

## Capítulo 8

# Transversalidad con círculos

Este capítulo se centra en el estudio de la transversalidad con círculos. En la sección 8.2 se estudia la transversalidad de conjuntos de segmentos con círculos. En el apartado 8.2.2 se proporcionan algoritmos para el cálculo del círculo transversal separador de radio mínimo para conjuntos de segmentos. En los apartados 8.2.3 y 8.2.4 se hace un estudio del lugar geométrico de los centros de los círculos transversales separadores de un conjunto de segmentos dado y del orden del conjunto de dichos círculos. En la sección 8.3 se estudia la transversalidad de círculos con círculos.

### 8.1. Introducción

Dada una colección finita de objetos geométricos en el plano se plantea el problema de encontrar el menor círculo que los interseca a todos. Una recta transversal a un determinado conjunto de elementos divide al plano en dos regiones en las que cada elemento sitúa una parte de él (podemos permitir el caso en que una de las partes esté sobre la misma recta). Hemos querido mantener esta propiedad al considerar como elemento transversal al círculo, al igual que hicimos con las cuñas en el capítulo 7. Estudiaremos círculos transversales a colecciones de segmentos y también a círculos.

### 8.2. Transversalidad de segmentos con círculos

Dada una colección de segmentos, vamos a estudiar los círculos transversales que atraviesen a cada segmento separando sus extremos.

**Definición 8.2.1.** *Dado un conjunto de segmentos en el plano, definimos círculo transversal separador y notamos por círculo  $TS$ , como aquel que corta a todos los segmentos sin dejar a ambos extremos de un mismo segmento fuera de él. Se admite,*

pues, el caso en que ambos extremos pertenezcan a la circunferencia que define al círculo.

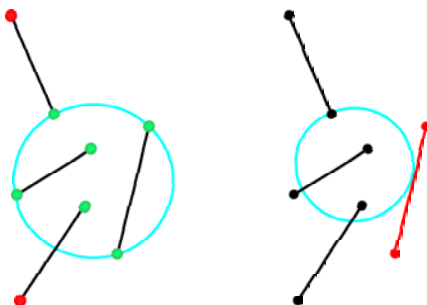


Figura 8.1: Círculos transversales del conjunto de segmentos. El de la izquierda es también separador (círculo  $TS$ ).

El problema que aquí nos planteamos es el siguiente: dado un conjunto de  $n$  segmentos se trata de saber si existe un círculo que los atraviesa separando los extremos y, en caso afirmativo, encontrar el de radio mínimo. Sin imponer la restricción de la separación efectiva de los extremos, Bhattacharya et al. en [BJMR](91) proporcionaron un algoritmo óptimo (lineal) para resolver este problema, cuya técnica se basa en una combinación de *prune and search* y la de reemplazar segmentos por rectas o puntos.

A continuación estudiamos la existencia de círculo  $TS$ , para un conjunto de segmentos dado.

### 8.2.1. Existencia de círculo $TS$ para conjuntos de segmentos

Dado un conjunto de  $n$  segmentos no siempre existe círculo  $TS$ . Para determinar su existencia utilizamos el modelo del paraboloides. Esto es, trasladamos el problema planteado en el plano a otro equivalente sobre el paraboloides de ecuación  $z = x^2 + y^2$ , haciendo levantamiento ortogonal (figura 8.2).

Es conocido que puntos concíclicos en el plano se proyectan en el paraboloides como puntos coplanarios. Los puntos interiores al círculo se corresponden a puntos por debajo de esta sección plana y puntos exteriores por encima.

Por otra parte, los segmentos se proyectan como arcos de parábolas. Así pues, los segmentos admitirán puntos concíclicos si sus correspondientes proyectados, sobre los arcos de parábolas, son coplanarios.

Cualquier plano que atravesase a los arcos de parábolas también atraviesa al conjunto de segmentos que se obtiene de rectificarlos. Vemos, pues, que la existencia de

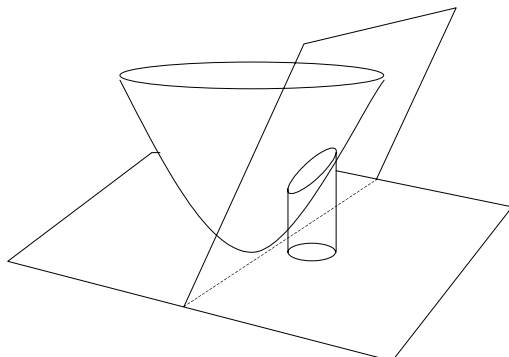


Figura 8.2: El levantamiento de un conjunto de puntos concíclicos en el plano sobre el paraboloides  $z = x^2 + y^2$  da un conjunto de puntos coplanarios.

plano transversal a dichos segmentos es equivalente a la existencia de solución del problema.

En [GPW](93), Goodman et al. obtienen todos los posibles planos transversales a un conjunto de segmentos dado, en tiempo  $O(n^2)$ .

### 8.2.2. Círculo $TS$ de radio mínimo para segmentos. Algoritmos

Dado un conjunto de segmentos, queremos encontrar el círculo  $TS$  de radio mínimo. Para tratar este problema utilizaremos los Diagramas de Voronoi de orden  $n$  [PS](85).

**Definición 8.2.2.** Sea  $S$  una nube de puntos y  $T \subset S, |T| = n$ . Sea  $H(p_i, p_j)$  el semiplano conteniendo  $p_i$  definido por la mediatriz del segmento  $p_i p_j$ . Sea  $V(T)$  el conjunto de puntos que están más cerca de todos los de  $T$  que de ningún punto de  $S \setminus T$ , esto es,

$$\begin{aligned} V(T) &= \{p : \forall v \in T \forall w \in S - T, d(p, v) < d(p, w)\} \\ &= \cap H(p_i, p_j), p_i \in T, p_j \in S - T \end{aligned}$$

El Diagrama de Voronoi de orden  $n$  se define:

$$DV_n(S) = \cup V(T), \quad T \subset S, |T| = n$$

Evidentemente la región asociada a un subconjunto de puntos de la nube puede ser vacía.

Con la anterior notación,  $DV_1(S)$  es el Diagrama de Voronoi clásico, esto es, una partición del plano en la que cada región es el lugar geométrico de los puntos más próximos a un punto de  $S$  que de cualquier otro punto de  $S$ . Esta definición es equivalente a la definición 5.1.1 pues la partición del plano define el diagrama.

**Definición 8.2.3.** *El Diagrama de Voronoi Lejano es  $DV_{n-1}(S)$  ya que divide al plano en regiones que tienen al mismo punto de  $S$  como el punto más alejado (los  $n-1$  puntos más cercanos de  $S$  coinciden).*

Partimos de un conjunto de segmentos  $\{p_1p'_1, \dots, p_np'_n\}$ . Consideramos ahora el conjunto  $S = \{p_1, p'_1, \dots, p_n, p'_n\}$  de los  $2n$  puntos extremos de los segmentos y hacemos el Diagrama de Voronoi de orden  $n$ , definido como el lugar geométrico de los puntos del plano que están más cerca a un subconjunto de orden  $n$  del conjunto de los  $2n$  extremos, que de cualquier otro subconjunto del mismo tamaño.

El centro de la circunferencia solución, si existe, pertenece a una de las regiones del Diagrama de Voronoi de orden  $n$  pues, el centro es un punto que está más cerca de  $n$  extremos que de los otros  $n$ . De todas las regiones de  $DV_n(S)$  sólo nos interesan aquellas que los  $n$  puntos que las definen provienen de diferentes segmentos y a las que notamos por  $R_n$ .

En caso de haber más de un círculo  $TS$ , no tienen por qué pertenecer a una misma región, como se observa en la figura 8.3. En el ejemplo de la figura 8.3 dos

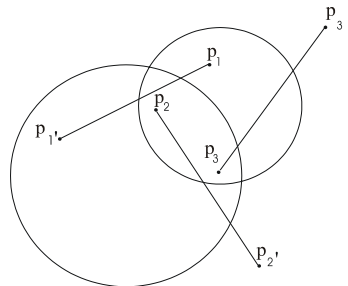


Figura 8.3: Los centros de los círculos  $TS$  están en diferentes regiones del  $DV_3$ .

circunferencias cortan a tres segmentos, cuyos respectivos centros pertenecen a regiones diferentes del Diagrama de Voronoi de orden tres (las definidas por los puntos  $p_1, p_2, p_3$  y  $p'_1, p'_2, p'_3$ , respectivamente).

En el algoritmo 8.2.1 encontramos los centros de los círculos  $TS$  de radio mínimo aplicando el teorema 8.2.1 (véase [HST](96) o [Sa](97) pp. 127–131), en las regiones del  $DV_n$  que hemos llamado indistintamente por  $R_n$ .

**Teorema 8.2.1.** [HST] *El menor círculo contenedor de un conjunto de  $n$  puntos del plano cuyo centro se encuentra en un  $m$ -gono convexo puede hallarse en tiempo  $\Theta(n+m)$ .*

**Algoritmo 8.2.1.** CÁLCULO DEL MÍNIMO CÍRCULO  $TS$  PARA UN CONJUNTO DE SEGMENTOS.

Dado un conjunto de  $n$  segmentos en el plano, sea  $S$  el conjunto de los  $2n$  puntos formado por sus extremos.

1. Construir el Diagrama de Voronoi de orden  $n$  de  $S$ ,  $DV_n(S)$ .
2. Obtener un árbol generador del grafo dual del  $DV_n$ .
3. Mediante un recorrido del árbol de 2.,  
para cada  $R_n$  del  $DV_n(S)$ , aplicar el teorema 8.2.1 para obtener el círculo  $TS$  de menor radio, con centro en dicha región.
4. De todos los círculos obtenidos en el paso anterior, determinar el de radio mínimo.

**Proposición 8.2.1.** El algoritmo 8.2.1 determina la existencia y calcula los círculos  $TS$  de radio mínimo, para un conjunto de segmentos dado. El coste del algoritmo 8.2.1 es  $O(n^3)$ .

*Demostración.* Los centros de los círculos  $TS$ , si los hay, están en las regiones que hemos notado por  $R_n$  del  $DV_n(S)$ . Aplicando el teorema 8.2.1 a dichas regiones, obtenemos círculos  $TS$  que son de radio mínimo para la correspondiente partición de los extremos del conjunto de segmentos. La solución es de los anteriores círculos, el de radio mínimo.

El coste del algoritmo 8.2.1 es  $O(n^3)$ :

Paso 1. La construcción de  $DV_n$  es  $O(n^2\sqrt{2n}\log 2n)$ .

Paso 2. La obtención del árbol generador del grafo dual del  $DV_n$  es  $O(n^2)$ .

Paso 3. La aplicación del teorema en cualquiera de las regiones  $R_n$  tiene un coste  $O(n + m)$ , donde  $m$  es el número de vértices de la región. Como el  $DV_n(S)$  tiene  $O(n^2)$  celdas, a lo sumo el coste es  $O(n^3)$ .  $\square$

El radio de cualquier círculo  $TS$  es la distancia de su centro al extremo más alejado de los que quedan en su interior, esto es, al  $n$ -ésimo punto del conjunto  $S$ , según el orden de proximidad al centro.

Notamos por  $R_{n-1}^i$  la región del  $DV_{n-1}(S)$  definida por  $n - 1$  puntos, cada uno de ellos extremo de un segmento diferente del conjunto:

$$\{p_1p_1', \dots, p_{i-1}p_{(i-1)'}, p_{i+1}p_{(i+1)'}, \dots, p_n p_n'\}.$$

En el siguiente algoritmo 8.2.2 se mejora el coste del algoritmo 8.2.1, considerando los posibles centros situados en regiones del Diagrama de Voronoi de orden  $n - 1$ , de la forma  $R_{n-1}^i$  y analizando cómo y cuándo se alcanza el  $n$ -ésimo para que el círculo sea  $TS$ , si esto es posible.

**Algoritmo 8.2.2.** CÁLCULO DEL MÍNIMO CÍRCULO  $TS$  PARA UN CONJUNTO DE SEGMENTOS.

Dado un conjunto de  $n$  segmentos en el plano, sea  $S$  el conjunto de los  $2n$  puntos formado por sus extremos.

1. Construir el Diagrama de Voronoi de orden  $n - 1$  de  $S$ ,  $DV_{n-1}(S)$ .
2. Obtener un árbol generador del grafo dual del  $DV_{n-1}$ .
3. Mediante un recorrido del árbol de 2.,  
para cada  $R_{n-1}^i$ , detectar si alguna de las mediatrices que intervienen en su frontera lo es de un segmento con extremos en  $S$  donde uno de ellos es  $p_i$  o  $p_i'$ .
  - si lo es, calcular  $d(p_i, R_{n-1}^i)$ , distancia de  $p_i$  a la región  $R_{n-1}^i$ .
  - si no lo es, pasar a la siguiente región. Si todas han sido examinadas, seguir.
4. Sea  $D$  el conjunto de las distancias calculadas en 3.
  - si  $D = \emptyset$  entonces no existe solución.
  - si  $D \neq \emptyset$  entonces existe solución:  
El círculo  $TS$  de radio mínimo es el de centro  $c$  y radio  $r$ .  
 $c$  es el punto de la frontera de  $R_{n-1}^i$ , tal que  $d(p_i, R_{n-1}^i) = d(p_i, c)$ ,  
y  $r$  el mínimo de los valores de  $D$ .

**Teorema 8.2.2.** Para un conjunto de segmentos dado, el algoritmo 8.2.2 determina la existencia y construcción del mínimo círculo  $TS$ . El coste del algoritmo es  $O(n^2\sqrt{2n}\log 2n)$ .

*Demostración.* Cualquier circunferencia con centro en  $R_{n-1}^i$  cuyo radio vaya aumentando paulatinamente, alcanzará antes a los  $n - 1$  puntos que definen  $R_{n-1}^i$  que a cualquier otro extremo. Si existe círculo  $TS$  del conjunto inicial de segmentos, debe existir circunferencia con centro en  $R_{n-1}^i$  cuyo  $n$ -ésimo vecino del centro sea un extremo del segmento que queda por cortar. Además, como se quiere encontrar el círculo  $TS$  de radio mínimo, podemos definir el radio de los círculos  $TS$  como la distancia del centro a su  $n$ -ésimo vecino. Si este punto (el  $n$ -ésimo vecino del centro) es alcanzado con una circunferencia con centro en  $R_{n-1}^i$ , sólo puede ser  $p_i$  o  $p_i'$ . Además como este punto debe estar fuera de  $R_{n-1}^i$ , la circunferencia con centro en  $R_{n-1}^i$  que lo alcance con radio mínimo debe tener su centro en la frontera.

Obsérvese que la intersección entre  $DV_n(S)$  y  $DV_{n-1}(S)$  nos da las regiones del  $n$ -ésimo vecino. Al pasar del  $DV_{n-1}$  al  $DV_n$  las regiones  $R_{n-1}^i$  se dividen en subregiones

que dan la información de cuál va a ser el  $n$ -ésimo vecino, esto es,  $R_{n-1}^i \cap DV_1(S-T)$  donde  $T$  es el conjunto de los  $n-1$  puntos que definen  $R_{n-1}^i$  (figura 8.4).

De esta observación, se puede afirmar que la región cuyo  $n$ -ésimo vecino es por ejemplo,  $p_k$  está delimitada sólo por mediatrices de  $p_k$  con otro punto. Y, por tanto, basta mirar si  $R_{n-1}^i$  tiene en su frontera alguna de estas mediatrices de  $p_i$  o  $p'_i$  con algún otro punto. Si existe tal mediatriz, el punto de  $R_{n-1}^i$  que nos da la distancia de  $R_{n-1}^i$  a  $p_i$  (o  $p'_i$ ) es el centro y dicha distancia el radio del círculo  $TS$ .

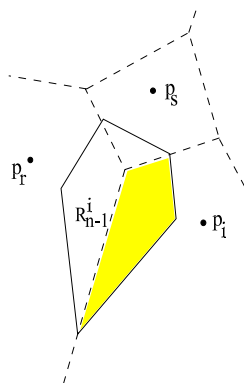


Figura 8.4: Ejemplo en el que  $R_{n-1}^i \cap DV_1(S-T)$  tiene una subregión, la sombreada, donde el  $n$ -ésimo vecino, de entre los puntos de  $S$ , es  $p_i$ .

Si se obtiene más de un círculo, comparando los radios tendremos el de radio mínimo.

**Observación.** Cualquier círculo  $TS$  para que sea de radio mínimo se encuentra en uno de los siguientes casos: el centro es equidistante a tres puntos de  $S$  (es un vértice de  $DV_1(S)$ ), o bien lo es de dos diametralmente opuestos (está sobre una arista de  $DV_1(S)$ ). Hemos visto que el centro está en la frontera de  $R_{n-1}^i$  y si fuera un vértice de  $DV_1(S)$ , también lo sería de  $DV_n(S)$  pues todo vértice de  $DV_{j-1}(S)$  lo es de  $DV_j(S)$ .

El coste del algoritmo 8.2.2 es  $O(n^2\sqrt{2n}\log 2n)$ :

Paso 1. El cálculo del Diagrama de Voronoi de orden  $n-1$  es  $O(n^2\sqrt{2n}\log 2n)$

Paso 2. La obtención del árbol generador del grafo dual del  $DV_{n-1}$  es  $O(n^2)$ .

Paso 3. A lo sumo se examinan las aristas de  $O(n^2)$  regiones del  $DV_{n-1}$  y, a lo sumo también, se hace el cálculo, constante, de una distancia en cada una de dichas regiones  $\square$

### 8.2.3. Lugar geométrico de los centros de círculos $TS$ de segmentos

A continuación se realiza un estudio del lugar geométrico de los centros de los círculos transversales a una colección de segmentos, separando los extremos.

Por definición, cualquier punto interior a una región,  $R_n$ , del  $DV_n(S)$  definida por  $n$  puntos, uno de cada segmento, es centro de un círculo  $TS$ . Luego el lugar geométrico de los centros de círculos  $TS$  es la unión de los interiores de las regiones  $R_n$  de  $DV_n(S)$ . La frontera de las celdas  $R_n$  son analizadas en la proposición 8.2.3. Es sabido que las regiones del Diagrama de Voronoi  $DV_n(S)$  son convexas (en la siguiente proposición se da también una prueba de la convexidad), por lo que el lugar geométrico de los centros de los círculos  $TS$  de  $n$  segmentos es unión de convexas.

**Proposición 8.2.2.** *Dada una colección de  $n$  segmentos, sea  $S$  el conjunto de los  $2n$  extremos. El lugar geométrico de los centros de los círculos transversales a los  $n$  segmentos separando sus extremos es unión de convexas, cada uno de ellos situado en una celda diferente de  $DV_n(S)$ .*

*Demostración.* El centro de una circunferencia transversal pertenece a una región del  $DV_n(S)$ ,  $R_n^i$  para alguna  $i$ , concretamente a aquella definida por los  $n$  extremos que le son más próximos.

Veamos que dentro de una misma celda del  $DV(S)$  el lugar geométrico de los centros de círculos transversales separando extremos es convexo (figura 8.5).

Sean  $c_1$  y  $c_2$  dos centros de círculos  $TS$   $C_1$  y  $C_2$ , pertenecientes a una misma celda del  $DV_n(S)$ . Por ser de la misma región, el conjunto de los  $n$  extremos más próximos a ambos centros es el mismo. Esto es,  $C_1$  y  $C_2$  contienen al mismo conjunto de los  $n$  más próximos, por lo que éstos se sitúan en  $C_1 \cap C_2$ .

Abordamos ahora el problema considerando los dos casos posibles, esto es, que los círculos no se corten (está uno contenido en el otro) o que sí lo hagan.

En el caso en que no se cortan, cualquier punto del segmento que une los centros también es otro centro de círculo  $TS$ , pues basta pasar del círculo pequeño al grande llevando un centro al otro en línea recta a la vez que va creciendo el círculo pequeño sin salir nunca del grande. Todos los círculos así obtenidos contienen a  $C_1 \cap C_2$  y, por tanto, contienen al mismo conjunto de los  $n$  más próximos, y están en  $C_1 \cup C_2$  por lo que no contienen a ningún otro extremo. Así pues, son círculos  $TS$ .

En el caso de corte, sea  $a$  uno de los dos puntos de corte de las fronteras de los círculos. Para cada punto  $x$  del segmento que une los centros  $c_1$  y  $c_2$ , tómesese una circunferencia de radio igual a  $d(x, a)$ , (distancia de  $x$  a  $a$ ). La circunferencia que acabamos de definir contiene a  $C_1 \cap C_2$ , y está contenida en  $C_1 \cup C_2$ , así pues, es también centro de círculo  $TS$  (figura 8.6).

□

**Proposición 8.2.3.** *Dada una colección de  $n$  segmentos, el lugar geométrico de los centros de los círculos transversales a los  $n$  segmentos puede no ser conexo.*



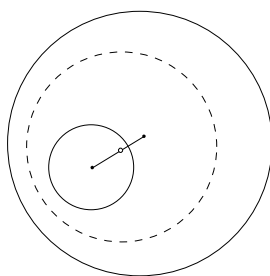


Figura 8.5: Para cualquier punto del segmento que une los centros de un círculo y otro contenido en él también puede tomarse como centro de otro círculo, aquí representado con trazo discontinuo, que contenga a  $C_1 \cap C_2$  y esté contenido en  $C_1 \cup C_2$ .

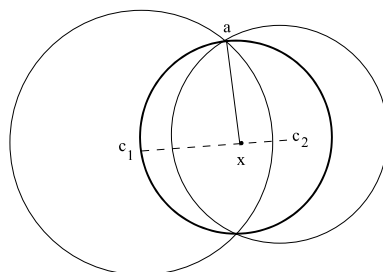


Figura 8.6: Los puntos del segmento que une  $c_1$  y  $c_2$  también son centros de círculos  $TS$ .

*Demostración.* Considérese un conjunto de segmentos en el que todos tienen la misma mediatriz que, además separa dos regiones del  $DV_n$  definidas cada una de ellas por un extremo de cada segmento (figura 8.7).

Como caso límite de círculo transversal separador de un segmento se ha considerado aquel en que ambos extremos están sobre su frontera; además, éste es el único caso posible si se quiere que el centro se halle en la mediatriz.

Por tanto, un círculo  $TS$  para el anterior conjunto de segmentos, con centro en la mediatriz, sólo puede obtenerse en el caso en que los extremos de los segmentos sean concíclicos.

□

#### 8.2.4. Estudio del orden del conjunto de círculos $TS$ de segmentos

Cada círculo  $TS$  proporciona una partición de  $S$  en dos conjuntos: el formado por los  $n$  extremos más próximos al centro, uno de cada segmento y, el de los restantes extremos.

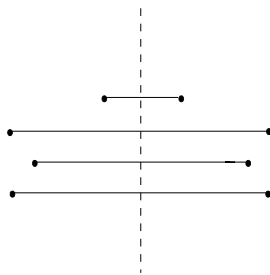


Figura 8.7: En la mediatriz de los segmentos de la figura no puede haber ningún centro de círculo transversal a ellos que separe extremos.

**Definición 8.2.4.** Diremos que dos círculos  $TS$  son equivalentes para  $S$  si, y sólo si, proporcionan la misma partición de  $S$  y el conjunto de extremos más próximo al centro es el mismo.

**Teorema 8.2.3.** Dados  $n$  segmentos en el plano, el número de círculos  $TS$  que representan particiones diferentes de  $S$  (número de clases de equivalencia) es, como mucho,  $O(n^2)$ . Además, dicha cota es ajustada.

*Demostración.* Las mediatrices de los  $n$  segmentos dan una partición del plano en, como mucho,  $O(n^2)$  regiones. A cada una de ellas, se le pueden asociar  $n$  puntos: de los dos extremos de cada segmento se elige el más próximo a dicha región.

Si se estudia la intersección de una de estas regiones con el  $DV_n$  puede ser que se corten en más de una celda pero sólo una de ellas, la definida por los mismos  $n$  extremos asociados a la región, si existe, nos da el lugar geométrico de centros de círculos  $TS$ . Además dichos círculos pertenecerían a una misma clase de equivalencia.

Por lo tanto, el número de clases de equivalencia de círculos  $TS$  no puede ser superior a  $O(n^2)$ .

El siguiente ejemplo demuestra que la cota es ajustada.

Considérense dos circunferencias concéntricas de radio diferente y todos los segmentos cortándose en el centro de ambas y con los extremos sobre ellas, tal como se describe a continuación.

Sea  $p_i$  un extremo de uno de los segmentos, situado en la circunferencia más pequeña. Entonces el otro extremo  $p'_i$  está sobre la recta que pasa por  $p_i$  y el centro, en la intersección con la circunferencia de mayor radio (figura 8.8). De este modo, los puntos de  $S$   $p_1, \dots, p_n$  se reparten equiespaciados de forma ordenada (por ejemplo, antihorario) sobre la circunferencia menor; análogamente las correspondientes parejas  $p'_1, \dots, p'_n$ , sobre la otra. Podemos suponer que el centro está en el origen de coordenadas y que al repartir los extremos de los segmentos nos queda una figura simétrica respecto a la vertical.

Si se consigue una circunferencia que pase por los puntos  $p_i, p_j$  y  $p'_{i+1}, p'_{j-1}$  ésta determina un círculo  $TS$ . Dicha circunferencia existe y, de hecho, está unívocamente

determinada por las tres condiciones siguientes: pasar por los puntos  $p_i, p'_{j-1}$  y ser simétrica respecto a la mediatriz  $p_i, p_j$  (figura 8.8).

Por tanto, el número de círculos  $TS$  combinatoriamente diferentes es  $O(n^2)$  ya que para cada pareja diferente  $p_i, p_j$ , el anterior círculo es el representante de una clase de equivalencia.

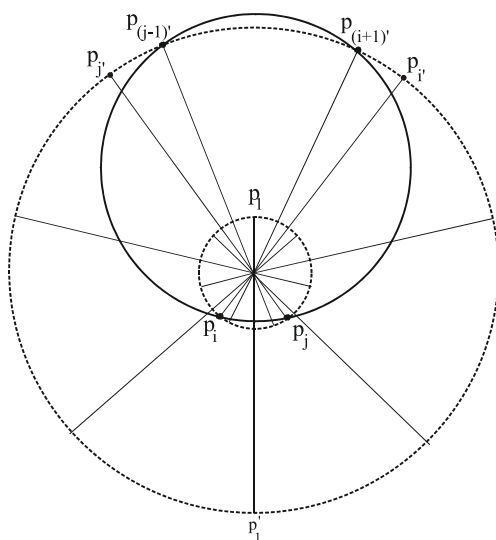


Figura 8.8: Para cada pareja  $p_i, p_j$  se tiene un círculo  $TS$ .

□

**Teorema 8.2.4.** *Dados  $n$  segmentos paralelos en el plano, el número de clases de equivalencia de círculos  $TS$  es, a lo sumo,  $n + 1$ . Además, dicha cota es ajustada.*

*Demostración.* Considérese los  $n$  segmentos y sea  $S$  el conjunto de extremos. En este caso, al ser paralelos, sus mediatrices dividen al plano en  $n + 1$  regiones. A cada una de ellas le asociamos  $n$  extremos: de cada segmento, el que le es más próximo.

Ahora se razona igual que en la proposición anterior. Como sólo hay  $n + 1$  regiones delimitadas por las mediatrices, este es el número máximo de clases de equivalencia de círculos  $TS$ .

El siguiente ejemplo demuestra que la cota es ajustada.

Considérese una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio fijo, y sobre ella una cuerda vertical. Sea  $p_1 p'_1$  el segmento definido por dicha cuerda. Obsérvese que si desde el origen desplazamos el centro de la circunferencia sobre el eje de ordenadas, se llega a un punto (después de recorrer la longitud del segmento) en el cual el círculo deja de ser separador de los extremos  $p_1 p'_1$ ; análogamente si se desplaza en la otra dirección. Se definen así dos intervalos  $I_{p_1}, I_{p'_1}$  cuyos puntos son centros de círculos  $TS$  del segmento  $p_1 p'_1$ , con radio el de la circunferencia inicial,

en los que el subíndice indica el extremo que en el correspondiente círculo nunca es exterior (figura 8.9).

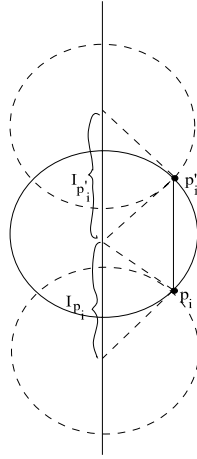


Figura 8.9: los puntos de los intervalos  $I_{p_i}, I_{p'_i}$  son centros de círculos  $TS$  del segmento  $p_i p'_i$ .

Cada uno de los segmentos  $p_i p'_i$  se define como una cuerda vertical de una circunferencia, con el mismo radio que la inicial, de manera que: 1) se forme un conjunto de segmentos paralelos, 2) el centro de las circunferencias esté sobre el eje de ordenadas y 3) la intersección de las  $n$  circunferencias sea no vacía, de modo que las ordenadas de los extremos inferiores de los segmentos seguidos de los superiores formen una sucesión estrictamente creciente.

la intersección de los intervalos  $I_{p_1}, I_{p'_1}, \dots, I_{p_n}, I_{p'_n}$  nos da una partición de la recta (eje de ordenadas) donde podemos representar las  $n + 1$  clases de equivalencia de círculos  $TS$ . Los centros de una misma clase de equivalencia, son los puntos del intervalo resultante como intersección de  $n$  de los  $2n$  intervalos antes definidos, uno de cada segmento.

Por ejemplo, los centros de círculos  $TS$  conteniendo a  $p_1, \dots, p_n$  en su interior son los puntos intersección de los  $n$  intervalos  $I_{p_1}, \dots, I_{p_n}$  que notamos  $I_{p_1 \dots p_n}$ .

En la figura 8.10 se tienen tres segmentos y, por tanto, cuatro clases de equivalencia para los centros de círculos  $TS$ . Cada uno de los intervalos  $I_{p_1 p_2 p_3}, I_{p'_1 p_2 p_3}, I_{p_1 p'_2 p_3}, I_{p_1 p_2 p'_3}$  contiene a los centros de una clase de equivalencia.

□

### 8.3. Transversalidad de círculos con círculos

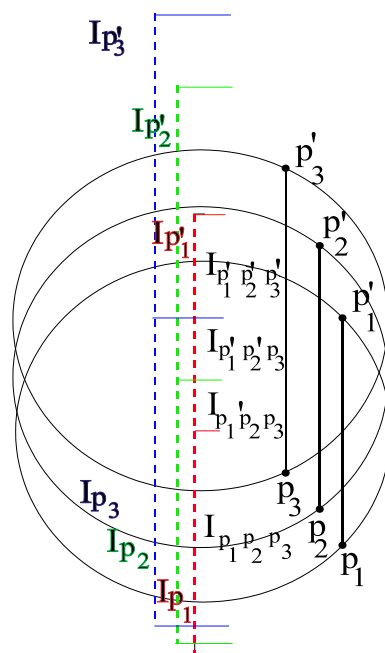


Figura 8.10: Con tres segmentos se tienen cuatro clases de equivalencia de círculos  $TS$ .

Un problema clásico es el llamado *1-center problem* donde la colección de objetos cortados es un conjunto de puntos. Este problema fue resuelto en tiempo lineal por Meggido [Meg1](83) y posteriormente por Dyer [Dy](86). Para una colección de polígonos convexos, Bhattacharya, Jadhav y Mukhopadhyay describen un algoritmo óptimo para encontrar el mínimo círculo que los interseca a todos [BJM](92).

Ha sido estudiado el problema de encontrar el mínimo círculo conteniendo a una colección de círculos en [Meg3](89), donde se plantea como una generalización del *1-center problem* con pesos aditivos. El problema estudiado en [Meg3](89) es esencialmente distinto al de buscar el menor círculo  $TS$  ya que no imponen la condición de separabilidad (véase la figura 8.11), que definimos a continuación.

**Definición 8.3.1.** *Dada una colección de círculos, se define círculo transversal separador y notamos por círculo  $TS$  de círculos, como aquel que los corta a todos sin contener a ninguno en su interior.*

Dada una colección finita de círculos en el plano nos planteamos el problema de encontrar el menor círculo transversal y separador, círculo  $TS$ . Considerando el conjunto de los centros de los círculos dados puede encontrarse el mínimo círculo que los contiene. Encogiendo su radio nos lleva al mínimo transversal, pero no necesariamente separador.

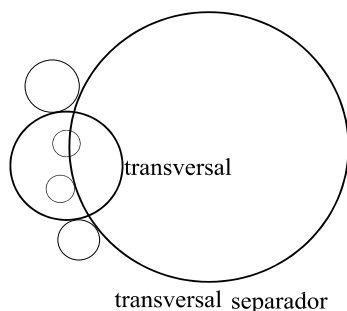


Figura 8.11: En la figura se muestra un círculo  $TS$  y otro transversal, no separador, para un mismo conjunto de círculos.

Obsérvese también que el mínimo círculo transversal no tiene por qué ser único como se muestra en la figura 8.12.

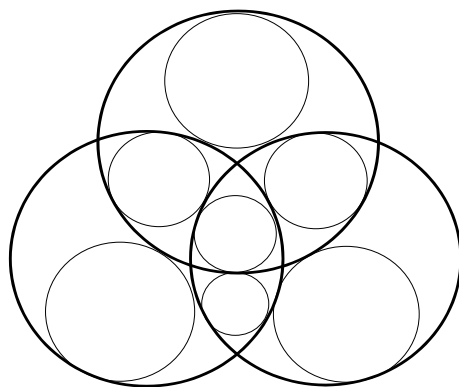


Figura 8.12: En la figura se muestran tres círculos transversales de igual radio, mínimo, para un mismo conjunto de círculos dado.

**Definición 8.3.2.** Diremos que dos círculos  $B_i, B_j$  son tangentes exteriormente si y sólo si  $B_i \cap B_j$  es el punto de tangencia.

**Proposición 8.3.1.** Sea  $S = \{B_i, i = 1, \dots, n\}$  un conjunto de  $n$  círculos dado, para el cual existe círculo transversal a todos ellos. El círculo transversal de radio mínimo, o bien es tangente a tres de los círculos iniciales, o bien lo es a dos diametralmente opuestos y si  $\bigcap_{i=1, \dots, n} B_i = \emptyset$ , las anteriores tangencias son todas exteriores.

*Demostración.* En caso contrario, el radio del círculo transversal podría reducirse, manteniendo la transversalidad, por lo que no sería de radio mínimo.

Trivialmente, si  $\bigcap_{i=1, \dots, n} B_i \neq \emptyset$ , cualquier punto de esta intersección, círculo de radio cero, es un transversal de radio mínimo.  $\square$

### 8.3.1. Existencia y construcción de círculos *TS* de círculos

El algoritmo 8.3.1 resuelve el problema de encontrar el mínimo círculo *TS* a un conjunto de círculos dado del mismo radio. Excluimos el caso trivial en que  $\bigcap_{i=1, \dots, n} B_i \neq \emptyset$ .

En este algoritmo utilizamos el Diagrama de Voronoi, DV, y el Diagrama de Voronoi Lejano, FDV asociados al conjunto de puntos formado por los centros de los círculos dados.

**Algoritmo 8.3.1.** EXISTENCIA Y CÁLCULO DEL MÍNIMO CÍRCULO *TS* A UN CONJUNTO DE CÍRCULOS DADO,  $S = \{B_1, \dots, B_n\}$ , TODOS ELLOS DE RADIO  $R = 1$

*Suponemos que  $\bigcap_{i=1, \dots, n} B_i = \emptyset$ . Sea  $C_R$  el conjunto de los centros de los círculos de  $S$ .*

1. *Construir el FDV( $C_R$ ).*
2. *Construir el DV( $C_R$ ).*
3. *Obtener el conjunto PM formado por los puntos medios de cada par de puntos diametralmente opuestos de CH( $C_R$ ).*
4. *Para cada vértice  $q$  del FDV( $C_R$ ) y cada punto  $q \in PM$ :*
  - 4.1 *calcular  $R_q$  como la distancia de  $q$  al punto más lejano de los de  $C_R$ .*
  - 4.2 *localizar  $q$  en DV( $C_R$ ). Sea  $p_q$  el punto de  $C_R$  más próximo a  $q$ .  
si  $d(q, p_q) \geq R_q - 2$  entonces el disco de centro  $q$  y radio  $R_q - 1$  es candidato a ser solución.*
5. *Sea Cand el conjunto formado por los candidatos del paso 4.*
  - *si Cand =  $\emptyset$ , no existe solución.*
  - *si Cand  $\neq \emptyset$  sea  $q \in Cand$  tal que  $R_q = \min_{q \in Cand} \{R_q\}$ ,  
la solución es el círculo con centro  $q$  y radio  $R_q - 1$ .*

**Proposición 8.3.2.** *El algoritmo 8.3.1 determina la existencia y el cálculo, si es el caso, del mínimo círculo *TS* a un conjunto de círculos dado, todos ellos de igual radio. El coste es  $O(n \log n)$ .*

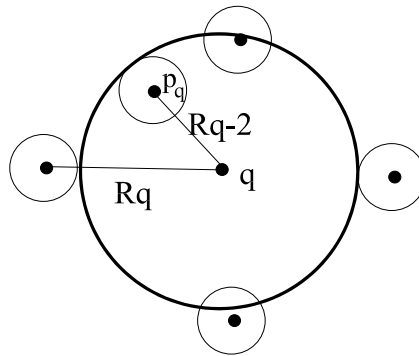


Figura 8.13: Si  $d(q, p_q) \geq R_q - 2$  entonces  $q$  es centro de un círculo  $TS$ .

*Demostración.* Por la proposición 8.3.1, el círculo solución debe tener tres tangencias exteriores entre los círculos dados o bien dos, también exteriores, diametralmente opuestos. En el primer caso, el centro es vértice del  $FDV(C_R)$ . En el segundo, coincide con el punto medio del par de centros de  $C_R$  más alejados entre sí, luego pertenecientes a la  $CH(C_R)$ .

Para un punto  $q$ , se definen  $R_q$  como la distancia de  $q$  al punto más lejano de los de  $C_R$  y  $p_q$  como el punto de  $C_R$  más próximo a  $q$ .

La condición  $d(q, p_q) \geq R_q - 2$  es necesaria para la existencia de solución pues, en caso contrario, el disco de centro  $p_q$  estaría completamente contenido en el de centro  $q$  y radio  $R_q - 1$  que no podría ser candidato a círculo  $TS$ .

También es una condición suficiente pues si existe  $q$  (vértice del  $FDV(C_R)$  o punto medio de un par de centros diametralmente opuestos) verificando la condición, el círculo de centro  $q$  y radio  $R_q - 1$  alcanza a los círculos más alejados sin contener a ninguno (es transversal separador). Luego existe solución.

El coste del algoritmo 8.3.1 es  $O(n \log n)$ :

Paso 1. La construcción del  $FDV(C_R)$  es  $O(n \log n)$ .

Paso 2. La construcción del  $DV(C_R)$  es  $O(n \log n)$ .

Paso 3. Encontrar los pares de puntos diametralmente opuestos en la  $CH(C_R)$  es de coste  $O(n)$  pues sus vértices son los que tienen una región asociada en el  $FDV(C_R)$  y, por tanto, se tiene una lista ordenada de los mismos.

Paso 4. Tanto el número de vértices del  $FDV(C_R)$  como el cardinal del conjunto  $PM$  es lineal y se calcula en tiempo constante el radio asociado a cada uno de ellos. La localización en  $DV(C_R)$  de  $O(n)$  puntos es  $O(n \log n)$ . En tiempo constante, para cada punto, se comprueba si éste es o no candidato a la solución. El coste de este paso es  $O(n \log n)$ .



Paso 5. A lo sumo puede haber un número lineal de candidatos; para comparar sus radios el coste es lineal en el número de éstos (como mucho,  $O(n)$ ).

□

