Introducción a los Esquemas Algorítmicos: Apuntes y colección de problemas

María Teresa Abad

Report LSI–97–6–T

FACULTAD DE INFORMATICA

Ingeniería Informática

INTRODUCCIÓN A LOS ESQUEMAS ALGORÍTMICOS

Apuntes y Colección de Problemas

Curso 96/97

Mª Teresa Abad Soriano

Dept. L.S.I./Febrero 1997

INDICE

RECONOCIMIENTOS

Estos apuntes están específicamente realizados para ser utilizados por los alumnos de la asignatura de Introducción a los Esquemas Algorítmicos. Es una asignatura optativa de cuarto nivel de la Ingeniería de Informática de la F.I.B. Sin embargo, creo que también pueden ser de alguna utilidad para aquellas personas que quieran conocer, o simplemente 'refrescar', los esquemas algorítmicos que aquí se presentan.

En su confección he utilizado como punto de partida el material de dos profesores que me han precedido y ayudado : Ricardo Peña y Albert Llamosí. Sus apuntes de la asignatura de Tecnología de la Programación de la antigua Licenciatura de Informática de la F.I.B. han sido básicos. A estos apuntes les falta, y con toda la intención, un capítulo inicial dedicado al análisis de la eficiencia de algoritmos. Pero ese trabajo ya está hecho por José Luis Balcázar cubriendo perfectamente el nivel que la asignatura requiere. Su trabajo se encuentra en [Bal 93].
Temas como Programación Dinámica, MiniMax, etc. han quedado pendientes y espero que aparezcan en alguna edición futura.

La filiación de la colección de problemas es muy diversa. Todas las personas que en algún momento han impartido las asignaturas de Tecnología de la Programación o Estructuras de la Información, ambas de la antigua Licenciatura de Informática de la F.I.B., han aportado algo. La colección inicial ha ido creciendo con los enunciados de exámen que he ido produciendo para la asignatura de Introducción a los Esquemas Algorítmicos.

Este material docente es el resultado de la fusión y revisión de publicaciones previas a lo largo de los cursos 94-95 y 95-96. Estas publicaciones ya han ido pasando el filtro de los alumnos y a ellos he de agradecer la detección de errores y de explicaciones poco claras. De todos modos, seguro que todavía hay errores y su notificación será siempre bien recibida.
También tengo que agradecer a mis amigos y ex-compañeros de despacho Rosa María Jiménez y David Guijarro su paciencia (mucha, mucha, mucha) y sus innumerables aportaciones técnicas.

María Teresa Abad.
Febrero, 1997

1. DIVIDE Y VENCERAS : Divide & Conquer

1.1. PRINCIPIOS

El esquema de Divide y Vencerás es una aplicación directa de las técnicas de diseño recursivo de algoritmos.

Hay dos rasgos fundamentales que caracterizan los problemas que son resolubles aplicando el esquema de Divide y Vencerás. El primero de ellos es que es necesario que el problema admita una formulación recursiva. Hay que poder resolver el problema inicial a base de combinar los resultados obtenidos en la resolución de un número reducido de subproblemas. Estos subproblemas son del mismo tipo que el problema inicial pero han de trabajar con datos de tamaño estrictamente menor. Y el segundo rasgo es que el tamaño de los datos que manipulan los subproblemas ha de ser lo más parecido posible y debe decrecer en progresión geométrica. Si n denota el tamaño del problema inicial entonces n/c, siendo $c>0$ una constante natural, denota el tamaño de los datos que recibe cada uno de los subproblemas en que se descompone.

Estas dos condiciones están caracterizando un algoritmo, generalmente recursivo múltiple, en el que se realizan operaciones para *fragmentar* el tamaño de los datos y para *combinar* los resultados de los diferentes subproblemas resueltos.

Además, es conveniente que el problema satisfaga una serie de condiciones adicionales para que sea rentable, en términos de eficiencia, aplicar esta estrategia de resolución. Algunas de ellas se ennumeran a continuación :

1/ En la formulación recursiva nunca se resuelve el mismo subproblema más de una vez.

2/ Las operaciones de fragmentación del problema inicial en subproblemas y las de combinación de los resultados de esos subproblemas han de ser eficientes, es decir, han de costar poco.

3/ El tamaño de los subproblemas ha de ser lo más parecido posible.

4/ Hay que evitar generar nuevas llamadas cuando el tamaño de los datos que recibe el subproblema es suficientemente pequeño. En [BB 90] se discute cómo determinar el tamaño umbral a partir del cual no conviene seguir utilizando el algoritmo recursivo y es mejor utilizar el algoritmo del caso directo.

Ahora ya podemos proponer un esquema algorítmico genérico para el Divide y Vencerás como el que viene a continuación :

```
función DIVIDE_VENCERAS ( n es T1 ) dev ( y es T2 )
{ Pre : Q (n) }
    [    caso_directo( n ) ---> y := solución_directa( n )
    [] caso_recursivo( n ) --->
          < n1, n2, ..., nk > := FRAGMENTAR( n )
          /* se fragmenta x en k trozos de tamaño n/c cada uno */
          r1 := DIVIDE_VENCERAS( n1 );     r2 := DIVIDE_VENCERAS( n2 );
          ... ; rk := DIVIDE_VENCERAS( nk );
          y := COMBINAR( n1, n2, ..., nk, r1, r2, ..., rk );
    ]
{ Post : y = SOLUCION ( n ) }
    dev ( y )
ffunción
```

Existen casos particulares de aplicación del esquema que se convierten en degeneraciones del mismo. Por ejemplo cuando alguna de las llamadas recursivas sólo se produce dependiendo de los resultados de llamadas recursivas previas, o cuando el problema se fragmenta en más de un fragmento pero sólo se produce una llamada recursiva. Esto último sucede en el algoritmo de *Búsqueda dicotómica* sobre un vector ordenado en el que se obtienen dos fragmentos pero sólo se efectúa la búsqueda recursiva en uno de ellos.

El coste del algoritmo genérico DIVIDE_VENCERAS se puede calcular utilizando el segundo teorema de reducción siempre que se haya conseguido que los subproblemas reciban datos de tamaño similar. Entonces, la expresión del caso recursivo queda de la siguiente forma:

$$T_2(n) = k \cdot T_2(n/c) + \text{coste}\ (\ MAX(\ \text{FRAGMENTAR, COMBINAR}\ )\ )$$

Conviene destacar que la utilización de este esquema NO GARANTIZA NADA acerca de la eficiencia del algoritmo obtenido. Puede suceder que el coste empeore, se mantenga o mejore respecto al de un algoritmo, probablemente iterativo, que ya se conocía de antemano. En los apartados siguientes veremos las tres situaciones posibles.

El algoritmo de Búsqueda dicotómica y el de ordenación rápida, *Quicksort* (Hoare, 1962), son dos aplicaciones clásicas del esquema de Divide y Vencerás (se supone que ambos algoritmos son bien conocidos por el lector).
La recurrencia de la Búsqueda dicotómica es $T_{bd}(n) = T_{bd}(n/2) + 1$, y su coste es $\theta(\log n)$. Quicksort presenta un comportamiento menos homogéneo. En él el tamaño de los

fragmentos a ordenar depende de la calidad del pivote. Un buen pivote, por ejemplo la mediana, construye dos fragmentos de tamaño *n/2*, pero un mal pivote puede producir un fragmento de tamaño *1* y otro de tamaño *n-1*. En el caso de utilizar un buen pivote la recurrencia es $T_b(n) = 2 \cdot T_b(n/2) + \theta(n)$ lo que da un coste de $\theta(n \cdot \log n)$. En el otro caso la recurrencia es absolutamente diferente, $T_m(n) = T_m(n-1) + \theta(n)$, que tiene un coste de $\theta(n^2)$. Estos son los costes en el caso mejor y el caso peor, respectivamente, del algoritmo del Quicksort. A pesar del coste en el caso peor, su coste en el caso medio es también $\theta(n \cdot \log n)$ lo que le convierte en un algoritmo de ordenación eficiente.

1.2. MULTIPLICACION DE ENTEROS GRANDES : Karatsuba y Ofman

El algoritmo de Karatsuba y Ofman es una aplicación directa del esquema de Divide y Vencerás. El problema que resuelve es el de obtener el producto de dos enteros de gran tamaño. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el tamaño de los enteros a multiplicar es *n*, es decir, cada entero ocupa *n* posiciones que pueden ser bits o dígitos, y que *n* es potencia de dos.

Existe un algoritmo muy conocido y que aprendimos en el colegio que tiene un coste de $\theta(n^2)$. Se puede intentar resolver el mismo problema pero aplicando Divide y Vencerás. El tamaño de los enteros a multiplicar se puede reducir a base de dividir entre dos su longitud. De esta forma los dos enteros iniciales de tamaño *n* se convierten en cuatro enteros de tamaño *n/2*. Una vez obtenidos los fragmentos, se calculan recursivamente los nuevos productos entre ellos y luego se combinan adecuadamente sus resultados para obtener el producto de los dos enteros iniciales. Concretando, supongamos que se quiere calcular $X \cdot Y$, y que *A* contiene los *n/2* dígitos más significativos de *X*, y *B* contiene los *n/2* dígitos menos significativos de *X* (*C* y *D* representan lo mismo pero respecto de *Y*), es decir :

$$X = A \cdot b^{n/2} + B, \qquad Y = C \cdot b^{n/2} + D \quad (b = \text{base en que están expresados } X \text{ e } Y)$$

Fácilmente puede comprobarse que

$$X \cdot Y = A \cdot C \cdot b^n + (A \cdot D + B \cdot C) \cdot b^{n/2} + B \cdot D,$$

Se tiene que para calcular $X \cdot Y$ hay que efectuar 4 productos entre enteros de tamaño *n/2*. La recurrencia que se obtiene es $T(n) = 4 \cdot T(n/2) + \theta(n)$ y su coste asociado es $\theta(n^2)$.

Esta solución, pese a utilizar la técnica de Divide y Vencerás, no consigue mejorar el coste de la solución escolar, sólo lo iguala. En el algoritmo propuesto por Karatsuba y Ofman se aplica exactamente la misma fragmentación del problema que acabamos de utilizar, pero se reduce el número de nuevos productos a calcular. Se tiene que :

$$X \cdot Y = A \cdot C \cdot b^n + ((A-B) \cdot (D-C) + A \cdot C + B \cdot D) \cdot b^{n/2} + B \cdot D$$

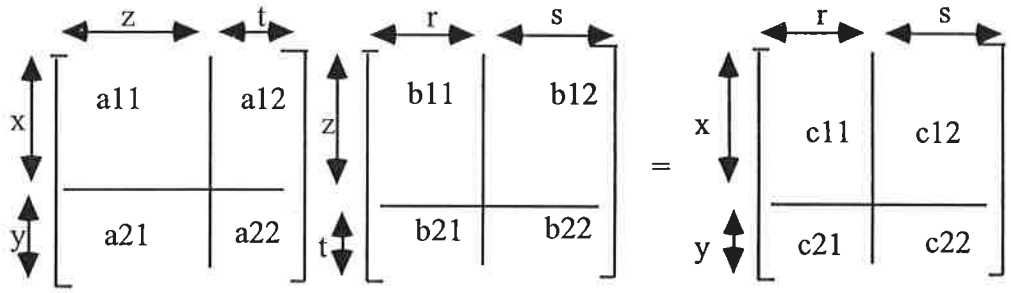
De este modo se calculan tres nuevos productos entre enteros de tamaño *n/2*. La nueva recurrencia que se obtiene es $T(n) = 3 \cdot T(n/2) + \theta(n)$ y su coste asociado es $\theta(n^{1.57})$. El tamaño umbral es $n \leq 500$, es decir, si hay que multiplicar enteros de longitud superior a 500 bits ó dígitos conviene utilizar el algoritmo de Karatsuba y Ofman, pero si los enteros son

más pequeños es más eficiente utilizar el algoritmo del colegio. En [BB 90] y [AHU 83] pueden encontrarse diferentes versiones de este algoritmo.

En [BM93] se presenta una solución distinta para este problema. Aplicando una técnica de Divide y Vencerás, similar a la explicada aquí, se obtiene una solución que parece tener un coste ¡ lineal !, pero después de calcular el coste real se llega a que la solución tiene un coste cuadrático. Resulta muy instructivo desarrollar todo el cálculo del coste.

1.3. PRODUCTO DE MATRICES : Algoritmo de Strassen

El problema que ahora se plantea es el de calcular el producto de matrices de gran tamaño. Si se supone que las matrices son cuadradas y de tamaño *n* (*n* filas y *n* columnas) el algoritmo utilizado habitualmente y aprendido en el bachillerato tiene coste $\theta(n^3)$.
Sin embargo, una aplicación directa de la técnica de Divide y Vencerás produce la siguiente solución : fragmentar cada matriz en cuatro submatrices cuadradas y después efectuar ocho productos con esas submatrices para obtener el producto de las dos matrices iniciales. Como el número de llamadas recursivas es ocho, la dimensión de cada submatriz es la mitad respecto de la inicial, es decir *n/2*, y sumar matrices cuesta $\theta(n^2)$, se puede comprobar que el coste de este algoritmo es también $\theta(n^3)$ y que, por tanto, no se ha conseguido mejorar el coste del algoritmo escolar.
La siguiente figura ilustra esta solución Divide y Vencerás :



$$c11 = a11 \cdot b11 + a12 \cdot b21$$
$$c12 = a11 \cdot b12 + a12 \cdot b22$$
$$c21 = a21 \cdot b11 + a22 \cdot b21$$
$$c22 = a21 \cdot b12 + a22 \cdot b22$$

El algoritmo de Strassen, al igual que el de Karatsuba y Ofman, intenta mejorar el coste del algoritmo a base de reducir el número de llamadas recursivas (nuevos productos a calcular) y consigue siete en lugar de los ocho de la solución anterior. A continuación se muestra la solución de Strassen en la que *c11*, *c12*, *c21* y *c22* son las cuatro submatrices que forman la matriz que contiene el resultado del producto final y P, Q, ..., V son los nuevos siete productos que hay que calcular a partir de la fragmentación de las dos matrices iniciales en ocho submatrices cuadradas.

$$c11 = P + S - T + V, \quad c12 = R + T, \quad c21 = Q + S \quad \text{y} \quad c22 = P + R - Q + U$$

donde $P = (a11 + a22)\cdot(b11 + b22)$
$Q = (a21 + a22)\cdot b11$
$R = a11\cdot(b12 - b22)$
$S = a22\cdot(b21 - b11)$
$T = (a11 + a12)\cdot b22$
$U = (a21 - a11)\cdot(b11 + b12)$
$V = (a12 - a22)\cdot(b21 + b22)$

La recurrencia que se obtiene es $T(n) = 7\cdot T(n/2) + \theta(n^2)$ y su coste asociado es $\theta(n^{2.81})$. Cuando $n \geq 120$ esta solución es mejor que la clásica. El algoritmo puede verse en [HS 78].

1.4. UN ALGORITMO DE ORDENACION : Mergesort

Otro algoritmo interesante y sumamente sencillo, que utiliza la técnica que aquí se presenta, es el algoritmo de ordenación por fusión, *Mergesort* (Von Neumann, 1945). Supongamos que se ha de ordenar una secuencia de *n* elementos. La solución Divide y Vencerás aplicada consiste en fragmentar la secuencia de entrada en dos subsecuencias de tamaño similar, ordenar recursivamente cada una de ellas y, finalmente, fusionarlas del modo adecuado para generar una sola secuencia en la que aparezcan todos los elementos ordenados.
En el algoritmo del Mergesort que se presenta a continuación, y con el fin de facilitar la escritura del mismo, se supone que la secuencia a ordenar es de naturales y está implementada en el vector *a*.

```
función MS ( a es vector[1..n]; i, j es nat ) dev ( a es vector[1..n] )
{ Pre : (1≤ i≤j≤n ) ∧ (a=A) }
        [ i = j ---> seguir
        [] i < j ---> q := ⌊( i + j ) div 2⌋
                      a := MS( a, i, q )
                      a := MS( a, q+1, j )
                      a := FUSION( a, i, q, j )
        ]
{ Post : es_permutación(a,A) ∧ ordenado(a,i,j) }
        dev ( a )
ffunción
```

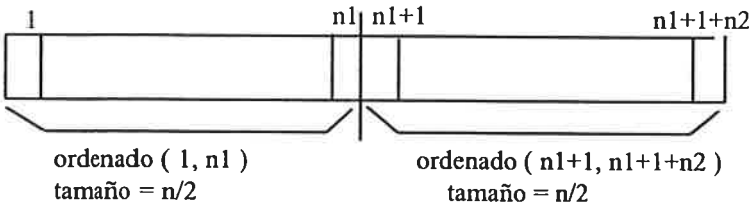
La especificación de la función FUSION, que corresponde a la función genérica COMBINAR del esquema, queda como sigue:

```
función FUSION ( a es vector; i, q, j es nat ) dev ( a es vector )
{ Pre : (a=A) ∧ ordenado(a,i,q) ∧ ordenado(a,q+1,j) }
{ Post : es_permutación(a,A) ∧ ordenado(a,i,j) }
```

La implementación tradicional de la función FUSION requiere un coste $\theta(n)$ y consiste en procesar secuencialmente las dos subsecuencias de entrada ordenadas. A cada paso se decide de qué subsecuencia de entrada se elige el elemento para que vaya a la secuencia de salida al lugar que ocupará definitivamente. Usando una fusión de este tipo el Mergesort tiene un coste de $\theta(n \cdot \log n)$ que se obtiene al resolver la recurrencia $T(n)= 2 \cdot T(n/2) + \theta(n)$.

¿ Por qué no intentar aplicar de nuevo la técnica de Divide y Vencerás pero ahora para resolver el problema de la fusión ?. En la precondición de FUSION se indica que recibe dos secuencias ordenadas de tamaño *n/2*, y en su Postcondición se dice que ha de producir otra secuencia, también ordenada, de tamaño *n*. El nuevo algoritmo de fusión, que llamaremos FUSION_DC, parte cada una de las dos secuencias de entrada en dos nuevas mitades. Así se consigue que cada mitad tenga tamaño *n/4*. Luego se aplica FUSION_DC tres veces sobre las nuevas cuatro subsecuencias de entrada para obtener la de salida ordenada. El siguiente algoritmo muestra esta solución con todos los detalles.

```
función FUSION_DC ( a es vector; i, q, r, j es nat ) dev ( b es vector )
{ Pre : (a=A) ∧ ordenado(a,i,q) ∧ ordenado(a,r,j) }
        [ i =q ∧ r=j ---> [ a(i) ≤ a(j) ---> b:= a
                          [] a(i) > a(j) ---> b:= int(a, i, j)
                          ]
        [] i<q ∨ r<j  ---> /* cálculo de las nuevas zonas de partición */
                          k := ( i + q ) div 2;          f := ( r + j ) div 2;
/* estas son las 4 zonas que hay que explorar : [i ... k] [k+1 ... q] () [r ... f] [f+1 ... j], cada
zona tiene tamaño n/4 y está ordenada */
                          b1 := FUSION_DC( a, i, k, r, f )
/* se han fusionado las partes izquierdas de los intervalos: [i ... k]  con [r ... f] */
                          { n1 = (k-i+1) + ( f-r+1 ) y ordenado(b1, 1, n1) }

                          b2 := FUSION_DC( a, k+1,q, f+1, j)
/* se han fusionado las partes derechas de los intervalos: [k+1 ... q]  con [ f+1 ... j ] */
                          { n2 = (q- k + j - f ) y ordenado (b2, 1, n2) }

                          b:= CONCATENAR ( b1, b2 )
/* se ha construido un nuevo vector b simplemente concatenando b1 y b2. El nuevo vector b
satisface :
```



*/

```
/* Notar que los elementos de b que ocupan las posiciones desde 1 a n1/2 y los que ocupan
las posiciones desde (n1+1+n2)/2 hasta n1+1+n2 ya están definitivamente bien colocados y,
por tanto, sólo hace falta ordenar el resto de los elementos. Como se repiten las condiciones
de entrada del algoritmo, 2 zonas ordenadas que hay que fusionar, se procede exactamente
de la misma forma : generando 4 zonas pero ahora sólo hace falta fusionar las dos centrales
*/
                        ii := 1;    qq := n1;    rr:= n1+1;    jj := n1+1+n2;
                        kk := ( ii + qq ) div 2;    ff := ( rr + jj ) div 2;
                        b := FUSION_DC( b, kk+1, qq, rr, ff )
/* se han fusionado las partes centrales de los intervalos: [kk+1 ... qq]  con [ rr ... ff ] */
                        { ordenado(b, 1, jj) }
        ]
{ Post : es_permutación(b, A[i..q]&A[r..j] ) ∧ ordenado(b,1,jj) ∧ jj=(q-i+1)+(j-r+1) }
        dev ( b )
ffunción
```

La llamada inicial a FUSION_DC se hace desde MS con los argumentos (a, i, q, q+1, j). Argumentar la corrección de esta solución resulta un ejercicio interesante.

El siguiente ejemplo ilustra el funcionamiento del algoritmo propuesto. Se tienen las dos siguientes secuencias ordenadas, con cuatro elementos cada una, que hay que fusionar para obtener una sola ordenada con todos los elementos.

1, 20, 30, 40 (()) 2, 3, 5, 7

La llamada a FUSION_DC desde MS efectua la fragmentación y se obtienen 4 zonas con los siguientes elementos [1,20] [30,40] (()) [2,3] [5,7]. Después de dos llamadas a FUSIÓN_DC en que se habrán fusionado las partes izquierdas ([1,20] con [2,3]) y las derechas ([30,40] con [5,7]) de cada una de las zonas, el resultado será :

1, 2, 3, 20 (()) 5, 7, 30, 40

bien colocados

y sólo queda ordenar la parte central ([3,20] y [5,7]) lo que se consigue con la tercera llamada a FUSION_DC. Finalmente se tiene una secuencia totalmente ordenada.

El coste de FUSION_DC se puede calcular aplicando la recurrencia :

$$T(n,n) = \begin{cases} 1 & n=2 \\ 3.T(n/2,n/2) + 1, & n>2 \end{cases}$$

con lo que se consigue un coste de $\theta(n^{\log_2 3}) = \theta(n^{1.57})$. Este resultado es una muestra de lo mencionado en la sección 1.1 : esta técnica no garantiza nada sobre la calidad de la solución

obtenida. En este caso, el algoritmo de fusión obtenido aplicando Divide y Vencerás es peor que la solución clásica para fusión que tiene un coste de $\theta(n)$.

1.5. EL PROBLEMA DE LA SELECCION

Sea *T* un vector de *n* elementos naturales y sea *k* una constante tal que $1 \leq k \leq n$. Diseñar un algoritmo que devuelva aquel elemento de *T* que cumple que si *T* estuviera ordenado crecientemente, el elemento devuelto sería el que ocuparía el *k*-ésimo lugar.

Existe una estrategia evidente para obtener la solución a este problema. Consiste en ordenar crecientemente el vector y luego devolver el elemento que ocupa la posición *k*-ésima. Su coste es $\theta(n \cdot \log n)$ debido a la ordenación previa que hay que realizar.

Sin embargo, la estrategia buena es, como no, un Divide y Vencerás. Esta solución utiliza mecanismos que ya aparecen en otros algoritmos : del Quicksort hereda el mecanismo de selección de un pivote y la idea de organizar la información respecto de ese pivote (los menores a un lado y los mayores a otro), y como en la búsqueda dicotómica, sólo busca en la zona que le interesa. En concreto, el algoritmo que se presenta a continuación, una vez seleccionado un pivote, organiza el vector en 3 zonas : los elementos menores que el pivote, los que son igual que el pivote y los mayores que él. Al tiempo que hace la distribución, cuenta el número de elementos que compone cada zona, y el tamaño de cada una y el valor de *k* le permiten decidir en qué zona se encuentra el elemento *k*-ésimo que anda buscando.

```
función SELECCIONAR ( T es vector; n, k es nat ) dev ( x es nat )
{ Pre : 1≤k≤ n }
/* n es la dimensión del vector T y k es el elemento buscado */
    [ n≤tamaño_umbral --->  T := ORDENAR_CRECIENTEMENTE( T );
                            x := T[k]
    [] n>tamaño_umbral --->  p:= PIVOTE(T, 1, n);
                            u := num_elems(T, 1, n, < p);
                            v := num_elems(T, 1, n, ≤ p );
    /* u cuenta los elementos de T, entre 1 y n, que son estrictamente menores que el
    pivote y v aquellos que son menores o iguales que el pivote. Queda claro que
    estrictamente mayores que el pivote habrá n-v */

    /* la cantidad de elementos de u y v y su relación con el valor de la k, permiten
    plantear la búsqueda en 3 zonas */
                            [    k ≤ u   ---> U := CONST_VECTOR( T , <p, 1, u )
                             /* U contiene los elementos de T que son menores que
                             el pivote. Los índices de U van desde 1 a u */
                                          x := SELECCIONAR( U, u, k )
                            [] u < k ≤ v ---> x := p
                            /* el pivote es el elemento buscado */
```

```
                    []   k > v   ---> V := CONST_VECTOR( T , >p, 1, n-v )
                    /* V contiene los elementos de T que son mayores que
                    el pivote. Los índices de V van desde 1 a n-v */
                                    x := SELECCIONAR( V, n-v, k-v )
    ]
{ Post :  ( N i : 1≤i≤ n : T[i] ≤ x ) ≥ k }
    dev ( x )
ffunción
```

Para calcular el coste de este algoritmo se necesita conocer, previamente, el coste de las funciones que utiliza. Supongamos, inicialmente, que PIVOTE selecciona un buen pivote, es decir, la mediana del vector y que es capaz de hacerlo en, como mucho, O(n). Por otro lado, no es difícil ver que num_elems y CONST_VECT pueden hacerse a la vez y que requieren O(n). De este modo se tiene que la recurrencia que se plantea es :

$T(n) = T(n/2) + \theta(n)$, de donde se obtiene que $T(n) = \theta(n)$

No está nada mal : se pasa de coste $\theta(n \cdot \log n)$, usando la solución evidente, a coste $\theta(n)$ con una solución más sofisticada. Pero este cálculo se ha hecho suponiendo que PIVOTE se comportaba de la mejor manera posible : fragmentando el vector en 2 mitades de tamaño muy similar. Ahora hay que conseguir que PIVOTE funcione de la forma deseada y el problema está en cómo calcular la mediana en tiempo $\theta(n)$. La idea es recurrir al propio SELECCIONAR para obtener la mediana y utilizarla como pivote. En realidad, es suficiente con tener la pseudomediana y existe un algoritmo que es capaz de encontrarla con un coste de O(n). La nueva función que calcula la pseudomediana como pivote es :

```
función PIVOTE ( S es vector; n es nat ) dev ( m es nat )
{ Pre : CIERTO }
        j := n div 5;
        [  n mod 5 = 0 ---> seguir
        [] n mod 5 ≠ 0 ---> j := j+ 1
        ]
        /* j indica cuántos grupos de 5 elementos se pueden construir a partir del vector de
        entrada. A lo sumo existe un grupo con menos de 5 elementos y no vacio */
        Para i = 1 hasta j hacer
                T[i] := MEDIANA ( S, 5i -4,  5i )
                /* T[i] contiene el valor de la mediana exacta de los 5 elementos de S
                que se están explorando ( los que van de la posición 5i -4 a la 5i ). Al
                mismo tiempo que se calcula la mediana, se ordenan los 5 elementos
                tratados. El coste de la operación MEDIANA es O(1) */
        fpara
        /* T desde 1 a j contiene las medianas exactas de los j grupos de 5 elementos que
```

```
        se han obtenido a partir del vector de entrada */
        /* llamada a Seleccionar para calcular la mediana ( j div 2 ) de las j medianas */
        m := SELECCIONAR( T, j, j div 2 )
{ Post : m es la pseudomediana de los n elementos del vector de entrada S }
        dev ( m )
ffunción
```

El coste de calcular el pivote de esta forma es $T_{pivote}(n) = T_{seleccionar}(n/5) + \theta(n)$. Esta expresión se puede generalizar suponiendo que en lugar de formar grupos de 5 elementos, se forman grupos de q elementos. Entonces la expresión del coste que se obtiene es :

$$T_{pivote}(n) = T_{seleccionar}(n/q) + \theta(n)$$

El coste de SELECCIONAR se puede expresar ahora de la siguiente forma :

$T_{seleccionar}(n) =$ coste de calcular pivote ----------> $T_{seleccionar}(n/q) + \theta(n)$
+ coste de construir U y V ----------> $+ \theta(n)$
+ coste de la nueva llamada a seleccionar --> $+ T_{seleccionar}(n')$ y $(n' < n)$.

Ahora hay que determinar exactamente el valor del tamaño de datos, *n'*, con el que se llama nuevamente a seleccionar. El valor que devuelve PIVOTE, *m*, se sabe que es la pseudomediana de *n/q* elementos. Esto implica que existen *n/2q* elementos mayores o iguales que *m* en *T*.

Cada uno de los *n/q* elementos es, a su vez, la mediana de un conjunto de *q* elementos. Esto implica que cada uno de los *n/q* elementos tiene *q/2* elementos mayores o iguales.

Entonces, $n/2q \cdot q/2 = n/4$ elementos mayores o iguales que *m*. De esto se puede deducir que $|U| \leq 3n/4$. Realizando un razonamiento idéntico se obtiene que $|V| \leq 3n/4$. De este modo se tiene que $T_{seleccionar}(n') = T_{seleccionar}(3n/4)$ con lo que

$$T_{seleccionar}(n) = T_{seleccionar}(3n/4) + T_{seleccionar}(n/q) + 2 \cdot \theta(n)$$

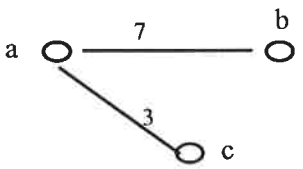
Un valor de *q* que hace que $T_{seleccionar}(n) = \theta(n)$ es, precisamente, el q=5 que se utiliza en el algoritmo PIVOTE.

En [BB 90] hay un análisis más profundo sobre la calidad de la pseudomediana que obtiene el algoritmo PIVOTE presentado.

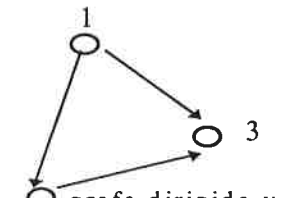
2. GRAFOS

2.1. ESPECIFICACION ALGEBRAICA Y DEFINICIONES

El lector o lectora conocen el tipo de datos grafo que ya ha sido introducido en otras asignaturas. Esta sección se va a dedicar a formalizar la noción intuitiva de grafo y recordar la terminología que se emplea con ellos. En general, un grafo se utiliza para representar relaciones arbitrarias entre objetos del mismo tipo. Los objetos reciben el nombre de nodos o vértices y las relaciones entre ellos se denominan aristas. Normalmente un grafo *G* formado por el conjunto de vértices *V* y por el conjunto de aristas *E*, se denota por el par G=(V,E).
Existen grafos dirigidos y no dirigidos dependiendo de si las aristas están orientadas o no lo están, es decir, si una arista entre dos vértices se puede recorrer en un sólo sentido o en ambos. También existen grafos etiquetados o no en función de si las aristas tienen o no información asociada. Gráficamente (los círculos representan los vértices y las líneas que los unen representan las aristas) :



grafo NO dirigido y etiquetado



grafo dirigido y no etiquetado

2.1.1. ESPECIFICACION

Se dispone de un método, la especificación algebraíca, para describir formalmente la noción de grafo. A continuación se definen los grafos dirigidos y etiquetados pero, fácilmente, puede obtenerse a partir de ésta la definición de los grafos no dirigidos y/o sin etiquetar.

Universo GRAFO-DIRIG-ETIQ (vértice, etiqueta)
usa bool
género grafo
operaciones
crea : ---> grafo
añ-v : grafo, vértice ---> grafo
añ-a : grafo, vértice, vértice, etiqueta ---> grafo

/* constructoras generadoras: crea, añade vértice y añade arista */

valor : grafo, vértice, vértice ---> etiqueta

ex-v : grafo, vértice ---> bool

ex-a: grafo, vértice, vértice ---> bool

suc : grafo, vértice ---> conj-vértices

/* consultoras : valor de la etiqueta de una arista, existe vértice, existe arista y vértices sucesores de uno dado */

borra-v : grafo, vértice ---> grafo

borra-a : grafo, vértice, vértice ---> grafo

/* constructoras modificadoras : borra vértice y borra arista */

ecuaciones de error

EE1. añ-a (g,v1,v1,e) ≡ error

/* no se permite que una arista tenga como origen y destino el mismo vértice */

EE2. (¬ex-v (g,v1)) ∨ (¬ex-v(g,v2)) ⇒ añ-a (g,v1,v2,e) ≡ error

EE3. valor (crea, v1,v2) ≡ error

ecuaciones

1. añ-v (añ-v (g,v), v) ≡ añ-v (g, v)
2. añ-v (añ-v (g, v1), v2) = añ-v (añ-v (g, v2), v1)
3. (v1≠v2) ∧ (v1 ≠ v3) ⇒
   añ-a (añ-v (g, v1), v2, v3, e) ≡ añ-v (añ-a (g, v2,v3, e), v1)
4. añ-a (añ-a (g, v1, v2, e1), v1, v2, e2) ≡ añ-a (g, v1, v2, e2)
5. (v1≠v3) ∨ (v2≠v4) ⇒
   añ-a (añ-a (g, v1, v2, e1), v3, v4, e2) ≡ añ-a (añ-a (g, v3, v4, e2), v1, v2, e1)
6. valor (añ-v (g, v), v1, v2) ≡ valor (g, v1, v2)
7. valor (añ-a (g, v1, v2, e) , v1, v2) = e
8. (v1≠v3) ∨ (v2≠v4)⇒ valor (añ-a (g, v1, v2, e), v3, v4) ≡ valor (g, v3, v4)
9. ex-v (crear, v) ≡ FALSO
10. ex-v (añ-v (g, v), v) ≡ CIERTO
11. (v1≠v2) ⇒ ex-v (añ-v (g, v1), v2) ≡ ex-v (g, v2)
12. ex-v (añ-a (g, v1, v2, e), v) ≡ ex-v (g, v)
13. ex-a (crear, v1, v2) ≡ FALSO
14. ex-a (añ-v (g, v), v1, v2) ≡ ex-a (g, v1, v2)
15. ex-a (añ-a (g, v1,v2, e), v1, v2) ≡ CIERTO
16. (v1≠v3) ∨ (v2≠v4) ⇒ ex-a (añ-a (g, v1, v2, e), v3, v4) ≡ ex-a (g, v3, v4)
17. suc (crea, v) ≡ conj-vacio
18. suc (añ-v (g, v1), v2) ≡ suc (g, v2)
19. suc (añ-a (g, v1, v2, e), v) ≡ suc (g, v)
20. suc (añ-a (g, v1, v2, e), v1) ≡ {v2} ∪ suc (g, v1)

Como puede apreciarse, dados dos vértices *a* y *b*, no pueden existir varias aristas de *a* hacia *b* con distintas, ni con las mismas, etiquetas. Tampoco es posible que exista una arista que tenga como origen y destino el mismo vértice.

Esta especificación se puede convertir en un GRAFO-NODIRIGIDO-ETIQ con tan sólo añadir la ecuación :

añ-a (g, v1, v2,e) ≡ añ-a (g, v2, v1, e)

Se puede enriquecer la especificación que se acaba de proporcionar con operaciones auxiliares tales como : existe camino entre dos vértices (ex-camino) y descendientes de un vértice *v* (descen). Esta última operación proporciona el conjunto de todos aquellos vértices tales que existe camino desde *v* a cualquiera de ellos.

operaciones

ex-camino : grafo, vértice, vértice ---> bool

descen : grafo, vértice ---> conj-vértices

ecuaciones

1. ex-camino (crea, v1, v2) ≡ (v1 = v2)
2. ex-camino (añ-v (g, v), v1, v2) ≡ ex-camino (g, v1, v2)
3. ex-camino (añ-a (g, v1, v2 ,e), v1, v2) ≡ CIERTO
4. ex-camino (añ-a (g, v1, v2, e), v3, v4) ≡ ex-camino (g, v3, v4) ∨ (ex_camino (g, v3, v1) ∧ ex-camino (g, v2, v4))
5. descen (crea, v) ≡ conj-vacio
6. descen (añ-v (g, v1), v2) ≡ descen (g, v2)
7. descen (añ-a (g, v1, v2, e), v1) ≡ descen (g, v1) ∪ {v2} ∪ descen (g, v2)
8. descen (añ-a (g, v1, v2, e), v2) ≡ descen (g, v2)
9. ¬ ex-camino (g, v3, v1) ⇒ descen (añ-a (g, v1, v2, e), v3) ≡ descen (g, v3)
10. ex-camino (g, v3, v1) ⇒ descen (añ-a (g, v1, v2, e), v3) ≡ descen (g, v3) ∪ {v2} ∪ descen (g, v2)

2.1.2. DEFINICIONES

Una vez descritos los grafos con los que vamos a trabajar, pasemos a repasar la terminología habitual que se emplea en su entorno.

2.1.2.1. **Adyacencias**

Sea G=(V,E) un grafo NO DIRIGIDO. Sea *v* un vértice de *G*, *v*∈V. Se define :

- adyacentes de *v*, ady(v) = { v'∈V | (v,v')∈E }
- grado de *v*, grado(v) = | ady(v) |. Si un vértice está aislado, su grado es cero.

Sea G=(V,E) un grafo DIRIGIDO. Sea *v* un vértice de *G*, *v*∈V. Se define :

- sucesores de *v*, suc(v) = { v'∈V | (v,v')∈E }

- predecesores de v, pred(v) = { v'∈V | (v',v)∈E }
- adyacentes de v, ady(v) = suc(v)∪pred(v)
- grado de v, grado(v) = | |suc(v)| - |pred(v)| |
- grado de entrada de v , grado_e(v) = |pred(v)|
- grado de salida de v, grado_s(v) = |suc(v)|

2.1.2.2. **Caminos**

Un CAMINO de longitud n≥0 en un grafo G=(V,E) es una sucesión $\{v_0,v_1, ...,v_n\}$ tal que :

- todos los elementos de la sucesión son vértices, es decir, ∀i: 0≤i≤n : v_i∈V, y
- existe arista entre todo par de vértices consecutivos en la sucesión, o sea, ∀i: 0≤i≤n : (v_i,v_{i+1})∈E.

Dado un camino $\{v_0,v_1, ...,v_n\}$ se dice que :

- sus extremos son v_0 y v_n
- es PROPIO si n>0. Equivale a que, como mínimo, hay dos vértices en la secuencia y, por tanto, su longitud es ≥ 1.
- es ABIERTO si $v_0 \neq v_n$
- es CERRADO si $v_0 = v_n$
- es SIMPLE si no se repiten aristas
- es ELEMENTAL si no se repiten vértices, excepto quizás los extremos. Todo camino elemental es simple (si no se repiten los vértices seguro que no se repiten las aristas).

Un CICLO ELEMENTAL es un camino cerrado, propio y elemental, es decir, es una secuencia de vértices, de longitud mayor que 0, en la que coinciden los extremos y no se repiten ni aristas ni vértices. Se puede especificar esta operación sobre un grafo DIRIGIDO de la siguiente forma :

cíclico : grafo ---> bool

ecuaciones

cíclico (crea) ≡ FALSO

cíclico (añ-v (g, v)) ≡ cíclico (g)

cíclico (añ-a (g, v1, v2, e)) ≡ (cíclico (g)) ∨ ex-camino (g, v2, v1)

2.1.2.3. **Conectividad**

Sea G=(V,E) un grafo NO DIRIGIDO. Se dice que :

- es CONEXO si existe camino entre todo par de vértices. La especificación de esta operación viene a continuación.

conexo : grafo ---> bool

ecuaciones

conexo (crea) ≡ FALSO

conexo (añ-v (crea, v)) ≡ CIERTO

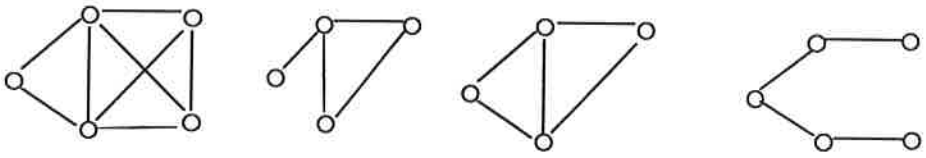
conexo (añ-v (g, v)) ≡ (conexo (g)) ∧ (ex-arista (g, v, (algún otro vértice de g)))

conexo (añ-a (g, v1, v2, e)) ≡

conexo (g) ∨ (descen(v1) ∪ descen(v2) ∪ {v1} ∪ {v2}) = V

- es un BOSQUE si no contiene ciclos
- es un ARBOL NO DIRIGIDO si es un bosque conexo

Un SUBGRAFO H=(U,F) del grafo *G*, es el grafo *H* tal que U⊆V y F⊆E y F⊆UxU.
Un ARBOL LIBRE del grafo *G* es un subgrafo de él, H=(U,F), tal que es un árbol no dirigido y contiene todos los vértices de *G*, es decir, U=V. Los árboles libres son árboles sin un elemento distinguido o raíz y, sin embargo, cualquier vértice puede actuar como tal.
Un SUBGRAFO INDUCIDO del grafo G es el grafo H=(U,F) tal que U⊆V y *F* contiene aquellas aristas de *E* tal que sus vértices pertenecen a *U*.
Ejemplo :



G= (V, E)

H = (U,F)
Subgrafo de G

H= (U, F)
Subgrafo inducido de G

Arbol libre
asociado a G

Sea G=(V,E) un grafo NO DIRIGIDO. Se tiene que una COMPONENTE CONEXA de *G* es un subgrafo conexo de *G*, H=(U,F), tal que ningún otro subgrafo conexo de *G* contiene a *H*. Equivale a que una componente conexa es un subgrafo conexo MAXIMAL. Un grafo NO CONEXO *G* se puede partir de una sola forma en un conjunto de subgrafos conexos. Cada uno de ellos es una COMPONENTE CONEXA de *G*.
Sea G=(V,E) un grafo NO DIRIGIDO, se dice que *G* es BIPARTIDO si todos sus vértices se pueden dividir en dos conjuntos disjuntos tal que todas sus aristas enlazan 2 vértices en que cada uno de ellos pertenece a un conjunto distinto.

Sea G=(V,E) un grafo DIRIGIDO. Se dice que :
- es FUERTEMENTE CONEXO si existe camino entre todo par de vértices en ambos sentidos.
- una COMPONENTE FUERTEMENTE CONEXA de *G* es un subgrafo fuertemente conexo de *G*, H=(U,F), tal que ningún otro subgrafo fuertemente conexo de *G* contiene a *H*. Equivale a que una componente fuertemente conexa es un subgrafo fuertemente conexo MAXIMAL.

2.1.2.4. **Algunos grafos particulares**

COMPLETO

Un grafo no dirigido G=(V,E) es COMPLETO si existe arista entre todo par de vértices. El número de aristas, |E|, de un grafo completo no dirigido es exactamente n·(n-1)/2. Si se trata de un grafo dirigido entonces |E|=n·(n-1).

GRAFOS EULERIANOS

Se dice que un grafo no dirigido G=(V,E) es EULERIANO si existe un camino cerrado, de longitud mayor que cero, simple pero no necesariamente elemental que incluye todas las aristas de *G*.

Los siguientes lemas permiten determinar si un grafo dado es eulelariano :

Lema : Un grafo no dirigido y conexo es euleriano si y sólo si el grado de todo vértice es par

Lema : Un grafo dirigido y fuertemente conexo es euleriano si y sólo si el grado de todo vértice es cero

Averiguar si un grafo no dirigido y conexo es euleriano tiene un coste de $\theta(n)$, si se supone conocido el grado de cada vértice. Gracias al lema basta con recorrer el conjunto de vértices y comprobar si el grado de cada uno de ellos es par o no lo es.

GRAFOS HAMILTONIANOS

Un grafo no dirigido G=(V,E) es HAMILTONIANO si existe un camino cerrado y elemental que contiene todos los vértices de *G*. Si existe, el camino se llama circuito hamiltoniano.

En este caso no existe ninguna propiedad que permita determinar la existencia del camino. Esto implica que averiguar si existe camino tiene el mismo coste que calcular directamente el camino. La forma habitual de resolverlo es ir construyendo todos los caminos posibles y, para cada uno de ellos, comprobar si cumple la condición de hamiltoniano. Esta forma de resolver el problema tiene coste exponencial respecto del número de vértices del grafo y el esquema usado es Vuelta Atrás.

2.2. IMPLEMENTACIONES. ANALISIS DEL COSTE DE LAS OPERACIONES

Son suficientemente conocidas las implementaciones típicas de los grafos : usando matrices de adyacencia, listas de adyacencia o multilistas de adyacencia. A continuación daremos un breve repaso al coste de algunas de las operaciones básicas para cada una de estas implementaciones. Para más detalles consultar [Fra 93].

2.2.1. MATRICES DE ADYACENCIA

Sea G=(V,E) y sea n=|V|. Supongamos implementado el grafo *G* en una matriz de booleanos M[1..n,1..n] de modo que ($\forall v,w \in V$: M[v,w]=CIERTO $\Leftrightarrow$ $(v,w) \in E$). Si el grafo está etiquetado será necesaria, en vez de una matriz de booleanos, una matriz del tipo de las etiquetas del grafo.

El espacio ocupado por la matriz es del orden de $\theta(n^2)$. En realidad, un grafo no dirigido sólo necesita la mitad del espacio $(n^2/2)$-n, pero uno dirigido lo necesita todo excepto la diagonal, es decir, n^2-n.

Respecto al coste temporal de las operaciones básicas del grafo se tiene que varían entre $\theta(1)$ y $\theta(n^2)$. Por ejemplo, para un grafo no dirigido :

- Crear el grafo (crea) es $\theta(n^2)$
- Adyacentes a un vértice (ady), borrar vértice (borra-v) son $\theta(n)$

- Añadir arista (añ-a), existe vértice (ex-v), existe arista (ex-a), borrar arista (borra-a), valor de una etiqueta (valor) son $\theta(1)$.
Para un grafo dirigido destacar que todo es igual y que el coste de calcular los predecesores de un vértice dado (pred) es $\theta(n)$.

En general, si el número de aristas del grafo es elevado, las matrices de adyacencia tienen buenos costes espacial y temporal para las operaciones habituales.

2.2.2. LISTAS Y MULTILISTAS DE ADYACENCIA

En el caso de las listas de adyacencia, la estructura que se emplea para implementar un grafo $G=(V,E)$ con $n=|V|$, es un vector $L[1..n]$ tal que $L[i]$, con $1 \leq i \leq n$, es una lista formada por los identificadores de los vértices que son adyacentes (sucesores, si el grafo es dirigido) al vértice con identificador *i*.
El espacio ocupado por esta implementación es de orden $\theta(n+e)$, con $e=|E|$.
Examinando el coste temporal de algunas operaciones básicas, se tiene que :
- crear la estructura (crea) es $\theta(n)$.
- Añadir vértice (añ-v) y existe vértice (ex-v) son $\theta(1)$.
- Añadir arista (añ-a), necesita comprobar que la arista que se añade no exista previamente y luego debe añadirla si es el caso. Esto implica recorrer toda la lista asociada al vértice origen de la arista para detectar si ya existe. El peor caso requerirá recorrer la lista completa, que puede tener un tamaño máximo de *n-1* elementos, para efectuar posteriormente la inserción. Así se tiene un coste $\theta(n)$ para la operación de añadir. Una implementación de la lista de aristas en un AVL, árbol binario equilibrado, permite reducir el coste de esta operación a $\theta(\log n)$.
Un razonamiento similar puede hacerse para las operaciones de existencia de arista (ex-a) y de borrado de aristas (borra-a).
El coste que requieren las operaciones sucesores (suc) y predecesores (pred) de un vértice dado en un grafo dirigido es el siguiente : para obtener los sucesores de un vértice basta con recorrer toda su lista asociada, por tanto, $\theta(n)$. Sin embargo, para obtener los predecesores hay que recorrer, en el peor caso, toda la estructura para ver en qué listas aparece el vértice del que se están buscando sus predecesores, por tanto, $\theta(n+e)$. Obviamente, si las listas de sucesores de un vértice están implementadas en un AVL entonces el coste de esta operación es $\theta(n \cdot \log n)$.

La implementación del grafo usando multilistas sólo tiene sentido para grafos dirigidos. Su objetivo es mejorar el coste de la operación que obtiene los predecesores para que pase a tener coste $\theta(n)$ en lugar del coste $\theta(n+e)$ con listas. Se consigue, además, que el coste de las demás operaciones sea el mismo que el que se tenía usando listas.

En general, usar listas de adyacencia para implementar un grafo es conveniente cuando el grafo es poco denso, es decir, tiene pocas aristas y el problema a resolver tiene que recorrerlas todas.

2.2.3. EL PROBLEMA DE LA CELEBRIDAD

Se plantea el siguiente problema : demostrar que determinar si un grafo dirigido G=(V,E) con n=|V| contiene una celebridad (también sumidero o pozo), es decir, tiene un único vértice con grado de entrada *n-1* y grado de salida cero, puede averiguarse en O(n) cuando el grafo está implementado en una matriz de adyacencia.

Se supone que los vértices están identificados por un natural entre *1* y *n* y que la matriz es de booleanos con la interpretación habitual. Si existe arista del vértice *i* al vértice *j* se dice que *i conoce a j*. Esta es la especificación de la función a diseñar.

función CELEBRIDAD (M es matriz[1..n,1..n] de bool) dev (b es bool, v es vértice)
{ *Pre :* CIERTO }
{ *Post :* $b \Rightarrow (1 \le v \le n) \wedge (\forall i : (1 \le i \le n) \wedge (i \ne v) : (M[i,v]=\text{CIERTO}) \wedge (M[v,i]=\text{FALSO}))$
$\wedge \neg b \Rightarrow \neg(\exists j : 1 \le j \le n : (\forall i : (1 \le i \le n) \wedge (i \ne j) : (M[i,j]=\text{CIERTO}) \wedge (M[j,i]=\text{FALSO}))))$}

De la especificación se deduce que hay que recorrer toda la matriz, en el peor de los casos, para determinar la no existencia de celebridad. Se tiene, por tanto, un coste de $\theta(n^2)$ que es más elevado que el pedido en el enunciado.
Se puede intentar un planteamiento recursivo (inducción) para mejorar el coste :
- BASE INDUCCION : Si el grafo tiene dos nodos, ¿ cuántas consultas hay que realizar para averiguar si existe celebridad ?. Es evidente que se necesitan dos consultas.
- HIPOTESIS INDUCCION : Supongamos que se puede encontrar la celebridad para el caso *n-1*.
- PASO INDUCTIVO : ¿ cómo se resuelve para *n* nodos ?. Se pueden producir una de las tres situaciones siguientes :

1/ la celebridad es uno de los *n-1* nodos ya explorados. En ese caso hay que efectuar dos consultas : la celebridad no conoce al nodo *n* y *n* conoce a la celebridad (no existe arista de la celebridad a *n* pero si existe arista del nodo *n* a la celebridad) para determinar si es definitivamente la celebridad.

2/ la celebridad es el nodo *n*. En ese caso hay que efectuar 2·(n-1) consultas para averiguar si los *n-1* nodos anteriores conocen a *n* y *n* no conoce a ninguno de los *n-1*. De este modo se averigua si *n* es la celebridad

3/ no existe la celebridad

Se comprueba que para *n* nodos, y en el peor de los casos, son necesarias 2·(n-1) consultas. Para el paso *n-1* serían necesarias 2·(n-2), ..., y así hasta el paso n=2 en que se necesitarían 2·(2-1)=2 consultas. Calculando el número total de consultas se obtiene n·(n-1). ¡Continúa siendo cuadrático!.

La forma correcta de plantear el problema consiste en aplicar la técnica denominada *búsqueda por eliminación*. Consiste en lo siguiente : celebridades sólo hay una, si es que existe, pero no_celebridades hay, como mínimo, *n-1*. ¿ Cuántas consultas hay que efectuar para averiguar, dado un par de nodos, si alguno de ellos no es celebridad ?. Sólo una pregunta y ya se puede descartar a un nodo como candidato a celebridad.
Formalizando este razonamiento :
- si existe arista del nodo *i* al nodo *j*, *i conoce a j*, entonces *i* no es celebridad y se puede descartar.
- si NO existe arista del nodo *i* al nodo *j*, *i no conoce a j*, entonces *j* no es celebridad y se puede descartar.

Dados los *n* nodos del grafo, se necesitan *n-1* consultas para obtener el nodo candidato a celebridad. Luego hay que comprobar que efectivamente lo es y, como ya se ha mencionado anteriormente, son necesarias 2·(n-1) consultas. En total hay que efectuar (n-1)+2·(n-1) consultas para resolver el problema, lo que corresponde a un tiempo O(n), que ahora si coincide con lo que pedía el enunciado del problema .
Un algoritmo que implementa esta búsqueda es el que viene a continuación.

```
función CELEBRIDAD ( M es matriz[1..n,1..n] de bool ) dev ( b es bool; v es vértice )
{ Pre : CIERTO }
        i:=1; j:=2; p:=3; b:= FALSO;
        *[ p ≤ n+1 ---> [   M[i,j] = CIERTO ---> i:=p    /* se descarta i */
                        [] M[i,j] = FALSO ---> j:= p    /* se descarta j */
                        ]
                        p:= p+1;
         ]
        { p=n+2 ∧ ( (i= n+1 => candidato el j) ∨ ( j=n+1 => candidato el i ))}
        [ i = n+1 ---> v := j
        [] i≠ n+1 ---> v := i
        ]
/* Aquí vendría el bucle para comprobar si el candidato v es o no la celebridad. Necesitará
efectuar, como máximo, 2·(n-1) consultas. Se deja como ejercicio para el lector */
        ...
        dev ( b, v )
{ Post : b ⇒ (1≤v≤n ) ∧ (∀i : (1≤i≤n) ∧ (i≠v) : (M[i,v]=CIERTO) ∧ (M[v,i]=FALSO))
∧ ¬b ⇒ ¬ (∃j : 1≤j≤n : (∀i : (1≤i≤n) ∧ (i≠j) : (M[i,j]=CIERTO) ∧ (M[j,i]=FALSO)))}
ffunción
```

2.3. ALGORITMOS SOBRE GRAFOS

Este apartado está dedicado a algoritmos que permiten recorrer completamente un grafo. Existen otros algoritmos de recorrido de grafos muy conocidos (Prim, Kruskal, Dijkstra, Floyd, etc.) que se verán en temas posteriores como ejemplos de instanciación de otros esquemas.

Para facilitar la escritura de los algoritmos que se van a presentar, se amplia el repertorio de operaciones del grafo. Más de una vez se necesitará anotar, en cada uno de los vértices del grafo, alguna información que luego el recorrido actualizará y consultará. Para ello se introduce la operación :

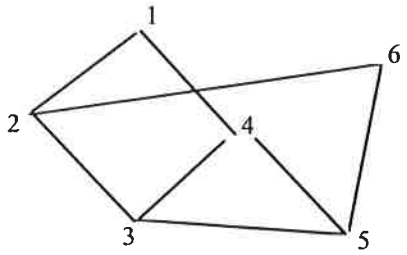
Marcar : grafo, vértice, *inf* ---> grafo

donde *inf* corresponde al tipo de información que hay que asociar al vértice. Para consultar el valor de *inf* se utilizaran operaciones dependientes del propio tipo de *inf*.

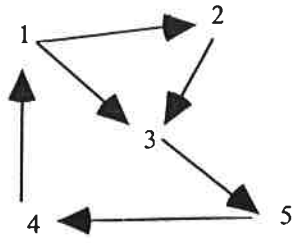
2.3.1. RECORRIDO EN PROFUNDIDAD

El algoritmo de recorrido en profundidad, en inglés *depth-first search* y que se escribirá a partir de ahora DFS para abreviar, se caracteriza porque permite recorrer completamente el grafo, visitando cada arista únicamente dos veces, y el orden de recorrido es tal que los vértices se recorren según el orden 'primero en profundidad'. Primero en profundidad significa que dado un vértice *v* que no haya sido visitado, DFS primero visitará *v* y luego, recursivamente aplicará DFS sobre cada uno de los adyacentes/sucesores de ese vértice que aún no hayan sido visitados. Para poner en marcha el recorrido se elige un vértice cualquiera como punto de partida y el algoritmo acaba cuando todos los vértices han sido visitados. Se puede establecer un claro paralelismo entre el recorrido en preorden de un árbol y el DFS sobre un grafo.

El orden de recorrido de los vértices del grafo que produce el DFS no es único, es decir, para un mismo grafo se pueden obtener distintas secuencias de vértices de acuerdo con el orden de visitas. Todo depende de en qué vértice se comienza el recorrido y de en qué orden se van tomando los adyacentes de un vértice dado. La siguiente figura ilustra las diferentes secuencias que puede producir el DFS.



Recorrido 1 : 1, 2, 3, 4, 5, 6
Recorrido 2 : 3, 5,4, 1, 2, 6



Recorrido 1 : 1, 2, 3, 5, 4
Recorrido 2 : 3, 5, 4, 1, 2
Recorrido 3 : 4, 1, 3, 5, 2

En la figura de la izquierda se presenta un grafo no dirigido y dos, de las muchas, secuencias de recorrido en profundidad posibles. En la primera se ha comenzado por el vértice *1* y en la segunda por el vértice *3*. La figura de la derecha muestra un grafo dirigido sobre el que se han llevado a cabo tres recorridos, comenzando por los vértices *1*, *3* y *4*, respectivamente.

En el algoritmo de recorrido en profundidad para grafos NO DIRIGIDOS que se presenta a continuación, a cada vértice se le asocia un valor inicial, 'no_visto', para indicar que el recorrido aún no ha pasado por él. En el momento en que el recorrido alcanza un vértice con ese valor, lo modifica poniéndolo a 'visto'. Significa que se ha llegado a ese vértice por uno, el primero explorado, de los caminos que lo alcanzan y que se viene de un vértice que también ha sido ya visitado (excepto para el vértice inicial). Nunca más se alcanzará ese vértice por el mismo camino, aunque puede hacerse por otros distintos del mencionado.

```
acción REC-PROF ( g es grafo )
{ Pre : CIERTO }
        Para cada v∈V  hacer  g:= Marcar( g, v, 'no_visto' ) fpara
        Para cada v∈V  hacer
        [   Visto( g, v ) ---> seguir
        []¬Visto( g, v ) ---> g:= REC-PROF-1( g, v )
        ]
        fpara
{ Post : Todos los vértices de g han sido marcados a visto en el orden que sigue el recorrido
en profundidad de g }
faccción
```

```
función REC-PROF-1 ( g es grafo; u es vértice ) dev ( g es grafo )
{ Pre : (u∈V) ∧ ¬Visto(g,u)  ∧ (g=g')}
        g:= Marcar( g, u, 'visto' );
        TRATAR( u );            /* PREWORK */
        Para cada w ∈ ady(g,u) hacer
        [   Visto( g,w ) ---> seguir
        [] ¬Visto( g,w ) ---> g:= REC-PROF-1( g,w )
        ]
        TRATAR( u,w );          /* POSTWORK */
        fpara
{ Post : Visto(g,u) ∧ marcados a visto todos los vértices de g accesibles desde u por caminos
formados exclusivamente por vértices que no estaban vistos en g',  según el orden de visita
del recorrido en profundidad }
        dev  ( g )
ffunción
```

La función auxiliar REC-PROF-1 es la que realmente hace el recorrido en profundidad. En ella aparecen dos operaciones TRATAR(u) y TRATAR(u,w) que pueden corresponder a acciones vacías, como sucede en el caso del DFS, o pueden corresponder a acciones relevantes, como se verá en algún algoritmo posterior. En general, la acción denominada *prework* se refiere al trabajo previo sobre el vértice visitado, y la denominada *postwork* corresponde al trabajo posterior sobre la última arista tratada (o sobre el mismo vértice sobre el que se hace el prework).

Se puede analizar el coste de este algoritmo suponiendo que prework y postwork tienen coste constante. Si el grafo está implementado sobre una matriz de adyacencia se tiene, claramente, $\theta(n^2)$, pero si lo está sobre listas el coste es $\theta(n+e)$ debido a que se recorren todas las aristas dos veces, una en cada sentido, y a que el bucle exterior recorre todos los vértices.

A continuación se presentan algunas de las aplicaciones del DFS : determinar si un grafo es conexo, numerar los vértices según el orden del recorrido, determinar la existencia de ciclos, etc. Todas estas aplicaciones se implementan a base de modificar, levemente, el algoritmo de recorrido en profundidad, lo que da una idea de su potencia. En [CLR 92] se pueden encontrar éstas y otras aplicaciones.

2.3.1.1. **Conectividad**

Se trata de determinar si un grafo no dirigido es conexo o no lo es. Para ello se puede utilizar la propiedad de que si un grafo es conexo es posible alcanzar todos los vértices comenzando su recorrido por cualquiera de ellos. Se necesita un algoritmo que recorra todo el grafo y que permita averiguar qué vértices son alcanzables a partir del elegido. El DFS es el adecuado. En la función más externa, que aquí se denomina COMPO_CONEXAS, el bucle examina todos los vértices y si alguno no ha sido visitado comienza un recorrido en profundidad a partir de él. Las llamadas desde COMPO_CONEXAS a CONEX-1 indican el comienzo de la visita de una nueva componente conexa y se puede asegurar que, una vez que ha finalizado la visita, no hay más vértices que formen parte de esa misma componente conexa. En la implementación del algoritmo se ha utilizado un natural, *nc*, que se asocia a cada vértice y que indica a qué número de componente conexa pertenece.

```
función COMPO_CONEXAS ( g es grafo ) dev ( g es grafo; nc es nat )
{ Pre : CIERTO }
        Para cada v∈V  hacer  g:= Marcar( g, v, <0,'no_visto'> ) fpara
        nc := 0;
        Para cada v∈V  hacer
        [    Visto( g, v ) --->  seguir
```

```
        [] ¬Visto( g, v ) --->  nc := nc+1;
                                g:= CONEX-1( g, v, nc );
        ]
        fpara
```

{ *Post :* el grafo ha sido modificado según figura en la Post de CONEX-1 ∧ *nc* contiene el número de componentes conexas que tiene el grafo g}

```
        dev ( g, nc )
ffunción
```

```
función CONEX-1 ( g es grafo; u es vértice; num_compo es nat ) dev ( g es grafo )
```

{ *Pre :* (u∈V) ∧ ¬Visto(g,u) ∧ (g=g') ∧ (num_compo = nº de componente conexa que se está recorriendo) }

```
        g:= Marcar( g, u, < num_compo, 'visto'> );
```

/* Este es el PREWORK, anotar el número de componente conexa a la que pertenece el vértice. En este caso se ha incluido dentro de la operación Marcar */

```
        Para cada w ∈ ady(g,u) hacer
        [   Visto( g, w ) ---> seguir
        []¬Visto( g, w ) ---> g:= CONEX-1( g, w, num_compo)
        ]
        fpara
```

{ *Post :* Visto(g,u) ∧ marcados a visto todos los vértices de g accesibles desde u por caminos formados exclusivamente por vértices que no estaban vistos en g', según el orden de visita del recorrido en profundidad. Además a cada vértice se le ha añadido información indicando a qué nº de componente conexa pertenece }

```
        dev ( g )
ffunción
```

El coste de este algoritmo es idéntico al de REC-PROF.

2.3.1.2. **Numerar vértices**

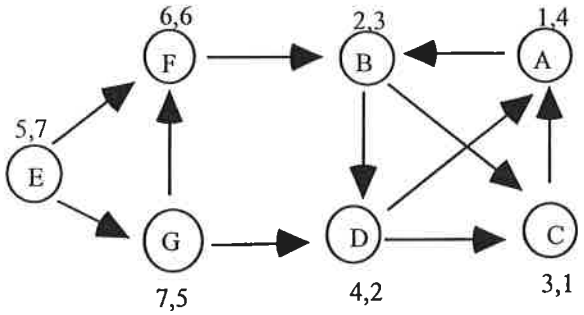
Aprovechando el recorrido en profundidad se puede asociar a cada vértice un valor natural que indicará el orden en que han sido visitados por él (han pasado a 'visto'). A esta asociación se la conoce como la numeración en *el orden del recorrido*. También se puede asociar a cada vértice un natural, no en el momento en que pasa a 'visto', sino en el momento en que toda su descendencia ya ha sido visitada por el DFS. A esta otra numeración se la conoce como la del *orden inverso del recorrido*.

En el algoritmo que se presenta a continuación hay dos valores, de tipo natural, que se almacenan en cada vértice. *Num-dfs*, que contiene la numeración en el orden del recorrido, y *num-invdfs* conteniendo la numeración en orden inverso. Se asume que el tipo vértice es un

tipo estructurado, una n-tupla. Con una pequeña modificación se puede conseguir que el algoritmo funcione para grafos dirigidos.

```
función NUMERAR_VERTICES ( g es grafo ) dev ( g es grafo )
{ Pre : g es un grafo no dirigido }
        Para cada v∈V  hacer
                v.visitado := 'no_visto';     v.num-dfs := 0;    v.num-invdfs := 0
        fpara
        ndfs := 0; ninv := 0 ;
        Para cada v∈V  hacer
        [   Visto( g, v ) ---> seguir
        [] ¬Visto( g, v ) ---> <g, ndfs, ninv> := NV-1( g, v, ndfs, ninv );
        ]
        fpara
{ Post : los vértices del grafo han sido marcados según se indica en la Post de NV-1}
        dev ( g )
ffunción

función NV-1 ( g es grafo; u es vértice; nd, ni es nat ) dev ( g es grafo; nd,ni es nat)
{ Pre : (u∈V) ∧ ¬Visto(g,u)  ∧ (g=g') ∧ (nd es el número asociado al último vértice que ha
pasado a 'visto' en el recorrido) ∧ (ni es el número asociado al último vértice que ha
conseguido tener toda su descendencia a 'visto') }
        g:= Marcar( g, u, 'visto' );
        nd:= nd+1;
        u.num-dfs := nd;                              /* PREWORK sobre el vértice */
        Para cada w ∈ ady(g,u) hacer
        [   Visto( g, w ) ---> seguir
        [] ¬Visto( g, w ) ---> < g, nd, ni > := NV-1( g, w, nd, ni)
        ]
        fpara
        ni := ni+1;
        u.num-invdfs := ni;                           /* POSTWORK sobre el vértice */
{ Post : Visto(g,u) ∧ marcados a visto todos los vértices de g accesibles desde u por caminos
formados exclusivamente por vértices que no estaban vistos en g', según el orden de visita
del recorrido en profundidad ∧ u.num-invdfs es la numeración en orden inverso del vértice u
que es el último que ha conseguido tener toda su descendencia a 'visto' ∧ nd es la
numeración en el orden de recorrido del último vértice de g que ha pasado a visto }
        dev  ( g, nd, ni )
ffunción
```

En la figura se muestra un grafo dirigido que ha sido recorrido en profundidad y numerado en el orden del recorrido (valor que aparece a la izquierda) y en el orden inverso (valor que aparece a la derecha separado por una coma del anterior). Se ha comenzado por el vértice con identificador *A* y el siguiente se ha elegido según el orden alfabético.



2.3.1.3. **Arbol asociado al Recorrido en profundidad**

Al mismo tiempo que se efectúa el recorrido en profundidad de un grafo se puede obtener lo que se denomina el *árbol asociado al recorrido en profundidad*. En realidad no siempre se obtiene un árbol sino que depende del grafo de partida. Así, un grafo no dirigido y conexo produce un árbol, un grafo no dirigido y no conexo produce un bosque, un grafo dirigido y fuertemente conexo produce un árbol, y un grafo dirigido y no fuertemente conexo produce un bosque (que puede tener un único árbol). El árbol se caracteriza por contener todas aquellas aristas que durante el recorrido del grafo cumplan la condición de que uno de sus extremos sea un vértice marcado a 'visto' y el otro extremo sea un vértice que aún no ha pasado a 'visto'.

```
función ARBOL-DFS ( g es grafo ) dev ( B es bosque )
{ Pre : g es un grafo no dirigido }
        Para cada v∈V  hacer  g:= Marcar( g, v, 'no_visto' ) fpara
        B := bosque_vacio;
        Para cada v∈V  hacer
        [   Visto( g, v ) --->   seguir
        []¬Visto( g, v ) --->   T := arbol_vacio ;
                                < g, T > := TDFS-1( g, v, T );
                                B:= añadir_arbol( B, T );
        ]
        fpara
{ Post : los vértices del grafo han sido visitados según el orden de recorrido en profundidad
∧ B es el bosque de árboles DFS que ha producido este recorrido}
        dev ( B )
ffunción
```

función TDFS-1 (g es grafo; u es vértice; T es árbol) dev (g es grafo; T es árbol)
{ *Pre :* (u∈V) ∧ ¬Visto(g,u) ∧ (g=g') ∧ (T es el árbol asociado al recorrido en profundidad de g hasta este momento) ∧ (T=T') }

```
        g:= Marcar( g, u, 'visto' );
        T:= añadir_vértice( T, u );                    /* PREWORK */
        Para cada w ∈ ady(g,u) hacer
        [   Visto( g, w ) --->  seguir
        [] ¬Visto( g, w ) --->  T:= añadir_vértice( T, w);
                                T:= añadir_arista( T, u, w );
```

/* el POSTWORK se realiza antes de la llamada recursiva. El algoritmo añade a T aristas que cumplen la condición de que uno de los extremos ya está marcado a 'visto' y el otro no. El tipo árbol que se usa aquí soporta las inserciones repetidas de vértices */

```
                                <g, T> := TDFS-1( g, w, T );
        ]
        fpara
```

{ *Post :* Visto(g,u) ∧ marcados a visto todos los vértices de g accesibles desde u por caminos formados exclusivamente por vértices que no estaban vistos en g', según el orden de visita del recorrido en profundidad ∧ T=T'∪{aristas visitadas después de hacer el recorrido en profundidad a partir del vértice u} }

```
        dev ( g, T )
ffunción
```

Conviene caracterizar formalmente el árbol asociado al DFS, al que se denominará T_{DFS}, y para ello se presentan las siguientes definiciones y lema.

Definición : Un vértice *v* es un antecesor del vértice *w* en un árbol *T* con raíz *r*, si *v* está en el único camino de *r* a *w* en *T*.

Definición : Si *v* es un antecesor de *w*, entonces *w* es un descendiente de *v*.

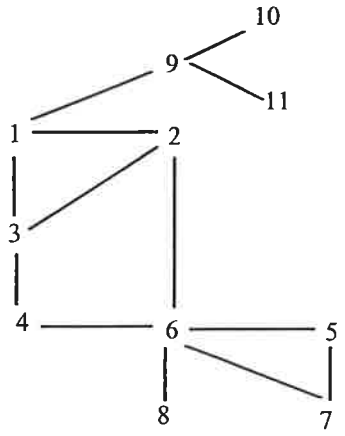
Lema : Sea G=(V,E) un grafo conexo no dirigido, sea T_{DFS}=(V,F) el árbol asociado al recorrido en profundidad de *G*. Entonces toda arista *e*, *e*∈E, o bien aparece en T_{DFS}, es decir, *e*∈F, o bien conecta dos vértices de *G* uno de los cuales es antecesor del otro en T_{DFS}.

Este lema permite clasificar las aristas de *G* en dos clases una vez fijado un T_{DFS} :

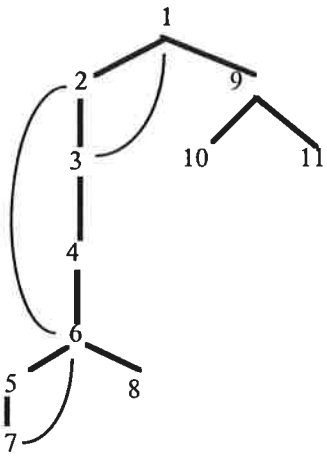
- las aristas de *G* que aparecen en el T_{DFS} que son las *tree edges* o aristas del árbol. Estas aristas conectan padres con hijos en el árbol.
- las aristas de *G* que no aparecen en elT_{DFS} y que son las *back edges* o aristas de retroceso o de antecesores. Estas aristas conectan descendientes con antecesores en el árbol.

En la siguiente figura se muestra un grafo no dirigido y el T_{DFS} que se ha obtenido iniciando el recorrido de *G* en el vértice *1* y decidiendo el siguiente en orden numérico. Las aristas

marcadas en negrita corresponden a las que forman parte del T_{DFS}, tree edges, mientras que las restantes son las back edges, es decir, aristas de *G* que no aparecen en el árbol.



Grafo



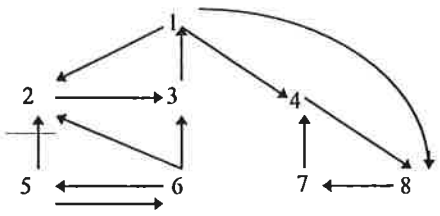
Tdfs (árbol)

Para un grafo G=(V,E) DIRIGIDO sus aristas se pueden clasificar en cuatro tipos en función del T_{DFS} que produce el recorrido en profundidad. Así se tienen :

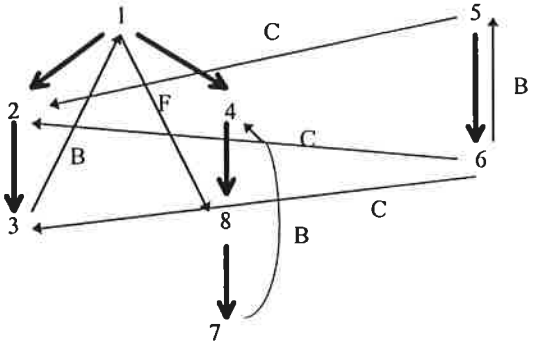
- tree edges y back edges con la misma definición que se ha dado para los grafos no dirigidos.
- *forward edges*, o aristas descendientes, que conectan antecesores con descendientes en el árbol.
- *cross edges*, o aristas cruzadas, que conectan vértices no relacionados en el T_{DFS} . Estas aristas siempre van de derecha a izquierda en el árbol (o de izquierda a derecha, todo depende de cómo se dibuje).

La numeración en el orden del recorrido en profundidad de los vértices del grafo permite determinar el tipo de las aristas del grafo o las relaciones en el T_{DFS} entre los vértices de una arista. El siguiente lema es una muestra de ello.

Lema : Sea G=(V,E) un grafo dirigido y sea T_{DFS}=(V,F) el árbol asociado al recorrido en profundidad de *G*. Si *(v,w)*∈E y *v.num-dfs* < *w.num-dfs* entonces *w* es un descendiente de *v* en el árbol T_{DFS}.



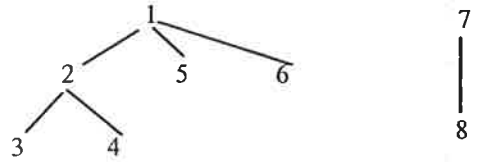
Grafo dirigido G = (V, E)



Aristas del Tdfs (negrita) junto con todas las demás de G convenientemente etiquetadas (B, C, F).

En la figura anterior se muestra un grafo dirigido y el árbol asociado al recorrido en profundidad que se ha iniciado en el vértice *1* y se ha aplicado orden numérico para elegir el siguiente vértice. Las aristas en negrita son las tree edges, es decir, las que forman el T_{DFS}. El resto están etiquetadas con *B*, *F* y *C* que significan back, forward y cross respectivamente.

Observando únicamente el árbol asociado al recorrido en profundidad se pueden determinar algunas de las características del grafo de partida. Por ejemplo, dado el siguiente árbol producido por el DFS de un grafo *G* :



se puede deducir que el grafo *G* no es conexo ni dirigido y que el vértice 5 no es adyacente ni al vértice 3 ni al 4 y que los vértices 3 y 4 no son adyacentes entre sí, etc.

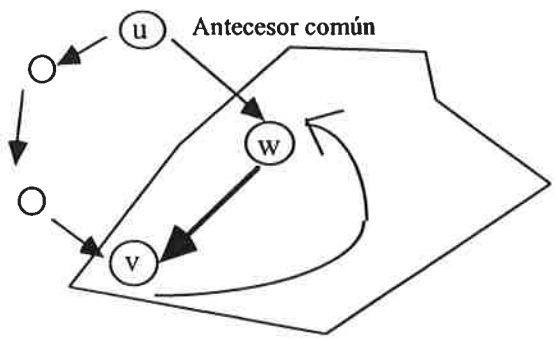
2.3.1.4. **Test de ciclicidad**

Una de las utilidades del árbol asociado al recorrido en profundidad, visto en la sección anterior, es que permite averiguar si el grafo, dirigido o no, contiene ciclos. El siguiente lema, para grafos dirigidos, así lo indica :

Lema : Sea G=(V,E) un grafo dirigido y T_{DFS} el árbol del recorrido en profundidad de *G*. *G* contiene un ciclo dirigido si y sólo si *G* contiene una arista de retroceso.

Demostración:

Sea *C* un ciclo en *G* y sea *v* el vértice de *C* con la numeración más baja en el recorrido en profundidad, es decir, *v.num-dfs* es menor que el *num-dfs* de cualquier otro vértice que forma parte de *C*. Sea *(w,v)* una de las aristas de *C*. ¿ qué clase de arista es ésta ?. Forzosamente *w.num-dfs* será mayor que *v.num-dfs* y esto hace que se descarte que la arista sea una tree edge o una forward edge. Podría tratarse solamente de una back edge o de una cross edge. No puede ser una arista cruzada porque eso significaría que *v* y *w* tienen un antecesor común *u*, con *u.num-dfs* menor que *v.num-dfs*, que es la única forma de conexión entre ellos, además de a través de la arista *(w,v)*. El gráfico siguiente ilustra esta situación.



Sin embargo, esto no es posible ya que *v* y *w* comparten un ciclo y, por tanto, existe camino entre *v* y *w* pero ¡ sólo atravesando vértices con una numeración mayor que la de *v* !
La única posibilidad que nos queda es que *(w,v)* sea un back edge, lo cual implica que si hay arista de retroceso es que hay ciclo.
Fin demostración.

El algoritmo que se presenta a continuación detecta la presencia de una arista de retroceso. El método que sigue es mantener, para el camino que va desde la raíz al vértice actual, qué vértices lo componen. Si un vértice aparece más de una vez en ese camino es que hay ciclo. Esta versión tiene el mismo coste que el algoritmo REC-PROF.

```
función CICLOS ( g es grafo ) dev ( b es bool )
{ Pre : g es un grafo dirigido }
        Para cada v∈V  hacer
                g:= Marcar( g, v, 'no_visto' );
                v.en-camino := FALSO ;  /* no hay ningún vértice en el camino de la raíz
                                           al vértice actual */
        fpara
        b := FALSO;                     /* inicialmente no hay ciclos */
        Para cada v∈V  hacer
        [   Visto( g, v ) --->  seguir
        [] ¬Visto( g, v ) --->  <g,b1> := CICLOS-1( g, v );
                                b := b1 ∨ b;
        ]
        fpara
{ Post : los vértices del grafo han sido recorridos según el orden de recorrido en profundidad
∧ b = Cíclico ( g ) }
        dev ( b )
ffunción

función  CICLOS-1 ( g es grafo; u es vértice ) dev ( g es grafo; b se bool )
{ Pre : (u∈V) ∧ ¬Visto(g,u)  ∧ (g=g')}
        g:= Marcar( g, u, 'visto' );      u.en-camino := CIERTO;
/* PREWORK :Se anota que se ha visitado u y que éste se encuentra en el camino de la raíz
a él mismo*/
        b := FALSO;
        Para cada w ∈ suc(g,u) hacer
        [   Visto( g, w ) ---> [   w.en-camino  ---> b1 := CIERTO
                                                    /* ¡Ciclo !, se recorre la arista (u,w)
                                                    pero ya existía camino de w a u */
```

```
                    [] ¬w.en-camino ---> seguir
                    ]
        [] ¬Visto( g, w ) ---> b1:= CICLOS-1 ( g,w )
        ]
        b := b1 ∨ b
        fpara
```

/* ya se ha recorrido toda la descendencia de u y, por tanto, se abandona el camino actual desde la raíz (se va 'desmontando' el camino). La siguiente asignación corresponde al POSTWORK */

```
        u.en-camino := FALSO
```

{ *Post :* Visto(g,u) ∧ marcados a visto todos los vértices de g accesibles desde u por caminos formados exclusivamente por vértices que no estaban vistos en g', según el orden de visita del recorrido en profundidad ∧ *b* dice si en el conjunto de caminos que tienen en común desde la raíz hasta u y luego se completan con la descendencia de u, hay ciclos.}

```
        dev (g, b)
ffunción
```

Los grafos dirigidos y acíclicos, *directed acyclic graphs* DAG, se utilizan en muchos ámbitos. Por ejemplo, el plan de estudios de la Facultad es un DAG y las expresiones aritméticas con subexpresiones comunes que se pueden escribir en cualquier lenguaje de programación también deben ser un DAG.

Si en lugar de trabajar con un grafo dirigido se trabajara con uno no dirigido, el algoritmo anterior sería más simple. La existencia de un ciclo se detectaría cuando el recorrido a partir de los adyacentes se encontrara con un vértice que ya estuviera marcado a 'visto'. Para prevenir soluciones erróneas, sería necesario que cada llamada recibiera, además, el vértice que la ha provocado (el padre de la llamada).

Un problema interesante, y que se deja como ejercicio para el lector, es el siguiente : Dado un grafo no dirigido, G=(V,E), proponer un algoritmo que en tiempo O(n), n=|V|, determine si existen ciclos o no. Notar que el coste ha de ser independiente de |E|.

2.3.1.5. **Un TAD útil : MFSets**

El tipo de datos denominado *Merge-Find Sets*, MFSets o *Disjoint-Set Data Structure* (en [Fra 93] se denomina *Relación de equivalencia*) es el más adecuado para problemas del tipo 'determinar que elementos de un conjunto pertenecen a la misma clase de equivalencia respecto de la propiedad P'. Una aplicación inmediata sobre grafos es la de determinar las componentes conexas de un grafo no dirigido o averiguar si existe camino entre dos vértices dados.

En general, el objetivo de esta estructura es mantener una colección, $S=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$, de conjuntos disjuntos de forma dinámica. Una posible signatura de esta estructura, suponiendo que los elementos que hay que clasificar son vértices, podría ser la siguiente :

Universo MFSet
usa conj_vértice, vértice
género mf
operaciones
    iniciar : ---> mf
    añade : mf, conj_vértice ---> mf
    merge : mf, conj_vértice, conj_vértice ---> mf
    find : mf, v ---> conj_vértice

La operación 'iniciar' crea la estructura vacía (colección vacía), 'añade' coloca un conjunto en la colección, 'find' indica en qué conjunto de la colección se encuentra el elemento y 'merge' fusiona dos conjuntos de la colección. Estas dos últimas operaciones son las más frecuentes durante la vida de la estructura; por eso todas las implementaciones van orientadas a rebajar su coste.

La primera implementación es muy simple. La colección se implementa sobre un vector de *n* posiciones, tantas como elementos haya que clasificar. El índice del vector identifica el elemento y el contenido del vector sobre ese índice contiene la etiqueta del conjunto al que pertenece (la etiqueta coincide con alguno de los elementos del conjunto). Inicialmente cada conjunto contiene un único elemento (se realizan *n* operaciones 'añade') y el índice y la etiqueta del conjunto coinciden. El siguiente algoritmo es una implementación de la operación 'merge'.

función MERGE (mf es vector[1.. n] de nats; a, b es nat) dev (mf es vector[1.. n] de nats)
{ *Pre :* a y b son dos etiquetas de conjuntos. En este caso, y como los elementos son naturales, las etiquetas también lo son }
    i := 0;
    *[i < n ---> i := i+1;
        [mf [i] = a ---> seguir
        [] mf [i] = b ---> mf [i] := a
    ]
{ *Post :* todos los elementos entre 1 y n que pertenecían al conjunto con etiqueta b, ahora pertenecen al conjunto con etiqueta a (se ha fusionado a y b). Los demás elementos siguen en el mismo conjunto en el que estaban }
    dev (mf)
ffunción

Para esta implementación, el coste de la operación 'merge' es $\theta(n)$ mientras que el de la operación 'find' es $O(1)$.

La segunda implementación es más astuta. Todos los elementos de un conjunto están en un árbol en el que sus elementos tienen puntero al padre. La colección se implementa sobre un vector de tamaño n (el número de elementos a clasificar) y cada componente contiene el puntero al padre del árbol al que pertenece. Un análisis simple de esta implementación nos conduce a que 'iniciar' + n operaciones 'añade' tenga coste $\theta(n)$, 'merge' tenga coste $\theta(1)$ y 'find' $O(n)$. No parece que se haya mejorado nada.
Sin embargo, se pueden utilizar dos técnicas que permiten reducir la suma del coste de todas las operaciones que se pueden realizar. La *unión por rango* es la primera técnica. Aplicándola se consigue que la altura de los árboles esté acotada por la función *log n* y que, por tanto, 'find' cueste $\theta(\log n)$ y 'merge' $O(1)$. La segunda de ellas es la *compresión de caminos* y consiste en reducir a uno la distancia desde un elemento del árbol a la raíz del mismo con lo que, la gran mayoría de las veces, la altura del árbol es menor que *log n*.

La aplicación conjunta de las dos técnicas hace que el coste de efectuar m operaciones 'find' y 'merge', $n \leq m$, sea $\theta(m \cdot \log^* n)$, donde $\log^* n$ es la función *logaritmo iterado de n* que tiene un crecimiento lentísimo. Esta función se define de la siguiente forma :

$$\log^* 1 = \log^* 2 = 1$$
$$\forall n > 2, \quad \log^* n = 1 + \log^*(\lceil \log_2 n \rceil)$$

Estos son algunos valores de referencia de esta función :

$\log^* 4 = 1 + \log^* 2 = 2$
$\log^* 14 = 1 + \log^* 4 = 3$
$\log^* 60000 = 1 + \log^* 16 = 4$

Como ya se ha mencionado al comienzo de la sección, esta estructura se puede utilizar para resolver el problema de calcular las componentes conexas de un grafo no dirigido. A continuación se muestra el algoritmo correspondiente. El número de 'find' y 'merge' que efectua es $m=(n + e)$ y por tanto el coste de este algoritmo es $O((n+e) \cdot \log^* n)$

```
función CCC ( g es grafo ) dev ( m es MFSet )
{ Pre : g es un grafo no dirigido }
        m:= iniciar;
        Para cada v∈V  hacer
                g:= Marcar( g, v, 'no_visto' ) ;
                m:= añade( m, {v});
        fpara
        Para cada v∈V  hacer
        [   Visto( g, v ) ---> seguir
```

```
        [] ¬Visto( g, v ) ---> <g, m> := CCC-1( g, v, m );
        ]
        fpara
{ Post : m contiene todas las componentes conexas de g }
        dev ( m)
ffunción

función CCC-1 ( g es grafo; u es vértice; m es MFSet ) dev ( g es grafo; m es MFSet )
{ Pre : (u∈V) ∧ ¬Visto(g,u) ∧ (g=g') ∧ (m contiene una clasificación de todos los vértices
ya vistos en g)}
        g:= Marcar( g, u, 'visto' );     v1 := find( m, u );
        Para cada w ∈ ady(g,u) hacer
        v2 := find( m, w);
        [   Visto( g, w ) --->  [ v1 = v2 ---> seguir
                                [] v1 ≠ v2 ---> m := merge( m, v1, v2 );
                                ]
        [] ¬Visto( g, w ) ---> m := merge( m, v1, v2 )
                                < g, m > := CCC-1( g,w, m)
        ]
        fpara
{ Post : Visto(g,u) ∧ marcados a vistos todos los vértices de g accesibles desde u por
caminos formados exclusivamente por vértices que no estaban vistos en g', según el orden de
visita del recorrido en profundidad. Además todos los vértices ya vistos están
convenientemente clasificados en m }
        dev ( g, m )
ffunción
```

2.3.2. RECORRIDO EN ANCHURA

El algoritmo de recorrido en anchura, en inglés *breadth-first search* y que a partir de ahora escribiremos BFS para abreviar, se caracteriza porque permite recorrer completamente el grafo, visitando cada arista dos veces. En este aspecto DFS y BFS son idénticos. Lo que les diferencia es el orden de recorrido. En BFS el orden de recorrido es tal que los vértices se visitan según el orden primero en anchura o por niveles. Este orden implica que, fijado un vértice, primero se visitan los vértices que se encuentran a distancia mínima uno de él, luego los que se encuentran a distancia mínima dos, etc.

Para poner en marcha el recorrido se elige un vértice cualquiera como punto de partida. No importa si el grafo es dirigido o no, en cualquier caso el algoritmo acaba cuando todos los vértices han sido visitados.

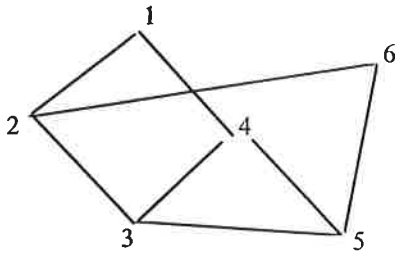
Una vez visto el recorrido en profundidad es sencillo obtener el algoritmo que efectúa el recorrido en anchura de un grafo. Es suficiente con obtener una versión iterativa del DFS y

sustituir la pila, que mantiene los vértices que aún tienen descendencia por visitar, por una cola. En la cola se almacenan los vértices adyacentes al último visitado y que aún están sin visitar. A lo sumo habrá vértices pertenecientes a dos niveles consecutivos del grafo, los que se encuentran a distancia mínima *k* y a distancia mínima *k+1* del vértice a partir del cual se ha iniciado el recorrido. También es posible que existan vértices repetidos en la cola.Toda esta información debería aparecer en el invariante del bucle del algoritmo REC-ANCHO-1.
Un algoritmo que implementa el recorrido en anchura sobre un grafo no dirigido es el que se presenta a continuación (la versión para un grafo dirigido se deja como ejercicio):

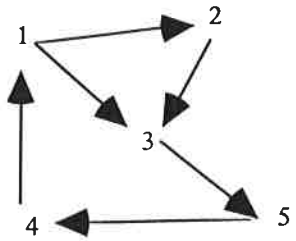
```
acción REC-ANCHO ( g es grafo )
{ Pre : g es un grafo no dirigido }
        Para cada v∈V  hacer  g:= Marcar( g, v, 'no_visto' ) fpara
        Para cada v∈V  hacer
        [    Visto( g, v ) ---> seguir
        [] ¬Visto( g, v ) ---> g:= REC-ANCHO-1( g, v )
        ]
        fpara
{ Post : Todos los vértices de g han sido marcados a 'visto' en el orden que sigue el recorrido
en anchura de g }
faccción

función REC-ANCHO-1 ( g es grafo; u es vértice ) dev ( g es grafo )
{ Pre : (u∈V) ∧ ¬Visto(g,u)  ∧ (g=g')}
    c := cola_vacia;      c := pedir_turno( c, u );
    * [¬vacia (c ) ---> u := primero( c );    c := avanzar( c);
                        [    Visto( g, u ) --->  seguir
                         []¬Visto( g, u ) --->  g:= Marcar( g, u, 'visto' );
                                                Para cada w ∈ ady(g,u) hacer
                                                [    Visto( g, w ) ---> seguir
                                                []¬Visto( g, w ) ---> c := pedir_turno( c, w )
                                                ]
                                                fpara
                        ]
     ]
{ Post : Visto(g,u) ∧ marcados a 'visto' todos los vértices de g accesibles desde u que no
estaban vistos en g' según el orden de visita del recorrido en anchura }
    dev ( g )
ffunción
```

El coste del algoritmo para un grafo implementado con listas de adyacencia es $\theta(n+e)$, el mismo que el DFS, aunque requiere más espacio debido a la cola de vértices que utiliza.

Existe un gran paralelismo entre el DFS y el BFS y casi todo lo visto para el DFS también es aplicable al BFS. Por ejemplo, algo bien simple en lo que coinciden : la secuencia de vértices producida por el recorrido en anchura no es única sino que depende de cual sea el vértice elegido para comenzar el recorrido y de cómo se vayan eligiendo los adyacentes. Más adelante se comentaran otras características comunes. La siguiente figura ilustra las distintas secuencias que puede producir el BFS. En la figura de la izquierda tenemos un grafo no dirigido y dos secuencias de su recorrido en anchura. En la primera secuencia se ha comenzado por el vértice *1* y en la segunda por el vértice *3*. La figura de la derecha muestra un grafo dirigido sobre el que se han llevado a cabo tres recorridos.



Recorrido 1 : 1, 2,4, 3, 6, 5
Recorrido 2 : 3, 2,4, 5, 1, 6



Recorrido 1 : 1, 2, 3, 5, 4
Recorrido 2 : 3, 5, 4, 1, 2
Recorrido 3 : 4, 1, 2, 3, 5

Se puede asociar un número a cada vértice del grafo según el orden de visita que produce el recorrido en anchura. También se puede obtener el árbol asociado al recorrido en anchura, T_{BFS}, que se construye igual que el T_{DFS}.
Algunas características destacables del T_{BFS} se citan a continuación :
Sea G=(V,E) un grafo y sea T_{BFS}=(V,F) el árbol asociado al recorrido en anchura de *G*.
Definición : se define la distancia más corta entre *s* y *v* $\delta(s,v)$, con $s,v \in V$, como el mínimo número de aristas en cualquier camino entre *s* y *v* en *G*.
Lema : Sea $s \in V$ un vértice arbitrario de G, entonces para cualquier arista $(u,v) \in E$ sucede que $\delta(s,v) \leq \delta(s,u) + 1$
Lema : Para cada vértice *w*, la longitud del camino desde la raíz hasta *w* en T_{BFS} coincide con la longitud del camino más corto desde la raíz hasta *w* en G.
Lema : Si $(v,w) \in E$ y $(v,w) \notin F$, entonces (v,w) conecta dos vértices cuyo número de nivel difiere como mínimo en uno respecto del vértice raíz.

Hay que mencionar que el árbol asociado al recorrido en anchura, T_{BFS}, también permite clasificar las aristas del grafo de partida. Si se trata de un grafo no dirigido entonces existen aristas de dos tipos : tree edges y cross edges; estas últimas son las que permiten detectar la existencia de ciclos. Sin embargo, si se trata de un grafo dirigido, se tienen aristas de tres

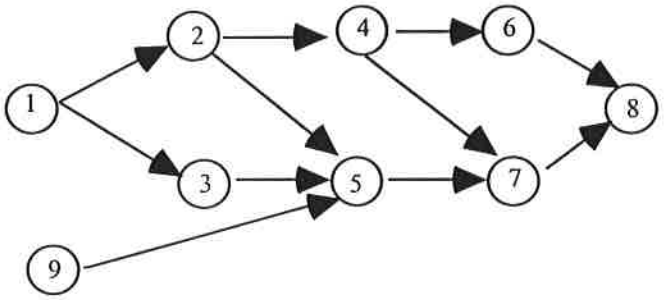
tipos : tree edges, back edges y cross edges con la particularidad de que éstas últimas pueden ir tanto de derecha a izquierda como de izquierda a derecha. No existen forward edges. Se deja como ejercicio para el lector el razonar por qué motivo no pueden existir aristas de este tipo.

El recorrido en anchura se utiliza para resolver problemas en los que se puede modelar cada situación del problema como un estado (vértice), existe una función que permite pasar de un estado a otro (aristas), y hay que encontrar el camino más corto, si existe, entre dos estados dados (que corresponden a 2 vértices del grafo). Esta aplicación es consecuencia inmediata de los tres lemas enunciados anteriormente, ya que ellos garantizan que el BFS llega a un vértice siempre por el camino más corto posible desde el vértice del que parte el recorrido.

2.3.3. ORDENACION TOPOLOGICA

El algoritmo de ordenación topológica, *Topological Sort*, genera una ordenación lineal de todos los vértices del grafo tal que si $(u,v) \in E$ entonces u aparece antes que v en la ordenación. Este algoritmo funciona sólo con grafos DIRIGIDOS y ACICLICOS. En realidad este algoritmo no es más que un caso particular del recorrido en profundidad.

Al igual que sucede con el recorrido en anchura o con el de profundidad, la ordenación topológica aplicada a un grafo G puede generar diferentes ordenaciones lineales. De nuevo, todo depende del vértice de partida y de cual se elija como siguiente vértice a visitar. Para el grafo que se presenta en la siguiente figura, resulta que una ordenación posible es O_1 = { 1, 2, 4, 3, 9, 5, 7, 6, 8 }, mientras que otra es O_2 = { 9, 1, 3, 2, 5, 4, 6, 7, 8 }. Existen más posibilidades además de las dos mencionadas.



Podemos aplicar dos aproximaciones distintas para diseñar el algoritmo de ordenación topológica. La primera de ellas se basa en el hecho de que un vértice sólo puede aparecer en la secuencia cuando todos sus predecesores han sido visitados y, a partir de ese momento, ya puede aparecer en cualquier lugar posterior. Un aplicación inmediata de esta idea conduce a llevar un contador para cada vértice de modo que indique cuántos de sus predecesores faltan por aparecer en la secuencia; en el momento en que ese contador sea cero, el vértice en cuestión ya puede aparecer.

La segunda aproximación es justo la lectura inversa de la primera : Un vértice ocupa un lugar definitivo en la secuencia cuando toda su descendencia ha sido visitada y siempre irá delante de todos ellos, de hecho, esa es la posición más alejada del comienzo de la secuencia en la que puede aparecer, más lejos ya no es posible.
El siguiente algoritmo es el que se obtiene de la primera aproximación, el de la segunda versión es una aplicación inmediata del recorrido en profundidad.

```
función ORD-TOPO ( g es grafo ) dev ( s es secuencia ( vértices ) )
{ Pre : g es un grafo dirigido y sin ciclos }
        c := conj_vacio ;
        Para cada v∈V  hacer
                NP[v] := 0;      c := añadir( c, v );
        fpara
        Para cada v∈V  hacer
            Para cada w ∈ suc(g,v)  hacer
                NP [w] := NP [w] + 1;      c:= eliminar( c, w );
            fpara
        fpara
/* para cada v∈V se tiene que NP contiene el número predecesores y c contiene sólo
aquellos vértices que tienen cero predecesores. El recorrido puede comenzar por cualquiera
de ellos */
        s := sec_vacia;
        *[ ¬vacio ( c ) ---> v := obtener_elem( c ) ;
                            c := eliminar( c, v );
                            s := concatenar( s, v );
                            Para cada w ∈ suc(g,v)  hacer
                                NP[w] := NP[w] -1;
                                [  NP[w] = 0 ---> c := añadir( c, w );
                                [] NP[w] ≠ 0 ---> seguir
                                ]
                            fpara
        ]
{ Post : s = orden_topológico( g ) }
        dev ( s )
ffunción
```

El coste de este algoritmo es el mismo que el del recorrido en profundidad, es decir, $\theta(n+e)$ para listas de adyacencia.

3. ALGORITMOS VORACES : Greedy

3.1. CARACTERIZACION Y ESQUEMA

El esquema que se va a presentar en este capítulo se denomina método Voraz, *Greedy Method*, y los algoritmos obtenidos aplicando este esquema se denominan, por extensión, algoritmos Voraces. Este método, junto con el del gradiente y otros, forman parte de una familia mucho más amplia de algoritmos denominados de *Búsqueda local* o *Hill-Climbing*.

El conjunto de condiciones que deben satisfacer los problemas que se pueden resolver aplicando este esquema es un tanto variopinto y, a continuación, vamos a ennumerar algunas de ellas :

1/ El problema a resolver ha de ser de optimización y debe existir una función que es la que hay que minimizar o maximizar. Es la denominada *función objetivo*. La siguiente función que es lineal y multivariable, es una función objetivo típica.

$$f : \aleph x \aleph x \ldots . x \aleph \text{ --------> } \Re \text{ (ó } \aleph \text{)}$$

$$f(x_1,\ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots . + c_n x_n$$

Se pretende encontrar una asociación de valores a todas las variables tal que el valor de *f* sea el óptimo. Es posible que el problema no tenga solución.

2/ Existe un conjunto de valores candidatos para cada una de las variables de la función objetivo. Ese conjunto de valores posibles para una variable es su *dominio*.

3/ Existe un conjunto de restricciones lineales que imponen condiciones a los valores que pueden tomar las variables de la función objetivo. El conjunto puede estar vacio o contener una única restricción. La siguiente expresión es una restricción habitual :

$$K \leq \sum_{i=1}^{n} x_i$$

4/ Existe una función que permite averiguar si un conjunto dado de asociaciones variable-valor es solución al problema. La asociación de un valor a una variable se denomina *decisión*. En nuestra notación esta función se denomina *solución*.

5/ Y ya por último, existe una función que indica si el conjunto de decisiones tomadas hasta el momento viola o no las restricciones. Esta función recibe el nombre de *factible* y al conjunto de decisiones tomadas hasta el momento se le suele denominar *solución en curso*.

Esta es una caracterización muy genérica y en temas posteriores se comprobará que algunas de sus características son compartidas por otros esquemas como Vuelta Atrás, Programación Dinámica, etc. ¿ Qué es lo que diferencia al método Voraz de estos otros esquemas ? : La diferencia fundamental estriba en el proceso de selección de las decisiones que forman parte de la solución. En un algoritmo Voraz este proceso es secuencial y a cada paso se determina, utilizando una función adicional que denominamos de *selección*, el valor de una de las variables de la función objetivo. A continuación el algoritmo Voraz se encuentra con un problema idéntico, pero estrictamente menor, al que tenía en el paso anterior y vuelve a aplicar la misma función de selección para obtener la siguiente decisión. Esta es, por tanto, una técnica descendente.

En cada paso del algoritmo la función de selección aplica un criterio fijo para escoger el valor candidato. Este criterio es tal que hace que la decisión sea localmente óptima, es decir, la decisión seleccionada logra que la función objetivo alcance el mejor valor posible (ningún otro valor de los disponibles para esa variable lograría que la función objetivo tuviera un valor mejor). Pero nunca se vuelve a reconsiderar ninguna de las decisones tomadas. Una vez que a una variable se le ha asignado un valor localmente óptimo, se comprueba si esa decisión junto con la solución en curso es un conjunto factible. Si es factible se añade la decisión a la solución en curso y se comprueba si ésta es o no solución para el problema. Ahora bien, si no es factible simplemente la última decisión tomada no se añade a la solución en curso y se continua el proceso aplicando la función de selección al conjunto de variables que todavía no tienen un valor asignado.

El esquema de un algoritmo Voraz que se presenta a continuación, refleja el proceso que se acaba de explicar y en él aparecen todas las funciones que se han descrito anteriormente.

función VORAZ (C es conjunto) dev (S es conjunto; v es valor)
{ *Pre :* C es el conjunto de valores candidatos que hay que asociar a las variables de la función objetivo para obtener la solución. Sin pérdida de generalidad, se supone que todas las variables tienen asociado el mismo dominio de valores que son, precisamente, los que contiene C. En este caso el número de variables que hay que asignar es desconocido y la longitud de la solución indicará cuantas variables han sido asignadas }

```
    S := conjunto_vacio;                    /* inicialmente la solución está vacía */
```

{ *Inv :* S es la solución en curso que no viola las restricciones y C contiene los candidatos que todavía no han sido elegidos }

```
    *[ ¬SOLUCION( S ) ∧ ¬vacio( C ) --->
        x := SELECCION( C );                /* se obtiene el candidato localmente óptimo */
        C := C-{x};                         /* este candidato no se va a considerar nunca más */
        [   FACTIBLE((S)∪{x}) ---> S := S∪{x};
```

```
        [] ¬ FACTIBLE((S)∪{x}) ---> seguir
        ]
    ]
    /* finaliza la iteración porque S es ya una solución o porque el conjunto de
    candidatos está vacio */
    [   SOLUCION( S ) ---> v:= OBJETIVO( S )
    []¬SOLUCION( S ) ---> S:= conjunto_vacio;
    ]
{ Post :  (S=conj_vacio ⇒ no se ha encontrado solución) ∧ (S ≠conj_vacio ⇒ S contiene los
candidatos elegidos ∧ v=valor(S)) }
    dev (S, v)
ffunción
```

El coste de este algoritmo depende de dos factores :
1/ del número de iteraciones, que a su vez depende del tamaño de la solución y del tamaño del conjunto de candidatos.
2/ del coste de las funciones SELECCION y FACTIBLE ya que el resto de las operaciones del interior del bucle tienen coste constante. La función FACTIBLE, en la mayoría de los casos, sólo necesita tiempo constante, pero la función SELECCION ha de explorar el conjunto de candidatos y obtener el mejor en ese momento. Por eso depende del tamaño del conjunto de candidatos. Normalmente se prepara (preprocesa) el conjunto de candidatos antes de entrar en el bucle para rebajar el coste de la función de SELECCION y conseguir que éste sea lo más cercano posible a constante. Precisamente, debido a su bajo coste, los algoritmos Voraces resultan sumamente atractivos en aplicaciones reales.

El proceso de construcción de la solución y la función de selección asociada que se ha descrito produce un comportamiento de los algoritmos Voraces muy especial. Lo más característico es que esta forma de resolución del problema no garantiza que se consiga el óptimo global para la función objetivo, ni tan solo que se consiga obtener una solución cuando el problema sí la tiene. Las decisiones localmente óptimas no garantizan que se vaya a obtener la combinación de valores que optimiza el valor de la función objetivo. La propia función de selección, es decir, el criterio que se aplica y el orden en que se toman las decisiones son las que producen esta circunstancia.
En cualquier caso, a menos que se diga lo contrario, sólo se considera que el problema está resuelto cuando la secuencia de decisiones consigue el óptimo global. El esquema Voraz se utiliza para encontrar la mejor solución y no es suficiente con una solución que, por supuesto sin violar las restricciones, no sea óptima. En este contexto, si se utiliza un algoritmo Voraz para resolver un problema, habrá que demostrar que la solución obtenida es la óptima. La inducción es la técnica de demostración de optimalidad más utilizada.

Hasta el momento, todos los problemas que aparecen en la bibliografía y que han sido resueltos aplicando un esquema Voraz satisfacen el denominado *Principio de Optimalidad* que se enunciará más adelante. Esto da una pista : si un problema satisface el principio de optimalidad tal vez sea resoluble aplicando un algoritmo Voraz, más exactamente, es posible que exista una función de selección que conduzca al óptimo global. Aunque se pueda utilizar esta información para intentarlo, no existe certeza y, por tanto, no hay garantía de que se vaya a encontrar tal función. Es mejor utilizar esta información de forma negativa, es decir, si no satisface el principio de optimalidad se descarta utilizar un Voraz para resolver el problema. En [CLR 92] se exponen, además, otros fundamentos teóricos del método Voraz tales como la estructura matroidal que exhiben ciertos problemas.

El *Principio de Optimalidad* se puede enunciar de diversas formas. Algunas de ellas se presentan a continuación :

[BB 90] : En una secuencia óptima de decisiones, toda subsecuencia ha de ser también óptima.

[CLR 92] : *A problem exhibits optimal substructure if an optimal solution to the problem contains within it optimal solutions to subproblems.*

[Peñ 86] : Un problema satisface el principio de optimalidad si una secuencia de decisiones óptima para él tiene la propiedad de que sea cual sea el estado inicial y la decisión inicial, el resto de las decisiones son una secuencia de decisiones óptima para el problema que resulta después de haber tomado la primera decisión.

El esquema de Programación Dinámica utiliza el Principio de Optimalidad para caracterizar los problemas que puede resolver.

3.2. PROBLEMAS SIMPLES

El conjunto de problemas que se puede resolver aplicando el esquema Voraz es muy amplio. En éste y los siguientes apartados se va a resolver un subconjunto de ellos. Se ha dejado fuera, por ejemplo, un problema muy típico como el de los códigos de Huffman del que puede obtenerse información consultando [HS 78] ó [BB 90] ó [CLR 92].

3.2.1. MONEDAS : EL PROBLEMA DEL CAMBIO

Dado un conjunto C de N tipos de monedas con un número inagotable de ejemplares de cada tipo, hay conseguir, si se puede, formar la cantidad M empleando el MÍNIMO número de ellas.

Este es un problema de minimización que satisface el principio de optimalidad. Se puede demostrar que si se tiene una solución óptima $A=\{e_1,e_2, ..., e_k\}$ para el problema de formar la cantidad M, siendo e_i , $1 \le i \le k$, un ejemplar de las monedas de C, entonces sucede que $A-\{e_1\}$ es también solución óptima para el problema de formar la cantidad $M-e_1$. En estas condiciones puede pensarse en un Voraz como esquema aplicable.

El proceso a seguir para cualquier problema que se intente resolver con un algoritmo Voraz siempre es el mismo. En primer lugar determinar la función de selección, definir la función factible y definir qué es solución para ese problema. A continuación hay que demostrar que la función de selección conduce siempre al óptimo. Si la demostración ha tenido éxito, en último lugar hay que construir el algoritmo pero resulta tan sencillo después de los pasos previos que en muchas ocasiones ni tan siquiera se considera necesario.

Para el problema que nos ocupa se puede comenzar por definir *factible* y *solución*. En este caso, el problema no tiene restricciones y se tiene una solución cuando los ejemplares de monedas elegidas suman exactamente *M*, si es que esto es posible.
La forma en que habitualmente se devuelve el cambio nos ofrece un candidato a función de selección : elegir a cada paso la moneda disponible de mayor valor. La función factible tendrá que comprobar que el valor de la moneda seleccionada junto con el valor de las monedas de la solución en curso no supera *M*. Inmediatamente se observa que para facilitar el trabajo de la función de selección se puede ordenar el conjunto *C*, con los tipos de monedas de la entrada, por orden decreciente de valor. De este modo, la función de selección sólo tiene que tomar la primera moneda de la secuencia ordenada.
Cubierta la primera parte del proceso, ahora hay que demostrar la optimalidad de este criterio y basta con un contraejemplo para comprobar que no conduce siempre al óptimo. Por ejemplo, si C={1,5,11,25,50} y M=65, la estrategia Voraz descrita obtiene la solución : una moneda de *50*, una moneda de *11* y cuatro monedas de *1*. Necesita seis monedas, mientras que la solución óptima sólo necesita cuatro monedas que son : una de *50* y tres de *5*.
No está todo perdido porque se puede intentar caracterizar *C* de modo que esta estrategia funcione siempre correctamente. En primer lugar se necesita que *C* contenga la monedad unidad. Caso de que esta moneda no exista, no se puede garantizar que el problema tenga solución y, tampoco, que el algoritmo la encuentre. En segundo lugar C ha de estar compuesto por tipos de monedas que sean potencia de un tipo básico *t*, con t>1. Con estas dos condiciones sobre *C*, el problema se reduce a encontrar la descomposición de *M* en base *t*. Se sabe que esa descomposición es única y, por tanto, mínima con lo que queda demostrado que en estas condiciones este criterio conduce siempre al óptimo.

```
función MONEDAS ( C es conjunto_monedas; M es natural ) dev ( S es conjunto_monedas )
{ Pre : C contiene los tipos de monedas a utilizar. Hay infinitos ejemplares de cada tipo. M
es la cantidad que hay que formar con las monedas de C }
        L := ORDENAR_DECREC( C );       S := conjunto_vacio;
        /* se ordenan los ejemplares por orden decreciente de valor */
        *[ suma(S)<M ∧ ¬vacia(L) --->
                x:= primero(L);
                /* x es un ejemplar de un tipo de moneda de las de C */
```

```
        [ (suma(S) + x) ≤ M --->S:= S∪{x};
                                /* es factible y se añade la decisión a la
                                solución en curso */
        [] (suma(S) + x) > M ---> L:= avanzar (L);
                                /* no es factible. Ese tipo de moneda se
                                elimina del conjunto de candidatos para no ser
                                considerado nunca más */
        ]
    ]
    [ suma(S)=M  ---> seguir
    [] suma(S)<M  ---> S :=conjunto_vacio
    ]
```

{ *Post :* si S vacio es que no hay solución, en caso contrario S contiene monedas tal que la suma de sus valores es exactamente M }

dev (S)

ffunción

En la postcondición no se dice nada de la optimalidad de la solución porque en la Precondición no se dice nada sobre las características de *C*.

El coste del algoritmo es O(*MAX* (n·log n,m)) siendo *n* el número de tipos de monedas de *C* y *m* el número de iteraciones que realiza el bucle. Una cota superior de *m* es M+n.

3.2.2. MINIMIZAR TIEMPO DE ESPERA

Un procesador ha de atender *n* procesos. Se conoce de antemano el tiempo que necesita cada proceso. Determinar en qué orden ha de atender el procesador a los procesos para que se minimice la suma del tiempo que los procesos están en el sistema.

Al igual que en el problema anterior, se trata de un problema de minimización que satisface el principio de optimalidad. No está sometido a restricciones y una solución es una secuencia de tamaño *n*, en la que aparecen los *n* procesos a atender. El orden de aparición en la secuencia indica el orden de atención por parte del procesador.

Un ejemplo dará ideas sobre la función de selección. Supongamos que hay 3 procesos p_1, p_2 y p_3 y que el tiempo de proceso que requiere cada uno de ellos es 5, 10 y 3 respectivamente. Se puede calcular la suma del tiempo que los procesos están en el sistema para cada una de los seis posibles órdenes en que se atiendan :

orden de atención	tiempo de espera
p_1, p_2, p_3	5 + (5 + 10) + (5 + 10 + 3) = 38
p_1, p_3, p_2	5 + (5 + 3) + (5 + 3 + 10) = 31
p_2, p_1, p_3	10 + (10 + 5) + (10 + 5 + 3) = 43
p_2, p_3, p_1	10 + (10 + 3) + (10 + 3 + 5) = 41

p_3, p_1, p_2	$3 + (3 + 5) + (3 + 5 + 10) = 29$
p_3, p_2, p_1	$3 + (3 + 10) + (3 + 10 + 5) = 34$

La ordenación que produce el tiempo de espera mínimo es la $\{p_3, p_1, p_2\}$ o, lo que es lo mismo, la que atiende en orden creciente de tiempo de proceso.
Hay que comprobar que este criterio conduce siempre al óptimo. Para ello se procede de la siguiente forma : dada una permutación cualquiera de *n* naturales (cada natural representa un proceso y tiene un tiempo de espera asociado) almacenada en una secuencia, comprobar que si en la secuencia aparece un proceso en una posición *x* con un tiempo de proceso mayor que el de otro proceso que aparece en una posición *y*, con $y>x$, entonces el tiempo de espera de esta secuencia se puede reducir a base de intercambiar esos dos elementos. Sólo cuando los procesos de la secuencia están ordenados por orden creciente de tiempo de proceso no hay forma de mejorar el tiempo de espera total. Más detalles en [BB 90].

El coste de esta solución es el de ordenar los procesos para producir la secuencia solución óptima, lo que se puede conseguir en $\theta(n \cdot \log n)$.

3.2.3. MAXIMIZAR NUMERO DE TAREAS EN EXCLUSION MUTUA

Dadas *n* actividades, $A=\{1,2, ...,n\}$, que han de usar un recurso en exclusión mutua, y dado que cada actividad tiene asociado un instante de inicio y otro de fin de utilización del recurso, s_i y f_i respectivamente con $s_i \leq f_i$, seleccionar el conjunto que contenga el máximo de actividades sin que se viole la exclusión mutua.

En este caso hay que maximizar la cardinalidad del conjunto solución que estará formado por un subconjunto de las actividades iniciales. La función factible tendrá que tener en cuenta que al añadir una nueva actividad a la secuencia solución no se viola la exclusión mutua.

Antes de buscar una función de selección veamos que el problema planteado satisface el principio de optimalidad (aunque no se demuestra). Sea *S* la solución óptima, de tamaño *m*, con $m \leq n$, para el conjunto de actividades $A=\{t_1,t_2, ...,t_n\}$. Sea a_k una actividad de *A* y $a_k \in S$. Si se elimina a_k de *S*, el problema original queda dividido en dos subproblemas : el de obtener el conjunto de tamaño máximo para todas aquellas actividades de *A* que acaban antes de que empiece a_k, y el de obtener el conjunto de tamaño máximo para todas aquellas otras actividades de *A* que empiezan después de que acabe a_k. Entonces, todas las actividades incluidas en *S* y que acaban antes de que empiece a_k son una solución óptima para el primer subproblema mientras que el resto de actividades de *S* son, también, una solución óptima para el segundo subproblema.
Existen varios criterios que pueden ser utilizados como función de selección :
1/ elegir la actividad que acaba antes de entre todas las que quedan
2/ elegir la actividad que empieza antes de entre todas.

3/ elegir la actividad de menor duración.
4/ elegir la actividad de mayor duración.
Es fácil encontrar contraejemplos simples para los criterios 2, 3 y 4 pero parece que el primero siempre funciona, es decir, encuentra el conjunto de tamaño máximo. Intentemos demostrar la optimalidad del criterio. Para facilitar la escritura de la demostración diremos que las actividades *i* y *j* son *compatibles* si $f_j \leq s_i$ ó $f_i \leq s_j$.

Demostración :
Sea $S=<a_1,a_2,...,a_m>$ una lista que contiene una solución óptima para el conjunto de actividades $A=\{t_1,t_2, ...,t_n\}$ con $m \leq n$.
1º/ Vamos a ver que toda solución óptima comienza con la actividad a_1, que es la que acaba antes de todas las de *A*. Precisamente es la que habría elegido el criterio Voraz.
- Si *S* comienza por a_1 no hay nada que comprobar.
- Si *S* NO comienza por a_1 lo hará por otra actividad, por ejemplo la a_k.
Supongamos que $B = S-\{a_k\}\cup\{a_1\}$. La sustitución de a_k por a_1 en *B* puede hacerse sin problemas ya que $f_{ak} \geq f_{a1}$ y, por tanto, todas las actividades de *B* que son compatibles con a_k también son compatibles con a_1. Como $|S|=|B|$, se puede asegurar que esta nueva solución también es óptima y comienza por a_1.

2º/ Una vez que se ha hecho la primera elección, la actividad a_1, el problema se reduce a encontrar una solución óptima para el problema de maximizar el conjunto de actividades que sean compatibles con a_1. Aplicando el primer criterio de selección volvemos a estar en la demostración anterior. Dicho de otra forma, si *S* es una solución óptima para el problema *A* entonces $S'= S-\{a_1\}$ es una solución óptima para el problema $A'=\{t_i \in A \mid s_{ti} \geq f_{a1}\}$. Si pudieramos encontrar una solución *B'* al problema *A'* tal que $|B'|>|S'|$ significaría que $|B'\cup\{a_1\}| > |S|$, lo que contradice la optimalidad de *S*. Por tanto, *S'* es una solución óptima para *A'* y el criterio de selección escogido lo construye correctamente.
Fin demostración.

El coste del algoritmo Voraz para resolver este problema es $\theta(n \cdot \log n)$ y se debe a la ordenación previa de las actividades. El bucle efectúa, en el peor de los casos, *n* iteraciones y el coste de cada iteración es $\theta(1)$.

3.3. MOCHILA

Se dispone de una colección de *n* objetos y cada uno de ellos tiene asociado un peso y un valor. Más concretamente, se tiene que dado el objeto *i* con $1 \leq i \leq n$, su valor es v_i y su peso es p_i. También se tiene una mochila capaz de soportar, como máximo, el peso PMAX. Determinar qué objetos hay que colocar en la mochila de modo que el valor total que se transporte sea máximo pero sin que se sobrepase el peso máximo, PMAX, que puede soportar.

Este problema es conocido por *The Knapsack problem*. Existen dos posibles formulaciones de la solución:

1/ *Mochila fraccionada* : se admite fragmentación, es decir, se puede colocar en la mochila solución un trozo de alguno de los objetos .

2/ *Mochila entera* : NO se admite fragmentación, es decir, un objeto o está completo en la mochila solución o no está en ella.

Para ambas formulaciones el problema satisface el principio de optimalidad. Ahora bien, mochila fraccionada se puede resolver aplicando un Voraz mientras que, de momento, mochila entera no (se necesita un Vuelta Atrás y, si se introduce alguna otra restricción en el problema, es posible incluso aplicar Programación Dinámica).

Intentaremos, por tanto, encontrar una buena función de selección que garantice el óptimo global para el problema de mochila fraccionada. Formalmente se pretende :

$$[\text{MAX}] \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \quad \text{sujeto a} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \leq \text{PMAX} \quad \text{y con} \quad 0 \leq x_i \leq 1$$

donde la solución al problema la da el conjunto de los valores x_i con $1 \leq i \leq n$, y x_i es un valor real entre 0 y 1 que se asocia a cada objeto *i*. Así, si el objeto *3* tiene asociado un 0 significará que este objeto no forma parte de la solución, pero si tiene asociado un 0.6 significará que un 60% de él está en ella.

Es posible formular unas cuantas funciones de selección. De las que se presentan a continuación las dos primeras son bastante evidentes mientras que la tercera surge después del fracaso de las otras dos :

1/ Seleccionar los objetos por orden creciente de peso. Se colocan los objetos menos pesados primero para que la restricción de peso se viole lo más tarde posible. Con un contraejemplo se ve que no funciona.

2/ Seleccionar los objetos por orden decreciente de valor. De este modo se asegura que los más valiosos serán elegidos primero. No funciona.

3/ Seleccionar los objetos por orden decreciente de relación valor/peso. Así se consigue colocar primero aquellos objetos cuya unidad de peso tenga mayor valor. Parece que si funciona. Ahora se ha de demostrar la optimalidad de este criterio.

Demostración:

Sea $X=(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ la secuencia solución generada por el algoritmo Voraz aplicando el criterio de seleccionar los objetos por orden decreciente de relación valor/peso. Por construcción, la secuencia solución es de la forma $X=(1,1,1, \ldots,1,0.x,0,\ldots,0,0)$, es decir, unos cuantos objetos se colocan enteros, aparecen con valor 1 en la solución, un sólo objeto se coloca parcialmente, valor *0.x*, y todos los objetos restantes no se colocan en la mochila, valor 0.

Si la solución X es de la forma $\forall i : 1 \le i \le n : x_i = 1$, seguro que es óptima ya que no es mejorable. Pero si X es de la forma $\exists i : 1 \le i \le n : x_i \neq 1$, entonces no se sabe si es óptima.
Sea j el índice más pequeño tal que $(\forall i : 1 \le i < j : x_i = 1)$ y $(x_j \neq 1)$ y $(\forall i : j+1 \le i \le n : x_i = 0)$. El índice j marca la posición que ocupa el objeto que se fragmenta en la secuencia solución.

- Supongamos que X NO es óptima. Esta suposición implica que existe otra solución, Y, que obtiene más beneficio que X, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i < \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i$$

Además, por tratarse de mochila fraccionada, ambas soluciones satisfacen :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot p_i = \text{PMAX}$$

Sea k el índice más pequeño de Y tal que $x_k \neq y_k$. Se pueden producir tres situaciones :
1/ $k < j$. En este caso $x_k = 1$ lo que implica que $x_k > y_k$
2/ $k = j$. Forzosamente $x_k > y_k$ porque en caso contrario la suma de los pesos de Y sería mayor que PMAX y, por tanto, Y no sería solución.
3/ $k > j$. Imposible que suceda porque implicaría que la suma de los pesos de Y es mayor que PMAX y, por tanto, Y no sería solución.
Del análisis de los tres casos se deduce que si Y es una solución óptima distinta de X, entonces $x_k > y_k$. Como $x_k > y_k$, se puede incrementar y_k hasta que $x_k = y_k$, y decrementar todo lo que sea necesario desde y_{k+1} hasta y_n para que el peso total continue siendo PMAX. De este modo se consigue una tercera solución $Z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ tal que $(\forall i : 1 \le i \le k : z_i = x_i)$ y

$$\sum_{i=k+1}^{n} p_i \cdot (y_i - z_i) = p_k \cdot (y_k - z_k)$$

Para Z se tiene :

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i + (v_k \cdot p_k / p_k) \cdot (y_k - z_k) - \sum_{i=k+1}^{n} (v_i \cdot p_i / p_i) \cdot (y_i - z_i) \ge$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i + \left(p_k \cdot (z_k - y_k) - \sum_{i=k+1}^{n} p_i \cdot (y_i - z_i) \right) \cdot v_k / p_k = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i$$

Después de este proceso se llega a la siguiente desigualdad :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i \le \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot v_i$$

Pero, en realidad, sólo es posible la igualdad ya que el menor indicaría que Y no es óptima lo que contradice la hipótesis de partida. Se puede concluir que Z también es una solución óptima y que, a base de modificarla como se ha hecho en este proceso, se consigue una solución, T, idéntica a X y, por tanto, X también es óptima.
Fin demostración.

Un algoritmo que resuelve este problema, y que tiene un coste $\theta(n \cdot \log n)$, es el que viene a continuación. En él los pesos y los valores de los objetos están almacenados en los vectores *p* y *v* respectivamente :

```
función MOCHILA ( v, p es vector de reales; n, PMAX es nat ) dev
                ( x es vector[1..n] de reales; VX es real )
{ Pre : v y p son vectores que contienen los valores y los pesos de los n objetos y PMAX es
el peso máximo que puede soportar la mochila }
        Para j=1 hasta n hacer
                VC[j].c := v[j] / p[j];     VC[j].id := j ;    x[j] := 0;
        fpara
        VC := ORDENAR_DECREC( VC, c );
/* se ordenan los objetos por el campo c, el que contiene el cociente valor, peso */
        s:= 0;   VX := 0 ;  i :=1;
        *[ (i ≤ n) ∧ (s < PMAX) --->
                k := VC[i].id;
                [  s + p[k] ≤ PMAX ---> x[k] := 1 ; VX := VX + v[k]; s := s + p[k];
                [] s + p[k] >PMAX --->  x[k] := (PMAX - s) / p[k] ;  s := PMAX;
                                        VX := VX + v[k] · x[k];
                ]
                i := i +1;
        ]
{ Post : x es la solución que maximiza el valor de los objetos colocados en la mochila. El
valor de x es VX }
        dev ( x, VX )
ffunción
```

3.4. ARBOLES DE EXPANSION MINIMA

Sea G=(V,E) un grafo no dirigido, etiquetado con valores naturales y conexo. Obtener un algoritmo que calcule un subgrafo de *G*, T=(V,F) con F⊆E ,conexo y sin ciclos, tal que la suma de los pesos de las aristas de *T* sea mínima. Si se recuerda, el subgrafo *T* es un árbol libre asociado a *G*. El árbol libre de *G* que cumple que la suma de los pesos de las aristas que lo componen es mínima se denomina el *árbol de expansión mínima* de *G*, *minimun spaning tree* ó MST para abreviar.

La solución de este problema es un conjunto de aristas, precisamente las que forman el MST. Vamos a presentar un algoritmo genérico que construye el árbol de expansión mínima a base de ir añadiendo una arista cada vez. Se trata de un algoritmo Voraz. El razonamiento es bastante simple : si *T* es un árbol de expansión mínima de *G* y *A* es el conjunto de aristas que hasta el momento se han incluido en la solución, el invariante de este algoritmo contiene la

condición de que *A* siempre es un subconjunto del conjunto de aristas de *T*. En cada iteración la función SELECCIONAR_ARISTA_BUENA elige una arista que permite que se mantenga el invariante, es decir, elige una arista *(u,v)*∈E de modo que si *A* es un subconjunto de *T*, entonces A∪{(u,v)} sigue siendo un subconjunto de *T*. La arista *(u,v)* que elige la función de selección se dice que es una *arista buena* para *A*.

```
función MST_GENERICO ( g es grafo ) dev ( A es conj_aristas; w es natural )
{ Pre : g=(V,E) es un grafo no dirigido, conexo y etiquetado con valores naturales }
        A := conjunto_vacio ; w:= 0;
{ Inv : A siempre es un subconjunto de un árbol de expansión mínima de g }
        *[ |A| < n-1  ---> (u,v) := SELECCIONAR_ARISTA_BUENA(g, A);
                           A := A∪{(u,v)}
                           w := w + valor (g, u, v) ;
         ]
{ Post : A es un MST de g y su peso, la suma de las etiquetas de las aristas que lo forman, es
w y es el mínimo posible}
        dev ( A, w )
ffunción
```

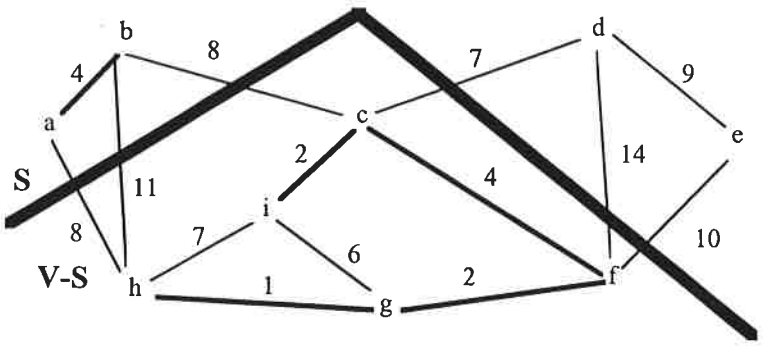
El problema es encontrar una arista buena para *A* de forma eficiente. Antes de abordar el problema de la eficiencia vamos con unas cuantas definiciones previas.

*De*finición : Un *corte* (S,V–S) de un grafo no dirigido G=(V,E) es una partición de *V*.

Definición : Se dice que una arista *cruza el corte* si uno de los vértices de la arista pertenece a *S* y el otro pertenece a *V–S*.

Definición : Se dice que el corte *respeta* a *A* si ninguna arista de *A* cruza el corte.

Definición : Una arista es una *c_arista* si cruza el corte y tiene la etiqueta mínima de entre todas las que cruzan el corte.



Las aristas en negrita pertenecen a A. El corte, marcado en trazo grueso, respeta a A. La arista (c,d) es una c_arista

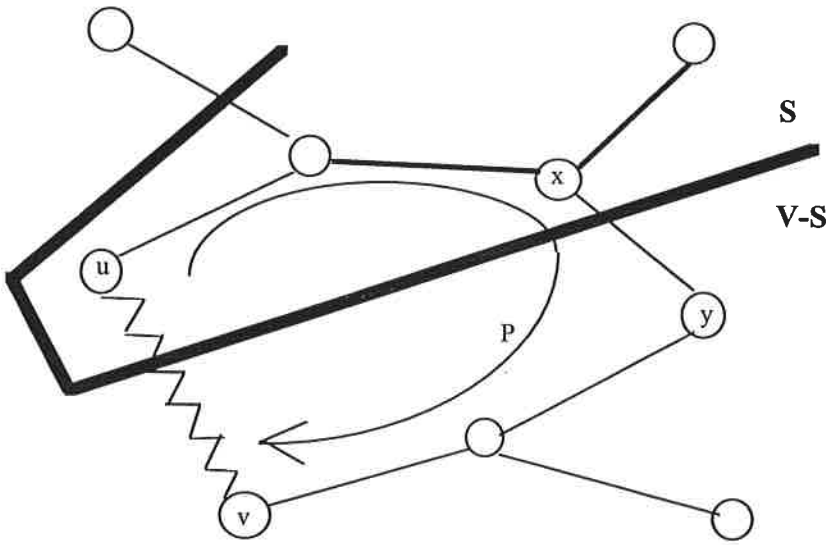
Teorema : Sea G=(V,E) un grafo no dirigido, conexo y etiquetado con valores naturales. Sea *A* un subconjunto de algún árbol de expansión mínima de *G*. Sea (S,V–S) un corte de *G* que

respeta a A y sea (u,v) una c_arista que cruza el corte, entonces (u,v) es una arista buena para A.

Este teorema está proponiendo una función de selección consistente en elegir a cada paso aquella arista que es buena para A. Para ello lo que ha de hacer es fijar un corte que respete a A y devolver la arista de peso mínimo de entre todas las que crucen el corte. En realidad, la función de selección no sólo devuelve una arista localmente óptima sino que garantiza que la unión de la arista seleccionada con las que forman la solución en curso son un conjunto de aristas factible.

Demostración:

Supongamos que A es un subconjunto de T, siendo T un árbol de expansión mínima de G, y que $(u,v) \notin T$, siendo (u,v) una c_arista para un corte que respeta a A. La demostración va a construir otro árbol de expansión mínima, T', que incluye a $A \cup \{(u,v)\}$ usando una técnica de 'cortar&pegar', y además se verá que (u,v) es una arista buena para A.



Todas las aristas, excepto la (u,v), forman parte de T. De éstas, las que están marcadas en negrita, pertenecen también a A. El corte está dibujado con trazo grueso.

La situación de partida la muestra el dibujo previo. En él se observa que la arista (u,v) forma un ciclo con las aristas en el camino P que va de u a v en T. Ya que u y v están en lados opuestos del corte (S,V–S), hay como mínimo en T una arista que también cruza el corte. Sea (x,y) esa arista. (x,y) no pertenece a A porque el corte respeta a A. Ya que (x,y) se encuentra en el único camino de u a v en T, eliminando (x,y) se fragmenta T en dos árboles. Si se añade la arista (u,v) se vuelve a conectar formándose el nuevo árbol $T' = T - \{(x,y)\} \cup \{(u,v)\}$.

Calculando el peso de T' se tiene que :

$$peso(T') = peso(T) - valor(g,x,y) + valor(g,u,v)$$

y como (u,v) es una c_arista, entonces

$$valor(g,u,v) \leq valor(g,x,y)$$

y, por tanto **[1]** $peso(T') \leq peso(T)$.

Por otro lado, se tiene que *T* es un árbol de expansión mínima de *G* y, por eso,

[2] $peso(T) \leq peso(T')$

De la certeza de los hechos **[1]** y **[2]** se deduce que

$$peso(T) = peso(T')$$

y que, por tanto, *T'* es también un árbol de expansión mínima de *G*.

Queda por comprobar que *(u,v)* es una buena arista para *A*. Se tiene que $A \subseteq T'$ y como también $A \subseteq T$ y $(x,y) \notin A$, entonces $A \cup \{(u,v)\} \subseteq T'$. Se ha comprobado que *T'* es un árbol de expansión mínima y de ello se deduce que *(u,v)* es una arista buena para *A*.

Fin demostración.

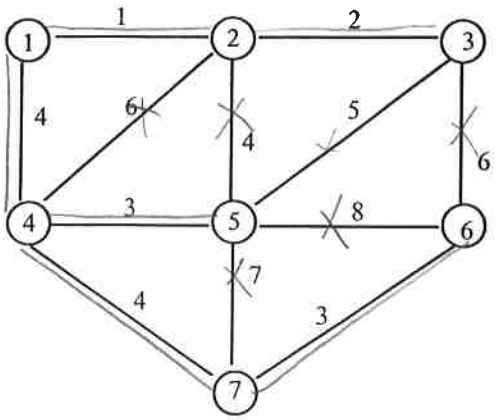
El invariante del bucle, además de contener que *A* es siempre un subconjunto de *T*, incluye el hecho de que el grafo $G_A=(V,A)$ es un bosque y cada una de sus componentes conexas es un árbol libre. Se deduce del hecho de que *(u,v)* es una arista buena para *A* y por tanto esta arista conecta dos componentes conexas distintas. En caso contrario, sucedería que $A \cup \{(u,v)\}$ contendría un ciclo. También se puede asegurar que la arista de valor mínimo de todo el grafo forma parte de algún árbol de expansión mínima de *G*.

Los algoritmos de Kruskal y Prim que se van a presentar a continuación, calculan el MST de un grafo dado. Se diferencian en la forma de construcción del mismo. Kruskal se conforma con mantener un conjunto de aristas, *T*, como un bosque de componentes conexas para finalmente lograr una sola componente conexa. Prim impone que el conjunto de aristas contenga, de principio a fin, una sola componente conexa. Veámoslos.

3.4.1. KRUSKAL

El algoritmo parte de un subgrafo de *G*, T=(V,conjunto_vacio) y construye, a base de añadir una arista de *G* cada vez, un subgrafo T=(V,A) que es el MST deseado. Utiliza una función de selección que elige aquella arista de valor mínimo, de entre todas las que no se han procesado, y que conecta dos vértices que forman parte de dos componentes conexas distintas. Este hecho garantiza que no se forman ciclos y que *T* siempre es un bosque compuesto por árboles libres. Para reducir el coste de la función de selección, se ordenan previamente las aristas de *G* por orden creciente del valor de su etiqueta.

Veamos, con un ejemplo, como funciona el algoritmo. Sea *G* el grafo de la siguiente figura :



La lista de las aristas de *G* ordenadas por orden creciente de valor es:
{ (1,2), (2,3), (4,5), (6,7), (1,4), (2,5), (4,7), (3,5), (2,4), (3,6), (5,7), (5,6) }
La tabla que viene a continuación muestra el trabajo de las siete iteraciones que lleva a cabo el bucle. Inicialmente cada vértice pertenece a un grupo distinto y al final todos forman parte del mismo grupo. Las aristas examinadas y no rechazadas son las aristas que forman el MST.

ETAPA	ARISTA EXAMINADA	GRUPOS DE VERTICES
Incializ.	----	{1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6},{7}
1	(1,2), valor 1	{1, 2}, {3}, {4}, {5}, {6},{7}
2	(2,3), valor 2	{1, 2, 3}, {4}, {5}, {6},{7}
3	(4,5), valor 3	{1, 2, 3}, {4, 5}, {6},{7}
4	(6,7), valor 3	{1, 2, 3}, {4, 5}, {6, 7}
5	(1,4), valor 4	{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7}
6	(2,5) ARISTA RECHAZADA (forma ciclo)	
7	(4,7), valor 4	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
	peso (T) = 17	

En la implementación del algoritmo que viene a continuación, se utiliza la variable *MF* que es del tipo *MFSet* y que se utiliza para mantener los distintos grupos de vértices.

```
función KRUSKAL ( g es grafo ) dev ( T es conj_aristas)
{ Pre : g=(V,E) no dirigido, conexo y etiquetado con valores naturales}
        EO := ORDENAR_CRECIENTE( E );
        n := |V|;    T := conjunto_vacio;    MF := iniciar;
        Para cada v∈V hacer MF := añadir( MF, {v}) fpara
        /* al comienzo cada vértice forma parte de un grupo distinto */
        *[ | T | < n-1 --->
                (u,v) := primero(EO);
                EO := avanzar(EO);
                /* (u,v) es la arista seleccionada, es una arista buena para T */
                x := find( MF, u );
                y := find( MF, v );
```

```
                    [ x=y ---> seguir              /* se rechaza porque provoca ciclo */
                    [] x≠y ---> MF := merge( MF, x, y );    T := T∪{(u,v)}
                    ]
            ]
{Post : T es un MST de g }
        dev ( T )
ffunción
```

El coste de ordenar el conjunto de aristas es $\theta(|E|\cdot\log n)$ y el de inicializar el MFSet es $\theta(n)$. Cada iteración lleva a cabo dos operaciones 'find' y, algunas veces, exactamente *n-1*, también una operación 'merge'. El bucle, en el peor de los casos, lleva a cabo $2\cdot|E|$ operaciones 'find' y *n-1* operaciones 'merge'. Sea $m=2\cdot|E| + n-1$, entonces el bucle cuesta $O(m\cdot\log^* n)$ que es $O(|E|\cdot \log^* n)$ aproximadamente. Como el coste del bucle es menor que el coste de las inicializaciones, el coste del algoritmo queda $\theta(|E|\cdot\log n)$.

3.4.2. PRIM

Este algoritmo hace crecer el conjunto *T* de aristas de tal modo que siempre es un árbol. Por este motivo, la función de selección escoge la arista de peso mínimo tal que un extremo de ella es uno de los vértices que ya están en *T* y el otro extremo es un vértice que no forma parte aún de *T* (es una arista que cruza el corte). Como al final todos los vértices han de aparecer en *T*, el algoritmo comienza eligiendo cualquier vértice como punto de partida (será el único vértice que forme parte de *T* en ese instante) y ya empieza a aplicar la función de selección para hacer crecer *T* hasta conseguir que contenga, exactamente, *n-1* aristas. Esta condición de finalización equivale a la que se utiliza en el algoritmo que viene a continuación en el que, en lugar de contar las aristas de *T*, se cuentan sus vértices (que son los que están en VISTOS).

```
función PRIM ( g es grafo ) dev ( T es conj_aristas)
{ Pre : g=(V,E) es un grafo no dirigido, conexo y etiquetado con valores naturales}
        T := conjunto_vacio;
        VISTOS:= añadir(conjunto_vacio, un vértice cualquiera de V);
        *[ |VISTOS| < |V| --->
                (u,v) := SELECCIONAR( g, VISTOS );
/* devuelve una arista (u,v)  de peso mínimio tal que u∈VISTOS y v∈(V−VISTOS) */
                T:= T ∪{(u,v)};
                VISTOS := VISTOS ∪{v};
        ]
{Post : T es un árbol de expansión mínima de g }
        dev ( T )
ffunción
```

Veamos el comportamiento de este algoritmo sobre el grafo que se ha utilizado en la sección 3.4.1. En este caso no es preciso ordenar previamente las aristas de G y la tabla describe el trabajo de cada una de las iteraciones del algoritmo :

ETAPA	ARISTA EXAMINADA	VISTOS
Incializ.	----	{1}
1	(1,2), valor 1	{1, 2}
2	(2,3), valor 2	{1, 2, 3}
3	(1,4), valor 4	{1, 2, 3, 4}
4	(4,5), valor 3	{1, 2, 3, 4, 5}
5	(4,7), valor 4	{1, 2, 3, 4, 5, 7}
6	(7,6), valor 3	{1, 2, 3, 4, 5, 6,7}
	peso(T) = 17	

Si se analiza el coste del algoritmo se ve que en cada iteración la función de selección precisa consultar todas las aristas que incidan en alguno de los vértices de VISTOS y que respeten el corte, eligiendo la de valor mínimo. Este proceso se ha de repetir *n-1* veces, tantas como aristas ha de contener *T*. El algoritmo queda $O(n^3)$. Hay que buscar una forma de reducir este coste. La idea es mantener para cada vértice *v*, $v \in$(V–VISTOS), cual es el vértice más cercano de los que están en VISTOS y a qué distancia se encuentra. Si se mantiene esta información siempre coherente, la función de selección sólo necesita O(n).
El siguiente algoritmo implementa esta aproximación. En el vector VECINO se guarda, para cada vértice $v \in$(V–VISTOS), cual es el más cercano de los que están en VISTOS y en el vector COSTMIN a qué distancia se encuentra. Cuando un vértice *v* pasa a VISTOS, entonces COSTMIN[v]=-1. Se supone que el grafo está implementado en la matriz de adyacencia M[1...n,1...n].

```
función PRIM_EFICIENTE ( g es grafo ) dev ( T es conj_aristas )
{ Pre : g=(V,E) es un grafo no dirigido, conexo y etiquetado con valores naturales,
implementado en una matriz de adyacencia M[1...n,1...n] }
        T := conjunto_vacio;
        VISTOS:= añadir( conjunto_vacio,{1});
        /* se comienza por el vértice 1 */
        Para  i=2 hasta n hacer
                VECINO[i] := 1;    COSTMIN[i] := M[i,1];
        fpara
/* el único vértice en VISTOS es 1. Por tanto a todos los demás vértices les pasa que el más
cercano en VISTOS es el 1 y se encuentra a distancia M[i,1]. Si no hay arista entonces M[i,1]
contiene el valor infinito */
```

```
        *[ |VISTOS| < n --->
        /* seleccionar la arista buena */
                min := ∞;
                Para j=2 hasta n hacer
                [ 0 ≤ COSTMIN[j] < min ---> min := COSTMIN[j]; k := j;
                [] (COSTMIN[j] = -1) ∨ (COSTMIN[j] > min) ---> seguir
                ]
                fpara
        /* la arista ( k, VECINO[k] ) es la arista seleccionada */
                T:= T ∪{(k, VECINO[k])};        /* arista que se añade a T */
                VISTOS := VISTOS∪{k};           /* k pasa a VISTOS */
                COSTMIN[k] := -1;
        /* como VISTOS se ha modificado, hay que ajustar VECINO y COSTMIN para
        que contenga una información coherente con la situación actual. Sólo afectará a
        aquellos vértices que no pertenezcan a VISTOS y que son adyacentes a k */
                Para j=2 hasta n hacer
                [ M[k,j] < COSTMIN[j] ---> COSTMIN[j] := M[k,j]; VECINO[j] := k;
                [] M[k,j] ≥ COSTMIN[j] ---> seguir
                ]
                fpara
        ]
{Post : T es el MST de g }
        dev (T)
ffunción
```

Analizando el coste de esta nueva versión se tiene que el coste de cada iteración en cualquiera de los dos bucles es $\theta(n)$, y como se ejecutan *n-1* iteraciones, el coste total es $\theta(n^2)$.
Existe una versión más eficiente que se puede encontrar en [CLR 92] y que mantiene los vértices no VISTOS en una cola de prioridad implementada en un *Heap*.

3.5. CAMINOS MINIMOS

Existe una colección de problemas, denominados problemas de caminos mínimos o *Shortest-paths problem,* basados en el concepto de camino mínimo. Antes de presentar la colección veamos algunos de estos conceptos.
Sea G=(V,E) un grafo dirigido y etiquetado con valores naturales. Se define el peso del camino *p*, $p=<v_0,v_1,v_2, ...,v_k>$, como la suma de los valores de las aristas que lo componen.
Formalmente :

$$peso(p) = \sum_{i=1}^{k} valor(g,v_{i-1},v_i)$$

Se define el camino de peso mínimo del vértice u al v en G, con $u,v \in V$, con la siguiente función :

$$\delta(u,v) = \begin{cases} MIN\{ \text{peso(p)} : u \ldots_{p} \ldots v \} & \text{si hay camino de } u \text{ a } v \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces el camino más corto, camino mínimo, de u a v en G, se define como cualquier camino p tal que peso(p) = δ(u,v).

La colección de problemas está compuesta por cuatro variantes :

1/ *Single_source shortest_paths problem* : hay que encontrar el camino más corto entre un vértice fijado, *source*, y todos los vértices restantes del grafo. Este problema se resuelve eficientemente utilizando el algoritmo de Dijkstra.

2/ *Single_destination shortest_paths problem* : hay que encontrar el camino más corto desde todos los vértices a uno fijado, *destination*. Se resuelve aplicando Dijkstra al grafo de partida pero cambiando el sentido de todas las aristas.

3/ *Single_pair shortest_paths problem* : Fijados dos vértices del grafo, *source* y *destination*, encontrar el camino más corto entre ellos. En el caso peor no hay un algoritmo mejor que el propio Dijkstra.

4/ *All_pairs shortest_paths problem* : Encontrar el camino más corto entre los vértices u y v, para todo par de vértices del grafo. Se resuelve aplicando Dijkstra a todos los vértices del grafo. El algoritmo de Floyd es más elegante pero no más eficiente y sigue el esquema de Programación Dinámica.

3.5.1. DIJKSTRA

El algoritmo de Dijkstra resuelve el problema de encontrar el camino más corto entre un vértice dado, el llamado inicial, y todos los restantes del grafo. Funciona de una forma semejante al algoritmo de Prim : supongamos que en VISTOS se tiene un conjunto de vértices tales que, para cada uno de ellos, se conoce ya cual es el camino más corto entre el vértice inicial y él. Para el resto de vértices, que se encuentran en V–VISTOS, se guarda la siguiente información : ($\forall u : u \in V–VISTOS$: D[u] contiene la longitud del camino más corto desde el vértice inicial a u que no sale de VISTOS), en realidad se dispone de esta información para todos los vértices. Una función de selección que eligiera el vértice v de V–VISTOS con $D[v]$ mínima sería muy parecida a la que selecciona el vértice con el valor de COSTMIN más pequeño en Prim.

Dijkstra funciona exactamente de esta forma, pero necesita actualizar convenientemente los valores de D cada vez que se modifica VISTOS. Habrá que demostrar que si el vector D satisface estas condiciones, la función de selección propuesta obtiene la solución óptima, es decir, calcula los caminos mínimos entre el vértice inicial y todos los restantes. Veamos el algoritmo.

función DIJKSTRA (g es grafo; v_ini es vértice) dev (D es vector[1..n] de naturales)
{ *Pre :* g=(V,E) es un grafo etiquetado con valores naturales y puede ser dirigido o no dirigido. En este caso es dirigido. Para facilitar la lectura del algoritmo se supone que el grafo está implementado en una matriz y que M[i,j] contiene el valor de la arista que va del vértice i al j y, si no hay arista, contiene el valor infinito }

```
Para cada v∈V hacer D[v] := M[v_ini, v] fpara;
D[v_ini]:= 0;
VISTOS := añadir( conjunto_vacio, v_ini );
```

{ *Inv :* ∀u : u∈V−VISTOS: D[u] contiene la longitud del camino más corto desde v_ini a u que no sale de VISTOS, es decir, el camino está formado por v_ini y una serie de vértices todos ellos pertenecientes a VISTOS excepto el propio u. ∀u : u ∈VISTOS: D[u] contiene la longitud del camino más corto desde v_ini a u}

```
*[ |VISTOS| < |V| --->
        u := MINIMO( D, u∈V−VISTOS );
        /* se obtiene el vértice u∈V-VISTOS que tiene D mínima */
        VISTOS := VISTOS ∪{u};
        /* Ajustar D */
        Para cada v ∈ suc(g,u) tal que v ∈V−VISTOS hacer ajustar D[v] fpara;
 ]
```

{ *Post :* ∀u : u∈V: D[u] contiene la longitud del camino más corto desde v_ini a u que no sale de VISTOS, y como VISTOS ya contiene todos los vértices, se tienen en D las distancias mínimas definitivas }

```
dev ( D )
ffunción
```

El bucle que inicializa el vector *D* cuesta θ(n) y el bucle principal, que calcula los caminos mínimos, efectua *n-1* iteraciones. En el coste de cada iteración intervienen dos factores : la obtención del mínimo, coste lineal, y el ajuste de *D*. Respecto a esta última operación, si el grafo está implementado en una matriz de adyacencia, su coste también es θ(n) y se tiene que el coste total del algoritmo es $\theta(n^2)$.

Ahora bien, si el grafo está implementado en listas de adyacencia y se utiliza un Heap para acelerar la elección del mínimo, entonces, seleccionar el mínimo cuesta θ(1), la construcción del Heap θ(n·log n) y cada operación de ajuste requerirá θ(log n). Como en total se efectuan θ(|E|·log n) , el algoritmo requiere θ((n+|E|)·log n) que resulta mejor que el de las matrices cuando el grafo es poco denso.

Vamos a comprobar la corrección del criterio de selección, su optimalidad.

Demostración:

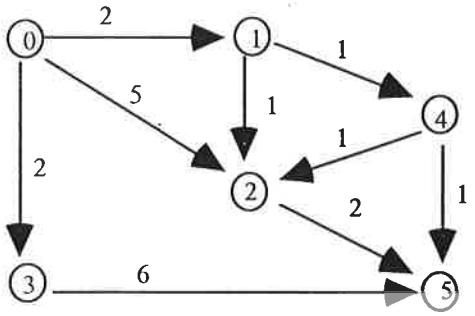
Sea u un vértice tal que $u \in$ V–VISTOS. Supongamos que *D[u]* contiene información cierta, es decir, la distancia mínima entre el vértice inicial y u siguiendo por un camino que sólo contiene vértices que pertenecen a VISTOS. Si u es el vértice con el valor de D más pequeño, el criterio de selección lo elegirá como candidato e inmediatamente pasará a formar parte de VISTOS y se considerará que su *D[u]* es una distancia definitiva.

Supongamos que no es CIERTO, es decir, que existe un camino más corto, aún no considerado, desde el vértice inicial a u que pasa por v, obviamente $v \in$ V–VISTOS. Si v se encuentra en el camino más corto desde el vértice inicial a u, ¡ es que D[v]<D[u] ! lo que contradice la elección de u. De este modo se puede concluir que siempre que D contenga información correcta, la función de selección elige un vértice con un valor de D ya definitivo (ninguno de los vértices que no están en VISTOS lograrán que se reduzca).

Fin demostración.

En el algoritmo propuesto se observa que una vez que se ha seleccionado un vértice se procede a 'ajustar' D. Este proceso de ajuste consiste en lo siguiente : Para todos los vértices que todavía continuan en V–VISTOS, su valor de D contiene la distancia mínima al vértice inicial pero sin tener en cuenta que u acaba de entrar en VISTOS. Hay que actualizar ese valor. Para cada vértice $v \in$ suc(g,u) tal que $v \in$ V–VISTOS, hay que efectuar la siguiente comparación : *D[v]* comparado con (D[u] + valor(g,u,v)) y dependiendo del resultado de la comparación modificar *D[v]* convenientemente. Consultar [Bal 86] para más información.

Tomando como punto de partida el grafo de la siguiente figura, veamos como funciona el algoritmo.



Se elige como vértice inicial el vértice con etiqueta *0*. La tabla que viene a continuación muestra en qué orden van entrando los vértices en VISTOS y cómo se va modificando el vector que contiene las distancias mínimas. Los valores en *cursiva* de la tabla corresponden a valores definitivos y, por tanto, contienen la distancia mínima entre el vértice *0* y el que indica la columna. Se asume que la distancia de un vértice a si mismo es cero.

D :	0	1	2	3	4	5	**VISTOS**
	0	2	5	2	∞	∞	{ 0 }
	0	***2***	3	2	3	∞	{0,1}

D :	0	1	2	3	4	5	**VISTOS**
	0	***2***	3	***2***	3	8	{0,1,3}
	0	***2***	***3***	***2***	3	5	{0,1,3,2}
	0	***2***	***3***	***2***	***3***	4	{0,1,3,2,4}
	0	***2***	***3***	***2***	***3***	***4***	{0,1,3, 2,4,5}

3.5.2. RECONSTRUCCION DE CAMINOS MINIMOS

El algoritmo presentado calcula las distancias mínimas pero no mantiene la suficiente información como para saber cuales son los caminos que permiten alcanzarlos. Se puede modificar el algoritmo para almacenar la información necesaria y luego poder recuperar los caminos mínimos. Basta con anotar, cada vez que se modifica el valor de *D*, el vértice que ha provocado esa modificación. Si el hecho de que *v* entre en VISTOS hace que *D[u]* se modifique, es debido a que el camino mínimo del vértice inicial a *u* tiene como última arista la *(v,u)*. Esta es la información que hay que guardar para cada vértice. El vector CAMINO se emplea en el siguiente algoritmo con ese propósito.

```
función DIJKSTRA_CAM ( g es grafo; v_ini es vértice ) dev
                              ( D, CAMINO es vector[1..n] de natural )
{ Pre : la misma que DIJKSTRA }
        Para cada v∈V hacer D[v] := M[v_ini, v];  CAMINO[v]:= v_ini fpara;
        D[v_ini]:= 0;
        VISTOS := añadir( conjunto_vacio, v_ini );
        *[ |VISTOS| < |V| --->
                u := MINIMO( D, u∈V−VISTOS );
                VISTOS := VISTOS∪{u};
                Para cada v ∈ suc(g,u) tal que v ∈V−VISTOS hacer
                [  D[v] > D[u] + valor( g,u,v ) ---> D[v] := D[u] + valor( g,u,v );
                                                     CAMINO[v]:= u;
                [] D[v] ≤ D[u] + valor ( g,u,v ) ---> seguir
                ]
                 fpara;
         ]
{ Post : ∀u : u∈V:  D[u] contiene la longitud del camino más corto desde v_ini a u que no
sale de VISTOS, y como VISTOS ya contiene todos los vértices, se tienen en D las distancias
mínimas definitivas.  ∀u : u∈V: CAMINO[u] contiene el otro vértice de la última arista del
camino mínimo de v_ini a u}
        dev ( D, CAMINO )
ffunción
```

Para poder reconstruir los caminos se utiliza un procedimiento recursivo que recibe el vértice para el cual se quiere reconstruir el camino, *v*, y el vector CAMINO. Una nueva llamada

recursiva con el vértice CAMINO[v] devolverá el camino desde *v_ini* a este vértice y sólo hará falta añadirle la arista (CAMINO[v],v) para tener el camino mínimo hasta *v*.

```
función RECONSTRUIR ( v, v_ini es vértice; CAMINO es vector[1..n] de vértices ) dev
                        ( s es secuencia_aristas )
        [  v = v_ini ---> s := secuencia_vacia;
        [] v ≠ v_ini ---> u := CAMINO[v];
                          s := RECONSTRUIR( u, v_ini, CAMINO );
                          s := concatenar( s, (u, v) );
        ]
{ Post : s contiene las aristas del camino mínimo desde v_ini a v }
        dev ( s )
ffunción
```

4. ESQUEMA DE VUELTA ATRAS : Backtracking

4.1. CARACTERIZACION

En este capítulo nos vamos a ocupar del esquema de Vuelta Atrás, más conocido por su denominación inglesa de *Backtracking*. La caracterización de los problemas que son resolubles aplicando este esquema no es muy distinta de la que ya se ha visto en el capítulo anterior y se utiliza la misma terminología como, por ejemplo, decisión, restricción, solución, solución en curso, etc. Recordemos algunas de las características de estos problemas :

1/ se trata generalmente de problemas de optimización, con o sin restricciones.

2/ la solución es expresable en forma de secuencia de decisiones.

3/ existe una función denominada *factible* que permite averiguar si una secuencia de decisiones, la solución en curso actual, viola o no las restricciones.

4/ existe una función, denominada *solución*, que permite determinar si una secuencia de decisiones factible es solución al problema planteado.

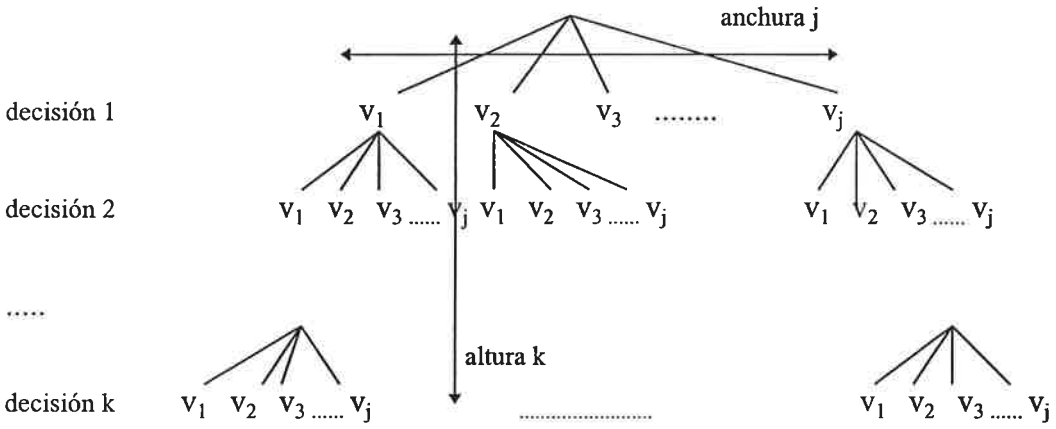
No parece que exista una gran diferencia entre los problemas que se pueden resolver utilizando un esquema Voraz y los que se pueden resolver aplicando este nuevo esquema de Vuelta Atrás. Y es que en realidad no existe. La técnica de resolución que emplean cada uno de ellos es la gran diferencia.

Básicamente, Vuelta Atrás es un esquema que genera TODAS las secuencias posibles de decisiones. Esta tarea también la lleva a cabo el algoritmo conocido como de *fuerza bruta* pero lo hace de una forma menos eficiente. Vuelta Atrás, de forma sistemática y organizada, genera y recorre un espacio que contiene todas las posibles secuencias de decisiones. Este espacio se denomina el *espacio de búsqueda* del problema. Una de las primeras implicaciones de esta forma de resolver el problema es que, si el problema tiene solución, Vuelta Atrás seguro que la encuentra.

La siguiente figura muestra un posible espacio de búsqueda asociado a un problema en el que hay k decisiones que tomar (son las que definen la altura del espacio), y en el que cada decisión tiene asociado un dominio formado por j valores distintos, que son los que determinan la anchura del espacio. Habitualmente el espacio de búsqueda es un árbol,

aunque puede ser un grafo, como en el caso de los grafos de juego. Si en el árbol hay un gran número de nodos repetidos y se dan otras condiciones adicionales, es posible que el problema se pueda resolver aplicando el esquema de Programación Dinámica.

El primer paso para resolver un problema utilizando Vuelta Atrás consiste en determinar su espacio de búsqueda asociado. Puede que exista más de un espacio de búsqueda para el mismo problema. Por regla general se elige el más pequeño o el de generación menos costosa, aunque un espacio dado no tiene porqué satisfacer ambos criterios simultáneamente. El espacio de búsqueda de la figura ocupa un espacio de orden $O(j^k)$, siendo k una variable que depende del tamaño de la entrada del problema, lo que equivale a un espacio de orden exponencial. El tiempo necesario para recorrerlo es exactamente del mismo orden. El coste exponencial en el caso peor es otra de las características de Vuelta Atrás.



Todos los nodos que forman parte de cualquier camino que va desde la raíz del espacio de búsqueda a cualquier nodo del mismo representan una secuencia de decisiones. Como ya se ha mencionado anteriormente, una secuencia de decisiones es *factible* si no viola las restricciones. Se dice además que es *prolongable* si es posible añadir más decisiones a la secuencia y *no_prolongable* en caso contrario. Que una secuencia sea no_prolongable equivale a que ha llegado a la frontera del espacio de búsqueda, es decir, que el último nodo de la secuencia es una hoja del espacio. Para muchos problemas y dependiendo del espacio de búsqueda elegido se tiene que una *solución* es cualquier secuencia de decisiones factible y no_prolongable (topológicamente hablando, sólo cuando se está en una hoja se tiene una solución). En otros casos el concepto de solución es más amplio y cualquier secuencia factible, prolongable o no_prolongable, se considera solución.

Vuelta Atrás hace un recorrido en profundidad del espacio de búsqueda partiendo de la raíz del mismo. Precisamente la denominación de Vuelta Atrás procede de que el recorrido en profundidad regresa sobre sus pasos, retrocede, cada vez que encuentra un camino que se ha acabado o por el que no puede continuar. En un instante dado del recorrido, Vuelta Atrás se encuentra sobre un nodo v del espacio de búsqueda. La secuencia de decisiones factible formada por los nodos en el camino que va desde la raíz a v se denomina *solución en curso*,

y *v* es el *nodo en curso*. Por abuso de lenguaje se dice que el nodo *v*, que es el último del camino, satisface una propiedad cuando debería decirse que es el camino que va desde la raíz a *v* el que satisface esa propiedad. Por ejemplo, si el camino de la raíz a *v* es factible, se dice que *v* es un *nodo factible.*

En un recorrido en profundidad o en un recorrido en anchura de un espacio de búsqueda se conoce de antemano el orden en que se van a generar, recorrer, sus nodos. Ambos son recorridos ciegos porque, independientemente del problema, fijado un nodo del espacio se sabe cual es el siguiente que se va a generar. En algunos textos el término Backtracking tiene un sentido más amplio que el que se le ha dado aquí y se utiliza para describir cualquier recorrido ciego.

4.2. TERMINOLOGIA Y ESQUEMAS

Vuelta Atrás puede recorrer el espacio de búsqueda con diferentes propósitos dependiendo del tipo de problema planteado. Así, para un problema de optimización, el objetivo del recorrido será encontrar una solución óptima, la mejor. Sin embargo, para un problema de búsqueda puede resultar interesante encontrar una solución, por ejemplo la primera que se encuentre o, por el contrario, se puede querer encontrar todas las soluciones existentes. A partir del esquema básico que encuentra una solución, e introduciendo pequeñas modificaciones, se puede obtener el esquema válido para cada una de las variantes propuestas.

El esquema algorítmico de Vuelta Atrás que se presenta implementa un recorrido en profundidad de forma recursiva. En él se asume que una solución es una secuencia de decisiones factible y no_prolongable. El algoritmo funciona de la siguiente forma : A la llamada recursiva le llega un nodo, que ya ha sido analizado en la llamada recursiva previa, y del que se sabe que es factible pero que todavía no es solución. Entonces el algoritmo genera todos los hijos de ese nodo pero sólo provocan nueva llamada recursiva aquellos hijos que a su vez sean factibles y no sean solución. Los hijos restantes, que o bien son solución o bien no son factibles, son tratados convenientemente en la misma llamada recursiva en la que han sido generados. Existe una versión algorítmica alternativa en la que a una llamada recursiva le llega un nodo del que no se sabe nada. Primero se analiza el nodo (factible, prolongable, etc.) y caso de ser factible y no solución se generan todos sus hijos y cada uno de ellos produce nueva llamada recursiva. He adoptado la primera alternativa algorítmica porque a mi entender facilita el razonamiento y la argumentación de la corrección. Cuestión de gustos.

Las operaciones asociadas al espacio de búsqueda y que se utilizan para facilitar la lectura del algoritmo son : *preparar_recorrido*, *existan_hermanos* y *siguiente_hermano*. Todas ellas asumen que la solución en curso, implementada sobre un vector *x*, contiene *k-1* decisiones almacenadas en las posiciones de la *1* a la *k-1* en el vector *x*. La decisión contenida en *x*[*k-1*]

corresponde al último nodo tratado del espacio de búsqueda. Cada una de estas operaciones consiste en :

- *preparar_recorrido_nivel_k* : esta operación inicializa toda la información necesaria antes de empezar a generar y tratar todos los hijos de $x[k-1]$.
- *existan_hermanos_nivel_k* : función que detecta si ya se han generado todos los hijos del nodo $x[k-1]$.
- *siguiente_hermano_nivel_k* : función que produce el siguiente hijo aún no generado, en algún orden, del nodo $x[k-1]$.

Cuando se decida utilizar este esquema para resolver un problema es conveniente definir antes todos los elementos básicos del algoritmo : el espacio de búsqueda, la solución, las funciones de generación y las de recorrido del espacio de búsqueda.

- *Espacio de búsqueda* : su altura, anchura, que aspecto tiene (árbol, grafo, etc.).
- Hay que decidir cómo va a expresarse la *solución* : su tamaño (fijo o variable), cómo se va a implementar el tipo solución, que condiciones determinan que una secuencia de decisiones sea solución para el problema, etc.

El espacio de búsqueda y la solución son dos elementos están completamente relacionados. Depende de qué espacio de búsqueda se elija (su tamaño, forma, el orden de las decisiones), la solución se expresará de una cierta forma. Y también al revés, dependiendo de cómo se quiera expresar la solución (con una estructura de tamaño fijo o variable), el espacio de búsqueda tendrá un aspecto u otro.

Por una pura cuestión de eficiencia es conveniente que el espacio de búsqueda no contenga caminos repetidos. Esto es fundamental para aquellos problemas en los que no importa en que orden se toman las decisiones que aparecen en la solución. Las mismas decisiones en cualquier orden están describiendo la misma solución y, si no se tiene en cuenta, Vuelta Atrás generará soluciones repetidas.

- *Funciones de generación* : para el espacio de búsqueda elegido diseñar las funciones preparar_recorrido, existe_hermano y siguiente_hermano.
- *Funciones de recorrido* : una de ellas ya se ha definido cuando se ha caracterizado la solución. Además hay que definir la función *factible* y la función *prolongable*. De su buena definición depende que los caminos explorados sean válidos, es decir, no violen las restricciones y no salgan fuera de los límites del espacio de búsqueda.

4.2.1. UNA SOLUCIÓN

Este es el esquema que obtiene UNA solución, la primera que encuentra. El parámetro de entrada x, de tipo solución, contiene precisamente la solución en curso y se ha implementado sobre un vector para facilitar la escritura del algoritmo. Conviene recordar que se ha asumido que cuando *la solución en curso es factible pero no_prolongable se tiene una solución.* Entonces, la secuencia de decisiones asociada a esa solución corresponde a un camino que va

desde la raíz a una hoja del espacio de búsqueda. En el apartado 4.2.4.Mochila Entera se interpreta *solución* de forma distinta.

```
función BACK_1SOL ( x es solución; k es nat ) dev ( b es bool; sol es solución )
{ Pre : (x [1..k-1] es factible ∧ no es solución) ∧ 1≤ k ≤ altura(espacio búsqueda) }
    b:= FALSO; sol:= sol_vacia;
    preparar_recorrido_nivel_k;
    *[ existan_hermanos_nivel_k ∧ ¬b --->
          x[k] := sig_hermano_nivel_k;
          [   factible(x,k) --->  [   solucion(x,k)  --- >  tratar_solución(x);
                                                             sol := x;  b := CIERTO;
                                  [] ¬solucion(x,k) --- >  <sol,b> := BACK_1SOL(x, k+1);
                                  ]
          [] ¬factible(x,k) ---> seguir
          ]
    ]
{ Post : si b es FALSO quiere decir que se han generado todas las formas posibles de rellenar
x desde k hasta longitud(solución) que tienen como prefijo x[1...k-1] y no se ha encontrado
solución. Si b es CIERTO quiere decir que durante el proceso de generación de todas las
formas posibles de rellenar x desde k hasta longitud(solución) con prefijo x[1...k-1] se ha
encontrado una solución al problema, sol. La generación de todas las formas posibles de
rellenar ..., se ha hecho siguiendo el orden de 'primero en profundidad' }
    dev ( sol, b )
ffunción
```

La primera llamada a esta función es **<s,b>:= BACK_1SOL (sol_vacia, 1).**

4.2.2. TODAS LAS SOLUCIONES

Este es el esquema que obtiene TODAS las soluciones. El conjunto de soluciones se devuelve en la secuencia *s*.

```
función BACK_TODAS ( x es solución; k es nat ) dev ( s es secuencia(solución ))
{ Pre : (x [1..k-1] es factible ∧ no es solucion ) ∧ 1≤ k ≤ altura(espacio búsqueda) }
    s:= sec_vacia;
    preparar_recorrido_nivel_k ;
    *[ existan_hermanos_nivel_k  --->
          x[k] := sig_hermano_nivel_k
          [   factible(x,k) ---> [   solucion(x,k)  ---> tratar_solución(x);    s := añadir(s, x)
                                 [] ¬solucion(x,k) ---> s1 := BACK_TODAS(x, k+1);
                                                        s:= concat(s1,s )
                                 ]
```

```
            [] ¬factible(x,k) ----> seguir
            ]
    ]
```

{ *Post :* Se han generado todas las formas posibles de rellenar x desde k hasta longitud(solución) que tienen como prefijo x[1...k-1] y s contiene todas las soluciones que se han encontrado. La generación de todas las formas posibles ...., se ha hecho siguiendo el orden de 'primero en profundidad' }

dev (s)

ffunción

La primera llamada a esta función es **sec := BACK_TODAS (sol_vacia, 1).**

4.2.3. LA MEJOR SOLUCION

Este es el esquema que obtiene la mejor solución para un problema de MAXIMIZACION. Devuelve la mejor solución encontrada en *xmejor,* después de recorrer todo el espacio de búsqueda. El valor de esa solución óptima se devuelve en *vmejor.*

```
función BACK_MEJOR ( x es solución; k es nat ) dev
                        ( xmejor es solucion;  vmejor es valor (xmejor) )
{ Pre : (x [1..k-1] es factible ∧ no es solución ) ∧ 1≤ k ≤ altura(espacio búsqueda) }
    <xmejor,vmejor> := <sol_vacia, 0 > ;
    preparar_recorrido_nivel_k ;
    *[ existan_hermanos_nivel_k  --->
        x[k] := sig_hermano_nivel_k;
        [   factible(x,k) ---> [   solucion(x,k) --->  tratar_solución(x) ;
                                                       <sol,val> := < x, valor(x) >
                               [] ¬solucion (x,k) ---> <sol,val> := BACK_MEJOR(x, k+1)
                               ]
                               [ vmejor ≥ val --->     seguir
                               [] vmejor < val --->    < xmejor, vmejor > := < sol, val >;
                               ]
        [] ¬factible(x,k) ---> seguir
        ]
    ]
```

{ *Post :* Se han generado todas las formas posibles de rellenar x desde k hasta longitud(solucion) que tienen como prefijo x[1...k-1] y xmejor es la mejor solución que se ha encontrado en el subárbol cuya raíz es x[k-1]. El valor de xmejor es vmejor. La generación de todas las formas posibles ..., se ha hecho siguiendo el orden de 'primero en profundidad' }

dev (xmejor, vmejor)

ffunción

La primera llamada a esta función es **<xm,vm> := BACK_MEJOR (sol_vacia, 1).**

4.2.4. MOCHILA ENTERA

El problema de la Mochila entera ya se ha formulado en el tema de los algoritmos Voraces y se mencionó que no había una solución Voraz para este problema. Una posible formulación de mochila entera es la siguiente :

$$[\text{MAX}] \sum_{i=1}^{n} x(i) \cdot v(i), \quad \text{sujeto a } \left(\sum_{i=1}^{n} x(i) \cdot p(i) \right) \leq \text{PMAX} \ \wedge \ (\forall i : 1 \leq i \leq n : x(i) \in \{0,1\})$$

Se supone que *v* y *p* son vectores de *1* a *n* que contienen el *valor* y el *peso*, respectivamente, de los objetos que hay que empaquetar en la mochila. Esta soporta, como máximo, un peso de PMAX. Se trata de un problema de optimización y se quiere la solución de valor máximo que satisfaga la restricción de peso.

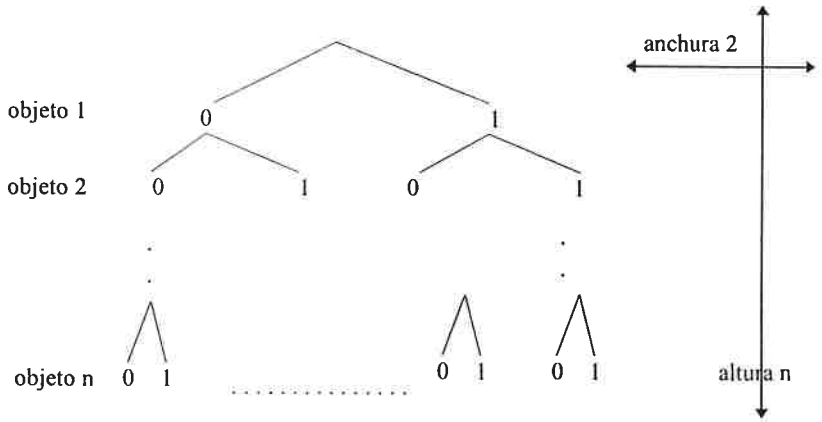
Alternativa A : **Espacio de búsqueda binario y solución ≡ factible ∧ no_prolongable**

Hay que determinar cómo es el espacio de búsqueda y la solución. Vista la formulación anterior de mochila, la solución podría expresarse como una secuencia que se implementa en un vector de tamaño *n* y que contiene los valores *{0 ,1}*.

Concretando, tipo solución es vector [1..n] de {0,1};
var x : solución ;

∀i : 1≤i≤n : (x[i]=0 indica que el objeto *i* NO está en la mochila)
(x[i]=1 indica que el objeto *i* SI está en la mochila)

La solución expresada de esta forma es una solución de *tamaño fijo*, exactamente contiene *n* decisiones una para cada objeto. El espacio de búsqueda asociado es un árbol binario de altura *n* y que ocupa un espacio de 2^n.



La función factible ha de comprobar que la suma del peso de los objetos colocados hasta el momento en la mochila, no supera el máximo permitido. Se tiene una solución cuando se ha decidido qué hacer con los *n* objetos, lo que corresponde a estar en una hoja del espacio de búsqueda. Por tanto, cualquier camino desde la raíz a una hoja que no supere el peso máximo de la mochila puede ser solución del problema.

A continuación se presenta un algoritmo para implementar esta alternativa. Se ha utilizado el bucle para generar los dos hijos de cada uno de los nodos del espacio de búsqueda con el

propósito de ilustrar la utilización del esquema, aunque para este problema resulta excesivo y se podía haber resulto de otra forma.

```
función MOCHILA-BINARIO (x es solución; k es nat) dev
                                ( xmejor es solución; vmejor es valor (xmejor))
                  k-1
{ Pre :  (Σ x(i)·p(i) ≤ PMAX)  ∧ (1≤k≤ n) }
                  i=1
    <xmejor,vmejor>:=<sol_vacia, 0>;
    x(k):= -1;                                          /* preparar_recorrido de nivel k */
    *[ x(k) < 1 ----> x(k):= x(k) +1 ;                  /* siguiente hermano nivel k */
                    peso := SUMA_PESO(x,1,k,p);
                    [ peso ≤ PMAX --- >                 /* la solución en curso es factible */
                                    [ k=n  --->         /* es una hoja y por tanto solución */
                                          <sol,val> := < x, SUMA_VALOR(x,1,n,v) >
                                    []k<n --->          /* no es una hoja, es prolongable  */
                                          <sol,val> := MOCHILA-BINARIO( x, k+1);
                                     ]
                                    [ vmejor ≥ val ---> seguir
                                    [] vmejor < val ---> < xmejor, vmejor > := < sol, val >;
                                    ]
                    [] peso >PMAX ---> seguir;          /* viola las restricciones */
                    ]
    ]
{ Post : xmejor es la mejor solución que se ha encontrado explorando todo el subárbol que
cuelga del elemento x(k-1) estando ya establecido el camino desde la raíz a este elemento y
              n
vmejor = Σ xmejor(i)·v(i) }
              i=1
    dev ( xmejor, vmejor )
ffunción
```

La Primera llamada a la función será **<s,v> := MOCHILA-BINARIO (sol_vacia, 1).**

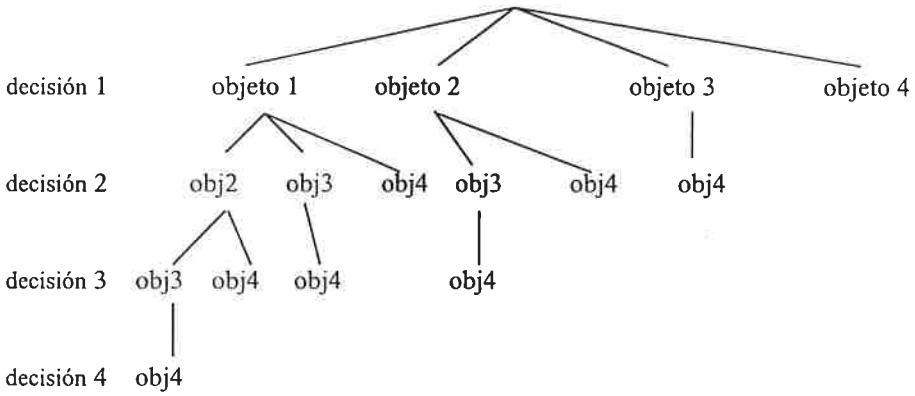
El coste de esta solución es $O(2^n)$ debido al tamaño máximo del espacio de búsqueda. Este coste ha de ser multiplicado por : el de calcular el valor de la variable *peso* en cada elemento del espacio de búsqueda, y el de calcular el valor de la variable *val* sólo en las hojas. Las funciones SUMA_PESO y SUMA_VALOR calculan, respectivamente, ambos valores.
Ambos cálculos requieren coste $\theta(n)$, con lo que el coste total del algoritmo es $O(n \cdot 2^n)$.

Alternativa B : **Espacio de búsqueda n-ario y solución ≡ factible**

La solución también se puede plantear como una secuencia que contiene los índices de objetos que se han podido empaquetar en la mochila sin violar la restricción de peso. Eso significa que la secuencia tendrá un tamaño variable que dependerá del número de objetos que se hayan incluido en la solución. Se puede deducir que como mínimo habrá un elemento y como máximo los *n* de la entrada.

Para esta solución, el espacio de búsqueda ha de contener todas las combinaciones de *n* elementos tomados de *1* en *1*, de *2* en *2*,..., de *n* en *n*. El tamaño del espacio sigue siendo del orden de 2^n.

La siguiente figura muestra el espacio de búsqueda para un problema con n=4. El espacio es de tamaño mínimo porque no se repite ninguna combinación, aunque sea en orden distinto. Tampoco se intenta colocar el mismo objeto más de una vez.



Existen bastantes diferencias entre este espacio de búsqueda y el binario de la alternativa *A*. En éste una solución se puede encontrar en cualquier camino que vaya de la raíz a cualquier otro nodo del árbol y, además, las hojas se encuentran a distintas profundidades.

Se puede detectar de dos formas distintas cuando la solución en curso es una solución para el problema inicial :

1/ cualquier camino que vaya desde la raíz a cualquier otro nodo del árbol y que no viole la restricción de peso máximo es solución.

2/ cuando se alcanza un nodo que viola la restricción de peso máximo, se puede asegurar que el camino desde la raíz hasta el padre de ese nodo es una solución.

En el algoritmo que se presenta a continuación se ha elegido la primera posibilidad por ser la más homogénea con el tipo de tratamiento que se está haciendo hasta ahora. La definición del tipo solución que se ha utilizado es :

```
tipo solución es vector [0..n] de {0..n};
var x : solución ;
```

Los valores de *x* van de *0* a *n* y tienen la siguiente interpretación : x(i)=j indica que en *i*-ésimo lugar se ha colocado en la mochila el objeto identificado por el índice *j*. Si x(i)=0

indica que en *i*-ésimo lugar no se ha colocado en la mochila ningún objeto. Inicialmente x(0)=0. El algoritmo devuelve en *t* el número de objetos que forman parte de la solución. El coste de este algoritmo es el mismo que el obtenido para la alternativa anterior.

```
función MOCHILA-NARIO ( x es solución; k es nat) dev
                        ( xmejor es solución; t es nat; vmejor es valor (xmejor))
                  k-1
{ Pre : ( Σ p(x(i)) ≤ PMAX ) ∧ (1≤k≤ n) }
                  i=1
    <xmejor,t,vmejor>:=<sol_vacia, 0, 0>;
    x(k):= x(k-1);                                  /* preparar recorrido nivel k */
    *[ x(k) < n ----> x(k):= x(k) +1 ;
                peso := SUMA_PESO(x,1,k,p);
                [ peso ≤ PMAX --- >                 /* la solución en curso es factible y
                                                    también solución para el problema */
                      val := SUMA_VALOR(x,1,k,v);
                      [ vmejor ≥ val ---> seguir
                      [] vmejor < val ---> <xmejor ,vmejor> := <x ,val>;
                                           t := k;
                      ]
                      [ x (k) = n  ---> seguir; /* es una hoja y , por tanto, solución
                                                pero ya se ha tratado como tal en la
                                                alternativa anterior */
                      [] x(k) < n  --->         /* no es hoja, hay que prolongar */
                            <sol, tt, val > := MOCHILA-NARIO( x, k+1);
                            [ vmejor ≥ val ---> seguir
                            [] vmejor < val ---> <xmejor ,vmejor> := <sol ,val>;
                                                 t := tt;
                            ]
                      ]
                [] peso >PMAX ---> seguir;    /* viola las restricciones */
                ]
    ]
{ Post : xmejor[1..t] contiene los índices de los objetos tal que la suma de sus valores es
vmejor. xmejor es la mejor solución que se ha encontrado explorando todo el subárbol que
cuelga del elemento x(k-1) estando ya establecido el camino desde la raíz a este elemento}
    dev ( xmejor, t, vmejor )
ffunción
```

La primera llamada será **<s,t,v> := MOCHILA-NARIO (sol_vacia, 1).**

4.3. MARCAJE

La técnica que se presenta a continuación ya se ha introducido en otras asignaturas de Programación. Se trata de la conocida *inmersión de eficiencia* que puede ser de parámetros o de resultados y que en el contexto de Vuelta Atrás se denomina *marcaje* y suele ser de parámetros. Su objetivo es reducir el coste de los algoritmos. Basta con observar las dos soluciones que se han presentado de Mochila entera en el apartado anterior para apreciar que es posible reducir el coste de $O(n \cdot 2^n)$ a $O(2^n)$. Es suficiente con no tener que calcular, para cada nodo del espacio, la suma del peso de los objetos que se encuentran en la solución en curso asociada. Si un nodo le comunicara a todos sus hijos el peso que él ha conseguido acumular hasta el momento, se conseguiría evitar ese cálculo. Más adelante se presentará el algoritmo de Mochila entera, alternativa *A*, que incorpora esta inmersión de eficiencia.

Para mostrar la utilización que hace Vuelta Atrás del marcaje se ha partido del esquema que obtiene todas las soluciones y se le han introducido las operaciones de *marcar* y *desmarcar* así como los puntos en que se realizan habitualmente esas operaciones.

```
función BACK_TODAS_MARCAJE ( x es solución; k es nat; m es marcaje ) dev
                                        (s es secuencia(solución))
{ Pre : (x [1..k-1] es factible ∧ no es solución ) ∧ 1≤k≤altura(espacio búsqueda) ∧ m
contiene el marcaje del nodo x[k-1]}
    s:= sec_vacia;
    preparar_recorrido_nivel_k ;
    *[ existan_hermanos_nivel_k  --->
          x[k] := sig_hermano_nivel_k;
          m:= MARCAR ( m, x, k );  [ 1a ]
          [ factible(x, k) --->
                    [ 1b ]
                    [   solucion (x,k) ---> tratar_solucion(x);
                                            s := añadir(s, x);
                    []¬solucion (x,k) ---> s1:= BACK_TODAS_MARCAJE(x, k+1, m);
                                            s :=  concat(s1,s );
                    ]
                    [ 2b ]
          [] ¬factible(x,k) ----> seguir
          ]
          m:= DESMARCAR ( m, x, k ); [ 2a ]
    ]
{ Post :  Se han generado todas las formas posibles de rellenar x desde k hasta
longitud(solución) que tienen como prefijo x[1...k-1] y s contiene todas las soluciones que se
```

han encontrado. La generación de todas las formas posibles ...., se ha hecho siguiendo el orden de 'primero en profundidad' }

dev (s)

ffunción

La función BACK_TODAS_MARCAJE recibe como parámetro el marcaje *m*, que contiene toda la información asociada al camino que va desde la raíz hasta el nodo *x(k-1)* y que necesitarán sus descendientes si no quieren tener que volver a calcular esa información y quieren mejorar la eficiencia. En **[1a]** el nodo *x(k)* ya es alguno de los hijos del nodo *x(k-1)* y lo que hace la operación MARCAR es asociar a *x(k)* toda la información del padre, que está en *m*, junto con la nueva que él aporta. El marcaje de *x(k)* se almacena en la misma variable que contenía el marcaje de su padre, es decir, en *m*. En **[2a]** se vuelve a recuperar el valor que tenía *m* como parámetro de entrada para que la próxima vez que se repita **[1a]** se calcule el marcaje del nuevo hijo correctamente y siempre respecto del marcaje del padre.
Hay ocasiones en las que conviene MARCAR y DESMARCAR en **[1b] y [2b],** respectivamente, en lugar de hacerlo en **[1a]** y **[2a]**. Todo depende del problema. También dependiendo del problema y de cómo se implemente y manipule el marcaje, a veces no será necesario DESMARCAR.

Y este es el algoritmo de Mochila entera, alternativa *A*, pero con marcaje. En este caso el marcaje está formado por dos variables *pac* y *vac* que contienen el peso y el valor acumulado, respectivamente, por la solución en curso. Interesa destacar que no es preciso DESMARCAR debido a que el espacio de búsqueda es un árbol binario y con 0 a la izquierda.

función MOCHILAB_MARCAJE (x es solución, k, pac, vac es nat) dev
(xmejor es solución, vmejor es valor (xmejor))

$$\{ Pre : (\sum_{i=1}^{k-1} x(i)\cdot p(i) \le PMAX) \wedge (pac = \sum_{i=1}^{k-1} x(i)\cdot p(i)) \wedge (vac = \sum_{i=1}^{k-1} x(i)\cdot v(i)) \wedge (1 \le k \le n) \}$$

```
<xmejor,vmejor>:=<sol_vacia, 0>;
x(k):= -1;                                   /* preparar recorrido de nivel k */
*[ x(k) < 1 ----> x(k):= x(k) +1 ;           /* siguiente hermano nivel k */
                  pac := pac + x(k) · p(k);  /* marcar */
                  vac := vac + x(k) · v(k);
                  [ pac ≤ PMAX --- > /* la solución en curso es factible */
                        [ k = n  --->        /* es una hoja y por tanto solución */
                            <sol,val> := < x, vac >
                        [] k < n  --->       /* no es una hoja, hay que seguir  */
                            <sol,val> := MOCHILAB_MARCAJE( x, k+1, pac, vac);
                        ]
```

```
                    [ vmejor ≥ val --->     seguir
                    [] vmejor < val --->    <xmejor, vmejor> := <sol, val>;
                    ]
                [] pac >PMAX ---> seguir;    /* viola las restricciones */
                ]
                                /* no hace falta desmarcar */
    ]
```

{ *Post :* xmejor es la mejor solución que se ha encontrado explorando todo el subárbol que cuelga del elemento x(k-1) estando ya establecido el camino desde la raíz a este elemento y

$$vmejor = \sum_{i=1}^{n} xmejor(i) \cdot v(i) \}$$

```
    dev ( xmejor, vmejor )
ffunción
```

Primera llamada **<s,v> := MOCHILAB_MARCAJE (sol_vacia, 1, 0, 0).**
El coste de este algoritmo es ahora $O(2^n)$ y se ha conseguido rebajarlo gracias al marcaje.

4.4. PODA BASADA EN EL COSTE DE LA MEJOR SOLUCION EN CURSO

La *poda* es un mecanismo que permite descartar el recorrido de ciertas zonas del espacio de búsqueda. La poda básica de Vuelta Atrás la lleva a cabo la función factible y consiste en NO continuar expandiendo uno nodo que viole las restricciones. Esto evita la generación de una cierta cantidad de nodos del espacio de búsqueda. La *poda basada en el coste de la mejor solución en curso*, PBCMSC para abreviar, es otra poda adicional que se aplica en problemas de optimización para los que se quiere obtener la mejor solución. Su objetivo es conseguir que se incremente el número de nodos podados, y para que sea lo más efectiva posible es aconsejable que actue desde el comienzo y así actuar sobre los primeros niveles del espacio de búsqueda.

Para que este tipo de poda funcione hay que disponer de la mejor solución hasta el momento, la llamada *mejor solución en curso*. La idea es que hay que podar el nodo en curso cuando, pese a ser factible y prolongable, no sea posible conseguir con él una solución mejor que la mejor solución en curso. Entonces se dice que no merece la pena expandir el nodo en curso. A Vuelta Atrás con PBCMSC se le puede proporcionar una solución inicial, calculada con una función externa a él y, de este modo, funcionar desde el comienzo. Si no se tiene una solución inicial la poda no empezará a actuar hasta que Vuelta Atrás haya conseguido encontrar la primera solución en su recorrido habitual.
Otra cuestión importante es que hay que poder calcular de forma eficiente el valor de la mejor solución que se puede conseguir expandiendo el nodo en curso. Una forma evidente de

calcularlo es aplicar Vuelta Atrás sobre el nodo en curso, pero ya sabemos que tiene un coste exponencial y, entonces, la PBCMSC no nos ahorrará nada.

Supongamos que se está resolviendo un problema de MINIMIZACION. Sea *v* el nodo en curso, *k* la profundidad de *v* en un espacio de búsqueda de altura *n*, *x* la solución en curso tal que x(k)=v, *vsol* el valor de la solución en curso (vsol=VALOR(x, 1, k)) y *vmejor* el valor de la mejor solución en curso. Sea *f* una función tal que aplicada a *v*, y=f(v), devuelve un valor *y* que es una COTA INFERIOR del valor de cualquier forma de completar la solución en curso de modo que ésta consiga ser solución al problema. Entonces *vsol+y* es una COTA INFERIOR del valor de la mejor solución que se puede conseguir expandiendo el nodo en curso. Ahora ya se puede aplicar la PBCMSC sobre ese nodo :
- Si *vmejor<(vsol + y)*, entonces hay que podar el nodo en curso ya que expandiéndolo no se consigue una solución de valor menor que la mejor solución en curso.
- Si *vmejor≥(vsol + y)*, entonces hay que continuar expandiendo el nodo en curso ya que parece que es posible conseguir una solución de menor valor que la mejor solución en curso.

En un problema de MAXIMIZACIÓN, la función *f* ha de proporcionar una COTA SUPERIOR del valor de cualquier forma de completar la solución en curso de modo que ésta consiga ser solución al problema. Entonces el nodo en curso no se expandirá si *vmejor>(vsol + y)*.

La función *f*, denominada *función de estimación* o heurístico, y su cálculo ha de satisfacer ciertas condiciones :
1/ *f* no puede engañar : El valor devuelto por *f* ha de ser una una cota inferior de verdad. En caso contrario es posible que la PBCMSC decida podar el nodo en curso cuando, en realidad, había un camino desde la raíz, pasando por *v* y llegando hasta algún descendiente de *v*, que era solución y con un valor menor que el de la mejor solución en curso. En estas condiciones ya no se podría garantizar que Vuelta Atrás encuentra siempre la solución del problema, si es que la tiene.
2/ *f* no ha de ser costosa de calcular : Se ha de calcular el valor de *f* para todo nodo factible y prolongable del espacio de búsqueda. El coste de este cálculo multiplica al del coste de recorrer el espacio de búsqueda, lo que da lugar a costes elevadísimos en el caso peor. No obstante este coste es bastante improbable ya que la aplicación de la PBCMSC puede reducir considerablemente el espacio de búsqueda.

Resumiendo, dado un problema al que se le quierea aplicar PBCMSC, primero hay que buscar una función de estimación que no engañe, que cueste poco de calcular y que sea muy efectiva (que pode mucho) y, segundo, hay que calcular una solución inicial para que la poda actue desde el principio de Vuelta Atrás. Para ciertos problemas las buenas funciones de estimación que se pueden encontrar son tan costosas que resulta más barato aplicar

directamente Vuelta Atrás. La solución del problema que se puede obtener aplicando un algoritmo Voraz puede ser una buena solución inicial para Vuelta Atrás con PBCMSC.

A continuación se presenta el esquema de Vuelta Atrás con PBCMSC para un problema de MINIMIZACIÓN. Como en esquemas anteriores, se ha considerarado que una solución es una secuencia de decisiones factible y no_prolongable (es un camino de la raíz a una hoja). Los parámetros de la llamada recursiva incluyen la mejor solución en curso y su valor, *xini* y *vini* respectivamente, y el valor de la solución inicial que se aporta en la primera llamada recursiva, VSOLI. Este último parámetro es innecesario pero facilita la escritura de la especificación del algoritmo.

función BACKMEJOR_P (x es solución; k es nat; xini es solución; vini es valor(xini);
VSOLI es valor) dev (xmejor es solucion; vmejor es valor (xmejor))
{ *Pre :* (x [1..k-1] es *factible* ∧ *no* es *solución*) ∧ 1≤ k≤altura(espacio búsqueda) ∧ *xini* es la mejor solución en curso ∧ *vini* es el valor de *xini* tal que vini=*MIN*(valor de la mejor solución encontrada hasta el momento,VSOLI) }

```
<xmejor,vmejor> := <xini,vini > ;                /* inicializar mejor solución en curso */
preparar_recorrido_nivel_k ;
*[ existan_hermanos de nivel_k  --->
      x[k] := sig_hermano_nivel_k;
      est := ESTIMAR(x,k);                       /* est =f(nodo en curso ) */
      [ factible(x,k) ∧ (COSTE(x,k) + est) < vmejor --->
            [solucion (x,k) --->
                  solución ;  <sol,val> := < x, valor(x) >
            []¬solucion (x,k) --->
                  <sol,val> := BACKMEJOR_P(x, k+1, xmejor, vmejor, VSOLI );
            ]
            [ vmejor ≤ val  ---> seguir
            [] vmejor > val ---> <xmejor, vmejor> := <sol, val>;
            ]
      [] (¬factible(x,k)) ∨ (COSTE(x,k) + est) ≥ vmejor ----> seguir
      ]
]
```

{ *Post :* Se han generado todas las formas posibles de rellenar x desde k hasta longitud(solucion) que tienen como prefijo x[1...k-1] y xmejor es la mejor solución en curso y vmejor es el valor de la mejor solución en curso (xmejor). La generación de todas las formas posibles ..., se ha hecho siguiendo el orden de 'primero en profundidad' }

```
dev ( xmejor, vmejor )
```

ffunción

La primera llamada será **<xm,vm> := backmejor_p (sol_vacia, 1, xini, vini, vini).**

La variable *xini* es una solución calculada con una función externa, por ejemplo un Voraz, y *vini* contiene el valor de esa solución. Si no se puede calcular una solución inicial, entonces *xini* se inicializa a *sol_vacia* y *vini* a *0*, ya que se trata de un problema de minimización.

ESTIMAR es la función de estimación del problema y devuelve una cota inferior del mejor valor que se puede conseguir explorando el subárbol cuya raíz es el nodo *x(k)*. La función COSTE(x,k) devuelve el valor de la solución en curso (*vsol*, el coste del camino que va desde la raíz a *x(k)*). Sobre este esquema se pueden introducir los marcajes que haga falta para mejorar la eficiencia.

A continuación se presenta el algoritmo con PBCMSC para resolver el problema de mochila entera con un espacio binario. Se aporta una solución inicial calculada con el algoritmo Voraz para mochila fraccionada que obtiene el óptimo pero eliminando la última decisión tomada, aquella que corresponde al objeto que se fracciona. El algoritmo se encuentra en la sección 3.3. Como función de estimación se utiliza el mismo algoritmo Voraz. Este se aplica sobre los elementos que todavía no se han intentado colocar en la mochila y así se obtiene el máximo alcanzable con los objetos restantes (una cota superior). Para reducir el coste del cálculo de la función de estimación, los objetos se van a considerar en el mismo orden en que son considerados por el algoritmo Voraz, es decir, en orden decreciente de relación valor/peso.

función MOCHILAB_P (x es solución, k,pac,vac es nat , xini es solución, vini es valor(xini),
VSOLI es valor) dev (xmejor es solución, vmejor es valor (xmejor))

{ *Pre :* $(\sum_{i=1}^{k-1} x(i)\cdot p(i) \le PMAX) \wedge (pac = \sum_{i=1}^{k-1} x(i)\cdot p(i)) \wedge (vac = \sum_{i=1}^{k-1} x(i)\cdot v(i)) \wedge (1 \le k \le n) \wedge$
xini es la mejor solución en curso $\wedge$ *vini* es el valor de *xini* tal que vini=MAX(valor de la mejor solución encontrada hasta el momento, VSOLI) }

```
<xmejor,vmejor>:=<xini,vini>;
x(k):= -1;                                   /* preparar recorrido de nivel k */
*[ x(k) < 1 ----> x(k):= x(k) +1 ;           /* siguiente hermano nivel k */
                  pac := pac + x(k) · p(k);
                  vac := vac + x(k) · v(k);
     /* se resuelve mochila fraccionada para una mochila capaz de soportar
     PMAX-pac y los objetos del k+1 al n. Recordar que los objetos se
     consideran en orden decreciente de relación valor/peso */
                  est := MOCHILA_FRACCIONADA ( x, k, pac, PMAX );
                  [ (pac ≤ PMAX) ∧ (vac+est >vmejor) --->
                  /* la solución en curso es factible y merece la pena seguir */
```

```
                    [ k = n  --->'          /* es una hoja y por tanto solución */
                          <sol,val> := < x, vac >
                    [] k < n  --->          /* no es una hoja, hay que seguir  */
                          <sol,val> := MOCHILAB_P( x, k+1, pac, vac, xmejor,
                                                   vmejor, VSOLI )
                    ]
                    [ vmejor ≥ val ---> seguir
                    [] vmejor < val ---> vmejor := val; xmejor :=sol ;
                    ]
               [] (pac >PMAX) ∨ (vac+est ≤vmejor) ---> seguir;
               ]
               /* no hace falta desmarcar */
    ]
```

{ *Post :* xmejor es la mejor solución en curso y vmejor = $\sum_{i=1}^{n}$ xmejor(i)·v(i) }

```
    dev ( xmejor, vmejor )
ffunción
```

En un caso real en que el espacio de búsqueda tenía 2^9 - 1 nodos, la utilización de esta PBCMSC lo redujo a 33 nodos.

5. RAMIFICACION Y PODA : Branch & Bound

5.1. CARACTERIZACION Y DEFINICIONES

El esquema de Ramificación y Poda, *Branch & Bound* en la literatura inglesa, es, básicamente, una mejora considerable del esquema de Vuelta Atrás. Se considera que es el algoritmo de búsqueda más eficiente en espacios de búsqueda que sean árboles.
Los típicos problemas que se suelen resolver con Ramificación y Poda son los de optimización con restricciones en los que la solución es expresable en forma de secuencia de decisiones, aunque cualquier problema resoluble con Vuelta Atrás también se puede resolver con Ramificación y Poda, pero a lo mejor no merece la pena.

Todos los conceptos y toda la terminología introducida en el capítulo anterior la vamos a utilizar de nuevo en este capítulo, pero va a ser necesario ampliar el repertorio para diferenciar Ramificación y Poda de Vuelta Atrás. Para ello, primero vamos a introducir unas cuantas definiciones y luego vamos a describir las diferencias entre los dos esquemas.
En Ramificación y Poda los nodos del espacio de búsqueda se pueden etiquetar de tres formas distintas. Así tenemos que uno nodo está *vivo*, *muerto* o *en expansión*. Un nodo *vivo* es un nodo factible y *prometedor* del que no se han generado todos sus hijos. Un nodo *muerto* es un nodo del que no van a generarse más hijos por alguna de las tres razones siguientes : ya se han generado todos sus hijos o no es factible o no es prometedor. Por último, en cualquier instante del algoritmo pueden existir muchos nodos vivos y muchos nodos muertos pero sólo existe un nodo *en expansión* que es aquel del que se están generando sus hijos en ese instante.
En estas definiciones ha aparecido el concepto de *nodo prometedor*. Esta idea ya se ha introducido sin ese nombre en el capítulo anterior, en el apartado 4.4. Se dice que un nodo es *prometedor* si la información que tenemos de ese nodo indica que expandiéndolo se puede conseguir una solución mejor que la mejor solución en curso. Esta información la proporcionan dos fuentes distintas : una es la función de estimación que evalua el camino que queda hasta llegar a una solución, la otra es la evaluación del camino que ya se ha recorrido y que va desde la raíz del espacio de búsqueda hasta el nodo en curso.

Tanto Vuelta Atrás como Ramificación y Poda son algoritmos de búsqueda, pero mientras Vuelta Atrás es una búsqueda ciega, Ramificación y Poda es una búsqueda *informada*. La

principal diferencia entre una búsqueda o recorrido ciego, bien sea en profundidad o en anchura, y una búsqueda informada es el orden en que se recorren los nodos del espacio de búsqueda. Fijado un nodo x del espacio de búsqueda, en un recorrido ciego se sabe perfectamente cual es el siguiente nodo a visitar (el primer hijo de x sin visitar, en un recorrido en profundidad y el siguiente hermano de x, en un recorrido en anchura). Sin embargo, en un recorrido informado el siguiente nodo es el más prometedor de entre todos los nodos vivos; es el que se va a convertir en el próximo nodo en expansión.

En Vuelta Atrás tan pronto como se genera un nuevo hijo del nodo en curso, llamado nodo en expansión en Ramificación y Poda, este hijo se convierte en el nuevo nodo en expansión y los únicos nodos vivos son los que se encuentran en el camino que va desde la raíz al actual nodo en expansión. En Ramificación y Poda se generan todos los hijos del nodo en expansión antes de que cualquier otro nodo vivo pase a ser el nuevo nodo en expansión por lo que es preciso conservar en algún lugar muchos más nodos vivos que pertenecen a distintos caminos. Ramificación y Poda utiliza una lista para almacenar y manipular los nodos vivos.

Dependiendo de la estrategia para decidir cual es el siguiente nodo vivo de la lista que se va a expandir, se producen distintos órdenes de recorrido del espacio de búsqueda :

1/ estrategia FIFO (la lista es una *cola*) : da lugar a un recorrido del espacio de búsqueda por niveles o en anchura.

2/ estrategia LIFO (la lista es una *pila*) : produce un recorrido en profundidad aunque en un sentido distinto al que produce Vuelta Atrás.

3/ estrategia LEAST COST (la lista es una *cola de prioridad*) : este es el recorrido que produce Ramificación y Poda para un problema de minimización y usando función de estimación. El valor de lo que un nodo vivo promete, es decir, el coste de lo que ya se ha hecho junto con la estimación de lo que costará como mínimo alcanzar una solución, es la clave de ordenación en la cola de prioridad. Para abreviar diremos que la clave de un nodo x es *coste(x)* que es igual al *coste_real(x)+coste_estimado(x)*. De este modo se expande aquél nodo que promete la solución de coste más bajo de entre todos los nodos vivos. Es de esperar que el nodo con la clave más pequeña conduzca a soluciones con un bajo coste real.

5.2. EL ESQUEMA Y SU EFICIENCIA

A continuación vamos a presentar el esquema algorítmico de Ramificación y Poda. Se trata de un esquema iterativo que itera mientras quedan nodos vivos por tratar. Este esquema garantiza que si existe solución seguro que la encuentra. Se hace un recorrido exhaustivo del espacio de búsqueda en el que sólo se descartan aquellos caminos que no son factibles o que no pueden conducir a una solución mejor que la que se tiene en estos momentos. La utilización de una función de estimación que no engañe es imprescindible para garantizar el buen funcionamiento del algoritmo.

5.2.1. EL ESQUEMA ALGORITMICO

Partimos del hecho de que se expande el nodo vivo más prometedor de la lista de nodos vivos (el de mínimo coste en un problema de minimización y el de máximo coste en uno de maximización). Por definición de nodo vivo se sabe que no se ha generado toda su descendencia y que es factible y todavía no es solución. Se generan todos sus hijos y a cada uno de ellos se les aplica el siguiente análisis :

- si el hijo *x* no es factible, entonces pasa a ser un nodo muerto.
- si el hijo *x* es factible y tiene un *coste(x)* peor que el de la mejor solución en curso, ese hijo pasa a ser un nodo muerto y nunca más se volverá a considerar.
- si el hijo *x* es factible y tiene un *coste(x)* mejor que el de la mejor solución en curso pero *x* no es solución, ese hijo se inserta con clave *coste(x)* en la cola de prioridad de nodos vivos.
- si el hijo *x* es factible y tiene un *coste(x)* mejor que el de la mejor solución en curso y *x* es solución entonces pasa a ser la nueva mejor solución en curso. Además se revisan todos los nodos de la lista de nodos vivos y se eliminan de ella todos aquellos que tengan una clave peor o igual que *coste(x)*.

Una vez generados todos los hijos del nodo en expansión éste se convierte en un nodo muerto y se vuelve a repetir el proceso de seleccionar el nodo más prometedor de entre todos los nodos vivos. El proceso acaba cuando la cola de prioridad está vacía. En ese momento la mejor solución en curso se convierte en la solución óptima del problema.

De cara a la implementación del esquema hace falta definir con toda precisión el contenido de un nodo. Intuitivamente un nodo debe almacenar toda la información que llegaba como parámetro a una llamada recursiva de Vuelta Atrás y también todo lo que era devuelto por ella. Habitualmente un *nodo* es una tupla que almacena el camino que se ha seguido hasta alcanzarlo, es decir, la solución en curso, la longitud de ese camino, es decir, la profundidad alcanzada en el espacio de búsqueda, el valor de todos los marcajes, el valor de la solución en curso, es decir, su coste y el valor de la función de estimación, es decir, su coste estimado. La mejor solución en curso será una variable de tipo nodo que a lo largo de las iteraciones del bucle se irá actualizando convenientemente.

```
función R&P ( D es datos_problema ) dev ( x es  nodo )
{ Pre : El espacio de búsqueda es un árbol y se trata de un problema de MINIMIZACION }
var
    x, y, mejor es nodo;
    list es lista_nodos_vivos(<nodo,valor>);   /* valor es la clave de la cola de prioridad.
                                                  Esta ordenada por orden creciente de clave */
    valmejor es valor;
fvar
    y := CREAR_RAIZ(D);
    list := INSERTAR(lista_vacia, <y, ESTIMAR(y) > )
```

```
valmejor := llamada a un algoritmo para encontrar el valor de una solución inicial. Si no
            lo hay, entonces inicializar valmejor a infinito.
/ * si valmejor tiene el valor de una solución inicial hará que la PBCMSC empiece a
actuar desde el comienzo */
*[ ¬vacia(list) --->
      y := primero(list);   list := avanzar(list);   /* y es el nodo vivo en expansión  */
      preparar_recorrido_hijos(y);
      *[ existan_hijos(y) --->
            x:= siguiente_hijo(y);
            x:= MARCAR(y, x);
            est := ESTIMAR(x);        /* est = coste real + estimación */
            [ factible(x) ∧ prometedor(x,est)--->
                  [ solución(x) --->  <mejor, valmejor>:= <x, coste_real(x)>;
                                      list := DEPURAR(list,valmejor);
                                      /* eliminar de la lista todos los nodos vivos que
                                      prometan una solución con un coste peor que el
                                      coste de la solución que se acaba de conseguir */
                  []¬solución(x) -->  list:= INSERTAR(list, <x, est >);
                                      /* x es factible y prometedor, por tanto es un
                                      nodo vivo que hay que insertar en la lista */
                  ]
            []¬factible(x)∨ ¬ prometedor(x,est) ---> seguir
            ]
            /* Desmarcar si es preciso */
      ]
]
```

{ *Post :* Los nodos generados equivalen a un recorrido completo del espacio de búsqueda y en ese recorrido se ha encontrado el nodo que contiene la solución de mínimo coste real de entre todas las soluciones que hay para el problema. Ese nodo es *mejor* y el valor de la solución es *valmejor*}

dev (mejor, valmejor)

ffunción

La función de cota del bucle no es el tamaño de la lista de nodos vivos sino el número de nodos del espacio de búsqueda que aún quedan por generar. En el invariante del bucle se podría incluir que la lista de nodos vivos está ordenada por orden creciente de valor, y que de entre todos los nodos generados la lista sólo contiene aquellos que son factibles y prometen una solución mejor que la mejor solución en curso y marcan la "frontera" en el espacio de búsqueda de lo que ya ha sido generado y merece la pena expandir.

Para resolver un problema usando este esquema se recomienda seguir los mismos pasos que en Vuelta Atrás con PBCMSC. En primer lugar identificar el espacio de búsqueda y la solución. A continuación definir las funciones de generación y de recorrido del espacio de búsqueda. Especial atención requieren las funciones ESTIMAR(x), incializar *valmejor* y CREAR_RAIZ(D). La función ESTIMAR(x) calcula la clave *coste(x)* del nodo *x* sumando *coste_real(x)* con *coste_estimado(x)*. El coste estimado se calcula utilizando una función de estimación al estilo de las explicadas en Vuelta Atrás con PBCMSC. La inicialización de *valmejor* se consigue con una función externa. Es imprescindible que esta función externa genere una secuencia de decisiones que sea verdadera solución para el problema. También es conveniente que el coste de calcularla no sea excesivo. Si de partida el algoritmo dispone de este valor, la poda resultará mucho más efectiva y se reducirá el número de nodos que consiguen llegar a ser nodos vivos. Y ya por último, la función CREAR_RAIZ(D) se encarga de la generación de un nodo fantasma que permita la construcción de los nodos del primer nivel del espacio de búsqueda.

5.2.2. CONSIDERACIONES SOBRE LA EFICIENCIA

El esquema de Ramifiación y Poda es la manera más eficiente que se conoce de recorrer un espacio de búsqueda que sea un árbol. A pesar de la poda, se garantiza que encuentra una solución de coste mínimo, si ésta existe. Por tanto, equivale al recorrido completo del espacio. La efectividad de la poda depende de la calidad de la función de estimación. El coste de calcularla no ha de ser excesivo y es bueno disponer de una solución inicial para aumentar la eficiencia.

El hecho de tener que manipular una lista de nodos vivos hace que el coste aumente. Las operaciones *primero*, *avanzar*, *insertar* y *depurar* son las que trabajan sobre la lista. Para mejorar la eficiencia de las mismas se puede implementar la lista en un montículo de mínimos, un *Heap*. De este modo *primero* tiene coste constante, *avanzar* e *insertar* tienen coste *log n*, ya que hay que reconstruir el montículo, y *depurar* tiene, en el peor de los casos, coste $n \cdot log n$, siendo n el tamaño de la lista.

5.3. UN EJEMPLO : MOCHILA ENTERA

A estas alturas no hace falta volver a formular mochila entera. La formulación del problema, la caracterización del espacio de búsqueda en el que los objetos se consideran en orden decreciente de relación valor/peso, el algoritmo para calcular la solución inicial y la función de estimación que se dan en el apartado 4.4. las vamos a reutilizar para resolver el problema pero ahora empleando Ramificación y Poda.

Tan solo hay que definir la estructura de un nodo. Vamos con ello.

```
tipo nodo es tupla
        sol es vector[1..n] de {0,1};          /* solución en curso*/
        k es nat;                              /* índice del objeto ≡ profundidad*/
        pac es nat;                            /* peso acumulado */
```

```
        vac es nat;                          /* valor ≡ acumulado coste_real */
        est es nat;                          /* coste_estimado */
        ftupla

función MOCHILA_RP (xini es solución, vini es valor(xini)) dev
                    (xmejor es nodo, vmejor es valor (xmejor))
```

{ *Pre :* Los objetos a considerar están ordenados en orden decreciente de relación valor/peso ∧ *xini* es la solución inicial ∧ *vini* el valor de esa solución}

```
    x.sol:= solución_vacía;                  /* creación del nodo inicial */
    x.k:= 0;    x.pac:= 0;    x.vac:= 0;
        /* se resuelve mochila fraccionada para una mochila capaz de soportar PMAX-pac
        y los objetos del x.k+1 al n. Recordar que los objetos se consideran en orden
        decreciente de relación valor/peso. Devolverá la solución de mochila fraccionada
        para este problema */
    x.est:= MOCHILA_FRACCIONADA( x, x.k, x.pac, PMAX );
        /* creación de la cola de prioridad que contendrá los nodos vivos en orden
        decreciente de clave porque el problema es de maximización. La clave es
        x.vac+x.est */
    cp:= insertar(cola_vacia, <x, x.vac+x.est>);
    <xmejor,vmejor> := <xini,vini>;          /* inic. la mejor solución en curso */
    *[¬vacia(cp) --->
        y := primero(cp);   cp := avanzar(cp);
        i := -1;                             /*preparar recorrido */
        *[ i<1 ---> i := i+1 ;               /* siguiente hermano nivel k */
                x := y;   x.k := y.k+1;      /* creación del hijo igual que el padre */
                x.sol[x.k] := i;
                x.pac := y.pac + peso(x.k);  x.vac := y.vac + valor(x.k);
                x.est := MOCHILA_FRACCIONADA( x, x.k+1, x.pac, PMAX );
                [ (x.pac ≤ PMAX) ∧ (x.vac+x.est >vmejor) --->
                /* la solución en curso es factible y merece la pena seguir */
                    [ k = n  --->            /* es una hoja y por tanto solución */
                        <xmejor,valmejor> := < x, x.vac>;
                        cp := depurar(cp, valmejor);
                    [] k < n  --->           /* no es una hoja, hay que seguir  */
                        cp := insertar(cp,<x, x.vac+x.est>);
                    ]
                [] (x.pac >PMAX) ∨ (x.vac+x.est ≤vmejor) ---> seguir;
                ]
                /* no hace falta desmarcar porque cada hijo se inicializa siempre con el
                valor del padre */
```

```
        ]
    ]
```

$$\{ \textit{Post} : \text{xmejor es la mejor solución en curso y vmejor} = \sum_{i=1}^{n} x.sol(i) \cdot valor(i) \}$$

```
    dev ( xmejor, vmejor )
ffunción
```

La llamada a MOCHILA_RP va precedida por una llamada al algoritmo Voraz que calcula la solución para mochila fraccionada pero eliminando del valor de esa solución el valor del objeto que se haya fraccionado. Es imprescindible que el valor de la solución inicial provenga de una solución de verdad. Basta con inicializar *vini* con el resultado del Voraz convenientemente modificado e inicializar *xini* a *nodo_vacio*.

5.4. OTRAS CUESTIONES

El algoritmo de Ramificación y Poda tiene, por decirlo de alguna manera, hermanos mayores. Existe una familia de algoritmos denominada *Best-First* que permite resolver problemas mucho menos restrictivos que los definidos para Ramificación y Poda. En las dos secciones que vienen a continuación se va a comparar Ramificación y Poda con los algoritmos de búsqueda que ya se han visto en capítulos anteriores y se va a describir, de forma muy general, algunas de las características de los algoritmos Best-First.

5.4.1. COMPARACION CON OTRAS ESTRATEGIAS DE BÚSQUEDA

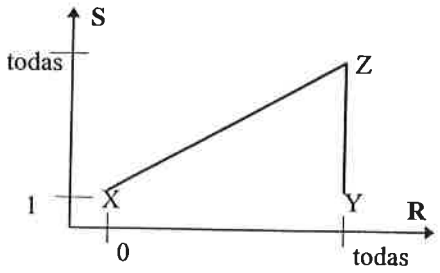
Sea *X* un algoritmo Voraz, *Y* un Vuelta Atrás y *Z* un Ramificación y Poda, todos ellos son algoritmos de búsqueda que implementan distintas estrategias. Podemos compararlos respecto de dos dimensiones :

1/ *R* ó la recuperación de alternativas suspendidas y

2/ *S* ó el número de caminos abiertos en el espacio de búsqueda.

Respecto de *R*, un algoritmo Voraz no puede recuperar ninguna de las alternativas no consideradas pero un Vuelta Atrás o un Ramifiación y Poda pueden recuperarlas todas si merecen la pena. Respecto de *S*, los algoritmos Voraces y de Vuelta Atrás mantienen un único camino abierto que va desde la raíz al nodo en curso, sin embargo, Ramificación y Poda mantiene tantos caminos abiertos como elementos hay en la lista de nodos vivos. No es posible que dos nodos vivos de la lista pertenezcan al mismo camino desde la raíz cuando el espacio de búsqueda es un árbol. Significaría que uno de ellos es antecesor del otro y si está en la lista es porque no se han generado sus hijos, por tanto, es imposible que un descendiente suyo haya sido generado ya.

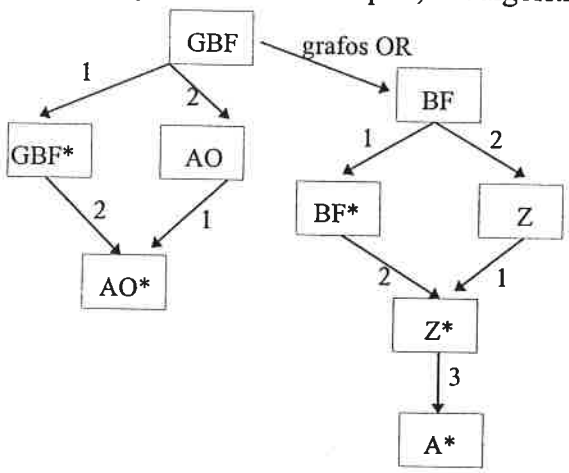
La siguiente figura ilustra gráficamente la comparación de los tres esquemas respecto de las dos dimensiones propuestas.



5.4.2. ESTRATEGIAS DE BUSQUEDA *BEST-FIRST*

Ramificación y Poda es una estrategia de búsqueda muy particular en la que el espacio de búsqueda es un árbol OR y en la que la función de estimación ha de satisfacer unos requisitos muy concretos. Este esquema pertenece a una familia de algoritmos mucho más amplia y que se utiliza básicamente en el área de Inteligencia Artificial. Son los algoritmos *primero el mejor* o *Best First*. A su vez, esta familia forma parte de una familia más amplia que agrupa los algoritmos de Búsqueda basados en heurísticos. Los algoritmos Voraces pertenecen a esta última familia.

El algoritmo GBF, *General Best First*, que funciona sobre grafos AND/OR es el algoritmo más general. La siguiente figura muestra una jerarquía de los diferentes algoritmos de búsqueda de esta familia. En ella no aparece Ramificación y Poda como tal ya que es una variante, en algunos sentidos más restrictiva y en otros más amplia, del algoritmo denominado A*.



Los números que aparecen sobre las flechas del gráfico significan lo siguiente :

1/ *terminación pospuesta*. El algoritmo acaba cuando encuentra una solución y su condición de terminación garantiza que la solución obtenida es la solución óptima.

2/ *funciones de peso recursivas*. Una función de peso $W_G(n)$ es recursiva si para todo nodo n del grafo sucede que :

$$W_G(n)=F[E(n),W_G(n_1),W_G(n_2),...,W_G(n_b)]$$

donde $n_1,n_2,...,n_b$ son los sucesores inmediatos de n,

$E(n)$ es un valor obtenido a partir de propiedades particulares del nodo n,

F es una función de combinación arbitraria.

La función $W_G(n)$ evalua el coste del camino desde la raíz hasta n y si n es una hoja, entonces, es el valor de la solución. Que la función de coste sea recursiva implica, según la definición anterior, que el valor se puede calcular de abajo hacia arriba, es decir, desde las hojas hacia la raíz.

3/ *evaluación aditiva*. Se refire a que la evaluación del coste de un nodo *f(x)* se hace *sumando* el valor de dos funciones: la que calcula el coste real de alcanzar *x*, *g(x)* ó *coste_real(x)*, y la que estima el coste de llegar a la mejor solución alcanzable desde *x*, *h(x)* ó *coste_estimado(x)*. Se tiene que :

$$f(x)=g(x)+h(x)$$

Además $\forall x'$: x'=hijo(x) : g(x')=g(x)+c(x,x') con *c(x,x')* el coste de pasar del padre al hijo.

En las secciones que siguen vamos a ver algunas características del A* que, por supuesto, son aplicables a Ramificación y Poda. Sin embargo, hay diferencias que destacar como que A* funciona sobre grafos OR en los que el camino entre dos nodos no tiene porque ser único y que, gracias a las características de la función de estimación, cuando A* encuentra una solución ya se puede garantizar que es la solución óptima.

A continuación se presenta una versión de A*. La lista OPEN es la cola de prioridad de los nodos vivos y la cola de prioridad CLOSED contiene los nodos muertos. Un nodo pasa a la lista CLOSED en el momento en que se extrae de OPEN para generar sus hijos. Como un nodo es alcanzable por más de un camino, es posible que estando en CLOSED pase de nuevo a OPEN, todo depende del coste del nodo para los distintos caminos que le alcanzan. El coste de un nodo, *f(x)*, es la suma del coste real del camino desde la raíz a ese nodo y del coste estimado de la mejor solución que se puede alcanzar a partir de ese nodo, exactamente igual que en Ramificación y Poda con PBCMSC. Otro aspecto interesante del algoritmo A* es que acaba en el momento en que detecta que el nodo vivo extraído es solución. Se garantiza que ese nodo solución es, además, la solución óptima.

```
función A*( D es datos ) dev ( b es bool; sol es lista(nodo) )
{ Pre : El espacio de búsqueda es un grafo OR y el problema es de MINIMIZACIÓN }
    s:=CREAR_RAIZ(D);    s:= ANOTAR( s, padre=vacio);
    OPEN := insertar(lista_vacia, s);      CLOSED := lista_vacia;
    b:= FALSO;
    *[ ¬vacia(OPEN) ∧ ¬b --->
        x:=primero(OPEN);
        OPEN := avanzar(OPEN);                    /* nodo de clave mínima */
        CLOSED := insertar( CLOSED, x);           /* pasa a muerto inmediatamente*/
        [   solucion(x) --->
                b:= CIERTO;   sol:= CONCATENAR( x, padre(x));
                /* es la primera solución encontrada y la óptima */
```

```
        []¬solucion(x) --->
                preparar_recorrido_hijos(x);
                *[ existan_hijos(x) --->
                        y:=siguiente_hijo(x);
/* si fuera un problema con restricciones aquí se comprobaría si es un nodo factible */
                        y:= ANOTAR( y, padre=x);
                        f(y):= g(y)+h(y);          /* cálculo del coste del nodo */
                        [ (y∉CLOSED) ∧ (y∉OPEN) --->
                                                   /* primera vez que se llega a y */
                            OPEN:=insertar(OPEN,y,f(y));
                        [] (y∈CLOSED) --->         /* no es la primera vez y el nodo
                                                   está muerto */
                            yC:= obtener(CLOSE, y);
                            [  (f (yC)≤f(y)) ---> seguir;
                            [] (f (yC)>f(y)) --->
                                        CLOSED:=eliminar(CLOSED,yC);
                                        OPEN:=insertar(OPEN,y,f (y));
                            ]
                        [] (y∈OPEN) --->           /* no es la primera vez y el nodo
                                                   está vivo */
                            yO:= obtener(OPEN, y);
                            [  (f (yO)≤f(y)) ---> seguir;
                            [] (f (yO)>f(y)) --->
                                        OPEN:=eliminar(OPEN,yO);
                                        OPEN:=insertar(OPEN,y,f(y));
                            ]

                        ]
                ]
        ]
    ]
{ Post : ( b⇒ sol=solución óptima ) ∧ (¬b⇒ no existe solución ) }
    dev ( b,sol)
ffunción
```

La función CONCATENAR construye recursivamente la lista de nodos que forman la solución. Este es el algoritmo:

```
función CONCATENAR( a,b es nodo ) dev ( l es lista(nodo))
{ Pre : padre(a)=b}
    [  b=vacio --->  l:= concat({a},lista_vacia);
```

```
    [] b≠vacio ---> l1:= CONCATENAR(b, padre(b));
                    l:= concat({a},l1);
    ]
```

{*Post : l* contiene la secuencia de nodos que se ha atravesado para llegar al nodo *a* desde el nodo inicial }

```
    dev ( l )
ffunción
```

5.4.2.1. **La función de estimación en un problema de Minimización**

Sea *f(n)* el coste del nodo *n* del espacio de búsqueda. En realidad *f(n)* es una estimación del coste del camino de coste mínimo desde el nodo inicial, *s*, a un nodo objetivo (un nodo solución) pasando por el nodo *n*. El valor de *f(n)* se utiliza para ordenar la lista de nodos vivos y se tiene que : $f(n) = g(n) + h(n)$

Es necesario definir una serie de funciones para comprender el significado de cada uno de los elementos de esta expresión.

Definición : $h^*(n) = \{ MIN\ k(n,t_i), \forall\ t_i \}$, donde, dado un nodo objetivo t_i , $k(n,t_i)$ es el coste del camino mínimo de *n* a t_i.

En un problema de optimización, queremos conocer *k(s,n)* que es el coste de un camino óptimo desde el nodo inicial *s* a un nodo arbitrario *n*.

Definición : $g^*(n) = k(s,n)$ para todo *n* accesible a partir de *s*.

Definición : Para todo *n* , $f^*(n)=g^*(n) + h^*(n)$, donde $g^*(n)$ es el coste real del camino óptimo de *s* a *n* y $h^*(n)$ es el coste de un camino óptimo de *n* a un nodo objetivo y $f^*(n)$ es el coste de un camino óptimo desde *s* a un nodo objetivo pasando por *n*.

La función $f(n)=g(n)+h(n)$ es, por tanto, una estimación de $f^*(n)$ donde *g(n)* y *h(n)* son a su vez una estimación de $g^*(n)$ y $h^*(n)$, respectivamente.

Para calcular el coste real del camino desde el nodo *s* al nodo *n* en el espacio de búsqueda, basta con sumar el peso de los arcos encontrados en ese camino. Así se tiene que $g(n) \geq g^*(n)$. Sin embargo para calcular el valor de *h(n)*, el coste estimado desde *n* a un nodo objetivo, se ha de utilizar información heurística sobre el dominio del problema.

Las diferentes definiciones de *g(n)* y *h(n)* dan lugar a diferentes órdenes en el recorrido del espacio de búsqueda. Por ejemplo :

1/ si $g(n)=0$ y $h(x) \geq h(y)$ para todo nodo *y* que sea hijo de *x* (el coste estimado del padre es mayor o igual que el coste estimado de sus hijos), entonces se produce un recorrido en *profundidad*. Sucede que una vez seleccionado *x*, los que tienen más probabilidades de ser elegidos de entre los que están en la lista de nodos vivos son sus propios hijos y no alguno de sus antecesores.

2/ si g(x)=nivel de *x* en el espacio de búsqueda y h(x)=0, entonces se produce un recorrido en *anchura*.

5.4.2.2. **Terminación y la Admisibilidad de A***

El algoritmo A* acaba cuando encuentra un nodo solución o cuando ha recorrido todo el espacio de búsqueda y no le afecta el hecho de que el espacio de búsqueda tenga ciclos ya que el número de caminos acíclicos es finito. Ramificación y Poda acaba cuando la lista de nodos vivos está vacia. Por tanto, ambos algoritmos garantizan la terminación en espacios finitos. En espacios infinitos en los que existe solución se puede garantizar la terminación si se caracteriza la función *f(n)* convenientemente. En espacios infinitos y sin nodo solución A* no acaba. En ese caso la técnica que se utiliza para provocar la finalización es buscar soluciones con un coste no mayor que un cierto valor *C*.

Se dice que un algoritmo de búsqueda es *admisible* si, para cualquier grafo, siempre acaba encontrando un camino óptimo del nodo inicial *s* a un nodo objetivo, si es que tal camino existe. A* es admisible si utiliza una función de estimación admisible y *f(n)* se calcula de forma aditiva.

Definición : Una función heurística *h(n)* se dice que es admisible si $h(n) \leq h^*(n)$ para todo nodo *n*.

Esta definición corresponde al concepto de función que NO ENGAÑA que hemos utilizado en Vuelta Atrás y Ramificación y Poda. En [Pea 84] se pueden encontrar los teoremas y las demostraciones de la terminación y admisibilidad de A*.

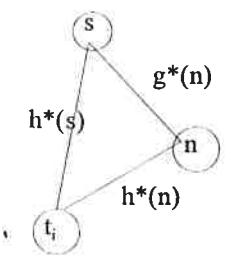
5.4.2.3. **La restricción monótona**

Es evidente que A* pierde eficiencia cuando ha de buscar un nodo en OPEN y CLOSED. Y todavía es peor cuando ha de mover un nodo de CLOSED a OPEN porque eso implica que volverá a generar de nuevo los hijos de ese nodo. La restricción monótona es una propiedad que tienen algunas funciones de estimación que permiten que A* sea más eficiente.

Definición : Se dice que *h(x)*, la función heurística, satisface la *restricción monótona* si el valor de la función heurística aplicado al padre es menor o igual que la suma del coste de pasar del padre al hijo más el valor de la función heurística aplicada al hijo.

$$\forall x : x=\text{hijo}(y) : \; h(x) + \text{coste}(y,x) \geq h(y)$$

Veamos de donde sale esta desigualdad y las implicaciones que tiene. En primer lugar, para todo nodo *n* del espacio de búsqueda se cumple que :



$g^*(n) + h^*(n) \geq h^*(s)$ ó, lo que es lo mismo, $k(s,n) + h^*(n) \geq h^*(s)$.

Esta es una desigualdad triangular aplicable a cualquier par de nodos, *x,y*, sin necesidad de que intervenga forzosamente *s*. Se puede reescribir de la siguiente forma : si *x* es cualquier descendiente de *y* entonces :

$$k(y,x) + h^*(x) \geq h^*(y)$$

y como $h(n) < h^*(n)$ entonces

$$k(y,x) + h(x) \geq h(y) \text{ para todo par } x,y$$

Definición : Se dice que *h(x)* es *consistente* si para todo par de nodos *x,y*, cumple :

$$k(y,x) + h(x) \geq h(y)$$

Definición : Se dice que *h(x)* es monótona si para todo par de nodos *x,y* tal que *x* es un hijo de *y*, cumple :

$$coste(y,x) + h(x) \geq h(y)$$

Con esta última definición hemos comenzado esta sección pero volvemos a repetirla para ver el proceso seguido en su construcción.

Los siguientes teoremas muestran las relaciones entre los conceptos definidos anteriormente e indican como afectan al comportamiento de A*

Teorema : Monotonicidad y consistencia son propiedades equivalentes

Monotonicidad parece menos restrictivo que consistencia porque sólo relaciona el heurístico de un nodo con el heurístico sobre sus descendientes directos pero se puede probar por inducción que la consistencia implica la monotonicidad.

Teorema : Toda heurística consistente es admisible.

Enlazando con un teorema anterior si la heurística es admisible entonces A* es admisible, lo que significa que si existe el óptimo, lo encuentra.

Teorema : El algoritmo A* guiado por una heurística monótona encuentra el camino óptimo a todos los nodos que expande, es decir, $g(n)=g^*(n)$ para todo nodo que haya sido generado.

La implicación inmediata de este teorema es que cuando un nodo entra en CLOSED nunca más vuelve a salir de allí.

Teorema : Los nodos que expande A* forman una sucesión no decreciente $f(1^o) \leq f(2^o) \leq f(3^o)$, etc.

Las demostraciones de estos teoremas y muchos otros pueden encontrarse en [Pea 84].

REFERENCIAS

[AHU 83] A.V.Aho, J.Hopcroft, J.D.Ullman
Data Structures and Algorithms.
Addison-Wesley, 1983

[Bal 86] J.L.Balcázar
Algoritmos de distancias mínimas en grafos.
RT86/12. Facultat d'Informàtica de Barcelona, UPC, 1986

[Bal 93] J.L.Balcázar
Apuntes sobre el cálculo de la eficiencia de los algoritmos
Report LSI 93-14-T. UPC 1993

[BB 90] G.Brassard, P.Bratley
Algorítmica, Concepción y Análisis.
Ed. Masson, 1990 (original en francés)

[BM 93] J.L.Balcázar, J. Marco
Analisi d'un algorisme de multiplicació d'enters.
Report LSI 93-11-T.UPC 1993

[CLR 92] T.Cormen, C.Leisersson, R.Rivest
Introduction to Algorithms
M.I.T. Press, 1992, 6ª ed.

[Fra 93] X.Franch
Estructura de dades. Especificació, disseny i implementació
Edicions UPC, 1993

[HS 78] E.Horowitz, S.Sahni
Fundamentals of Computer Algorithms.
Computer Science Press, 1978

[Peñ 86] R.Peña
Memoria oposición T.U.
U.P.C., Junio 1986

[Pea 84] J.Pearl
Heuristics : Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving
Addison-Wesley, 1984

APENDICE : Colección de Problemas

Los problemas que vienen a continuación aparecen en una sola sección, pero eso no significa que la única forma de resolverlos, ni tan siquiera la mejor, sea la que corresponde al tema en que aparecen incluidos.

I. DIVIDE Y VENCERAS

I.1. Donat un vector d'enters a[1:n] amb n≥0, dissenyar un algorisme que ordeni el vector. El cost no ha de ser superior a O(n·log n)

I.2. Donat un vector d'enters a[1:n] amb n≥0, dissenyar una funció que retorni el valor que hi hauria al *k*-èssim element del vector un cop ordenat. Calculeu el cost i compareu-lo amb el d'ordenar el vector. Suggeriment : Feu servir l'algorisme de partició del quicksort.

I.3. Dissenyar un algorisme de recerca *ternaria* en un vector. La idea és la següent: partir el vector en tres parts i activar la funció recursivament sobre les parts del vector que calgui. Analitzar el cost de l'algorisme i comparar-lo amb el de recerca binària.

I.4. Donats *n* valors reals $(v_1,...,v_n)$ dissenyar un algorisme que calculi quant val la diferència *d* entre els dos valors més propers:

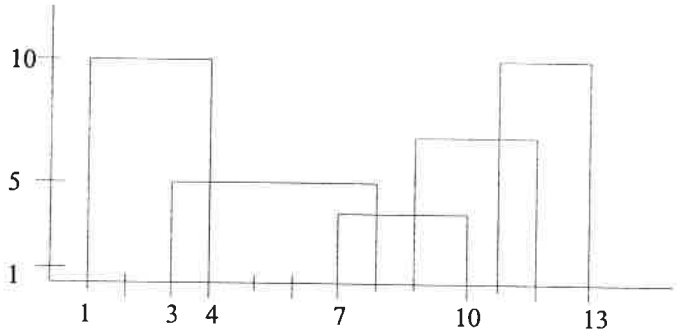
$$d = \underset{1 \le i, j \le n,\ i \ne j}{MIN} |v_i - v_j|$$

Suggeriment : Feu servir l'algorisme de partició del quicksort.

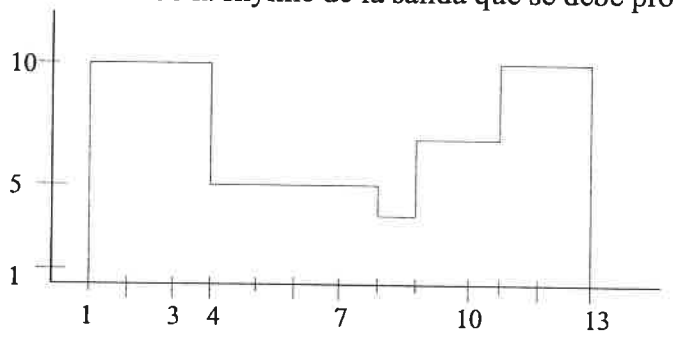
I.5. Dado un vector ordenado crecientemente de *n* enteros distintos, con n≥0, se desea decidir en tiempo logarítmico si alguno de los elementos del vector coincide con su índice en éste. Repetir el problema anterior para un vector de *n* enteros posiblemente repetidos y ordenado decrecientemente.

I.6. Dada la localización exacta y la altura de varios edificios rectangulares de la ciudad, obtener la *skyline*, linea de recorte contra el cielo, que producen todos los edificios

eliminando las lineas ocultas. *Ejemplo* : La entrada es una secuencia de edificios y un edificio se caracteriza por una tripleta de valores (xmin,xmax,h).
Una posible secuencia de entrada para los edificios de la siguiente figura podría ser : (7,10,3), (9,12,7), (1,4,10), (3,8,5) y (11,13,10).



Y ésta es la representación de la skyline de la salida que se debe producir :

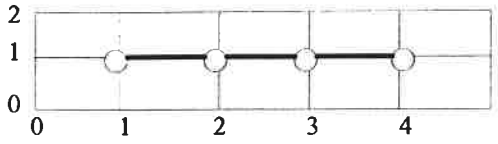


Su secuencia asociada es : (1,4,10), (4,8,5),(8,9,3), (9,11,7) y (11,13,10)

I.7. Se está jugando un torneo entre *n* jugadores. Cada jugador juega una vez contra los *n-1* jugadores restantes (es un *round-robin*). No hay empates y los resultados de los partidos se anotan en una matriz. En general no se pueden ordenar los jugadores porque falla la transitividad, es decir, *A* le gana a *B*, *B* le gana a *C* pero *C* le gana a *A*. Estamos interesados en un orden más débil que definimos de la siguiente forma : en la secuencia ordenada que se obtiene P1,P2,..,Pn se cumple que *P1* le ha ganado a *P2*, *P2* le ha ganado a *P3*, etc. y *Pn-1* le ha ganado a *Pn*. Diseñar un algoritmo que produzca esta secuencia ordenada con un coste de O(n.log n). La entrada del algoritmo es la matriz de resultados y el coste de acceder a una posición de la matriz es constante.

I.8. Sea *T* un árbol binario completo de altura *h* y $n=2^h-1$ vértices. Queremos encajar el árbol *T* en un plano de la siguiente manera : A cada vértice le corresponde un único punto en el plano, vértices adyacentes están conectados por lineas rectas (paralelas al eje *x* o paralelas al eje *y*) y no pueden intersectar dos líneas. El problema general es encontrar el rectángulo de área mínima que contenga el árbol. Por ejemplo : un grafo de *k* vértices (k=4 en la figura) que forma una secuencia :

, podría ser encajado en un rectángulo de área 2(k+1). Ver en la figura el encaje con k=4.



Encajar grafos en el plano de esta forma es un problema importante en el diseño de chips, sobre todo en VLSI. Diseñar un algoritmo que te indique como encajar el árbol *T* en el plano de modo que éste ocupe un área de orden O(n). No se pide el de área mínima.

I.9. Sea a[1..n] un vector de enteros (con sólo naturales no tiene ninguna gracia) y con n>0. Diseñar un algoritmo, aplicando Divide y Vencerás, que calcule las posiciones de inicio, *i*, y de fin, *f*, del segmento de SUMA MAXIMA. Concretamente la postcondición del algoritmo a diseñar es la siguiente : {*Post* : $\forall c,d : (1 \leq c \leq d \leq n) : suma(a,c,d) \leq suma(a,i,f)$} siendo $suma(a,x,y) = (\sum k : x \leq k \leq y : a(k))$. ¿ Qué coste tiene la solución propuesta ?. ¿ Existe una solución con coste menor ? ¿ y mayor ?

II. GRAFOS

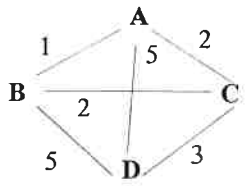
II.1. Una empresa disposa d'un conjunt d'ordinadors distribuïts dins un àmbit geografic. Diverses parelles d'aquests ordinadors estan físicament connectats mitjançant una línea qualsevulla de comunicació (bi-direccional). Cada connexió té un cost associat, en funció d'alguns paràmetres (longitud de la línea, qualitat del senyal, ...). Dos ordinadors estan comunicats si existeix una seqüència de línies de comunicació que uneix ambdós ordinadors. L'empresa vol calcular quines línies de comunicació ha d'usar per que es compleixi que :
dos ordinadors distingits estiguin comunicats entre sí amb el mínim cost possible.
tots els ordinadors estiguin comunicats, de manera que el cost total de la xarxa sigui mínim.

II.2. Sigui el graf no dirigit i etiquetat G=(V,E) amb |V|=n i |E|=e. Quin algorisme aplicaries per trobar un arbre mínim d'expansió en el tres casos següents i per què:
a/ e<n-1
b/ 2n>e > n-1
c/ hi ha una aresta entre tot parell de nodes.
Si en algun apartat *G* ha de complir alguna condició addicional, esmenta-la.

II.3. Un *orden topológico inverso* de un grafo dirigido acíclico es una secuencia formada por todos los vértices del grafo de manera que si *(v,w)* es una arista entonces *w* aparece antes que *v* en la secuencia.
A partir del algoritmo de recorrido en profundidad, escribir un algoritmo que construya un orden topológico inverso de un grafo dirigido acíclico dado, y argumentar cuidadosamente

su corrección. (Es obligatorio diseñar el algoritmo partiendo del recorrido en profundidad. No basarse en otro algoritmo ni diseñar uno nuevo).

II.4. Donat el graf de la figura, aplica-li els algoritmes de Prim i Kruskal. Ves mostrant como creix l'arbre d'expansió pas a pas. En l'algoritme de Prim, comença pel node *A*.



II.5. Se dice que un vértice de un grafo conexo es un punto de articulación del mismo si al suprimir ese vértice y todas las aristas que inciden en él, el grafo resultante deja de ser conexo. Por ejemplo, un grafo en forma de anillo NO TIENE puntos de articulación mientras que todo nodo que no se hoja de un árbol es punto de articulación.
Dado un grafo conexo no dirigido, G=(V,E) diseñar un algoritmo que indique qué vértices del grafo son puntos de articulación. Indicar qué implementación del grafo es la que proporciona un algoritmo más eficiente.

II.6. Dado un grafo DIRIGIDO diseñar un algoritmo que indique si el grafo es un árbol o no lo es. Decidir la implementación más adecuada para el grafo. Explicar las decisiones tomadas.

II.7. Dissenyeu una variant de l'algorisme de recorregut en profunditat que proporcioni els components connexes d'un graf dirigit acíclic, modificant si cal la signatura i/o implementació clàssica de TAD graf. Un component connex d'un graf dirigit *G* és un conjunt *C* maximal de vèrtexs tal que tot parell de vèrtexs de *C* està unit per algun camí que passa íntegrament per vèrtexs de *C*. Modifiqueu la solució pel cas que el graf pugui presentar algun cicle.

II.8. La región de Aicenev, al sur del Balquistán, es famosa en el mundo entero por su sistema de comunicaciones basado en canales (grandes y pequeños) que se ramifican. Todos los canales son navegables y todas las localidades de la región están situadas junto a algún canal.
Una vez al año los alcaldes de la región se reunen en la localidad de San Marcos y cada uno de ellos se desplaza en su *vaporetto* oficial. Proponed a los alcaldes un algoritmo que les permita encontrar la manera de llegar a San Marcos de manera que entre todos hayan recorrido el mínimo de distancia.
A consecuencia de la crisis energética, los alcaldes han decidido compartir los *vaporettos* . Cada uno va en el suyo hasta alguna otra ciudad, allí se une a otro u otros, van juntos hasta algún otro sitio, formando así grupos que se dirigen a San Marcos. Discutid la validez de la

solución anterior. Proponed otra, si es necesario, para minimizar la distancia recorrida por los *vaporettos* (no necesariamente por los alcaldes).

II.9. En un ordinador han d'executar-se unes tasques T_1,..., T_k, cadascuna de les quals requereix un temps t_i. A més, es tenen unes restriccions totes del tipus: la tasca T_i ha d'executar-se després de la tasca T_j. Doneu un model conegut que descrigui aquesta situació, i digueu quin algorisme conegut ha d'aplicar-se per trobar el mínim temps necessari per executar les k tasques respectant les restriccions.

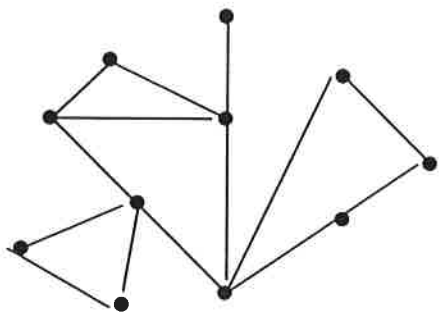
II.10. Una expressió aritmètica pot representar-se com un graf dirigit acíclic. Digueu de quina manera, i quin algorisme pot aplicar-s'hi per avaluar-la.

II.11. Considérese un tablero de cuatro filas por tres columnas como el que se muestra a continuación:

CB	CB	CB
CN	CN	CN

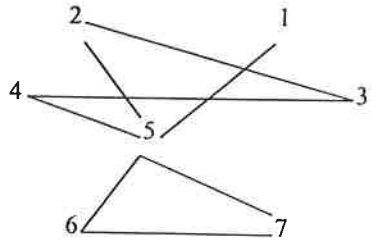
donde *CN* representa un caballo negro y *CB* un caballo blanco que se mueven como los del ajedrez. Se pretende intercambiar las posiciones de los caballos blancos y los negros en el mínimo número de movimientos posible. Diseñar un algoritmo que realice tal intercambio suponiendo que los caballos del mismo color son indistinguibles. Pensar qué hay que modificar de dicho algoritmo si se consideran distinguibles los caballos de un mismo color.

II.12. Dado un grafo G=(V,E) conexo y no dirigido, diseñar un algoritmo que encuentre un vértice tal que al ser eliminado de G junto con todas sus aristas incidentes, el grafo continúe siendo conexo. Probar que en todo grafo conexo existe ese vértice. Analizar el coste de la solución obtenida.
¿ Qué vértices se podrían eliminar en el grafo que viene a continuación ?

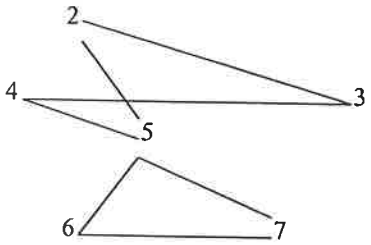


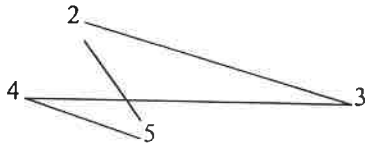
II.13. Dado un grafo G=(V,E) no dirigido con n=|V|, diseñar un algoritmo que dada una constante natural k≥0 calcule el subgrafo inducido máximo H=(U,F), si es que existe. El subgrafo inducido máximo H ha de cumplir que todos sus vértices tengan un grado mayor o igual que k. Realizar un análisis de la eficiencia.

Pista: Comenzar el análisis resolviendo estos 3 casos $n \leq k$, $n=k+1$ y $n>k+1$.
Por ejemplo, dado el grafo siguiente :



Para k=2, el subgrafo inducido máximo es :





Este también es un subgrafo inducido de grado 2 pero NO ES MAXIMO

II.14. Renfe ha decidido modificar su red de ferrocarril y ha diseñado un plan que consta de 2 etapas.

Primera etapa Estudio de la red actual y determinación de las zonas aisladas : Se sabe que no existe camino entre todo par de estaciones de las N que componen la red. Hay que clasificar las estaciones aplicando el siguiente criterio : dos de ellas están en la misma zona si existe camino entre las mismas.

Segunda etapa Mejora de la red: Como resultado de la etapa anterior obtendremos un conjunto de zonas (identificadas por un natural entre 1 y k, donde k también se habrá obtenido en la etapa anterior) aisladas entre sí. Supongamos que conocemos el coste de enlazar cualquier par de zonas (el coste de enlazar i con j es igual al de enlazar j con i). Hay que aconsejar a Renfe qué zonas hay que conectar de modo que exista camino entre todas las zonas y con un coste total mínimo.

Nota : Todas las conexiones entre estaciones son bidireccionales.

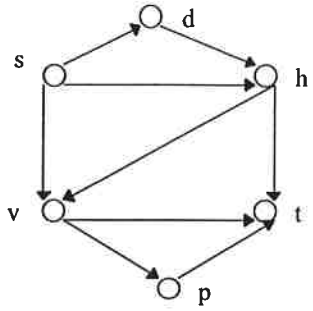
Se pide :

- Diseñar un algoritmo eficiente para la primera etapa que nos diga a qué zona pertenece cada una de las N estaciones. Decidir la implementación más adecuada para el grafo.Justificar todas las decisiones.
- Diseñar un algoritmo eficiente para la segunda etapa que nos diga qué zonas hay que enlazar para que exista camino entre todas ellas y éste sea de coste total mínimo. Razonar la respuesta.

II.15. Sea G=(V,E), e=|E|, n=|V| y e>n, un grafo dirigido y acíclico. Fijados dos vértices del grafo, por ejemplo s y t, hay que construir un conjunto de caminos *disjuntos* de s a t ,

disjuntos salvo en los extremos, tal que el conjunto sea *maximal* (aquí maximal quiere decir que si se intenta incluir cualquier otro camino en el conjunto entonces los caminos dejan de ser disjuntos). Se pide diseñar, dando todo lujo de detalles, un algoritmo de coste O(e) que resuelva el problema. Justificar el esquema elegido así como la corrección de la solución propuesta.

Ejemplo. Dado el grafo de la siguiente figura



Estas son algunas de las posibles soluciones : {<s,d,h,t>, <s,v,p,t>} ó {<s,h,v,t >} ó {<s,h,v,p,t>} ó {<s,h,t>, <s,v,t>}

II.16. Dado un grafo G=(V,E) no dirigido, proponer un algoritmo que indique si el grafo contiene ciclos o no en tiempo O(n), n=|V|, independientemente de |E|.

II.17. Sea G=(V,E) un grafo dirigido y acíclico y sea *k* la longitud del camino más largo que tiene *G* (longitud de un camino = número de aristas que lo componen). Diseñar un algoritmo que divida el conjunto de vértices en, como máximo, *k+1* grupos de modo que para todo par de vértices *u,w* con u≠w pertenecientes al mismo grupo no exista camino entre *u* y *w* y tampoco_exista camino entre *w* y *u*. Un grupo ha de contener uno ó más vértices y todo vértice pertenece a uno, y sólo a uno, de los grupos. Una buena versión del algoritmo tiene coste O(|V|+|E|).

Razonar el funcionamiento y la corrección de la solución; calcular el coste de la misma.

II.18. Sea G=(V,E) un grafo no dirigido. Se dice que *G* es *bipartido* si *V* se puede dividir en dos conjuntos disjuntos *C1* y *C2* tal que para toda arista *(v,w)* de *G* sucede que *v* pertenece a *C1* y *w* pertenece a *C2*. Proponer un algoritmo eficiente que determine si un grafo dado es bipartido. Indicar su coste.

II.19. Sea G=(V,E) un grafo no dirigido y etiquetado. Sea *T* un árbol de expansión mínimo del grafo *G*.

a/ ¿cuánto cuesta modificar *T* si se le añade a *G* una nueva arista?.

b/ ¿cuánto cuesta modificar *T* si se le añade a *G* un nuevo vértice con dos aristas incidentes en él?. Razonar la respuesta.

II.20. El algoritmo de Dijkstra calcula la longitud del camino mínimo desde un vértice dado, *v*, a todos los otros vértices del grafo. Explicar cómo hay que modificarlo para que, además, cuente el número de diferentes caminos mínimos de *v* a *w*, para todo w≠v.

II.21. Sea G=(V,E) un grafo no dirigido y conexo. Diseñar e implementar un algoritmo eficiente que determine un conjunto base de los ciclos simples del grafo. Hay que proporcionar las aristas que forman cada uno de los ciclos simples.

Notad que una arista puede pertenecer a más de un ciclo simple. Para facilitar la escritura del algoritmo la solución se devolverá en una lista cuyos elementos serán los ciclos simples encontrados. A su vez, cada ciclo será la lista de aristas que lo componen.

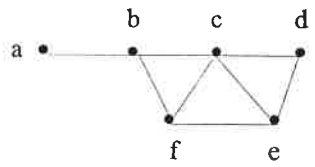
Definiciones necesarias :

ciclo simple : Es una secuencia S de vértices, todos ellos distintos excepto los extremos que son iguales, tal que $S=\{v_1,v_2,...,v_i,...,v_r\}$ y $|S|\geq 4$, cumple que :

$$(\forall i : 1\leq i\leq r : v_i\in V) \text{ y } (\forall i : 1\leq i\leq r-1 : (v_i,v_{i+1})\in E).$$

conjunto base : para que un conjunto de ciclos simples sea *base* basta con que la unión de las aristas que contiene coincida exactamente con el conjunto de todas las aristas de *G* que forman parte de algún ciclo.

Ejemplo : Dado el grafo de la siguiente figura



un posible conjunto base de este grafo sería : S={ <(b,c),(c,d),(d,e),(e,f),(f,b)>, <(c,d),(d,e),(e,f),(f,c)>, <(c,d),(d,e),(e,c)> }

III. VORACES

En todos los ejericios que siguen definir con precisión cual es el criterio de selección, diseñar el algoritmo voraz y demostrar si las soluciones que se obtienen son óptimas o no lo son.

III.1. Deseamos almacenar en una cinta magnética de longitud *L* un conjunto de *n* programas $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. Sabemos que cada P_i necesita un espacio a_i de la cinta y que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) > L$$

Construir un algoritmo que seleccione aquel subconjunto de programas que hace que el número de programas almacenado en la cinta sea máximo.

III.2. Diseñar un algoritmo para almacenar N programas de longitud l_i, $1 \le l_i \le H$ en una cinta magnética de forma que el tiempo medio de lectura de los mismos sea mínimo. Se supone que los programas se leen con igual frecuencia y que antes de leer cada programa se rebobina la cinta. Se entiende por tiempo medio de lectura:

$$T = (1/N) \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} l_i$$

III.3. Tenemos n trabajadores y n trabajos. Sea v_{ij} el valor de la asignación del trabajador i al trabajo j. Una asignación es válida cuando cada trabajador tiene asignado exactamente un trabajo y cada trabajo tiene asignado un único trabajador. Una asignación óptima es una asignación válida con valor máximo. Diseñar un algoritmo voraz que calcule la asignación óptima.

Sugerencia : Probar la estrategia de asignar el mejor trabajo a cada trabajador y la de asignar el mejor trabajador a cada trabajo. ¿ Se obtiene el óptimo ?. Buscar otras estrategias.

III.4. Un *vertex cover* (recubrimiento de vértices) de un grafo no dirigido G=(V,E) es un conjunto de vértices U, $U \subseteq V$, tal que cada arista del grafo G incide en, como mínimo, un vértice de U. Diseñar un algoritmo voraz que calcule el *vertex cover* de tamaño mínimo. Comprobar si la estrategia elegida conduce siempre al óptimo. ¿ Qué sucede si el grafo es un árbol ?.

III.5. Se han de procesar n tareas. Cada tarea i tiene un instante de terminacion t_i y un valor $v_i \ge 0$ si se procesa en dicho instante o antes. Se dispone de un sólo procesador que necesita sólo una unidad de tiempo para ejecutar cada tarea. Una solución factible es una secuencia S de tareas que cumplen las restricciones de terminación. Una solucion óptima es aquella que maximiza V tal que :

$$V = \sum_{s \in S} v_s$$

Diseñar un algoritmo voraz para encontrar la secuencia S.

III.6. Se han de procesar n tareas con instantes de terminación t_i y tiempo de proceso p_i . Se dispone de un procesador y las tareas no son interrumpibles. Una solución factible planifica todas las tareas de modo que terminan en, o antes de, su instante asignado. Diseñar un algoritmo voraz para encontrar la solución. Demostrar que, si existe solución, el algoritmo voraz la encuentra.

III.7. Dado un conjunto de n cintas cuyo contenido está ordenado y con n_i registros cada una, se han de mezclar por pares hasta lograr una única cinta ordenada. La secuencia en que se haga la mezcla determina la eficiencia del proceso. Diseñar un algoritmo voraz que minimice el número de movimientos.

Ejemplo : se han de mezclar 3 cintas: *A* con 30 registros, *B* con 20 y *C* con 10.

Opción 1 : - Mezclar *A* con *B* requiere 50 movimientos (se obtiene *A'*)
- Mezclar *A'* con *C* requiere 60 movimientos
TOTAL = 110 movimientos

Opción 2 : - Mezclar *C* con *B* requiere 30 movimientos (se obtiene *A'*)
- Mezclar *A'* con A requiere 60 movimientos
TOTAL = 90 movimientos.

IV. VUELTA ATRAS Y RAMIFICACION Y PODA

IV.1. Dissenyeu un algorisme que generi totes les configuracions de *n* reines en un tauler d'escacs d'ordre *n* de tal manera que no s'amenacin entre elles.

IV.2. Es disposa d'un tauler de *n* caselles i d'un cavall que pot moure's d'acord amb les regles del joc d'escacs. Es situa el cavall en una casella inicial qualsevol. Es demana un algorisme que trobi, si n'hi ha, un circuit de n^2 moviments del cavall de forma que cada casella del tauler sigui visitada exactament un cop i el darrer salt torni a la casella inicial.

IV.3. Es disposa de *c* colors diferents i d'un mapa de *n* països, junt amb una funció *veï(i,j)* que retorna cert quan dos països són veïns i fals en cas contrari. Escriure un algorisme que trobi totes les coloracions possibles del mapa amb la restricció que dos països veïns han de ser pintats de color diferent.

IV.4. Donats *n* números naturals, que poden estar repetits, es desitja trobar totes les combinacions d'aquests números, la suma dels quals és *S*.

IV.5. Dissenyeu un algorisme que generi totes les configuracions possibles de set dames en un tauler del joc de dames, de tal manera que no es matin entre si. Per simplificar el problema es considerarà que dues dames es maten si comparteixen la mateixa diagonal. Recordeu que en el joc de dames només s'usen quadres, i diagonals, d'un sol color.

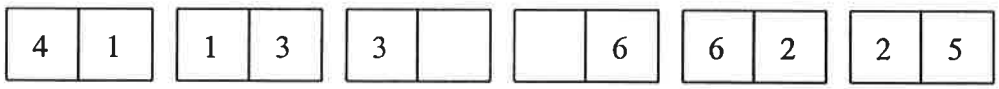
IV.6. S'han de distribuir *n* convidats en una taula on hi ha lloc per *n* comensals. Es disposa d'una funció *adj(a,b)* que retorna cert si els llocs *a* i *b* són adjacents, i fals si no ho són. També hi ha una funció *af(k,l)* que retorna un valor comprès entre 0 i 5 segons el grau d'afinitat que els convidats *k* i *l* tinguin entre si (0 indica aversió profunda i 5 simpatia desbordant). Les funcions *adj(i,j)* i *af(k,l)* són simètriques.

Dissenyeu un algorisme que calculi la distribució de convidats a la taula que optimitza el seu benestar. Aquest benestar es calcularà sumant els afectes dels comensals asseguts en posicions adjacents.

IV.7. Disposem d'un tauler rectangular que medeix *AxB*, amb 1<A<B, i de *k* peces idèntiques, també rectangulars, que medeixen *axb*, amb 1<a<b. Es garanteix que l'àrea del tauler coincideix amb la de totes les peces, o sigui, kxaxb=AxB.
Dissenyar un algorisme que trobi totes les maneres, si es que n'hi ha alguna, de cobrir el tauler amb les *k* peces de manera que no deixin forats ni se solapin, ni quedin, parcialment o totalment, fora del tauler.
Féu servir un TAD per les operacions d'inicialitzar el tauler, col.locar una peça, treure-la o comprovar si hi cap. Escollir una representació pel TAD, explicar que fa cada operació i com actua sobre la representació escollida. Suggerir mètodes per millorar l'eficiència, evitant de construir configuracions parcials que no puguin conduir a una solució, i per eliminar solucions redundants.

IV.8. Cal efectuar *n* feines diferents i disposem de *n* persones. El temps que triga la persona *p* en fer la feina *f* ve donat per la funció *temps(p,f)*. Es tracta d'assignar a cada persona una feina diferent de tal manera que es minimitzi el temps total que triguen les *n* persones a fer les *n* feines.

IV.9. El joc del dòmino té 28 fitxes diferents. Les fitxes són rectangulars i porten gravat a cada extrem un número entre *0* i *6*. Seguint les regles del joc, les fitxes es col.loquen formant una cadena de tal manera que cada parella de fitxes consecutives té iguals els números corresponents als extrems que es toquen. Un exemple de cadena correcta és el següent:



Dissenyar un algorisme que imprimeixi totes les cadenes correctes que es poden formar amb les 28 fitxes del joc.

IV.10. Es disposa de *p* persones per efectuar *n* feines, p<n. La feina *i* requereix un temps t_i. Se suposa que totes les persones triguen el mateix en fer una feina concreta. Es dóna, també, una relació de precedència (un ordre parcial) entre les feines. Aquesta relació està disponible a través de la funció *prec(i,j)* que retorna cert si la feina *i* s'ha de fer, i acabar, abans decomençar la *j*. Fer un algorisme que trobi quina assignació de feines a persones (quina feina ha de fer cada persona i quan l'ha de començar) que respecta les precedències i minimitza el temps total. Advertiment : les persones no tenen perquè estar permanentment ocupades.

IV.11. Tenim una col.lecció de n objectes que cal empaquetar en envasos de capacitat C. L'objecte i té un volum v_i. Dissenyar un algorisme que calculi quin és l'empaquetament òptim, o sigui, aquell que minimitza el nombre d'envasos. Evidentment, els objectes no es poden fraccionar. Per simplificar el problema considerar que un objecte cap dins d'un envàs si el volum de l'objecte és igual o inferior a l'espai lliure que queda a l'envàs, o sigui, sense fer cas de la forma que l'objecte pugui tenir.

IV.12. Un cuadrado latino es un tablero de nxn posiciones, cada una de las cuales posee un color escogido entre n colores diferentes. Ha de cumplir la restricción de que no puede haber colores repetidos en ninguna de sus filas ni en ninguna de sus columnas. Un ejemplo con n=4 es:

A	B	C	D
D	C	A	B
C	D	B	A
B	A	D	C

Diseñar un algoritmo que imprima todos los posibles cuadrados latinos de tamaño nxn.

IV.13. Tenim dos conjunts disjunts A i B, de n elements cada un. Es demana trobar un conjunt de n parelles $<a,b>$, tals que $a \in A$ i $b \in B$, que satisfacin la restricció coneguda amb el nom de matrimonis estables. Suposeu que A és un conjunt d'homes i B és un conjunt de dones. Cada home i cada dona estableixen les preferències que tenen entre els seus possibles acompanyants, per exemple, numerant-los de *1* a n. Si s'escullen n parelles de manera que hi hagi algun home i alguna dona que, sense estar aparellats, es prefereixin mútuament a les seves parelles respectives, l'assignació és inestable. Si no hi ha cap parella d'aquest tipus l'assignació és estable. Desenvolupar un algorisme que trobi tots els aparellaments estables.

IV.14. Un viatjant ha de fer una visita a alguns dels seus clients que viuen en ciutats diferents. El viatjant vol dissenyar un itinerari que, sortint de la seva ciutat, passi un cop, i només un, per cada una de les ciutats on viuen els seus clients i retorni al punt de partida. A més, el viatjant vol que el nombre de quilòmetres recorreguts sigui mínim. El viatjant encarrega a un alumne que li faci un programa per resoldre el seu problema.
Aquest problema es pot modelar amb un graf de la següent manera: donats n vèrtexs (que representen les ciutats) i a arestes (que representen el cost, infinit si no hi ha connexió, d'anar d'una ciutat a una altra) trobar el camí de cost mínim que passa una única vegada per tots els vèrtexs. Aquest camí rep el nom de camí hamiltonià mínim en honor del matemàtic irlandès del segle XIX Sir William Rowan Hamilton.

IV.15. Diez factorías de tecnología punta, recién creadas en la República Popular Socialista de Fanfanisflan, requieren una instalación informática y personal que la dirija. El Gobierno Supremo de la Nación les ha asignado diez máquinas y diez técnicos recién licenciados.
Pero no todas las máquinas son apropiadas para las necesidades de todas las empresas. Se dispone de una función booleana *apropiada?(m,e)* que indica si la máquina *m* es apropiada para la empresa *e*. Asimismo, no todos los técnicos conocen todas las máquinas, por lo que disponemos de una función booleana *conoce?(t,m)* que indica si el técnico *t* conoce la máquina *m*. Finalmente, no todos los técnicos aceptan trabajar en todas las empresas, debido a que algunas de ellas se relacionan con la industria bélica; disponemos de la previsible función booleana *aceptaria?(t,e)* que indica si el técnico *t* aceptaría trabajar en la empresa *e*.
Se pide un programa capaz de encontrar una manera de asignar a cada empresa una máquina apropiada a sus necesidades, y un técnico que conozca la máquina y que acepte trabajar en la empresa, si es que tal asignación existe; y lo indique adecuadamente si tal asignación no existe.

IV.16. El pressupost per comprar llibres d'una determinada organització és menor que la quantitat necessària per a l'adquisició de tots els llibres que vol comprar. Es desitja un algorisme que destriï la relació de llibres a comprar tenint en compte que:
1/ Es vol gastar la major part possible del pressupost.
2/ Mai es podrà pagar un import superior a la quantitat pressupostada.
3/ No hi ha cap llibre que es prefereixi a un altre.
4/ Es disposa de la llista completa dels llibres amb els seus preus.

IV.17. Disponemos de una baraja de cartas española con cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos. De cada uno de los palos tenemos las siguientes cartas : 1,2,3,4,5,6,7,10,11 y 12. Diseñar un algoritmo que calcule todas las maneras posibles de obtener *7 y medio*.
Nota : Todas las cartas puntuan por su valor excepto el 10,11 y 12 que sólo valen medio punto.

IV.18. Al joc del 31 s'hi juga amb totes les cartes de la baralla espanyola, 1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10,11 i 12 dels 4 colls (oros, copes, espases i bastons). Es tracta d'obtenir 31, fent valer cada carta pel seu número. Per obtenir exactament 31 calen si més no 3 cartes, per exemple : 12 d'oros, 12 de bastons i 7 de copes. Dissenyar un algorisme que calculi totes les combinacions possibles que facin 31.

IV.19. Un concurs consisteix en el següent: hi ha dos jocs de boles numerades des de *1* fins a *N*, un de boles negres i un de blanques; en total *2N* boles. D'aquestes boles se'n col.loquen *N*, una per cada número, dins una capsa. Cada concursant fa una aposta sobre el color de quatre de les boles de la capsa, indicant número i color (e.g. la 1 negra, la 7 blanca, la 11 blanca i la 12 negra). En total hi ha *M* concursants. L'organitzador del joc, que és un trampós, vol

calcular, un cop conegudes les *M* apostes, una combinació de les boles de la capsa tal que ningú no encerti les seves quatre prediccions. Dissenyar un algorisme que la calculi o bé que l'indiqui que no existeix.

IV.20. Quatre lladres volen robar uns determinats objectes exposats a la 'Expo de Sevilla'. Per tal de fer-ho pensen guardar el 'gènere' en caixes de cartró i passar per la porta como si fossin treballadors. Com això comporta certs riscs intentaran passar el mínim nombre de vegades per la porta. A més, no podem permetre's el fet de que una caixa plena se'ls trenqui degut a un excés de pes.
Si totes les caixes tenen un pes màxim permés de PMAX, i els pesos dels objectes a robar son en un vector PESOS: taula [1..N] de real, vol dissenyar-se un algoritme per tal de col.locar els objectes a les caixes de forma que cap d'elles es trenqui i que el nombre total de vegades que els individus passen per la porta sigui mínim. Cada individu només pot portar una caixa per viatge.

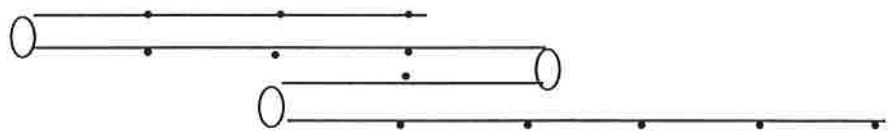
IV.21. La editorial *Tothop Ubliquem* está preparando una nueva reedición de las obras completas del prolífico escritor *Vaes Criuremassa*. Como es bien sabido, este escritor únicamente cultivó un género literario, el ensayo, y sus obras son todas de reducidas dimensiones: poco más o menos, cada una de sus obras ocupa *p* páginas.
En sus agudos escritos, este erudito ensayista desarrollaba siempre sorprendentes y curiosas relaciones entre temas aparentemente diversos. Es famoso, por ejemplo, su ensayo *El mito de Dione*, que muestra cómo la astrología medieval tiene sus orígenes en las costumbres de los navegantes fenicios y en la fauna de los desiertos africanos, y explica asimismo cómo influye después tanto en la pintura flamenca como en determinadas concepciones políticas del liberalismo de principios del siglo XX.

La editorial en cuestión se enfrenta al siguiente problema. La publicación habrá de consistir en varios volúmenes, lujosamente encuadernados para que queden bonitos en las bibliotecas de sedicentes intelectuales. Para que no sean demasiado gruesos, es preciso que todos los volúmenes contengan a lo más *j* ensayos.
Previas ediciones de estos escritos, organizadas cronológicamente o a veces sin criterio alguno, han resultado poco rentables. Con el fin de publicar una edición novedosa, la editorial quiere organizar los volúmenes de acuerdo con criterios temáticos, de manera que cada volumen esté dedicado a un tema. Es decir, todos los ensayos qe se publiquen en el mismo volumen han de tener al menos un tema en común, que es al que se dedica el volumen.

Se dispone de algo de software ya escrito para este proyecto. En concreto, existen módulos que implementan los tipos *obra*, *tema* y *lista_de_temas*, con las operaciones apropiadas para su manejo. Además existe una estructura de datos, trabajosamente recopilada, que

soporta la operación *temas_de_que_trata*: dada una obra, proporciona la lista de los temas que se tratan en esa obra. Por ejemplo, la expresión :
temas_de_que_trata("El mito de Dione") devuelve la lista [astrología_medieval, costumbres_fenicias, fauna_africana, pintura_flamenca, liberalismo_del_siglo_XX].
Se pide:
1/ Aplicando el esquema de Ramificación y Poda, desarrollar un algoritmo capaz de encontrar una solución para el problema de editar las obras completas de *Vaes Criuremassa* que minimice el número de volúmenes.
2/ Resolver el mismo problema mediante un algoritmo basado en un esquema diferente. Exprimirse la mollera en busca de ideas chulas (NO vale un Vuelta Atrás ciego y sin marcaje).

IV.22. Disponemos de una regla de carpintero un tanto inusual. Está compuesta por una serie de segmentos consecutivos y articulados y cada uno de ellos tiene una longitud asociada que no tiene porqué ser siempre la misma. Se trata de diseñar un algoritmo eficiente que indique cómo hay que plegar la regla para que se minimice la longitud que ocupa una vez plegada. Justificad el esquema elegido.
Ejemplo clarificador : Supongamos que la regla se compone de 4 segmentos de longitudes 3,4,2,5 en esta secuencia que es inalterable. Una forma de plegarlo bastante intuitiva sería la que se muestra en la figura que viene a continuación:



Como puede apreciarse, la longitud que ocupa plegada es 7 y la solución sería {[s1,izq], [s2,der], [s3,izq], [s4,der]}
Sin embargo, plegándola como se indica en la siguiente figura se consigue una longitud de 6, que es la mínima, y que tiene como solución {[s1,izq], [s2,der], [s3,der], [s4,izq]}.

IV.23. Vamos a construir un circuito eléctrico usando como soporte una placa de dimensiones *AxB* (podemos pensar en la placa como si fuera una cuadrícula o una matriz con *A* filas y *B* columnas). Hemos de colocar en ella *N* componentes electrónicos (caben todos y cada uno ocupa una única posición) y disponemos de las siguientes matrices de datos para facilitar su colocación :
- Matriz CON(conexiones) : *CON(i,j)* contiene el número de conexiones que han de existir entre la componente *i* y la componente *j*.

- Matriz DIS(distancias) : *DIS(r,s)* contiene la distancia que existe entre la posición *r* y la posición *s* de la placa.

Diseñar un algoritmo que encuentre una asignación de componentes a posiciones tal que minimice la longitud del cable empleado. Justificar la eleccción del esquema elegido. La longitud del cable empleado es la suma de los productos *CON(i,j)xDIS(r,s)* donde la componente *i* ocupa la posición *r* y la componente *j* ocupa la *s*.

IV.24. Una matriz booleana M[1..n,1..n] representa un labertinto cuadrado. A partir de una casilla dada se puede llegar a las casillas adyacentes de la misma línea o columna. Además, si M[i,j]=FALSO, no se puede pasar por esa casilla; si M[i,j]=CIERTO se puede pasar.

a/ Diseñar un algoritmo que encuentre un camino, si hay alguno, de la casilla *(1,1)* a la *(n,n)*.

b/ Modificar la solución anterior, si es necesario, para que en el caso de que exista camino encuentre el más corto.

IV.25. Disponemos de una colección de *N* palabras cuyas longitudes son variables. Cada letra del alfabeto tiene asociada un *peso*. Queremos construir una secuencia de letras de una cierta longitud, TOPE, de modo que tenga peso máximo y que cumpla las siguientes restricciones :

- La secuencia solución, si es que la hay, estará formada por subsecuencias concatenadas de tamaño fijo *k*, con k>1.
- Cada palabra del conjunto original puede aportar *0* ó *1* subsecuencia a la solución.
- Una subsecuencia sólo se puede concatenar por detrás con otra si cumple que la última letra de la primera subsecuencia coincide con la primera letra de la segunda (la palabra vacía se puede concatenar por detrás con cualquier subsecuencia).

Las subsecuencias se construyen de la siguiente forma : fijada la *k* se toma la palabra y partiendo de su letra inicial se agrupan *k* letras consecutivas para la primera subsecuencia; para la siguiente se repite el proceso comenzando por la segunda letra, y así sucesivamente hasta la última que comenzará por la letra que ocupa la posición *longitud de la palabra-k+1*. Por ejemplo si k=5 y la palabra es TELEFONO, las subsecuencias son : { TELEF, ELEFO, LEFON, EFONO }

Se puede utilizar el TAD palabra que entre otras tendrá las siguientes consultoras :

long : palabra, nat ---> nat — /* dada una palabra y su posición de inicio y devuelve el número de letras desde esa posición inclusive hasta el final */

subsec : palabra, nat, nat ---> palabra — /* dada la palabra, *k* y la posición inicial devuelve una palabra formada por las *k* letras consecutivas de la palabra a partir de esa posición. Si *k* es mayor que el número de letras que quedan en la palabra desde la posición inicial entonces devuelve la palabra vacía */

qle : palabra, nat ---> letra /* devuelve la letra que ocupa la posición nat de la palabra, error en el caso en que no exista esa posición */

Del TAD letra se puede usar la siguiente operación :
peso : letra ---> nat /* devuelve el valor asociado a esa letra */

Podemos suponer que las *N* palabras están en un vector de *N* posiciones llamado PAL.
Se pide diseñar un algoritmo que resuelva el problema planteado. Justificar la elección del esquema elegido. Estudiar la eficiencia.

IV.26. En pleno mes de Agosto se nos ha estropeado un congelador repleto de tarrinas de helados de diferentes sabores. Formalizando la situación: tenemos *N* tarrinas, una tabla T[1..N] de naturales que nos indica el tiempo que tarda en derretirse cada una de ellas y otra tabla Sabor[1..N], también de naturales, que nos indica el sabor asociado.
Además disponemos de la función *placer(i)*, que cuantifica el placer que nos produce comer un helado de sabor *i* , y con la función *compatible(i,j)* que será cierta si y sólo si podemos comer una tarrina de sabor *j* inmediatamente después de haber ingerido una de sabor *i*.
Suponemos que necesitamos una unidad de tiempo para devorar una tarrina y que empezamos a comer en el instante en que se estropea el congelador.
Hay que decidir la secuencia de helados que hemos de comer para que se maximice el placer obtenido. Hay que tener en cuenta que un helado no puede comerse si ya se ha derretido.

IV.27. Disponemos de *N* vasos diferentes con los que queremos construir una torre de modo que ésta tenga altura mínima. La torre se consigue apilando los *N* vasos invertidos, es decir, la abertura (boca) hacia abajo y el pie hacia arriba. Nos ofrecen las siguientes operaciones :
longitud : vaso ---> real /* devuelve la altura del vaso */
índice : vaso, torre_vasos ---> real /* Devuelve un valor entre 0 y 100 que es el % de la altura de *torre_vasos* que queda dentro de *vaso* al intentar apilar *vaso* sobre *torre_vasos* */
Diseñar un algoritmo, justificando el esquema utilizado, que encuentre la solución del problema planteado.

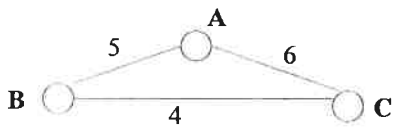
IV.28. Sea G=(V,E) un grafo no dirigido, completo y etiquetado con n=|V|. Las etiquetas pertenecen a los naturales. Se dispone de la operación *etiq* : vértice, vértice ---> nat, que dados dos vértices del grafo devuelve un natural que es la etiqueta de la arista. Se trata de generar una *secuencia*, que denominaremos *S*, con todos los vértices del grafo tal que sea mínima la siguiente suma de productos :

$$[\text{MIN}] \sum |i - j| \cdot \text{etiq}(S(i), S(j))$$

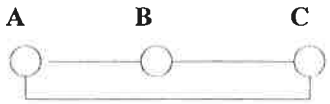
$$\forall i, j : 1 \leq i < j \leq n$$

donde *S(i)* es el vértice que ocupa la posición *i* en la secuencia devuelta. Diseñar un algoritmo que calcule la secuencia de suma mínima. Calcular su coste y justificar la corrección de la solución propuesta.

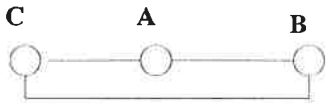
Ejemplo. Dado el grafo completo de grado 2 que viene a continuación :



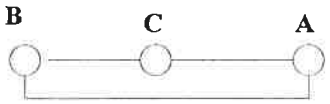
Las tres posibles sumas diferentes son :



SUMA = 5+4+(2.6)= 21



SUMA = 6+5+(2.4) = 19



SUMA = 4+6+(2.5) = 20

De las 3 sumas distintas la solución sería la segunda que es la de suma mínima.

V. MISCELANEA

V.1. Tenemos un tablero de *NxN* casillas y una ficha situada en la esquina superior izquierda, sobre la casilla *(1,1)*. Se pretende llevar la ficha a la esquina opuesta, es decir la *(N,N)*. Los únicos movimientos posibles son desplazar la ficha una casilla hacia abajo o una casilla hacia la derecha. En el tablero hay casillas normales y casillas especiales. Que la ficha pase por una casilla normal cuesta 1 y que pase por una casilla especial tiene coste 2. Se sabe que hay *S* casillas especiales repartidas por el tablero.

Prononer un algoritmo que encuentre un camino de coste mínimo entre las dos casillas fijadas. Justificar el esquema elegido así como su coste y todas las decisones tomadas.

V.2. Disponemos de un juego de fichas de dominó con las tradicionales 28 fichas. Supongamos que nos entregan *N* fichas al azar tal que 2<N<28 y que de esas *N* fichas se fijan dos cualesquiera (ficha origen y ficha destino), colocadas de una cierta manera, como extremos de una cadena.

El problema que se nos plantea es el siguiente : Devolver una secuencia de fichas de longitud mínima tal que permita pasar de la ficha origen a la destino satisfaciendo las reglas del dominó para formar la secuencia. Si la secuencia no existe devolver la secuencia vacía.

Diseñar una algoritmo para resolver el problema indicando, además, qué esquemas podían aplicarse, cuál es el elegido y el motivo de su elección.

V.3. Sea *a* un vector , a[1..n], de elementos con n>0. Se dice que un vector es mayoritario si tiene un elemento mayoritario y se dice que un elemento *x* es mayoritario en el vector *a* cuando más de la mitad de los elementos del vector son iguales a *x*. Formalmente, si existe un *x* tal que (Ni : 1≤i≤n : a[i]=*x*)>n/2, entonces *x* es elemento mayoritario y, por tanto, el vector es mayoritario. Como es evidente, si el vector es mayoritario, sólo existe en él un único elemento mayoritario.

a/ Supongamos que existe una relación de orden entre los elementos que figuran en el vector. Queremos determinar si un vector dado es mayoritario o no y, caso de que lo sea, saber cuál es ese elemento. ¿Qué algoritmo, de los vistos en clase, habría que utilizar para conseguir resolver este problema con un coste O(n)?. Identificar claramente el algoritmo final y justificar la respuesta indicando, por ejemplo, porqué hace falta que exista una relación de orden entre los elementos.

b/ Supongamos ahora que ya no tenemos una relación de orden entre los elementos y que la única operación disponible para comparar los elementos del vector es la igualdad. Diseñar un algoritmo que, con coste O(n·log n), resuelva el mismo problema que se plantea en a/ (Obviamente no se puede ordenar el vector *a*). Indicar el esquema empleado, justificar la corrección y determinar su coste.

V.4. Sea *S* una secuencia de naturales no repetidos tal que *longitud(S)=n* con n≥0. Se pide diseñar un algoritmo que calcule la tira creciente de naturales, contenida en *S*, de mayor longitud. Una tira es una secuencia formada por elementos que aparecen en la secuencia de entrada tal que se mantiene el orden de aparición pero no la posición en la que aparecen. *Ejemplo* : sea S={7,2,1,9,5,6,11,14,8} la secuencia de entrada. Algunas de las tiras crecientes que se pueden obtener a partir de ella son :

T1={7,9,11,14}, T2={2,9,11,14}, T3={2,5,6,11,14}, T4={2,5,6,8}, T5={1,9,11,14}, T6={1,5,6,11,14} siendo, en este caso, T3 y T6 las de mayor longitud (5 elementos) de todas las posibles.

Para resolver este problema se pueden utilizar las operaciones típicas sobre secuencias. Identificar y justificar claramente el esquema elegido. Introducir todas las mejoras de eficiencia que sean posibles. Explicar todas las operaciones, con código incluido, si es necesario, así como todas las estructuras de datos utilizadas.

V.5. Un agricultor tiene un parcela de *X* hectáreas y quiere saber con qué ha de sembrarla para obtener un beneficio máximo. La Cooperativa Agrícola del municipio le ha proporcionado una lista con *N* cultivos candidatos.

De cada uno de los *N* cultivos tiene la siguiente información :

periodo de siembra : fecha de inicio y fecha de fin del periodo

/* intervalo de tiempo en el que se puede sembrar. Por ejemplo : el trigo variedad A se puede sembrar cualquier día entre el 1 de Enero y el 1 de Marzo ambos inclusive. La siembra de cualquier cultivo siempre dura un solo día */
duración del cultivo : días
/* número de días que han de transcurrir desde que se inicia la siembra hasta que se recoge la cosecha y el campo queda listo para sembrar de nuevo*/
productividad por Ha.: pesetas
/* rendimiento económico del cultivo por Hectárea sembrada */

El agricultor quiere planificar la siembra de un año de 365 días (del 1 de Enero al 31 de Diciembre) y el problema consiste en determinar la secuencia de cultivos, indicando que día hay que sembrar cada uno de ellos, que le permita obtener un beneficio máximo teniendo en cuenta que :
- el último cultivo de la secuencia se ha de sembrar en o antes del 31 de Diciembre pero no importa si se ha de recoger en el siguiente año.
- con cada cultivo que se elija se siembra TODO el campo y no se puede sustituir por otro hasta que se coseche el cultivo anterior.
- si sus condiciones lo permiten el mismo cultivo se puede sembrar más de una vez.

a/ Resolver el problema usando un esquema Voraz. Explicar claramente el criterio o criterios de selección posibles. Si procede, demostrar la optimalidad de la solución obtenida por cada uno de ellos. Proponer un algoritmo y evaluar su coste.
b/ Resolver el problema usando un esquema de Vuelta Atrás ó de Ramificación y Poda. Justificar cual de los 2 es el más adecuado. Describir e implementar el algoritmo elegido y evaluar su coste.

V.6. En un trozo cuadrado de tela de NxN casillas hay que bordar S casillas de un cierto color C ($S<N^2$). Para ello se dispone de una bobina de hilo de color C y longitud L. Se sabe que para bordar una casilla se necesita la cantidad de hilo B pero para bordar 2 casillas no se necesita $2B$ sino $2B$ + *distancia entre las dos casillas*. Esto se debe a que no se puede cortar nunca el hilo, es decir, con la misma hebra hay que bordar la totalidad de las casillas.
Se conocen las coordenadas de cada una de las S casillas en el cuadrado de tela (se puede suponer que el vector LC contiene los pares (x,y) que proporcionan la ubicación de las S casillas). También es conocida la distancia entre cada par de casillas (se puede suponer que la matriz simétrica M de SxS contiene esas distancias. Por ejemplo, M[1,3] contiene la distancia entre las casilla que aparecen en la posición 1 y la posición 3 del vector LC).
Se quieren bordar las S casillas de tal forma que **NO** se corte el hilo y que se **MINIMICE** la cantidad de hilo empleado. Además, se desea conocer el orden en que deben bordarse las casillas en la solución óptima, si es que el problema tiene solución.

Diseñar e implementar un algoritmo que resuelva, correcta y eficientemente, el problema planteado. Justificar las decisiones tomadas y analizar el coste de la solución obtenida.

V.7. Se ha de organizar el horario de un campeonato entre *n* jugadores. Cada uno ha de jugar exactamente una vez contra cada adversario. Además, cada jugador ha de jugar exactamente un partido diario. Suponiendo que *n* es potencia de 2, diseñar e implementar un algoritmo que construya el horario y permita terminar el campeonato en *n-1* días. Indicar el esquema utilizado. Analizar el coste del algoritmo.

VI.TEST

VI.1. Sea G un grafo no dirigido, etiquetado con etiquetas naturales y conexo, entonces los algoritmos de Prim y Kruskal :
a/ Si todas las etiquetas son distintas, producen árboles idénticos (formados por conjuntos iguales de aristas).
b/ Producen siempre árboles idénticos (formados por conjuntos iguales de aristas).
c/ Ninguna de las anteriores.

VI.2. El algoritmo de Dijkstra se puede aplicar a :
a/ Grafos dirigidos y etiquetados con etiquetas naturales que no contengan ciclos porque si hay ciclos entonces no hay garantía de que se obtenga el camino más corto.
b/ Grafos dirigidos y etiquetados con etiquetas naturales
c/ Grafos dirigidos y etiquetados con etiquetas naturales o con algunas etiquetas negativas siempre que se cumpla que no existen ciclos de peso negativo.

VI.3. Para que un problema pueda ser resuelto usando un esquema Voraz debe suceder que :

I el problema satisfaga el principio de optimalidad
II podamos demostrar que el criterio de selección elegido conduce siempre al óptimo
III cada subproblema distinto se resuelva una única vez
IV la solución sea expresable en forma de secuencia de decisiones
V el criterio de selección elegido sea localmente óptimo

Elige la respuesta correcta :
a/ I,II y IV son necesarias y suficientes
b/ I,II y III son necesarias y suficientes
c/ I, IV y V son necesarias y suficientes

VI.4. Los algoritmos de Dijkstra, Floyd, Prim, Warshall y Kruskal, resuelven los siguientes problemas y son aplicaciones de los esquemas (figuran entre paréntesis PD=Programación

dinámica, V=Voraz) :

a/ Single_source_shortest_Paths (PD), All_pairs_shortest_paths (PD), Arbol de expansión mínimo (V), Clausura transitiva (V) y Arbol de expansión mínimo (V) respectivamente.

b/ All_pairs_shortest_paths (V), Clausura transitiva (PD), Arbol de expansión mínimo (V), Arbol de expansión mínimo (V) y Single_source_shortest_Paths (V) respectivamente

c/ Single_source_shortest_Paths (V), All_pairs_shortest_paths (PD), Arbol de expansión mínimo (V), Clausura transitiva (PD) y Arbol de expansión mínimo (V) respectivamente.

VI.5. Tenemos las siguientes afirmaciones :

I. Todos los problemas que se pueden resolver aplicando el esquema Voraz se pueden resolver aplicando Vuelta Atrás.

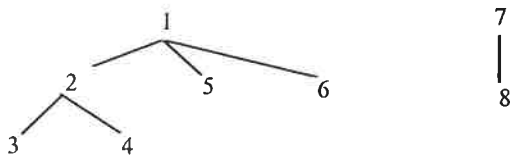
II. Todos los problemas que se pueden resolver usando Vuelta Atrás se pueden resolver aplicando Ramificación y Poda.

¿ Cuántas son ciertas ?

a/ 0, b/ 1, c/ 2

VI.6. El recorrrido en profundidad de un grafo G no dirigido ha producido el bosque que se muestra en la figura en el que cada nodo está numerado siguiendo el orden de visita del recorrido en profundidad.

Definimos como punto de articulación a aquel vértice que al ser eliminado del grafo hace que aumente el número de componentes conexas.



Considerar las siguientes afirmaciones :

I. El nodo 3 no es adyacente al nodo 6.

II. El nodo 2 es punto de articulación.

III. El grafo es conexo

IV. Si *adyacentes(G,1)* = { 2,5,6 } entonces 1 es punto de articulación.

Podemos demostrar que son ciertas :

a/ I y II b/ II y III c/ I y IV

VI.7. El problema de la mochila entera :

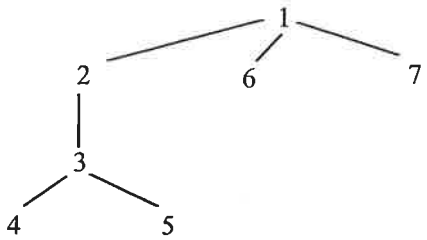
a/ se resuelve usando el mismo algoritmo Voraz que se emplea en mochila fraccionada y así se consigue el óptimo.

b/ como el problema no satisface el principio de optimalidad, se resuelve usando un Vuelta Atrás que puede ser con poda basada en el coste de la mejor solución en curso o no.

c/ Ninguna de las anteriores

VI.8. ¿ Qué le pasa al Sort Topológico cuando el grafo dirigido contiene ciclos ?
a/ O bien no acaba, o bien genera una secuencia de vértices que no satisface la especificación del Sort Topológico, es decir, existe algún par de vértices x e y tal que existiendo arista de x a y, y aparece antes que x en la secuencia.
b/ Nada, porque no le afecta la existencia de ciclos
c/ Ninguna de las anteriores

VI.9. El recorrrido en profundidad de un grafo G no dirigido ha producido el árbol que se muestra en la figura en el que cada nodo está numerado siguiendo el orden de visita del recorrido en profundidad. Definimos como punto de articulación a aquel vértice que al ser eliminado del grafo hace que aumente el número de componentes conexas.



Considerar las siguientes afirmaciones :

I. El nodo 6 es adyacente al nodo 4.

II. El nodo 1 es punto de articulación.

III.El nodo 2 puede ser adyacente al nodo 5 y el nodo 4 puede ser adyacente al 1.

IV El nodo 6 y el nodo 7 no son adyacentes y el nodo 5 y el nodo 7 sí lo son.

Podemos demostrar que son ciertas :
a/ I y II b/ III y IV c/ II y III

VI.10. Dadas dos soluciones algorítmicamente distintas para el mismo problema tal que la solución A tiene coste $T_A(n) = 2T_A(n-100) + n^2$, para todo $n>n_A$ y la solución B tiene coste $T_B(n) = 500T_B(n / 2) + n^2$, para todo $n > n_B$. ¿ Cuál sería la mejor solución de las dos desde el punto de vista del coste asintótico ?.
a/ la solución A
b/ la solución B
c/ me falta información sobre el coste en el caso no recursivo de ambas soluciones y por eso no puedo definirme.

VI.11. Sea P un problema de minimización que se resuelve aplicando Ramificación y Poda y usa la función $f(n)$ como clave de ordenación de la lista de nodos vivos con $f(n)=g(n)+h(n)$ y con $g(n)$ una estimación de $g^*(n)$ y $h(n)$ una estimación de $h^*(n)$. Entonces :

a/ si h(n)=0 y g(n)=nivel de *n* en el espacio de búsqueda, esto da lugar a un recorrido en anchura del espacio de búsqueda.
b/ si h(n)=0 y g(n)=nivel de *n* en el espacio de búsqueda, esto da lugar a un recorrido en profundidad del espacio de búsqueda.
c/ si g(n)=0 y h(x)≤h(y) para todo *x* que sea hijo de *y*, esto provoca un recorrido en anchura.

VI.12. Estas son algunas propiedades de ciertas funciones que se utilizan para encontrar soluciones en espacios de búsquedas OR :
I. la admisibilidad de *h(n)*, es decir, h(n)≤h*(n) para todo nodo *n*.
II. la monotonicidad de *h(n)*, es decir, ∀x : x=hijo(y) : h(x)+coste(y,x)≥h(y)
III. g(n)≥g*(n)
¿ Cuáles de las propiedades anteriores son necesarias y suficientes para garantizar que el algoritmo A* encuentra siempre la mejor solución, si es que existe, en un problema de minimización con f(n)=g(n)+h(n) como clave de ordenación de la lista de nodos vivos?.
a/ I y II b/ II y III c/ I y III

VI.13. ¿ Cuál de las siguientes asociaciones es la correcta ?
(Asociación = nombre del algoritmo y entre paréntesis la inicial del esquema usado para su resolución. V = Voraz y DC = Divide&Conquer).
a/ Quicksort (V), Dijkstra (DC), Karatsuba&Ofman (DC), Kruskal (V)
b/ Kruskal (V), Quicksort (DC), Karatsuba&Ofman (V), Dijkstra (V)
c/ Karatsuba&Ofman (DC), Kruskal (V),Quicksort (DC), Dijkstra (V)

VI.14. Dado un grafo dirigido ¿ qué algoritmo es el más eficiente para efectuar un recorrido completo del grafo ?
a/ un Vuelta Atrás inicializando la mejor solución en curso, con marcaje y con poda basada en el coste de la mejor solución en curso
b/ un recorrido en profundidad o en anchura
c/ un Ramificación y Poda con función de estimación admisible y que satisfaga la restricción monótona

VI.15. Dados 2 algoritmos Divide y Vencerás, el (1) y el (2), que resuelven el mismo problema y con costes
$T_1(n) = a_1T_1(n/c_1) + n^{k1}$, para todo $n>n_1$ y
$T_2(n) = a_2T_2(n/c_2) + n^{k2}$, para todo $n>n_2$, respectivamente.
Considerad las siguientes afirmaciones :
I. $a_1 < a_2$ II. $c_1 < c_2$ III. $c_1 > c_2$
Podemos decir que (1) es mejor que (2) si :
a/ I y II b/ I y III c/ Ninguna de las anteriores