Actes de la XIII Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Grapí Vilumara, P.; Massa Esteve, M. R. (ed.) (2015) p. 59-70
DOI: 10.2436/10.2006.02.8

HISTÒRIA DE LES MATEMÀTIQUES PER A L'ENSENYAMENT DE LES MATEMÀTIQUES. ANALITZANT LES FONTS

FÀTIMA ROMERO VALLHONESTA;[1] M. ROSA MASSA ESTEVE[2]
[1] CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA. UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.
[2] DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES. UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *història de les matemàtiques, ensenyament, fonts històriques originals*

History of Mathematics in the Learning of Mathematics. Analysis of the Sources

Summary: *In recent decades the use of history of mathematics, as a resource for the teaching of mathematics, has raised in Catalonia. The formative role of the history of mathematics in the learning for either teaching math or achieving a global view of mathematics, is indisputable. In the different courses of history of mathematics imparted these recent years, both in the initial and permanent training of teachers, we have analyzed several activities implemented in the classroom related to certain historical contexts of the curriculum. These historical cases already studied should be published in order to serve as a model for designing new activities. The aim of this paper is, from the analysis of the used sources in the activities, to propose criteria for their choice so that they are appropriate for the learning of mathematics. This analysis allows us to present some historical activities that verify these criteria.*

Key words: *history of mathematics, teaching, original historical sources*

Introducció[1]

El coneixement de la història de la matemàtica pot contribuir a enriquir la tasca docent (Calinger, 1996). Aquest enriquiment té una doble vessant: proporcionar una visió diferent de la matemàtica a l'alumnat i facilitar-ne el seu aprenentatge.

1. Aquesta investigació compta amb el suport del projecte HAR2013-44643-R i de l'ABEAM (Associació de Barcelona per a l'Ensenyament i Aprenentatge de les Matemàtiques).

La història de la matemàtica aporta al professorat una nova perspectiva més completa de la matèria, que el capacitarà per a oferir una formació científica molt més àmplia. L'ús de casos històrics és un dels recursos que es poden emprar per a millorar la transmissió i assoliment dels continguts matemàtics i també per a actuar de revulsiu en aquells casos en què l'alumne no troba motivació en la matemàtica. El professor coneixedor de la història de la matemàtica tindrà elements al seu abast per a transmetre als alumnes una percepció d'aquesta disciplina com a ciència útil, dinàmica, humana, interdisciplinària i heurística (Massa Esteve, 2003).

Les matemàtiques han estat una ciència útil per al desenvolupament de les diferents civilitzacions. Actualment són fonamentals en tots els camps de la ciència. Són una ciència dinàmica, en constant evolució, que sap adaptar-se a les noves situacions que es produeixen i sap treure profit de les noves eines tecnològiques. La matemàtica és una ciència fruit d'una activitat humana i, si aconseguim que els alumnes la vegin així, probablement la percebran com a més propera i assequible. És important fer notar, sempre que sigui possible, les connexions de la matemàtica amb altres ciències. És aquesta interacció la que ha permès sovint el desenvolupament de totes elles. L'anàlisi de problemes històrics resolts amb mètodes diversos permeten fomentar en l'alumnat l'interès per la recerca (Weeks, 1997).

També cal remarcar que no tan sols com a professors, sinó també com a matemàtics, la història de la matemàtica aporta una millor comprensió dels fonaments i de la naturalesa d'aquesta disciplina (Jahnke *et al.*,1996). La història de la matemàtica proveeix els amants d'aquesta ciència d'elements de comprensió més profunda dels conceptes i les tècniques matemàtiques d'ús quotidià a les aules (Katz, 2000). Ajuda a comprendre com i per què s'han format les diferents branques de la matemàtica: l'anàlisi, l'àlgebra, la geometria, etc., les seves diferents interrelacions i les relacions amb les altres ciències.

La història mostra que les matemàtiques s'han emprat per a resoldre problemes relacionats amb l'activitat humana i per a donar significat al món. A més, permet observar com les seves parts s'han anat forjant en una reiterada interacció aplicació-desenvolupament. Així, la geometria, que va néixer per mesurar, va evolucionar amb els problemes de mesures; la trigonometria es va anar desenvolupant per resoldre problemes d'astronomia i també de navegació; l'àlgebra, que va rebre un impuls important en solucionar problemes d'aritmètica mercantil, durant el Renaixement va esdevenir una eina imprescindible en la resolució de problemes geomètrics, de teoria de nombres, etc. Sense cap mena de dubte, tots aquests coneixements històrics faran que s'enriqueixi la formació matemàtica de l'alumnat.

Com a membres del Grup d'Història de les Matemàtiques de l'ABEAM, hem dissenyat diverses activitats que hem experimentat a l'aula (Romero & Massa, 2003; Romero *et al.*, 2006; Guevara *et al.*, 2008) i hem constatat, que si bé la majoria han estat interessants per a l'alumnat, no totes elles han contribuït d'igual manera a l'aprenentatge de les matemàtiques.

L'objectiu d'aquesta comunicació és, a partir de l'anàlisi de les fonts que hem utilitzat en les diverses activitats, proposar criteris per a la seva tria de manera que aquestes siguin rellevants per a l'aprenentatge dels conceptes o dels processos matemàtics.

La història de les matemàtiques en el currículum de matemàtiques

L'ús de la història de les matemàtiques com a recurs per a l'ensenyament de les matemàtiques ha experimentat un gran impuls a Catalunya durant les darreres dècades. En el currículum de 2007

(Decret 143/2007), després dels blocs de continguts ja es proposaven per a cada curs una sèrie de contextos històrics relacionats amb els continguts del curs corresponent.

En el cas de 3r d'ESO, per exemple, la llista incloïa, entre d'altres, la resolució geomètrica d'equacions i el naixement de la teoria de probabilitats.

En el currículum de 2015 (Decret 187/2015), aquestes possibles aproximacions històriques han passat a formar part dels blocs de continguts.

Per exemple, entre els continguts de 4t curs corresponents al bloc d'*Espai i Forma*, hi figuren: «El naixement i primer desenvolupament de la trigonometria al llarg de la història i la història de la introducció a les coordenades cartesianes».

Per tant, en els continguts es fa clara referència a la història de les matemàtiques de la qual els alumnes n'han de conèixer alguns episodis al mateix nivell que han de saber, per exemple, resoldre triangles rectangles.

Consideracions sobre la introducció de la història de les matemàtiques per a l'aprenentatge de les matemàtiques

Els continguts del currículum relacionats amb la història de les matemàtiques es poden impartir atenent només a l'evolució al llarg del temps del concepte involucrat, que pot il·lustrar una mica el que es coneix com a *principi genètic*, que considera que l'intel·lecte humà reprodueix els passos que ha seguit l'evolució històrica dels conceptes matemàtics. Però potser el més interessant és utilitzar fonts originals o traduccions reconegudes per tal de dissenyar activitats que contribueixin a aprendre conceptes i processos matemàtics a través de la seva història. Mostrar les dificultats que hi ha hagut al llarg de la història per tal de donar resposta a determinades preguntes que s'ha fet la humanitat o per a resoldre determinats problemes, pot contribuir a motivar alguns estudiants que a vegades, pel tipus d'ensenyament que han rebut, creuen que les matemàtiques consisteixen a aplicar una sèrie de fórmules sovint complicades, la comprensió de les quals està reservada només a ments privilegiades.

Com que es tracta que l'alumnat aprengui matemàtiques a través de la història, i no solament història de les matemàtiques, no tots els episodis històrics ni totes les fonts són apropiades per a dissenyar activitats per a implementar a l'aula.

Per tal de triar una activitat basada en textos històrics que contribueixi a l'aprenentatge de conceptes o al desenvolupament de processos matemàtics, proposem fer-nos les preguntes següents:

- La font està relacionada amb el contingut històric del currículum?
- Contribueix de manera significativa a la millora de l'aprenentatge de les matemàtiques?
- Ha representat la resposta a alguna pregunta clau que s'ha fet la humanitat?
- És cabdal per a entendre l'origen del concepte que s'ensenya?
- Estimula la reflexió matemàtica?
- Desperta la curiositat? Potencia el raonament? Ensenya nous mètodes?

Presentarem tot seguit una sèrie d'activitats que pretenen il·lustrar la resposta afirmativa a cadascuna de les preguntes.

La font està relacionada amb el contingut històric del currículum?

La següent activitat està relacionada amb el contingut històric del currículum, concretament amb el que s'especifica a 3r d'ESO com:

> Mesures indirectes (CC11, CC12).[2] Estimació. Precisió, exactitud i error. Història de la mesura del cel (radi de la Terra, distància Terra-Lluna...). Ús de les mesures indirectes per a la resolució de problemes en contextos diversos.

La font que emprem és una obra d'astronomia: *Sobre les mides i les distàncies del Sol i la Lluna*, d'Aristarc de Samos (*ca*. 310 aC - 230 aC). L'obra suposa un intent de calcular les distàncies Sol-Terra i Terra-Lluna amb un mètode original, rigorós i correcte, malgrat que, a causa de la imprecisió de les mesures, el resultat no ho va ser (Aristarco de Samos, 2007).

Aristarc parteix de sis hipòtesis sobre les mides i les distàncies als astres i mitjançant divuit proposicions demostra tres tesis. La tesi més important és la que es demostra a la Proposició 7: «La distància al Sol des de la Terra és més gran que divuit vegades, però més petita que vint vegades, la distància a la Lluna des de la Terra».

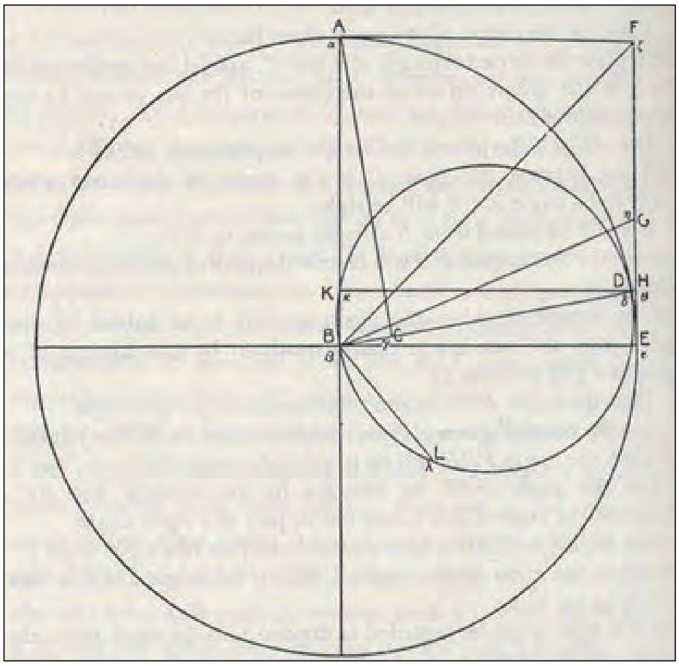


FIGURA 1. Il·lustració de la Proposició VII (Aristarco, 2007: 109).

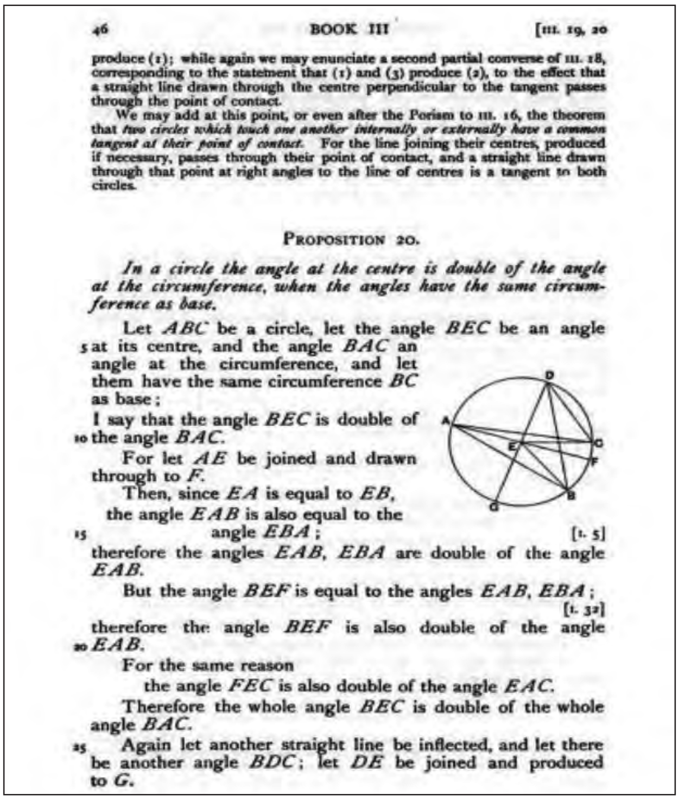
A partir de la Fig. 1, prenem A com el centre del Sol; B, el centre de la Terra, i C, el centre de la Lluna quan se'ns mostra partida per la meitat; aleshores, CB representa la distància a la Lluna des de la Terra i AB representa la distància al Sol des de la Terra. Hem de demostrar que: 18 CB < AB < 20 CB. Aquesta demostració és la que treballem amb els alumnes a l'activitat d'aula (Massa Esteve, 2005b).

Les estratègies matemàtiques emprades en la demostració són: traslladar el problema del triangle Sol-Terra-Lluna a un triangle semblant construint una circumferència adequada; utilitzar com si fos coneguda la relació entre els angles i les seves tangents; emprar la proporció establerta entre els segments que determinen la bisectriu d'un angle d'un triangle i els seus costats, i, finalment, aproximar $\sqrt{2}$ per 7/5.

2. Aquest tipus de sigles fan referència als continguts clau que són una novetat d'aquest currículum i estan identificats per a cadascuna de les àrees del coneixement. El contingut clau CC12, per exemple, *és: relacions mètriques i càlcul de mesures en figures*.

Contribueix de manera significativa a la millora de l'aprenentatge de les matemàtiques?

La matemàtica grega, basada en la geometria, pot fer també la seva aportació a l'aprenentatge de les matemàtiques. En els *Elements* d'Euclides (300 aC) es recullen els coneixements matemàtics de diferents escoles gregues i es demostren moltes proposicions geomètriques. Aquesta obra, que es creu que pot ser col·lectiva, és la que ha tingut més edicions després de la Bíblia (més de mil) i és una de les que més influència cultural ha tingut al llarg de la història. Va ser emprada com a llibre de text a les universitats durant molts segles i va influir extraordinàriament en els grans autors de les revolucions científiques, com ara Galileo Galilei (1564-1642), Isaac Newton (1643-1727) i d'altres. Els *Elements* consten de tretze llibres: els sis primers dedicats a la geometria plana; els tres següents a l'aritmètica (o teoria de nombres); el desè tracta dels incommensurables, i els tres últims, de la geometria de sòlids.[3] Pel que fa a l'estil de l'obra podem qualificar-lo d'ordre axiomàtic i rigorós. Cada llibre té la mateixa estructura, primer els axiomes i/o postulats, seguidament les definicions i, després, les proposicions, cadascuna amb la seva demostració. Es demostra tot a partir d'hipòtesis clares i de propietats explícitament establertes, anotant al marge les proposicions i les definicions que està emprant. Cal remarcar que en el text d'Euclides no hi ha símbols, ni nombres, ni expressions algebraiques, només figures i relacions entre els costats i les figures; és a dir, només hi ha geometria: segments que s'afegeixen i que quan es multipliquen donen figures geomètriques. L'activitat està preparada a partir de la proposició III.20 que relaciona la mesura de l'angle inscrit amb la de l'angle central que abasta el mateix arc (Fig. 2).



46 BOOK III [III. 19, 20

produce (1); while again we may enunciate a second partial converse of III. 18, corresponding to the statement that (1) and (3) produce (2), to the effect that a straight line drawn through the centre perpendicular to the tangent passes through the point of contact.

We may add at this point, or even after the Porism to III. 16, the theorem that *two circles which touch one another internally or externally have a common tangent at their point of contact.* For the line joining their centres, produced if necessary, passes through their point of contact, and a straight line drawn through that point at right angles to the line of centres is a tangent to both circles.

PROPOSITION 20.

In a circle the angle at the centre is double of the angle at the circumference, when the angles have the same circumference as base.

Let ABC be a circle, let the angle BEC be an angle at its centre, and the angle BAC an angle at the circumference, and let them have the same circumference BC as base;

I say that the angle BEC is double of the angle BAC.

For let AE be joined and drawn through to F.

Then, since EA is equal to EB, the angle EAB is also equal to the angle EBA; [I. 5]

therefore the angles EAB, EBA are double of the angle EAB.

But the angle BEF is equal to the angles EAB, EBA; [I. 32]

therefore the angle BEF is also double of the angle EAB.

For the same reason the angle FEC is also double of the angle EAC.

Therefore the whole angle BEC is double of the whole angle BAC.

Again let another straight line be inflected, and let there be another angle BDC; let DE be joined and produced to G.

FIGURA 2. Proposició 20 del llibre III (Euclid, 1956: 46).

3. Els quatre primers són deguts als pitagòrics, el V i el VI són deguts a Eudox. Els llibres VIII i IX són també dels pitagòrics. El X és degut a Teetet. El llibre XI procedeix de l'escola jònica. El XII, té diversos precursors però el mètode d'exhaustió, que és el que permet demostracions rigoroses, és d'Eudox. Finalment, el llibre XIII és degut a Teetet (Dou, 1986: 68).

Ha representat la resposta a alguna pregunta clau que s'ha fet la humanitat?

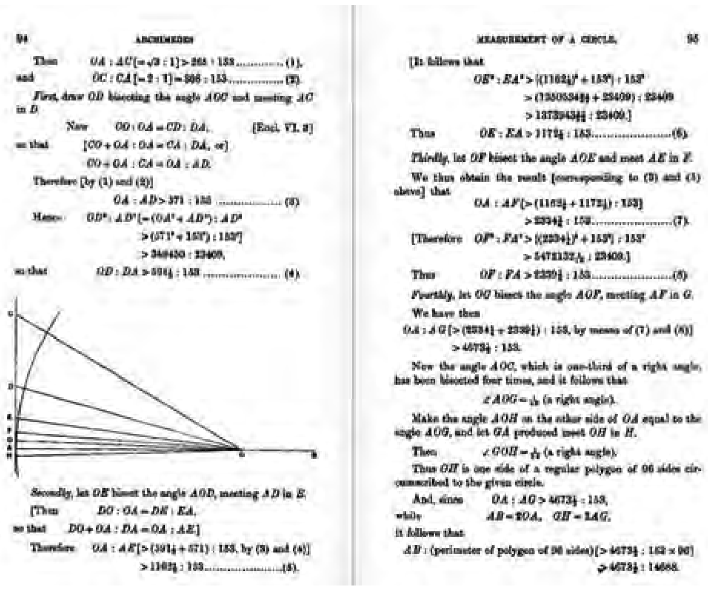
En aquest cas, hem triat com a exemple la mesura sorprenentment acurada del radi de la Terra per Eratòstenes (*ca*. 276 aC - *ca*. 194 aC). Els detalls d'aquest càlcul estaven en una obra intitulada *Sobre el mesurament de la Terra* que s'ha perdut. Però tenim notícia d'aquesta obra per alguns treballs de Cleomedes, Teó d'Esmirna i Estrabó. Tot i no disposar en aquest cas de la font original, creiem que l'interès de l'activitat compensa aquesta mancança. Eratòstenes va comparar l'ombra al migdia d'un objecte a Siena (l'actual Assuan) i a Alexandria. Va suposar que els rajos del Sol eren paral·lels i, relacionant angles, va trobar que la longitud de la circumferència de la Terra era de 250.000 estadis.

Amb aquesta activitat,[4] en la qual els alumnes han d'explicar els fonaments del mètode d'Eratòstenes, poden aprendre com l'observació, la creativitat i l'enginy poden contribuir a crear coneixement que permeti respondre preguntes que la humanitat s'ha plantejat al llarg del temps.

És cabdal per a entendre l'origen del concepte que s'ensenya?

L'activitat d'aula que respon a aquest criteri empra com a font el text d'Arquimedes *La mesura del cercle* (*ca*. 287 aC), on es calcula una aproximació al nombre π que ajuda a entendre'n el seu origen. La proposició III del llibre demostra que la relació entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre està compresa entre 3 10/71 i 3 1/7, que representa una aproximació del nombre π entre 3,1408 i 3,1428 (Heath, 1897). Arquimedes comença inscrivint i circumscrivint triangles en un cercle i doblant el nombre de costats arriba a polígons de 96 costats. Per tal de trobar l'aproximació utilitza el teorema de la bisectriu, el teorema de Pitàgores i la relació entre els angles inscrits i l'angle central, entre d'altres propietats de la circumferència (Fig. 3).

Aquesta activitat es pot pautar de manera diferent en funció de l'objectiu que vulguem aconseguir, de manera que se'n pot donar una visió general, sense aprofundir en les demostracions, però també es pot guiar l'alumnat en la demostració deixant que completi els aspectes que creguem convenients, en funció dels continguts concrets que volem que aprengui o de les seves capacitats.



94 ARCHIMEDES

Then $OA : AC [= \sqrt{3} : 1] > 265 : 153$ ....(1),

and $OC : CA [= 2 : 1] = 306 : 153$ ....(2).

First, draw OD bisecting the angle AOC and meeting AC in D.

Now $CO : OA = CD : DA$, [Eucl. VI. 3]

so that $[CO + OA : OA = CA : DA$, or$]$

$CO + OA : CA = OA : AD$.

Therefore [by (1) and (2)]

$OA : AD > 571 : 153$ ....(3).

Hence $OD^2 : AD^2 [= (OA^2 + AD^2) : AD^2$

$> (571^2 + 153^2) : 153^2]$

$> 349450 : 23409$,

so that $OD : DA > 591\frac{1}{8} : 153$ ....(4).

Secondly, let OE bisect the angle AOD, meeting AD in E.

[Then $DO : OA = DE : EA$,

so that $DO + OA : DA = OA : AE$.]

Therefore $OA : AE [> (591\frac{1}{8} + 571) : 153$, by (3) and (4)$]$

$> 1162\frac{1}{8} : 153$ ....(5).

MEASUREMENT OF A CIRCLE. 95

[It follows that

$OE^2 : EA^2 > \{(1162\frac{1}{8})^2 + 153^2\} : 153^2$

$> (1350534\frac{33}{64} + 23409) : 23409$

$> 1373943\frac{33}{64} : 23409$.]

Thus $OE : EA > 1172\frac{1}{8} : 153$ ....(6).

Thirdly, let OF bisect the angle AOE and meet AE in F.

We thus obtain the result [corresponding to (3) and (4) above] that

$OA : AF [> (1162\frac{1}{8} + 1172\frac{1}{8}) : 153]$

$> 2334\frac{1}{4} : 153$ ....(7).

[Therefore $OF^2 : FA^2 > \{(2334\frac{1}{4})^2 + 153^2\} : 153^2$

$> 5472132\frac{1}{16} : 23409$.]

Thus $OF : FA > 2339\frac{1}{4} : 153$ ....(8).

Fourthly, let OG bisect the angle AOF, meeting AF in G.

We have then

$OA : AG [> (2334\frac{1}{4} + 2339\frac{1}{4}) : 153$, by means of (7) and (8)$]$

$> 4673\frac{1}{2} : 153$.

Now the angle AOC, which is one-third of a right angle, has been bisected four times, and it follows that

$\angle AOG = \frac{1}{48}$ (a right angle).

Make the angle AOH on the other side of OA equal to the angle AOG, and let GA produced meet OH in H.

Then $\angle GOH = \frac{1}{24}$ (a right angle).

Thus GH is one side of a regular polygon of 96 sides circumscribed to the given circle.

And, since $OA : AG > 4673\frac{1}{2} : 153$,

while $AB = 2OA$, $GH = 2AG$,

it follows that

AB : (perimeter of polygon of 96 sides) $[> 4673\frac{1}{2} : 153 \times 96]$

$> 4673\frac{1}{2} : 14688$.

FIGURA 3. Demostració amb els polígons circumscrits (Heath,1897: 94-95).

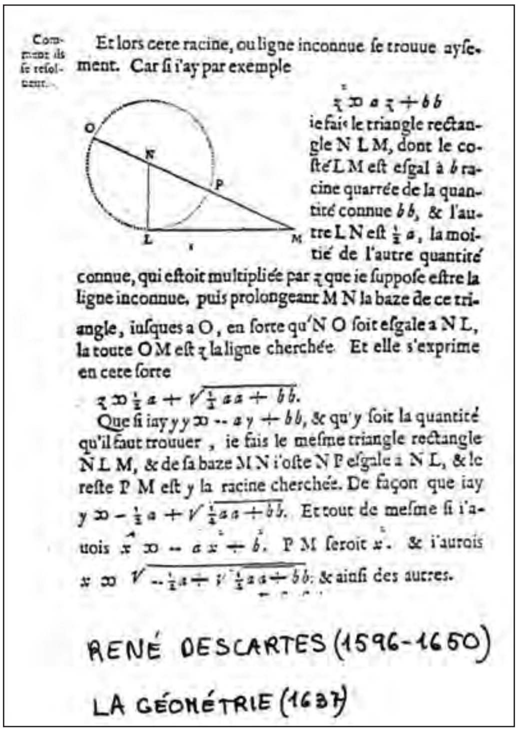
4. Vegeu una de les possibles implementacions d'aquesta activitat a l'aula (Romero & Massa, 2012).

Estimula la reflexió matemàtica?

Aquesta activitat fa reflexionar els alumnes sobre les relacions entre l'àlgebra i la geometria en la història de la construcció de la solució de l'equació de segon grau (Massa, 2005a). Encara que ja es pot intuir un algorisme de resolució d'equacions de segon grau a les tauletes babilòniques (1800 aC), correspon als àrabs el pas decisiu en el desenvolupament de les regles de l'àlgebra. Mohamed Ben-Musa al-Khwarizmi (850 dC), matemàtic, astrònom i membre de la Casa de Saviesa de Bagdad, va escriure *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* (813 i 830), on classificava les equacions fins a segon grau en sis tipus diferents, explicava el mètode per a resoldre-les i justificava les solucions amb quadrats i rectangles. Qui va difondre en el món occidental tots aquests coneixements va ser Leonardo de Pisa, fill de Bonacci (1180-1250), més conegut pel nom de Fibonacci, amb la seva obra *Liber abaci* (1202). L'obra de Luca Pacioli (1447-1517) titulada *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni & Proportionalità* (1494), que va tenir gran difusió a la seva època, va influir en les àlgebres renaixentistes, com ara la de Girolamo Cardano (1501-1576), tot i que la relació entre l'àlgebra i la geometria pel que fa a l'obtenció de les solucions en aquesta obra es feia utilitzant també quadrats i rectangles.

Amb l'obra *In Artem Analyticen Isagoge* (1591), de François Viète (1540-1603), que va constituir un punt clau per a la utilització de símbols, no només per a representar les incògnites, sinó també per a representar les quantitats conegudes, les relacions van canviar. Viète va presentar nous procediments algebraics relacionant la teoria de proporció euclidiana amb les equacions, i va fer palesa la seva utilitat per a resoldre equacions a l'aritmètica, a la trigonometria, però sobretot a la geometria.

També més tard René Descartes (1596-1650), en la seva obra *La Géométrie* (1637), on va construir una àlgebra de segments, empra el teorema de Pitàgores i un cercle en la construcció que fa de la solució de l'equació de segon grau (Fig. 4).


Comment ils se resolvent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue se trouue aysement. Car si i'ay par exemple

$z^2 \propto az + bb$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le costé L M est esgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui estoit multipliée par z que ie suppose estre la ligne inconnue, puis prolongeant M N la baze de ce triangle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Que si iay $yy \propto -ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que iay $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \propto -axx + bb$. P M seroit xx. & i'aurois $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$; & ainsi des autres.

RENÉ DESCARTES (1596-1650)

LA GÉOMÉTRIE (1637)

FIGURA 4. Solució de l'equació de segon grau (Descartes, 1954: 12-15).

Cal assenyalar que a l'obra de Descartes ja apareix la fórmula de l'equació de segon grau que emprem actualment.

Desperta la curiositat?

En aquest cas la font que hem triat és una obra del segle XVI, *Arithmetica Practica y Speculativa* (1562), de Juan Pérez de Moya (1513-1597), que va arribar a les 30 edicions. El llibre novè d'aquesta obra està escrit en forma de diàleg i tracta diferents punts de vista sobre la utilitat de les matemàtiques i els motius que aconsellen el seu estudi. Consta de dues parts en la primera de les quals Antimacho visita Sophronio, que està malalt, i el troba llegint un llibre d'aritmètica. Aquest serà per a l'autor el pretext per a parlar de la necessitat de l'estudi d'aquesta disciplina. Antimacho representa un home del seu temps que s'estranya que hi hagi persones que s'entretinguin llegint llibres d'aritmètica. Nega que els principis de l'aritmètica puguin constituir una ciència i afegeix que si no hi ha diners per comptar, no hi ha cap necessitar d'estudiar aritmètica; i si n'hi ha, l'interès, l'avarícia o el costum poden substituir el coneixement científic.

L'activitat està centrada en un dels problemes que posa Sophronio a Antimacho i consisteix a entendre l'engany que fa un comprador a un venedor (Fig. 5). Es tracta d'un mosso que va a comprar espàrrecs i porta una corda per lligar-los. Demana al venedor què li cobraria pel manat que es pot lligar amb la corda, que fa un pam. Acorden que el preu serà de mig ral. El mosso torna al cap d'una estona amb una corda de dos pams i paga 1 ral pels espàrrecs que hi pot lligar. Igual que el venedor, Antimacho va trobar que el càlcul era correcte. Sophronio li explica l'engany.

(So) Eſſo dezis? pues eſperad
vn poco,q̃ reſpõdereys a eſto que os pregũtare
que es caſo q̃ acaeſcio pocos dias ha por vn mo
ço de vn ſoldado, el q̃l yẽdo a cõprar prouiſion
para ſu amo,llego a vn labrador q̃ vendia eſpar-
ragos,y le dixo. Quanto quereys por los eſpar-
ragos que pudiere atar en eſta cuerda,que tiene
vn palmo de largo,en fin ſe concertarõ por me
dio real, a poco de tiempo boluio eſte moço al
q̃ vẽdia eſparragos,diziẽdo. Hermano biẽ ſe os
acuerda,q̃ me diſtes por medio real los eſparra-
gos q̃ ate en vna cuerda de vn palmo de largo,
al preſente quiero comprar mas, y traygo vna
cuerda de dos palmos de largo,que es el doblo
q̃ la otra, dad me la de eſparragos y pagar os he
vn real,q̃ es a razon de como primero nos con-
certamos. El labrador reſpondio que era con-
tẽto. Pido ſi en eſta compra ſe ha hecho algun
agrauio, y quien engaño a quien, y en quanto?

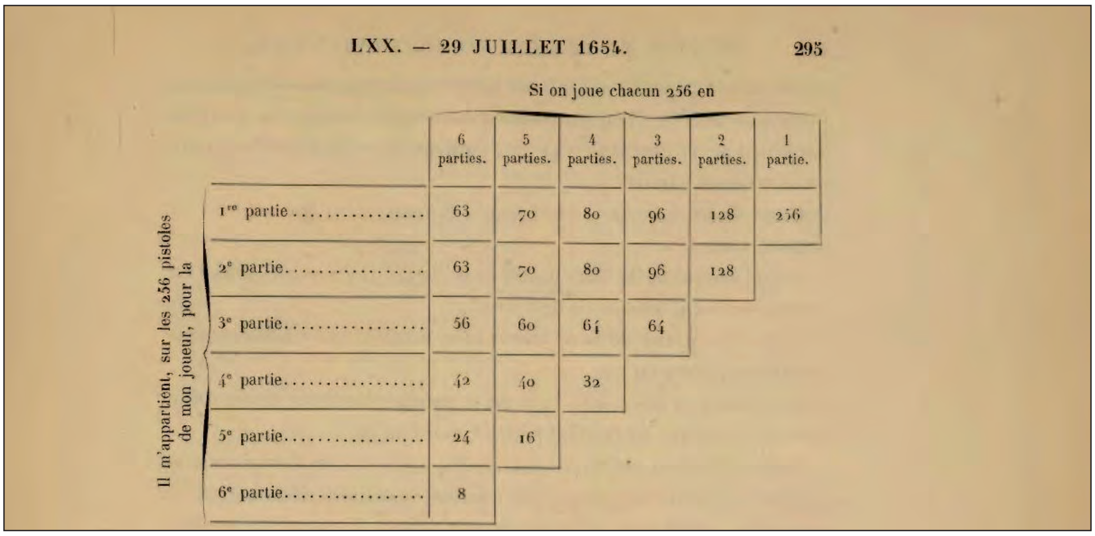
Figura 5. Problema sobre la proporcionalitat (Pérez de Moya, 1562: 701).

Aquesta activitat a partir d'un text del segle XVI, el llenguatge del qual es pot entendre perfectament, permet als alumnes adonar-se que la raó de proporcionalitat entre figures semblants no és la mateixa per a longituds que per a superfícies.

Potencia el raonament?

Aquí hem triat com a punt de partida la correspondència entre Pascal i Fermat amb relació a com s'han de repartir les apostes en una partida inacabada per tal de ser justos en el repartiment (Romero, 2012). Aquest problema és conegut com el problema dels punts i va ser proposat a Pascal i Fermat probablement el 1654 i va donar lloc a un intercanvi epistolar entre Pascal i Fermat que va ser fonamental per al desenvolupament dels conceptes moderns de teoria de probabilitats. En aquesta correspondència es posen de manifest els dubtes que tenien aquests grans matemàtics per a resoldre una qüestió aparentment simple.

La situació és la següent: dos jugadors juguen a un joc en què per cada partida guanyada obtenen 1 punt. El primer que arriba a 6 punts s'emporta el premi, que són 24 ducats. El joc s'interromp per causes desconegudes en un moment en què el jugador A ha obtingut 5 punts i el jugador B n'ha obtingut 3. Com s'han de repartir els 24 ducats de manera justa?



LXX. — 29 JUILLET 1654. 295

Si on joue chacun 256 en

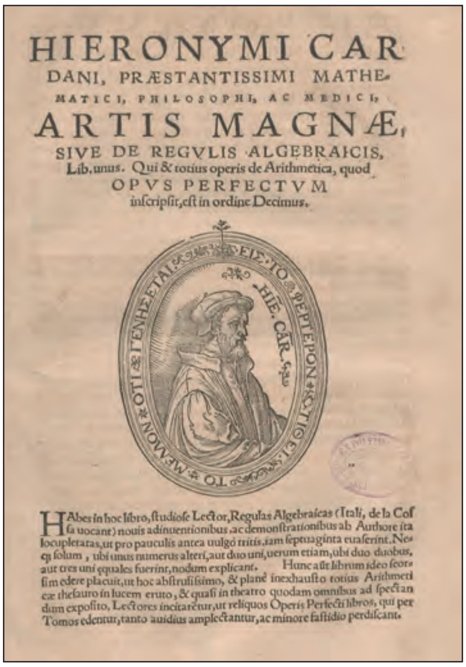
Il m'appartient, sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la	6 parties.	5 parties.	4 parties.	3 parties.	2 parties.	1 partie.
1re partie	63	70	80	96	128	256
2e partie	63	70	80	96	128	
3e partie	56	60	64	64		
4e partie	42	40	32			
5e partie	24	16				
6e partie	8					

FIGURA 6. Esquema de Pascal per a la solució del problema dels punts en la correspondència amb Fermat(Fermat, 1894: 295).

Es plantejarà el problema als alumnes sense parlar-los del seu origen i el portaveu de cada grup exposarà la solució a la qual han arribat (Fig. 6). Aquesta primera part de l'activitat té com a objectiu que els alumnes s'hagin familiaritzat amb el problema. Després es lliura als alumnes el text amb fragments de la correspondència de Pascal i Fermat. Es tracta que entenguin els raonaments dels dos matemàtics i que s'adonin de la dificultat d'arribar a un repartiment que satisfaci les dues parts.

Ensenya nous mètodes?

Hem triat en aquest cas la resolució de l'equació de tercer grau en l'*Ars Magna* (1545) per Girolamo Cardano (1501-1576) (Fig. 7).


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni equales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

FIGURA 7. Portada *Ars Magna* (Cardano, 1545).

La resolució d'equacions ha estat un motor potent per a la recerca matemàtica que ha anat potenciant la creativitat dels matemàtics, de manera que s'han hagut d'anar creant noves formes de raonar quan en augmentar la complexitat d'un problema les antigues no hi podien donar resposta. La resolució d'equacions polinòmiques de graus 1 i 2 és present al currículum de secundària obligatòria i alguns casos particulars de grau superior es tracten a batxillerat. Poques vegades, però, s'explica que hi ha fórmules per a resoldre les equacions de tercer i quart grau i, en canvi, no n'hi ha per a les de grau 5.

Els alumnes han d'aprendre que no hi ha fórmules per a resoldre qualsevol tipus d'equacions i que, fins i tot, per alguns casos per als quals n'hi ha es poden aplicar mètodes més efectius.

Es tracta en aquesta activitat que els alumnes transformin, degudament guiats, una equació de tercer grau en una altra sense terme quadràtic, de la forma: , i la resolguin aplicant la fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Hauran de resoldre després la mateixa equació per mètodes aproximatius, com el de Newton-Raphson o d'altres, i escriure les seves conclusions.

Algunes reflexions

La realització d'activitats d'aquest tipus, havent triat les fonts de manera acurada, pot aportar a l'alumnat una visió holística de les matemàtiques que està en la línia competencial del nou decret de currículum. Les activitats s'introdueixen normalment a partir de preguntes i es relacionen amb el context i amb les inquietuds o necessitats de l'època corresponent.

El fet que en algunes activitats es relacionin continguts de diferents blocs com són la geometria i l'àlgebra, per exemple, dóna coherència a aquests continguts que no es veuen com parts aïllades de la matèria, sinó connectades entre elles.

La metodologia emprada en la realització d'aquestes activitats té l'alumne com a centre de l'aprenentatge, ja que el professor introdueix l'activitat i l'alumne, de manera més o menys guiada, ha de reflexionar i donar resposta a la pregunta que s'hi formula.

La mostra d'activitats que hem relacionat en aquest text fa palesa la riquesa de la matemàtica com a ciència i, alhora, dóna a l'alumnat una visió d'aquesta disciplina més connectada amb la realitat i, per tant, més propera.

Referències bibliogràfiques

ARISTARCO DE SAMOS (2007), *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna,* Intr., trad. y notas de M. Rosa Massa Esteve, Cádiz, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

CALINGER, R. (ed.) (1996), *Vita Mathematica. Historical research and Integration with teaching*, Washington, The Mathematical Association of America.

CARDANO, G. (1545), *Artis magnae, sive de regulis algebraicis*, Nürnberg, John Petreius.

DESCARTES, R. (1954), *The geometry of René Descartes*, SMITH, D. E.; LATHAM, M. L. (eds.), Nova York, Dover.

DOU, A. (1986), «Euclides». A: *Historia de la Matemàtica hasta el siglo XVII*, Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 61-78.

EUCLID. (1956), *The Thirteen books of The Elements*, trad. T. Heath, Nova York, Dover, vol. 2.

FERMAT, P. (1894), *Oeuvres*, TANNERY, P.; CHARLES, H. (eds.), Gauthier Villars, París, volum II.

GUEVARA, I.; ROMERO, F.; MASSA, M. R. (2008), «Geometria i trigonometria en el Teorema de Menelau (100 dC)», *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Barcelona, SCHCT-IEC, **2**, 39-50.

HEATH, T. L. (ed.) (1897), *The Works of Archimedes*, Cambridge, Cambridge University Press.

JAHNKE, H. N.; KNOCHE, N.; OTTE, M. (1996), *History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences*, Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht.

KATZ, V. (ed.) (2000), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective*, Washington, The Mathematical Association of America.

MASSA ESTEVE, M. R. (2003), «Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica», *Biaix*, **21**, 4-9.

MASSA ESTEVE, M. R. (2005a), «Les equacions de segon grau al llarg de la història», *Biaix*, **24**, 4-15.

MASSA ESTEVE, M. R. (2005b), «L'ensenyament de la trigonometria. Aristarc de Samos (310-230 aC)». A: GRAPI, P.; MASSA. M. R. (eds.), *Actes de la I Jornada sobre la història de la ciència i l'ensenyament*, Barcelona, SCHCT-IEC, 95-101.

PÉREZ DE MOYA, J. (1562), *Arithmetica practica, y especulativa*, Salamanca, Mathias Gast.

ROMERO, F.; MASSA, M. R. (2003), «El teorema de Ptolemeu», *Biaix*, **21**, 31-36.

ROMERO, F.; MASSA, M. R.; CASALS, M. A. (2006), «La trigonometria en el món àrab. Tractat sobre el quadrilàter complet de NASIR AL-DIN AL-TUSI (1201-1274)». A: BATLLÓ, J. et al. (eds.), *Actes de la VIII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Barcelona, SCHCT-IEC, 569-575.

ROMERO, F. (2012), «The importance of games of chance at the inception of probability theory». A: BRUNEAU, O. et al. (eds.), *Innovative Methods for Science Education: History of Science, ICT and Inquiry Based Science Teaching*, Berlín, Frank & Time GmbH, 337-354.

ROMERO, F.; MASSA, M. R. (2012), «Anàlisi de materials d'història de la matemàtica per a l'aula». A: GRAPI, P.; MASSA, M. R. (eds.), *Actes de la IX Jornada per a la Història de la Ciència i l'Ensenyament*, Barcelona, SCHCT-IEC, 95-105.

WEEKS, C. (trad.) (1997), *History of Mathematics, histories of problems*, Inter-Irem commission, París, Ellipses.