $V^0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^n$. Amb el producte escalar definit per les funcions base de l'espai lineal V^i podem definir l'espai W^i com el complement ortogonal de V^i en V^{i+1} . Aquest espai W^i , format pel conjunt de funcions base $\Psi^i(u)$ -anomenades funcions wavelet-, és tal que cadascuna de les funcions base de $\Psi^i(u)$ és ortogonal a les de $\Phi^i(u)$ i que les funcions base $\Phi^i(u)$ i $\Psi^i(u)$ juntes formen una base de l'espai V^{i+1} . Les funcions base $\Psi^{i-1}(u)$ de l'espai W^{i-1} són una combinació lineal de les funcions d'escalat $\Phi^i(u)$. Això ens permetrà calcular la matriu de síntesi Q^i

$$\Psi^{i-1}(u) = \Phi^i(u) Q^i$$

Les dues equacions anteriors es poden expressar com una de sola, concatenant les matrius

$$[\Phi^{i-1}(u) | \Psi^{i-1}(u)] = \Phi^i(u) [P^i | Q^i]$$

Les matrius d'anàlisi es poden calcular com les que satisfan la relació inversa de l'equació anterior

$$[\Phi^{i-1}(u) | \Psi^{i-1}(u)] [A^i / B^i] = \Phi^i(u)$$

De fet les matrius $[P^i | Q^i]$ i $[A^i / B^i]$ són quadrades. Per tant

$$[A^i / B^i] = [P^i | Q^i]^{-1}$$

En l'annex A de [FiS94] hi ha els detalls específics dels wavelets utilitzats. Es descriu les funcions d'escalat inicials i els filtres de síntesi (les matrius P^n i Q^n). Com que aquestes matrius són matrius banda, la reconstrucció té un cost $O(m)$. No és el cas dels filtres d'anàlisi A^n i B^n , que són matrius denses (la descomposició tindria, en principi, un cost $O(m^2)$). Hi ha un truc, descrit en [QuW93] i en l'annex B de [FiS94] que permet transformar la descomposició

$$C^{n-1} = A^n C^n$$

$$D^{n-1} = B^n C^n$$

en un sistema d'equacions banda diagonal

$$I^{n-1} C^{n-1} = (P^n)^t I^n C^n$$

$$J^{n-1} D^{n-1} = (Q^n)^t I^n C^n$$

que pot ser resol amb $O(m)$ realitzant una descomposició LU del sistema (veure [PFT92]). Les matrius I^n i J^n són les matrius producte escalar de les funcions d'escalat i de les funcions wavelet respectivament. Tenim, per tant, un algorisme que realitza una multiresolució de corbes/superfícies (descomposició + reconstrucció) molt ràpida: la podem utilitzar en temps real.

Degut a que en cada nivell de la multiresolució tenim 2^{n+3} funcions base, les corbes amb les que treballem han de tenir 2^{n+3} punts de control (4, 5, 7, 11, ...).

Les superfícies tractades són una extensió en dos dimensions del cas de les corbes: superfícies bicúbiques producte-tensorial interpoladores dels extrems. La multiresolució s'ha implementat de manera que es realitza la descomposició-reconstrucció alternativament en les dues direccions U i V (la descomposició comença en la direcció on hi ha més detall -més número de punts de control- fins que tenim el mateix detall en les dues direccions U i V. Posteriorment segueix descomposant alternativament en les dues direccions fins a obtenir una superfícies amb 4×4 punts de control. La reconstrucció procedeix a l'inversa).

3. Multiresolució per Bsplines uniformes

Aquesta multiresolució està basada en el llibre [Chui92], on es descriu les tècniques d'anàlisi multiresolució per espais de funcions d'escalat i wavelet infinits i la seva aplicació a un cas típic com són les corbes B-splines cúbiques uniformes.

En les pàgines 158 i 159 de [Chui92] es descriuen els algorismes d'anàlisi i síntesi per B-splines uniformes. De fet són mètodes genèrics, vàlids per qualsevol multiresolució que tingui els espais lineals de les funcions d'escalat i wavelet construïts a partir d'una funció base que se li aplica uns desplaçaments regulars. Per tant, i a diferència dels B-splines interpoladors dels extrems, els espais lineals de les funcions d'escalat i wavelet dels B-splines uniformes són infinits (les bases dels espais tenen infinites components). Els mètodes descrits per en C.K. Chui es basen en realitzar una ponderació de les dades velles per obtenir una de nova. Aquesta ponderació sempre es la mateixa i es va desplaçant (MA: Moving Average). L'algorisme d'anàlisi fa un MA més un submostreig (es guarda un de cada dos termes -els de la posició parell- i els índexs es divideixen per 2). L'algorisme de síntesi fa un sobremostreig més un MA (s'intercala un zero entre

cada dos termes: els índexs inicials es multipliquen per 2 i es col·loquen zeros com a mostres d'índex senar).

En l'apèndix de [Chui92] (pàgines 265 i 266) es llisten els filtres (seqüències de pesos) d'anàlisi A i B i síntesi P i Q dels B-splines cúbics per realitzar el MA descrit anteriorment. Són els següents:

FILTRES D'ANÀLISI (descomposició)

A	B
.893162856314	-1.475394519892
.400680825467	.468422596633
-.282211870811	.742097698477
-.232924626134	-.345770890775
.129083571218	-.389745580800
.126457446356	.196794277304
-.066420837387	.207690838380
-.067903608499	-.106775803373
.035226101674	-.111058440711
.036373586989	.057330952254
-.018815686621	.059433388390
-.019473269356	-.030709700871
.010066747520	-.031811811318
.010424052187	.016440944687
-.005387929819	.017028029466
-.005579839208	-.008800839839
.002883979478	-.009114745138
.002986784625	.004710957034
-.001543728719	.004878941541
-.001598768083	-.002521687975
.000826326663	-.002611601542

FILTRES DE SÍNTESE (reconstrucció)

P	Q
12 / 16	-24264 / 8!
8 / 16	18482 / 8!
2 / 16	-7904 / 8!
	1677 / 8!
	-124 / 8!
	1 / 8!

Els filtres són simètrics: El primer terme llistat de cada filtre és el terme central del filtre i la resta es repeteixen a cada banda del terme central. Mentre que els filtres P i Q són finits (5 i 11 termes respectivament) els filtres A i B són infinits (només s'ha llistat els 41 termes més importants; cal truncar la seqüència per poder-la implementar en un computador). Això ocasionarà que la descomposició no sigui precisa i en la posterior reconstrucció les dades obtingudes difereixin lleugerament de les inicials (error de l'ordre de les centèsimes per unes dades amb ordre de magnitud 1). Caldria esbrinar si, per fer la descomposició exacte i amb cost lineal, es pot aplicar algun truc similar a l'utilitzat en els B-splines interpoladors: resolució d'un sistema d'equacions banda diagonal construït a partir de les matrius I J (matrius producte escalar de les funcions d'escalat i wavelet respectivament). El problema a resoldre és que, en els B-splines uniformes, aquestes matrius banda diagonal són de dimensió infinita.

Els termes dels filtres de síntesi P i Q coincideixen amb les columnes centrals de les matrius de síntesi P i Q dels B-splines cúbics interpoladors dels extrems. Els termes dels filtres d'anàlisi A i B també els he obtingut jo mateix a l'aplicar l'algorisme d'anàlisi dels B-splines interpoladors dels extrems a una senyal impulsional (...0 0 0 1 0 0 0...). Això corrobora la semblança dels B-splines uniformes i els interpoladors dels extrems quan aquests últims tenen molts punts de control.

Cal ressaltar que els filtres P i Q no estan sincronitzats (A i B tampoc). Quan s'apliquen els termes parells de P cal aplicar els termes senars de Q i a l'inrevés. Per això, en la implementació el filtre P estan retardat 1 posició respecte Q. Recíprocament, el filtre A esta avançat 1 posició respecte B.

No és necessari aplicar tot el filtre A o B, ja que en la reconstrucció els filtres P i Q utilitzats són finits (5 i 11 termes respectivament). Per reconstruir cada dada s'utilitzen els termes parells o senars de P i de Q (s'utilitzen $5/2=2$ $11/2=5$ termes respectivament). Per tant, només cal calcular 1 + 1 termes addicionals a cada banda de les dades a l'aplicar A (5 termes de $P / 2 = 2$) i $2 + 3$ termes a cada banda de les dades a l'aplicar B (11 termes de $Q / 2 = 5$). En el cas de tenir un nombre de termes inicial senar, a l'aplicar B només fa falta calcular $2 + 2$ termes addicionals a cada banda de les dades. Per això és convenient tenir un nombre de punts de control senar, doncs podem fer una compactació mes gran. Dit d'una altra manera: Com que la descomposició el que fa és dividir el nombre de intervals de la corba per 2, es convenient que el nombre de intervals de la corba sigui sempre un nombre parell i, per tant, que el nombre de punts de control sigui senar (Bspline cúbic: #PuntsControl = #Intervals + 3).

Si volem fer una multiresolució de corbes o superfícies Bsplines cúbiques sense que el domini on està definida la corba o superfície no canviï, cal que el nombre d'intervals siguin potències de 2 i, en conseqüència, el nombre de punts de control siguin potències de $2 + 3$ ($2^n + 3$).

Això coincideix amb la multiresolució feta pels B-splines interpoladors dels extrems. El que diferencia força a les dues multiresolucions és en el nombre de termes obtinguts en les dades d'error al fer la descomposició: Els B-splines interpoladors descomponen C^n (2^{n+3} termes) amb C^{n-1} ($2^{n-1}+3$ termes) i D^{n-1} (2^{n-1} termes d'error); els B-splines uniformes descomponen C^n (2^{n+3} termes) amb C^{n-1} ($2^{n-1}+3$ termes) i D^{n-1} ($2^{n-1}+6$ termes d'error). En cada pas de la descomposició dels B-splines cúbics uniformes s'obtenen 6 termes més dels que teníem anteriorment. Aquesta seria una seqüència de descomposició de B-splines cúbics uniformes:



De totes maneres, un dels grans avantatges del mètode MA aplicat per la multiresolució dels B-splines uniformes es que es pot aplicar per qualsevol nombre de punts de control que tingui la corba o la superfície. En l'annex 2 es pot veure un exemple del que succeeix quan s'analitza una corba que té un nombre parell de punts de control.

Hi ha la possibilitat de, en l'anàlisi, considerar els termes desconeguts iguals als termes extrems. Això permet evitar que ens els extrems la corba tingui tantes oscil·lacions (i també aconseguir que l'error D sigui menor en els extrems). Veure els exemples de l'annex 2.

L'anàlisi i síntesi de B-splines cúbics uniformes té un cost lineal, doncs el MA té un cost lineal (degut a que hem truncat els filtres A i B). Tenim, per tant, un algorisme que realitza una multiresolució de corbes/superfícies cúbiques (descomposició + reconstrucció) molt ràpida: la podem utilitzar en temps real.

Les superfícies tractades són una extensió en dos dimensions del cas de les corbes: superfícies bicúbiques producte-tensorial interpoladores dels extrems. La multiresolució s'ha implementat de manera que es realitza la descomposició-reconstrucció alternativament en les dues direccions U i V (la descomposició comença en la direcció on hi ha més detall -més nombre de punts de control- fins que tenim el mateix detall en les dues direccions U i V. Posteriorment segueix descomposant alternativament en les dues direccions fins a obtenir una superfície amb 4×4 punts de control. La reconstrucció procedeix a l'inrevés).

4. Implementació

Les corbes/superfícies amb les que treballa aquest programa de multiresolució s'obtenen de fitxers ASCII de dos formats diferents:

- **Inventor**: Fitxer relacionat amb l'entorn gràfic de Silicon Graphics. Es poden visualitzar amb les eines *iview* i *SceneViewer* i ser editats amb *i3dm*. La implementació treballa amb fitxers Inventor versió V1.0 ascii que continguin corbes cúbiques interpoladores dels extrems o uniformes amb 2^{n+3} punts de control o superfícies bicúbiques interpoladores dels extrems o uniformes amb $2^{n+3} \times 2^{m+3}$ punts de control.
- **DMI**: Tipus de fitxer gràfic definit pel dept. L.S.I. Es pot visualitzar amb eines desenvolupades pel propi dept. lligades al projecte de SenerMar. La implementació realitzada només treballa amb fitxers DMI que continguin superfícies bicúbiques interpoladores dels extrems o uniformes amb $2^{n+3} \times 2^{m+3}$ punts de control.

Les multiresolucions obtingudes també es guarden en el mateix tipus de fitxers. Això permet la interacció amb programes de CAD d'edició i visualització de corbes i superfícies.

La implementació de la multiresolució de B-splines cúbics uniformes s'ha integrat amb la dels B-splines cúbics interpoladors dels extrems. S'ha fet amb el llenguatge C ANSI i s'ha subdividit en 3 mòduls:

- **bsmulti.c:** És el mòdul principal. És aquí on estan definides les matrius P^n , Q^n , I^n i J^n pels B-splines interpoladors i els filtres A, B, P i Q pels B-splines uniformes, estan definits els processos de descomposició i de reconstrucció pels dos tipus de B-splines i es realitza el tractament global d'una corba o una superfície.

Cal destacar l'esforç que s'ha fet per implementar la multiresolució amb wavelets pels B-splines interpoladors dels extrems amb la màxima precisió possible, independent de la màquina sobre la que s'executi el programa: Les matrius P^n , Q^n i I^n han estat introduïdes en forma de fraccions exactes (s'ha desenvolupat un petit programa per calcular com matrius de fraccions exactes les matrius no presents en l'annex de [FiS94]: I^0 , I^1 i I^2) i es calculen les matrius J^n amb la relació

$$J^n = (Q^{n+1})^t I^{n+1} Q^{n+1}$$

al principi del programa (degut a que es pràcticament impossible representar les matriu J^n com una matriu de fraccions exactes).

- **matriu.c:** En aquest mòdul s'ha implementat tot els tipus i operacions associades als vectors i matrius àmpliament utilitzats en el programa. Hi ha una gran varietat de tipus de matrius i les operacions que converteixen un tipus de matriu a un altre. Per exemple, el tipus *Matriu* serveix per matrius normals, el tipus *MatriuBanda* serveix per a matrius quadrades banda diagonal amb m_1 files per sota la diagonal i m_2 per sobre, i el tipus *MatriuBandaRed* serveix per guardar les matrius P^n , Q^n , I^n i J^n que tenen la mateixa sub-matriu en l'extrem superior-esquerre i inferior-dreta i la columna interior es va repetint amb un cert desplaçament cap avall. Així s'aconsegueix una gran eficiència espacial. També s'ha implementat en aquest mòdul la descomposició LU de matrius banda diagonal per resoldre sistemes d'equacions amb un cost lineal.
- **iofiles.c:** Aquest mòdul implementa la lectura i escriptura de fitxers en els formats Inventor i DMI. Aquest mòdul s'ha construït amb la flexibilitat suficient per poder introduir més endavant altres tipus de fitxers. Les rutines de lectura i escriptura de fitxers són considerablement llargues doncs es comprova que els fitxers siguin correctes en tots els seus detalls, avisant a l'usuari de les possibles incidències que es puguin trobar.

5. Conclusions

Encara que els B-splines uniformes i els interpoladors dels extrems tenen moltes similituds (els B-splines interpoladors dels extrems son uniformes excepte en els seus punts extrems), els espais de les funcions d'escalat i de les funcions wavelet difereixen considerablement (són infinits pels uniformes i finits pels interpoladors). Com a conseqüència, els algorismes d'anàlisi (descomposició) i síntesi (reconstrucció) són completament diferents en els dos tipus de B-splines.

En aquest treball s'ha pogut comprovar com treballen aquestes dues multiresolucions, les dificultats que han comportat les seves implementacions i els resultats que s'han obtingut. Les possibles millores a introduir són:

- Realitzar la multiresolució dels Bsplines cúbics uniformes amb espais finits, per poder utilitzar tots els avantatges de la multiresolució desenvolupada pels interpoladors dels extrems: Exactitud de la descomposició, cost lineal, no oscil·lacions en els extrems (no dependència dels coeficients desconeguts).
- Realitzar la simplificació dels Bsplines cúbics per qualsevol número senar de punts de control (no restringit a 2^l+3 punts de control com fins ara). Caldria calcular i introduir tot un seguit de matrius P^n , Q^n , I^n i J^n entre les existents.

Annex 1. Manual d'usuari

El programa guia en tot moment a l'usuari mitjançant missatges o petit menús. Aquest és el menú inicial:

```
MULTIRESOLUTION ENDPOINT-INTERPOLATING CUBIC B-SPLINES.  
  1. Curve  
  2. Surface  
Option (0 for quit):
```

Si es tria l'opció 2. Surface el programa ens preguntarà sobre el tipus de fitxer d'entrada i el tipus de fitxer de sortida (si les opcions triades són diferents, tindrem, a part d'una multiresolució, una conversió de fitxers):

```
Input file:  
  1. Inventor  
  2. DMI  
Option (0 for quit):
```

```
Output file:  
  1. Inventor  
  2. DMI  
Option (0 for quit):
```

Si el fitxer de sortida és del tipus Inventor hi ha la possibilitat de triar que totes les corbes/superfícies de la multiresolució es guardin en un únic fitxer Inventor (això permet veure tota la multiresolució a la vegada amb *iview*) o, pel contrari, es guardi una corba/superfície per fitxer (en el cas de fitxers DMI s'agafa la segona opció per defecte):

```
Type of Output file:  
  1. One file for all multiresolution curves  
  2. Multiple files, every one for a curve  
Option (0 for quit):
```

Finalment demanarà el nom del fitxer d'entrada. Si aquest no existeix o no es pot obrir repetirà la pregunta (fixem-nos que sempre podem sortir de l'aplicació amb un 0 -zero-):

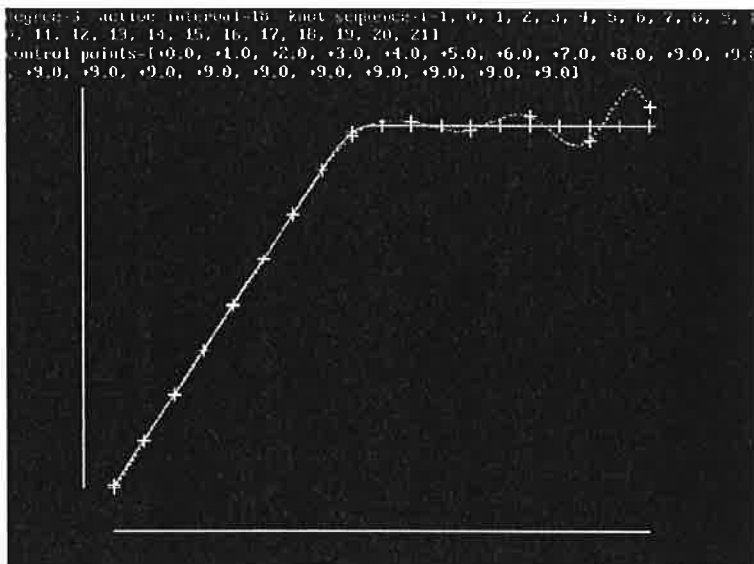
```
File name (0 for quit):
```

Si es genera un únic fitxer de sortida, aquest té el mateix nom que el d'entrada amb una lletra 'o' afegida (de output). Si es generen múltiples fitxers de sortida, aquest tenen el mateix nom que el d'entrada més uns dígitos que indica quina resolució guarden (0 resolució més baixa, 1 resolució següent, 2, 3, ..., n resolució màxima o inicial). El programa detecta si es tracta de corbes/superfícies B-splines uniformes o interpoladores dels extrems, i aplica automàticament el mètode de multiresolució corresponent.

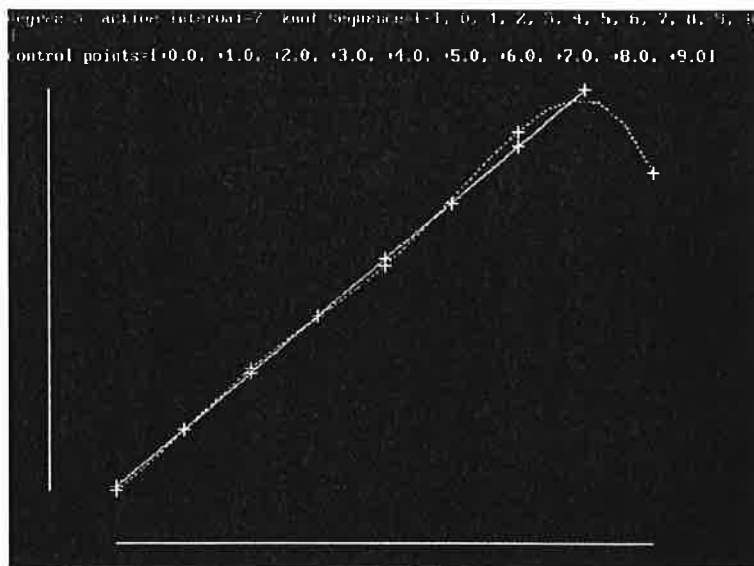
Annex 2. Exemples

A continuació es mostren alguns exemples d'anàlisi o descomposició de corbes B-splines cúbiques uniformes. Es representa només la component x de la corba respecte al paràmetre u. En línia contínua es representa la corba original i en discontinua la corba simplificada. Les dades numèriques de la capçalera corresponen a la corba original.

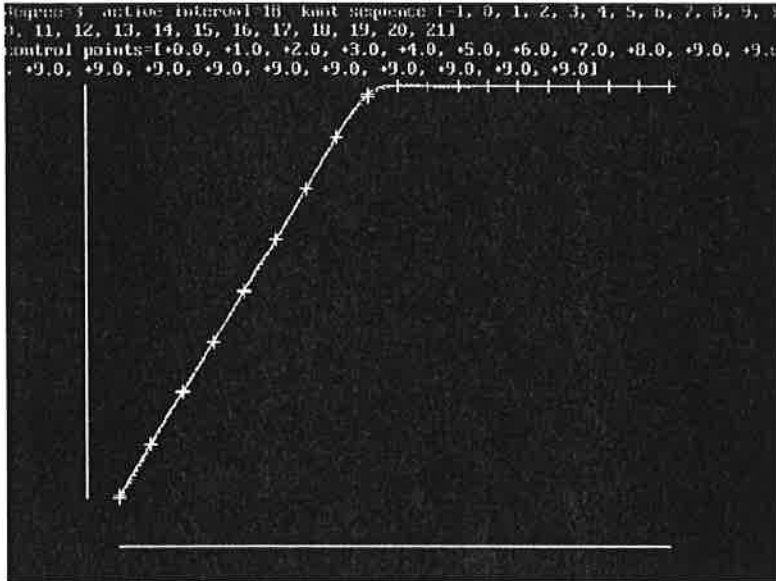
El primer exemple correspon a un B-spline de 21 punts de control i a la seva simplificació: Un B-spline de 12 punts de control (les creuetes marquen on estan situats els nusos). Fixem-nos en les oscil·lacions de la corba simplificada en els extrems. Això es degut a que els termes desconeguts s'han considerat iguals a zero:



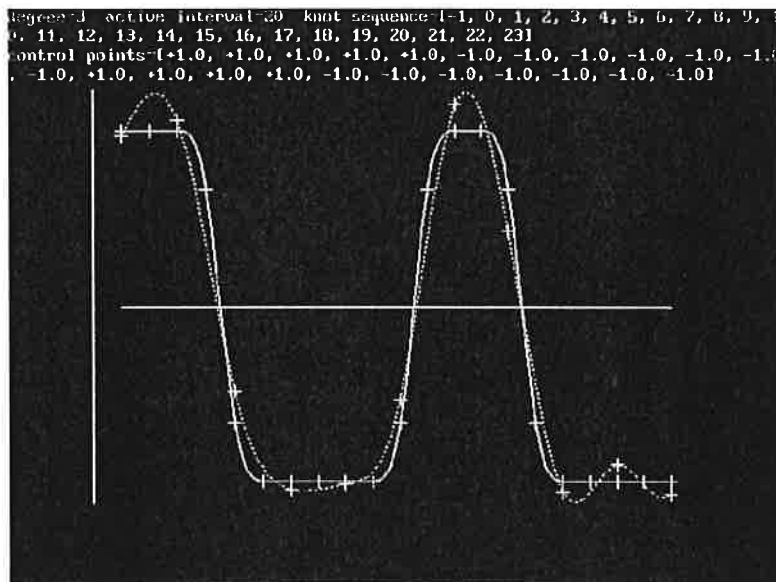
En el següent exemple la corba té un nombre parell de punts de control. En la descomposició el domini de la corba creix, doncs es passa de 10 punts de control (7 intervals) a 7 punts de control (4 intervals):

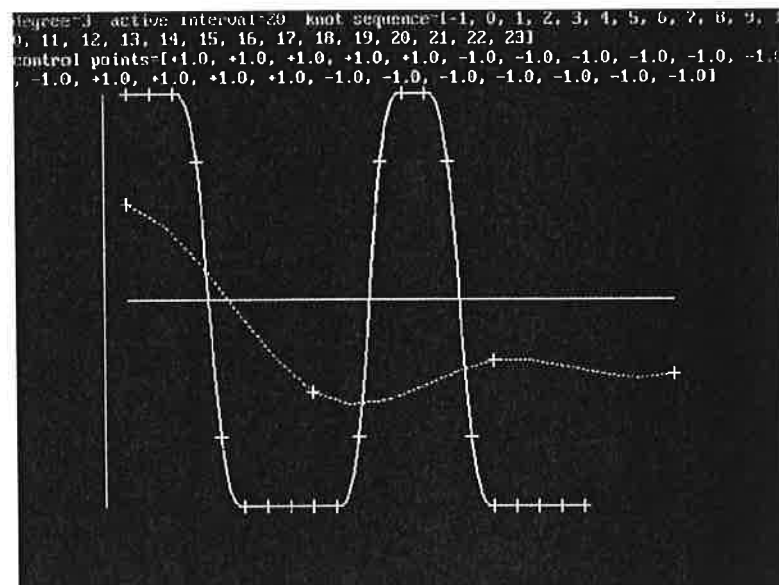
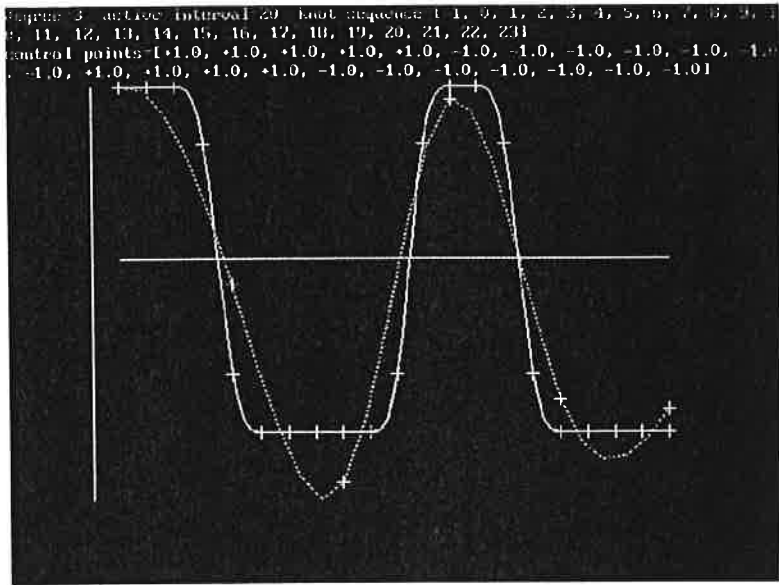


Si, en l'anàlisi, considerem els termes desconeguts iguals als termes extrems, podem evitar que ens els extrems la corba tingui tantes oscil·lacions (i també aconseguirem que l'error D sigui menor en els extrems). A continuació tenim el primer exemple (Bspline de 21 punts de control) descompost d'aquesta manera:



Finalment es mostra la descomposició successiva d'una corba de 23 punts de control en corbes de 13, 8 i 6 punts de control:





Annex 3. Bibliografia

- [Chui92] Charles K. Chui. *An introduction to Wavelets*. Academic Press. 2on edition. 1992.
- [FiS94] A. Finkelstein, D. H. Salesin. *Multiresolution Curves*. Proceedings of SIGGRAPH 94. In Computer Graphics, Annual Conferences Series, 1994. pp. 261-268.
- [PFT92] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Fetterling. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press. Cambridge, second edition, 1992.
- [QuW93] E. Quak, N. Weyrich. *Decomposition and reconstruction algorithms for spline wavelets on a bounded interval*. CAT Report 294, Center for Approximation Theory. Texas A&M University, april 1993.