

Capítulo 8

Estimación de la Relación Señal a Ruido (SNR) en un sistema LDA

8.1. Introducción

El parámetro más importante para cuantificar la calidad de un sistema LDA, es la relación señal a ruido de la señal a la salida del detector. A partir de un determinado nivel umbral, el subsistema encargado de estimar la velocidad del blanco podrá obtener un resultado válido. Los factores de que va a depender la SNR de la señal a la salida del fotodetector son: el tamaño de la apertura receptora, encargada de recoger la luz dispersada por el elemento dispersor (partícula) y de focalizarla sobre el área del fotodetector; tamaño y tipo de partículas de sembrado utilizadas en el fluido; ángulo entre haces, y los parámetros genéricos del sistema (potencia y frecuencia de los haces incidentes, ancho de banda del módulo foto-receptor y tipo de ruido). En este capítulo presentamos el cálculo teórico de la SNR en función del tamaño de la apertura, para diferentes tamaños de partículas de sembrado, en cada punto de la apertura, y en las dos situaciones más utilizadas: en configuración por retrodispersión (RD) y en configuración en dispersión hacia delante (DHD). También se obtendrá la SNR integrada a la salida del detector. Se utilizan las formulaciones electromagnéticas de dispersión de partículas de la teoría de *Lorenz-Mie*, para el caso de un sistema LDA de una dimensión la técnica diferencial Doppler. Posteriormente presentamos la SNR para el caso del sistema 2D-LDA.

8.2. Esquema LDA

Para calcular la SNR a la salida del fotodetector de un sistema LDA de una dimensión, en el caso de la técnica diferencial Doppler, el modelo geométrico está formado por

dos haces de luz, polarizados linealmente con direcciones arbitrarias \hat{p}_1, \hat{p}_2 y direcciones de propagación \hat{s}_1, \hat{s}_2 , focalizados en un punto por una lente transmisora [AE76]. El ángulo entre los dos haces, en el sistema de coordenadas de la figura 8.1 centrado en el punto focal de la lente transmisora, es decir, en la partícula, es α , y los puntos en la apertura receptora se definen a partir de un sistema en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . La energía dispersada será recibida por una apertura receptora, localizada en una de las dos direcciones preferentemente utilizadas para los sistemas LDA, en $\theta = 0^\circ, \phi = 90^\circ$ denominada configuración en recepción por retrodispersión (RD) y $\theta = 180^\circ, \phi = 90^\circ$, recepción en dispersión hacia delante (DHD).

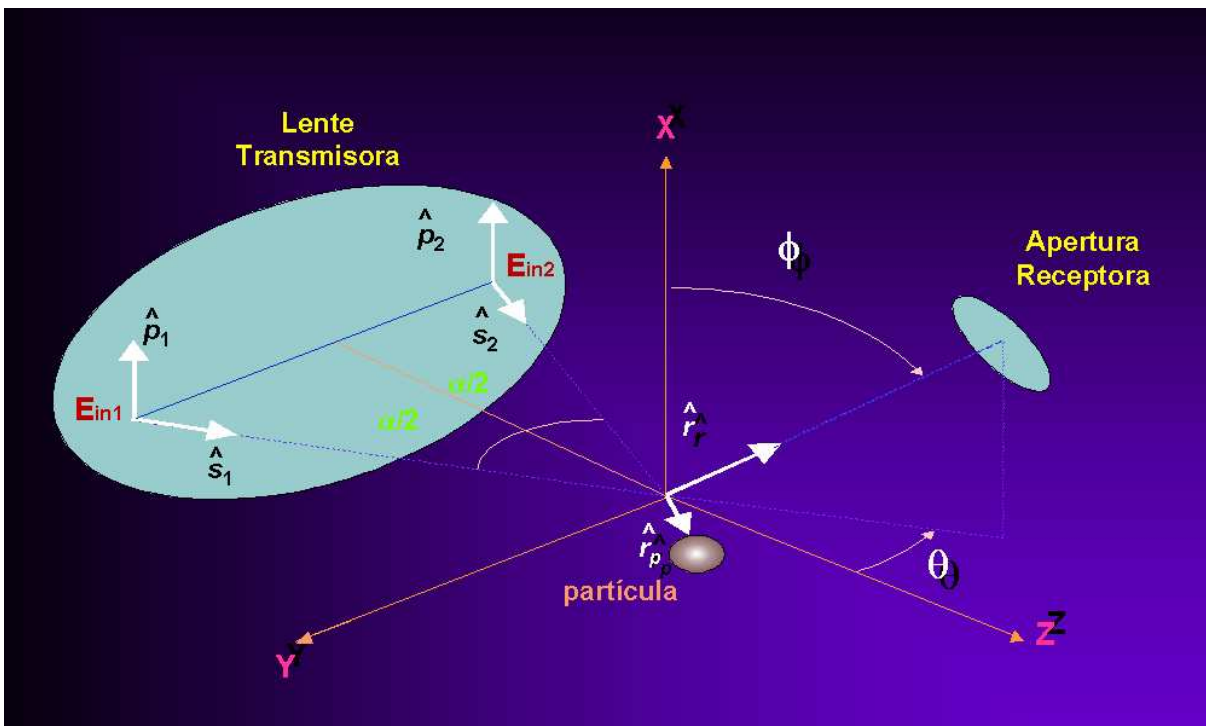


Figura 8.1 Geometría Sistema LDA

El análisis realizado para obtener la SNR del sistema parte de las siguientes hipótesis:

1. En el punto de medida, lugar donde los dos haces interfieren, pasa una única partícula perfectamente esférica de diámetro a_p y de índice de refracción n_p conocido, situación ideal para una perfecta estimación de la velocidad del elemento dispersor con este tipo de técnica.
2. Los dos haces generados por una misma fuente de luz láser, mantienen la coherencia espacial o longitudinal en el punto de medida, lo que es condición indispensable para una mezcla o interferencia óptima.

3. El haz láser tiene una distribución de intensidad de tipo Gaussiana y el diámetro o cintura del haz se refiere al diámetro en los puntos que decae la potencia $1/e^2$.
4. La partícula está colocada en el centro de la interferencia de los dos haces, donde tendremos el caso de máxima intensidad de luz dispersada. Así, la SNR estimada será el valor máximo o de pico, en la mejor situación posible.
5. Todos los componentes ópticos utilizados no tienen ningún tipo de aberraciones y las consideramos ideales.
6. Se tendrá en cuenta únicamente el ruido aleatorio de tipo cuántico (ruido shot), debido a la conversión luz-corriente en el fotodetector.

Además, se aplican las siguientes restricciones en el modelo, para poder realizar algunas aproximaciones de carácter matemático:

- La distancia de la apertura receptora a la zona de interferencia es mucho más grande que la máxima dimensión lineal del volumen de dispersión. Así, en campo lejano, podremos suponer que las ondas dispersadas por la partícula pueden modelarse como ondas esféricas emitidas desde el centro geométrico del volumen de dispersión, considerando, eso sí, la variación de la fase de la onda esférica, debido al movimiento de la partícula para caracterizar su desplazamiento Doppler
- La segunda restricción es respecto a la variación de la intensidad incidente sobre la partícula. Ya hemos visto que la distribución de intensidad de los haces de luz son de tipo Gaussiano. Eso implicaría, de forma rigurosa, que sobre la partícula inciden diferentes niveles de energía en cada punto de su superficie. Pero, en el caso de que el diámetro de la partícula sea mucho más pequeño que el tamaño de la cintura de los haces $a_p \ll d_w$, podremos afirmar que prácticamente la energía incidente en toda la superficie del elemento dispersor es constante. En el caso del sistema LDA, como la velocidad de las partículas ha de seguir a la velocidad del fluido, su tamaño será siempre mucho más pequeño. Así pues, manteniendo dicha suposición, podremos caracterizar todos los fenómenos de dispersión aplicando la teoría de *Lorenz-Mie*, además de ser una onda plana uniforme con polarización lineal la excitación.

8.3. Intensidad dispersada por un sistema LDA de una dimensión

En un sistema LDA de una dimensión, dos haces de luz con un determinado campo eléctrico E_{in1} y E_{in2} o intensidad I_{in1} y I_{in2} , inciden sobre la partícula que atraviesa el punto de medida del fluido con un cierto ángulo α entre ellos. El campo total dispersado por la partícula es la suma de los campos dispersados

$$E_d = E_{d1} + E_{d2} \quad (8.1)$$

y expresando el campo eléctrico en función de la intensidad total dispersada, donde ϵ_o es la permitividad dieléctrica en el vacío, μ_o la permeabilidad magnética en el vacío y n_m el índice de refracción del fluido es

$$I_d = n_m \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} |E_d|^2 \quad (8.2)$$

La intensidad dispersada I_d , en un punto de la apertura receptora definida en el sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) de la figura 8.1, en función de las intensidades incidentes y dispersadas por cada haz I_{in1} , I_{in2} y I_{d1} , I_{d2} respectivamente, de la longitud de onda del láser en el fluido λ , del número de onda $k = 2\pi/\lambda$ y del parámetro de dispersión para cada haz, $\sigma_1(\theta, \phi)$ y $\sigma_2(\theta, \phi)$ de la teoría de dispersión *Lorenz-Mie*, se puede expresar como

$$I_d(r, \theta, \phi) = I_{dDC} + \left[\sqrt{I_{in1}I_{in2}} \cdot I_{dAC}(t) \right] \quad (8.3)$$

donde la componente continua de la señal dispersada

$$I_{dDC} = I_{d1} + I_{d2} \quad (8.4)$$

$$I_{d1} = I_{in1} |\sigma_1(\theta, \phi)|^2 \frac{1}{k^2 r^2} \quad (8.5)$$

$$I_{d2} = I_{in2} |\sigma_2(\theta, \phi)|^2 \frac{1}{k^2 r^2} \quad (8.6)$$

$$I_{dAC}(t) = 2\Re \left\{ \sigma_1(\theta, \phi) \cdot \sigma_2^*(\theta, \phi) \cdot e^{(j2\pi f_{dop}t)} \right\} \frac{1}{k^2 r^2} \quad (8.7)$$

o expresada en función de una señal sinusoidal

$$I_{dAC}(t) = D(\theta, \phi) \cos(2\pi f_{dop}t - \psi(\theta, \phi)) \frac{1}{k^2 r^2} \quad (8.8)$$

donde esa variación armónica a la frecuencia f_{dop} , será proporcional a la diferencia de las frecuencias Doppler de cada uno de los haces dispersados, f_{dop1} para el haz 1 y f_{dop2} para el haz 2, debido al movimiento de la partícula por la zona de dispersión

$$f_{dop} = f_{dop1} - f_{dop2} \quad (8.9)$$

Si sustituimos las ecuaciones (8.4) (8.5) (8.6) (8.8) en (8.3) obtenemos

$$I_d(r, \theta, \phi) = \frac{1}{k^2 r^2} \left(I_{in1} |\sigma_1(\theta, \phi)|^2 + I_{in2} |\sigma_2(\theta, \phi)|^2 + \sqrt{I_{in1} I_{in2}} \cdot D(\theta, \phi) \cdot \cos(2\pi f_{dop}t - \psi(\theta, \phi)) \right) \quad (8.10)$$

Interpretando las expresiones que forman la intensidad dispersada $I_d(r, \theta, \phi)$ por una partícula en un punto del espacio de la ecuación anterior (8.10), podemos ver claramente que la componente continua de la señal dispersada, sólo depende de las características de los dos haces láser y de las propiedades de dispersión de las partículas independientemente de la fase de ellas, sólo tiene en cuenta el módulo al cuadrado, y de la suma de ellos. La mezcla, la podemos ver claramente en la componente alterna de la intensidad, una función sinusoidal, donde no solo va a depender de los parámetros anteriores, sino de los términos de fase de la señal, las cuáles van a ser decisivas en el momento de interferir las dos ondas de luz, indicadas con la dependencia del producto $\sigma_1(\theta, \phi) \cdot \sigma_2^*(\theta, \phi)$.

Así pues, se puede definir a esa componente continua, como aquella señal que va a dispersar la partícula en un punto de la apertura receptora, de baja frecuencia, por la única razón de ser iluminada por una fuente de luz, conocida como señal Pedestal local. Cada haz va a generar un pedestal determinado y independiente. Para el primer haz, su pedestal asociado lo definimos como $P_1(\theta, \phi)$, y para el segundo $P_2(\theta, \phi)$, donde la relación con las propiedades de dispersión de la teoría de *Lorenz-Mie* es

$$P_1(\theta, \phi) = |\sigma_1(\theta, \phi)|^2 \quad (8.11)$$

$$P_2(\theta, \phi) = |\sigma_2(\theta, \phi)|^2 \quad (8.12)$$

Para la componente heterodina o de mezcla, producida por la interferencia de las dos fuentes de luz incidentes, en un punto del detector, la definimos como la señal Doppler local $D(\theta, \phi)$ para la amplitud de la señal armónica a la frecuencia Doppler f_{dop} , y señal Fase Doppler local $\psi(\theta, \phi)$ para la fase asociada a la componente Doppler de la señal sinusoidal, vistas en la ecuación (8.8).

8.4. Flujo de luz dispersada

La potencia total integrada, recibida por una apertura de un tamaño y forma concreto, determinada por su ángulo sólido de recepción Ω con el sistema de referencia centrado en la partícula, es

$$Pw_d = \int \int_{\Omega} I_d(\theta_{rx}, \phi_{rx}) r^2 d\Omega \tag{8.13}$$

$$Pw_d = \frac{1}{k^2} \left[\left(I_{in1} \bar{P}_1 + I_{in2} \bar{P}_2 \right) + \left(\sqrt{I_{in1} I_{in2}} \cdot \bar{D} \cdot \cos(2\pi f_{dop} t - \bar{\psi}) \right) \right] \tag{8.14}$$

donde \bar{P}_1 y \bar{P}_2 , son las señales pedestal total de cada uno de los haces, \bar{D} señal Doppler total y $\bar{\psi}$ la fase total de la señal Doppler de la interferencia

$$\bar{P}_1 = \int_{\Omega} |\sigma_1(\theta, \phi)|^2 d\Omega \tag{8.15}$$

$$\bar{P}_2 = \int_{\Omega} |\sigma_2(\theta, \phi)|^2 d\Omega \tag{8.16}$$

$$\bar{D} = \left[\left(\int_{\Omega} D(\theta, \phi) \sin \psi(\theta, \phi) d\Omega \right)^2 + \left(\int_{\Omega} D(\theta, \phi) \cos \psi(\theta, \phi) d\Omega \right)^2 \right]^{1/2} \tag{8.17}$$

$$\bar{\psi} = \arctan \left[\frac{\int_{\Omega} D(\theta, \phi) \sin \psi(\theta, \phi) d\Omega}{\int_{\Omega} D(\theta, \phi) \cos \psi(\theta, \phi) d\Omega} \right] \tag{8.18}$$

A la señal total, suma de las dos componentes continua (o Pedestal) y alterna (o Doppler), se le denomina señal *burst* (o *burst* Doppler).

8.5. Potencia de ruido

Una vez calculada la potencia recibida de señal por una apertura en un sistema LDA, vamos a calcular la potencia de ruido a la salida del módulo fotodetector.

Típicamente, la señal *burst* (fotocorriente) a la salida del fotorreceptor $i(t)$, estará formada por la suma de tres señales:

$$i(t) = i_P(t) + i_D(t) + \tilde{i}_N(t) \quad (8.19)$$

donde

$i_P(t)$: Corriente de la componente Pedestal \bar{P} .

$i_D(t)$: Corriente de la componente Doppler \bar{D} .

$\tilde{i}_N(t)$: Corriente asociada a la componente de ruido total ¹

Por lo que respecta a las principales fuentes de ruido a la salida del fotodetector en un sistema láser Doppler [Adr78], teniendo en cuenta también aquellas señales interferentes, que aunque no sean de carácter aleatorio se pueden añadir como fuentes de ruido, se pueden incluir las siguientes:

$$\tilde{i}_N(t) = \tilde{i}_n(t) + \tilde{i}_{Bc}(t) + \tilde{i}_{Bi}(t) + \tilde{i}_H(t) + \tilde{i}_E(t) + \tilde{i}_{RF}(t) \quad (8.20)$$

Ruido aleatorio de tipo shot $\tilde{i}_n(t)$. Ruido generado por el proceso de conversión fotón-electrón en el fotodetector, producido por la luz incidente dispersada por la partícula al pasar por la zona de dispersión.

Ruido aleatorio de tipo shot $\tilde{i}_{Bc}(t)$. Ruido de fondo generado por el fotodetector debido a la iluminación de fuentes coherentes debida a reflexiones indeseadas, radiación del propio fluido (como el caso de llamaradas) o luz dispersada por otras partículas.

Ruido aleatorio de tipo shot $\tilde{i}_{Bi}(t)$. Ruido de fondo producido por el fotodetector, por fuentes incoherentes de iluminación (luz del entorno de la medida)

Interferencia heterodina $\tilde{i}_H(t)$ Señales espúreas heterodinas o de mezcla, generadas en el fotodetector por reflexiones del láser o por luz dispersada.

¹El símbolo $\tilde{}$ sobre $i_n(t)$ indica que el ruido a la salida de un sistema LDA se considera filtrado con un ancho de banda BW por la respuesta del fotodetector

Ruido aleatorio de tipo térmico $\tilde{i}_E(t)$. Ruido de Johnson generado por la electrónica de post-detección, amplificadores de transimpedancia o ruido de superficie de los semiconductores.

Interferencias radioeléctricas $\tilde{i}_{RF}(t)$. Señales interferentes de radiofrecuencia típicamente producidas por los circuitos excitadores de los moduladores acusto-ópticos o por cualquier fuente de radio comercial en la bandas de trabajo.

De todas estas fuentes de ruido o señales interferentes, cualquiera de ellas puede ser dominante. Sin embargo, en casi todas las situaciones típicas, excepto el ruido shot $\tilde{i}_n(t)$, todos pueden ser minimizadas utilizando una electrónica conveniente de bajo ruido, controlar la luz ambiente en el momento de realizar los experimentos de medida y minimizar cualquier reflexión indeseada con un diseño óptimo del sistema LDA, con la utilización de unos componentes ópticos (lentes, divisores de haz,...) de calidad.

Por lo que respecta al ruido shot $\tilde{i}_n(t)$, es un tipo de ruido inherente y parte inseparable a cualquier proceso de fotodetección, el cual presenta su aleatoriedad en el número de electrones generados por segundo, en respuesta a un flujo de luz incidente sobre el área del fotodetector.

El valor cuadrático medio de la fluctuación del número de foto-electrones producidos por segundo es proporcional al número medio de foto-electrones por segundo (Ley de Poisson), es decir, el valor cuadrático medio de la fotocorriente de ruido shot $\langle i_n^2(t) \rangle$ producido por una potencia incidente dada, es proporcional a la corriente media de la señal $\langle i(t) \rangle$ a la salida del fotodetector

$$\langle i_n^2(t) \rangle = 2q_e BW \langle i(t) \rangle \tag{8.21}$$

donde q_e es la carga del electrón, BW el ancho de banda del fotodetector.

Vamos a calcular la corriente a la salida de un fotodetector $i(t)$, con una determinada eficiencia cuántica η_q , definida como el número medio de fotoelectrones generados por cada fotón incidente. Si suponemos que toda la energía que recoge la apertura receptora se focaliza sobre el área activa del fotodetector, la corriente total es proporcional a la potencia incidente P_{wd} y se define como

$$i(t) = \frac{\eta_q q_e P_{wd}}{h\nu_o} \tag{8.22}$$

con h la constante de *Planck*, ν_o la frecuencia del láser. La corriente total de la señal *burst* será la suma de la corriente de la señal Pedestal y de la señal Doppler

$i(t) = i_P(t) + i_D(t)$. Substituyendo la ecuación (8.14) en (8.22) obtenemos la corriente de la señal pedestal $i_P(t)$ y de la señal Doppler $i_D(t)$

$$i_P(t) = \frac{\eta_q q_e}{h\nu_o k^2} \langle I_{in1} \bar{P}_1 + I_{in2} \bar{P}_2 \rangle \quad (8.23)$$

$$i_D(t) = \frac{\eta_q q_e}{h\nu_o k^2} \left(\sqrt{I_{in1} I_{in2}} \cdot \bar{D} \cdot \cos(2\pi f_{dopt} t - \bar{\psi}) \right) \quad (8.24)$$

Por tanto, en el caso particular que nos interesa de un sistema LDA, la potencia de ruido shot total será proporcional a la suma de las fotocorrientes medias de la señal pedestal y de la señal Doppler y, dado que la componente Doppler es una señal armónica que oscila a la frecuencia Doppler, su valor medio es $\langle i_D(t) \rangle = 0$, y la potencia de ruido solo va a depender de la señal Pedestal de la forma

$$\langle i_n^2(t) \rangle = \frac{2q_e^2 BW \eta_q}{h\nu_o k^2} [\langle I_{in1} \rangle \bar{P}_1 + \langle I_{in2} \rangle \bar{P}_2] \quad (8.25)$$

8.6. SNR en un sistema LDA

La relación señal a ruido a la salida de un fotodetector de eficiencia cuántica η_q y un ancho de banda BW , en el caso que las intensidades de los haces sean iguales ($I_{in} = I_{in1} = I_{in2}$) (condición específica de la técnica diferencial Doppler), considerando solo ruido de tipo shot y si definimos la señal pedestal total como la suma de los pedestales de cada uno de los haces

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 \quad (8.26)$$

se define la relación señal a ruido como el cuadrado del valor medio de la señal útil, la señal Doppler $\langle i_D^2(t) \rangle$, respecto al valor cuadrático medio de la señal de ruido $\langle i_n^2(t) \rangle$,

$$SNR_{LDA} = \frac{\langle i_D^2(t) \rangle}{\langle i_n^2(t) \rangle} \quad (8.27)$$

en este caso suponemos solo ruido de tipo shot provocado por la potencia dispersada por una partícula en la zona de interferencia, despreciando los otros tipos de ruido e interferencias, especificados en el apartado 8.5

Calculando el valor cuadrático medio de la corriente asociada a la señal Doppler, de la ecuación (8.24), obtenemos

$$\langle i_D^2(t) \rangle = \left[\frac{\eta_q q_e}{4h\nu_o k^2} \right]^2 \langle I_{in1} I_{in2} \rangle \bar{D}^2 \quad (8.28)$$

y substituyendo las ecuaciones (8.28) y (8.25) en (8.27), y considerando que los valores medios de las intensidades incidentes de cada uno de los haces de luz se toman como si la partícula dispersora estuviera en el centro de la interferencia gaussiana (y por tanto sus intensidades serán máximas), la SNR de un sistema LDA es

$$SNR_{LDA} = \frac{I_{in} \eta_q}{4h\nu_o BW k^2} \frac{\bar{D}^2}{\bar{P}} \quad (8.29)$$

Vemos que se pueden diferenciar perfectamente dos términos en la SNR. El primero, sólo depende de las características del fotodetector y de la intensidad y frecuencia de la luz incidente. La segunda, del cociente entre el cuadrado de la señal Doppler y la señal pedestal, los cuáles dependen únicamente de las propiedades de dispersión de las partículas y de la geometría del sistema LDA. De esta forma, parece claro que la manera de conocer la relación señal a ruido de un sistema LDA, sólo hace falta estudiar el comportamiento del factor \bar{D}^2/\bar{P} , denominada SNR reducida

$$SNR_r = \frac{\bar{D}^2}{\bar{P}} \quad (8.30)$$

De la misma manera, podemos definir una SNR local reducida, como aquella SNR reducida, en cada punto del detector, definida respecto a las coordenadas (θ, ϕ)

$$SNR_{rlocal}(\theta, \phi) = \frac{D(\theta, \phi)^2}{P(\theta, \phi)} \quad (8.31)$$

con

$$P(\theta, \phi) = P_1(\theta, \phi) + P_2(\theta, \phi) \quad (8.32)$$

y en función de los coeficientes de dispersión de la teoría de *Lorenz-Mie* obtenemos

$$P(\theta, \phi) = |\sigma_1(\theta, \phi)|^2 + |\sigma_2(\theta, \phi)|^2 \quad (8.33)$$

8.7. Visibilidad

Otro de los parámetros que nos puede aportar información de la calidad de una señal generada por un sistema LDA, es la Visibilidad. Se define como la relación de la amplitud de la señal Doppler respecto a la amplitud de la señal pedestal de la señal

burst. Es decir, la relación entre la componente alterna y la componente continua. De igual forma que se ha definido la señal pedestal y la señal Doppler local en cada punto de la apertura, podemos definir la Visibilidad local $V(\theta, \phi)$ como

$$V(\theta, \phi) = \frac{D(\theta, \phi)}{P(\theta, \phi)} \quad (8.34)$$

y la Visibilidad total \bar{V} a la salida del fotodetector, en función de la señal Pedestal Doppler y Pedestal total

$$\bar{V} = \frac{\bar{D}}{\bar{P}} \quad (8.35)$$

la SNR reducida local la podremos expresar en función de la Visibilidad local será

$$SNR_{rlocal}(\theta, \phi) = \frac{D(\theta, \phi)}{P(\theta, \phi)} \cdot D(\theta, \phi) = V(\theta, \phi) \cdot D(\theta, \phi) \quad (8.36)$$

y la SNR reducida total en función de la Visibilidad total

$$SNR_r = \bar{V} \bar{D} \quad (8.37)$$

Este nuevo parámetro, que no es nada más que una nueva forma de expresar la SNR local reducida, ecuación (8.31), de un sistema LDA, nos permite además interpretar desde un punto de vista físico o práctico, si una señal contiene una buena interferencia o no. Usualmente, la visibilidad se puede entender en términos de un índice de modulación, clásico en el ámbito de las radiocomunicaciones, donde la señal Pedestal haría la función de señal portadora y la señal Doppler como la señal moduladora, con su valor menor o igual a la unidad. Si expresamos su valor en función de la intensidad eléctrica a la salida del fotodetector, obtenemos la siguiente relación, definida sobre la figura 8.2

$$\bar{V} = \frac{i_{max} - i_{min}}{i_{max} + i_{min}} \quad (8.38)$$

Por tanto, para obtener una buena relación señal a ruido, el objetivo será obtener señales con una amplitud de señal Doppler lo mas grande posible \bar{D} y una Visibilidad total \bar{V} próxima a la unidad.

Generalmente, la Visibilidad local $V(\theta, \phi)$, podrá disminuir su valor en función de los siguientes fenómenos:

1. Primero, los campos dispersados por la partícula están, en general, polarizados de forma elíptica, y por tanto la señal Doppler, que depende del producto $\sigma_1(\theta, \phi) \cdot \sigma_2^*(\theta, \phi)$, puede disminuir en función del grado de polarización cruzada.

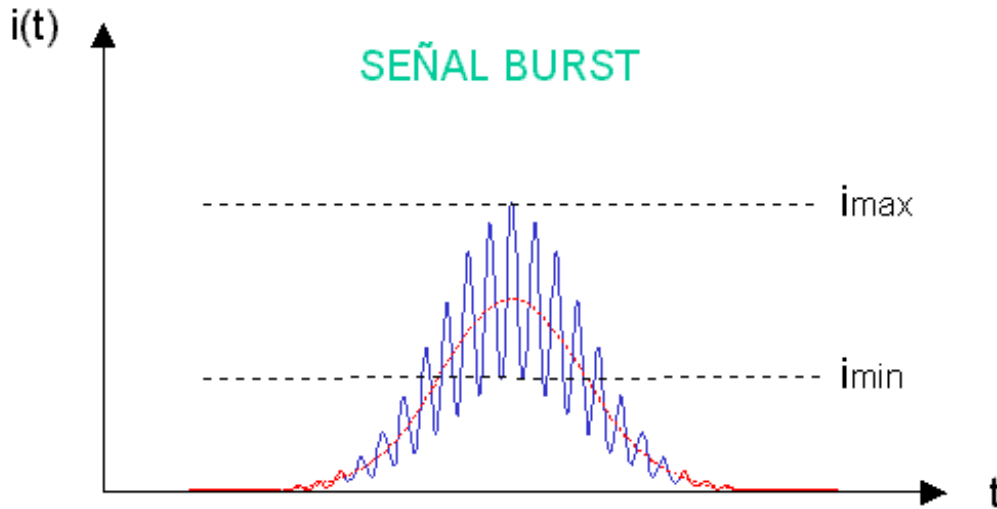


Figura 8.2 Definición de la Visibilidad en una señal *burst*

2. El segundo efecto que puede minimizar la Visibilidad, está asociado a la diferencia de intensidad de los haces incidentes. Habitualmente, si las amplitudes son diferentes, su efecto no será demasiado importante, aunque puede disminuir el rendimiento de la interferencia. Por ejemplo, en el caso de una relación de intensidades de 10:1, puede provocar una reducción de la Visibilidad menor del 50 % [AO77].

y por lo que respecta a la Visibilidad total integrada a la salida del fotodetector \bar{V} , aparte de las consideraciones anteriores respecto a la Visibilidad local, se añaden los efectos de la integración en toda la apertura receptora. Observando la ecuación (8.17), vemos la dependencia de la señal Doppler total con $D(\theta, \phi)$ y $\psi(\theta, \phi)$ sobre el área de la apertura colectora, que podrían reducir el valor de \bar{V} . Este fenómeno nos indica que la señal Doppler de algunas regiones de la apertura pueden estar en contrafase con la de otras zonas y, consecuentemente, en el momento de integrar en toda la superficie, puede existir cancelación de señal útil y producir una pérdida de visibilidad total, con la reducción lógica de la SNR total del sistema.

8.8. Formulaciones basadas en la teoría de Lorenz-Mie

Una vez vistas las ecuaciones que nos permiten calcular de una manera aproximada la SNR de un sistema LDA de una dimensión, para el caso particular de la técnica

Diferencial Doppler, vamos a plantear las formulaciones necesarias para una geometría determinada, utilizando las expresiones de la señal Doppler local $D(\theta, \phi)$, la fase Doppler local $\psi(\theta, \phi)$ y las señales Pedestal de cada uno de los dos haces $P_1(\theta, \phi)$ y $P_2(\theta, \phi)$, en función de las coordenadas de la teoría de dispersión *Lorenz-Mie* [AE76] vistas en el capítulo 7 y definidas en la figura 7.1, para facilitar el manejo de las expresiones matemáticas.

De esta manera, los coeficientes de dispersión $\sigma_h(\theta, \phi)$ para cada uno de los haces incidentes ($h = 1, 2$), están definidos en un sistema de coordenadas esféricas (θ, ϕ) , planteadas en la figura 8.1. Sobre cada punto de la superficie de la apertura receptora, especificada por su vector unitario \hat{r} o por sus coordenadas en cartesianas (x, y, z) , los expresaremos en función de sus ángulos de incidencia $\sigma(\theta_h, \phi_h)$ especificadas en la ecuación (7.1).

$$\sigma(\theta_h, \phi_h) = A(\theta_h) \sin(\phi_h) e_{\hat{\phi}_h} + B(\theta_h) \cos(\phi_h) e_{\hat{\theta}_h} \quad (8.39)$$

Las relaciones entre los dos sistemas de referencia, (θ, ϕ) y (θ_h, ϕ_h) , con sus vectores unitarios $(\hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$ y $(\hat{e}_{\theta_h}, \hat{e}_{\phi_h})$, en función de los vectores de propagación \hat{s}_h , y los vectores de polarización \hat{p}_h son²

- Relación $(r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \theta_h, \phi_h)$

$$\cos(\theta_h) = \hat{s}_h \cdot \hat{r} \quad (8.40)$$

$$\sin(\theta_h) = |\hat{s}_h \times \hat{r}| \quad (8.41)$$

$$\cos(\phi_h) = \frac{\hat{p}_h \cdot \hat{r}}{|\hat{s}_h \times \hat{r}|} \quad (8.42)$$

- Relación $(\hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi) \rightarrow (r, \theta_h, \phi_h)$

$$\hat{e}_{\phi_h} = \frac{\hat{s}_h \times \hat{r}}{|\hat{s}_h \times \hat{r}|} \quad (8.43)$$

$$\hat{e}_{\theta_h} = \frac{\hat{s}_h \times \hat{r}}{|\hat{s}_h \times \hat{r}|} \times \hat{r} \quad (8.44)$$

Ahora ya estamos en disposición de poder plantear las expresiones de la señal Doppler local, la fase de la señal Doppler, y la señal Pedestal local en función de (θ_h, ϕ_h) .

²El símbolo \times indica el producto vectorial

8.8.1. Señal Pedestal local

A partir de las ecuaciones (8.32), (8.33) y (8.39), podemos expresar la señal Pedestal en función de las coordenadas (θ_h, ϕ_h) como

$$\begin{aligned}
 P(\theta, \phi) = & |A(\theta_1)|^2 \sin^2(\phi_1) + |B(\theta_1)|^2 \cos^2(\phi_1) \\
 & + |A(\theta_2)|^2 \sin^2(\phi_2) + |B(\theta_2)|^2 \cos^2(\phi_2)
 \end{aligned} \tag{8.45}$$

donde $A(\theta_1)$, $B(\theta_1)$ y $A(\theta_2)$, $B(\theta_2)$ son los coeficientes complejos de dispersión de los haces 1 y 2.

8.8.2. Señal Doppler local

El planteamiento de las expresiones que nos permiten calcular la señal Doppler local en función de las coordenadas (θ_h, ϕ_h) son un poco más complicadas, ya que D , además de depender del módulo de los coeficientes complejos de dispersión de los haces 1 y 2, depende también de las fases de $A(\theta_1)$, $B(\theta_1)$ y $A(\theta_2)$, $B(\theta_2)$, definidas de la siguiente forma

- $\vartheta_{A1} \mapsto$ Fase de $A(\theta_1)$ asociada al haz 1
- $\vartheta_{A2} \mapsto$ Fase de $A(\theta_2)$ asociada al haz 2
- $\vartheta_{B1} \mapsto$ Fase de $B(\theta_1)$ asociada al haz 1
- $\vartheta_{B2} \mapsto$ Fase de $B(\theta_2)$ asociada al haz 2

y de los productos escalares entre los vectores unitarios $(\hat{e}_{\theta_1}, \hat{e}_{\phi_1})$ y $(\hat{e}_{\theta_2}, \hat{e}_{\phi_2})$. Sustituyendo las ecuaciones (8.7) y (8.8) en (8.39) y operando convenientemente obtenemos el resultado siguiente

$$\begin{aligned}
 D(\theta, \phi) = & 2 \left[C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + 2(C_1C_2 + C_3C_4) \cos(\vartheta_{A2} - \vartheta_{B2}) \right. \\
 & + 2(C_1C_3 + C_2C_4) \cos(\vartheta_{A1} - \vartheta_{B1}) \\
 & + 2(C_1C_4) \cos(\vartheta_{A2} - \vartheta_{A1} + \vartheta_{B1} - \vartheta_{B2}) \\
 & \left. + 2C_2C_3 \cos(-\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2} + \vartheta_{B1} + \vartheta_{B2}) \right]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{8.46}$$

Los términos C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5 se definen como

$$C_1 = |B(\theta_1)| |B(\theta_2)| \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \hat{e}_{\theta_1} \cdot \hat{e}_{\theta_2} \quad (8.47)$$

$$C_2 = |A(\theta_2)| |B(\theta_1)| \cos(\phi_1) \sin(\phi_2) \hat{e}_{\theta_1} \cdot \hat{e}_{\phi_2} \quad (8.48)$$

$$C_3 = |A(\theta_1)| |B(\theta_2)| \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \hat{e}_{\phi_1} \cdot \hat{e}_{\theta_2} \quad (8.49)$$

$$C_4 = |A(\theta_1)| |A(\theta_2)| \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \hat{e}_{\phi_1} \cdot \hat{e}_{\phi_2} \quad (8.50)$$

8.8.3. Fase de la Señal Doppler local

Por lo que respecta a la Fase de la señal Doppler $\psi(\theta, \phi)$, de la ecuación (8.1) calculando la parte real e imaginaria del numero complejo resultante y calculando la fase a partir de relaciones trigonométricas elementales obtenemos

$$\psi = \arctan \left[-\frac{N_f}{D_f} \right] \quad (8.51)$$

donde N_f y D_f se definen como

$$N_f = C_1 \sin(\vartheta_{B1} - \vartheta_{B2}) + C_2 \sin(\vartheta_{B1} - \vartheta_{A2}) + C_3 \sin(\vartheta_{A1} - \vartheta_{B2}) + C_4 \sin(\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2}) \quad (8.52)$$

$$D_f = C_1 \cos(\vartheta_{B1} - \vartheta_{B2}) + C_2 \cos(\vartheta_{B1} - \vartheta_{A2}) + C_3 \cos(\vartheta_{A1} - \vartheta_{B2}) + C_4 \cos(\vartheta_{A1} - \vartheta_{A2}) \quad (8.53)$$

8.9. Geometría y características de un sistema LDA de una dimensión

En el apartado anterior hemos podido presentar todas las formulaciones necesarias para poder estimar la SNR de un sistema LDA de una dimensión y así poder obtener posteriormente resultados, mediante una serie de programas implementadas en lenguaje C y Matlab, basadas en las expresiones anteriores, que nos permitan estudiar el comportamiento de los factores que intervienen en el diseño y análisis de un sistema láser Doppler, en diferentes situaciones.

La configuración geométrica utilizada para calcular las diferentes expresiones necesarias para obtener la SNR, y las características del sistema láser Doppler son los siguientes:

Sistema de referencia y coordenadas La situación de la lente transmisora y receptora mediante un sistema de coordenadas ortogonal (X, Y, Z) definido en la figura 8.1. En este caso, la componente de velocidad a detectar será la componente Y , dirección perpendicular a la bisectriz del ángulo que forman los dos haces, α . La apertura receptora está contenida en el plano XY , perpendicular al eje Z .

Geometría haces incidentes Puntos de la apertura transmisora donde están colocados los dos haces incidentes y dirección de propagación (subíndices 1 y 2), mediante el cálculo de los vectores de propagación \hat{s}_1, \hat{s}_2 y los vectores de polarización \hat{p}_1, \hat{p}_2 , los cuales están polarizados linealmente, para el caso de un sistema LDA de una dimensión.

Características del fluido y de las partículas Tipo de fluido, caracterizado por su índice de refracción n_m , diámetro de la partícula de sembrado a_p y su índice de refracción n_p , de forma siempre esférica.

Características haces Frecuencia y intensidad de los dos haces de luz incidentes, ν_o y I_{in} .

Características fotoeléctricas del detector Eficiencia cuántica η_q y su ancho de banda BW .

Posición, forma y tamaño apertura receptora Localización, diámetro y forma de la lente receptora respecto al sistema de coordenadas centrado en la partícula dispersora, definidos por sus ángulos (θ, ϕ) . Normalmente tendremos dos situaciones: $(\theta = 0^\circ, \phi = 90^\circ)$ configuración en RD (figura 8.3) y $(\theta = 180^\circ, \phi = 90^\circ)$ configuración en DHD (figura 8.4).

8.9.1. Localizaciones particulares de los haces

Vamos a considerar la configuración geométrica habitual de un sistema LDA de una dimensión con dos haces incidentes, para la estimación de una componente de velocidad, de la figura 8.1. En el caso elegido, los haces inciden en la lente transmisora en puntos sobre el eje Y y $-Y$ formando un cierto ángulo respecto al eje Z , para un sistema de coordenadas determinado. La elección del sistema de referencia, ha sido por motivos de mayor sencillez en todas las expresiones matemáticas que va a generar dicha topología. El otro caso típico, lo podemos encontrar en el apéndice C, donde se presenta la formulación en el caso que los haces estén localizados en el eje X y $-X$.

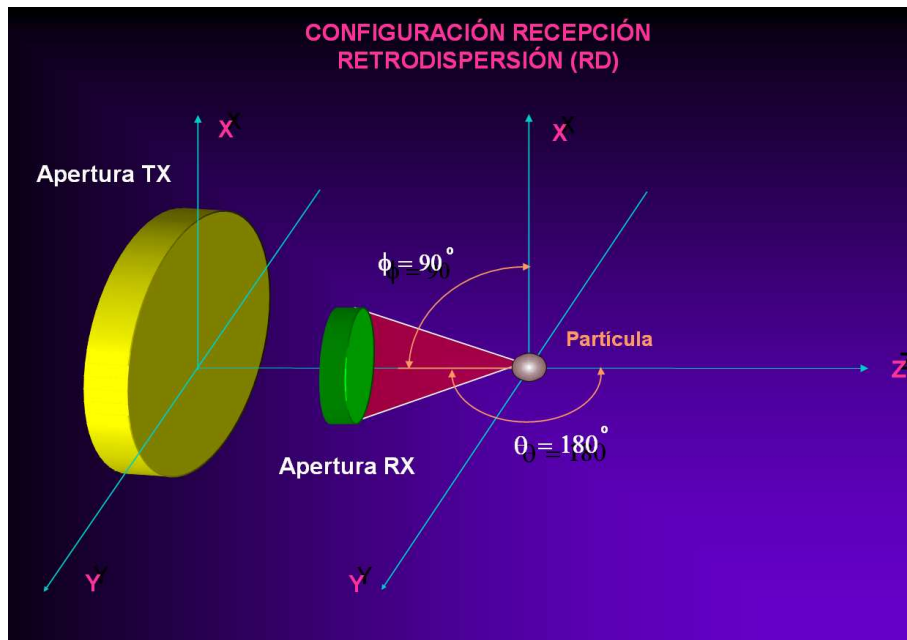


Figura 8.3 Geometría Sistema LDA en configuración *RD*

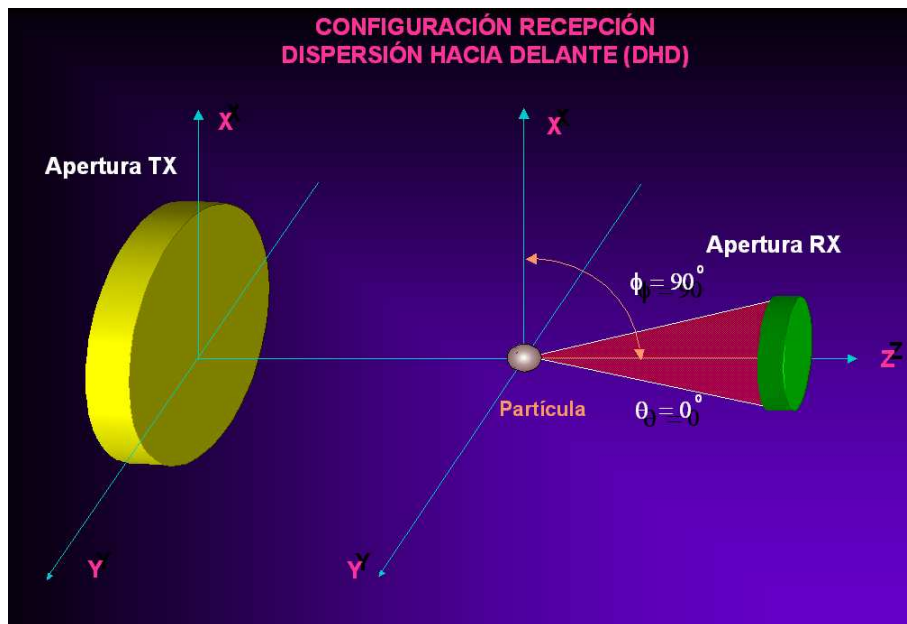


Figura 8.4 Geometría Sistema LDA en configuración *DHD*

8.9.2. LDA con haces en el eje Y

En este caso, dos haces de luz localizados en el eje Y y $-Y$, considerados como ondas planas polarizados linealmente, se focalizan mediante una lente transmisora localizada en el plano XY, formando un ángulo δ_1 y δ_2 respecto a la bisectriz (eje Z), con vectores de propagación \hat{s}_1 y \hat{s}_2 y vectores de polarización \hat{p}_1 y \hat{p}_2 , definidos en la figura 8.5

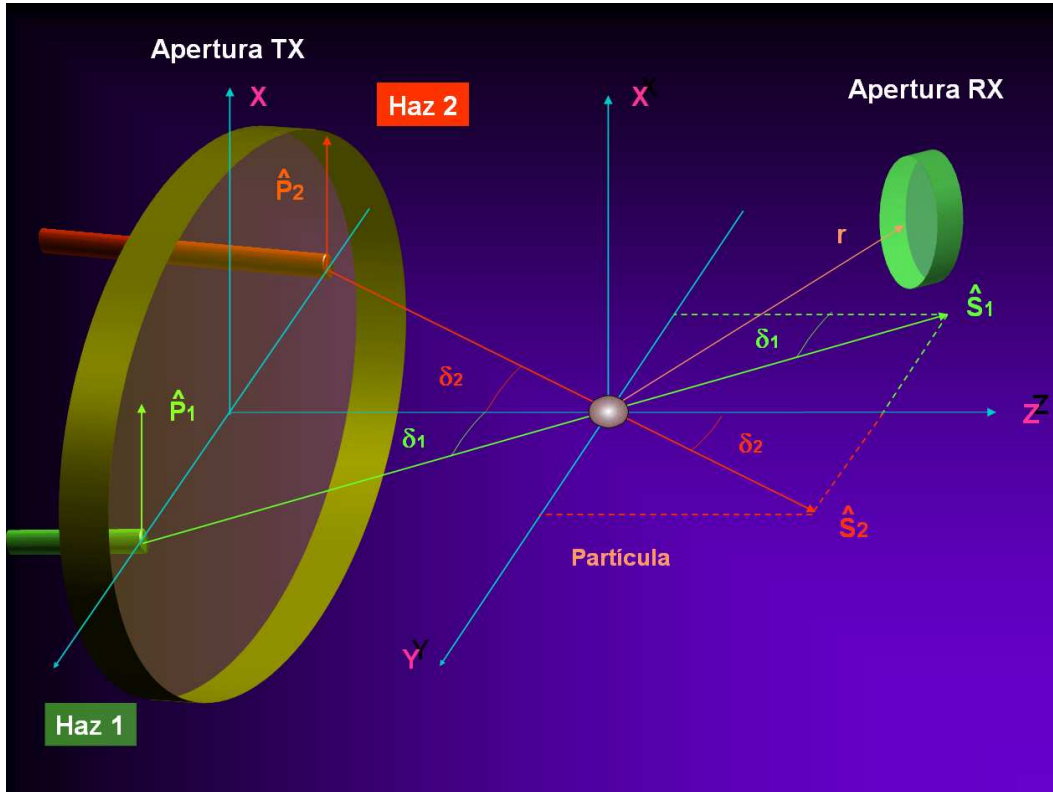


Figura 8.5 Geometría Sistema LDA)

Los vectores de propagación y polarización unitario, en función de las coordenadas cartesianas (x,y,z) y del ángulo δ_1 y δ_2 del haz1 y 2 respectivamente, son

$$\hat{s}_1 = [0, -\sin(\delta_1), \cos(\delta_1)] \tag{8.54}$$

$$\hat{s}_2 = [0, \sin(\delta_2), \cos(\delta_2)] \tag{8.55}$$

$$\hat{p}_1 = [1, 0, 0] \tag{8.56}$$

$$\hat{p}_2 = [1, 0, 0] \tag{8.57}$$

A partir de los datos anteriores, podemos calcular los ángulos θ_1, ϕ_1 y θ_2, ϕ_2 , y los vectores unitarios $\hat{e}_{\theta_1}, \hat{e}_{\phi_1}$ y $\hat{e}_{\theta_2}, \hat{e}_{\phi_2}$ substituyendo las ecuaciones (8.54), (8.55), (8.56) y (8.57) en (8.58), (8.44), (8.43) y (8.41).

✠ Relación ángulos haz 1: $(\theta_1, \phi_1) \implies$

$$\cos(\theta_1) = \frac{-y \sin(\delta_1) + z \cos(\delta_1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.58)$$

$$\sin(\theta_1) = \frac{[[z \sin(\delta_1) + y \cos(\delta_1)]^2 + [x \cos(\delta_1)]^2 + [x \sin(\delta_1)]^2]^{1/2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.59)$$

$$\cos(\phi_1) = \frac{x}{\sin(\theta_1) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.60)$$

✠ Relación ángulos haz 2: $(\theta_2, \phi_2) \implies$

$$\cos(\theta_2) = \frac{y \sin(\delta_2) + z \cos(\delta_2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.61)$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{[[z \sin(\delta_2) - y \cos(\delta_2)]^2 + [x \cos(\delta_2)]^2 + [x \sin(\delta_2)]^2]^{1/2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.62)$$

$$\cos(\phi_2) = \frac{x}{\sin(\theta_2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.63)$$

✠ Relación vectores unitarios haz 1: $(\hat{e}_{\theta_1}, \hat{e}_{\phi_1}) \implies$

$$\hat{e}_{\theta_1} = [\hat{e}_{\theta_{1x}}, \hat{e}_{\theta_{1y}}, \hat{e}_{\theta_{1z}}] \quad (8.64)$$

$$\hat{e}_{\theta_{1x}} = \frac{xz \cos(\delta_1) - xy \sin(\delta_1)}{\sin(\theta_1) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.65)$$

$$\hat{e}_{\theta_{1y}} = \frac{-z^2 \sin(\delta_1) - zy \cos(\delta_1) - x^2 \sin(\delta_1)}{\sin(\theta_1) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.66)$$

$$\hat{e}_{\theta_{1z}} = \frac{-zy \sin(\delta_1) - y^2 \cos(\delta_1) - x^2 \cos(\delta_1)}{\sin(\theta_1) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.67)$$

$$\hat{e}_{\phi_1} = [\hat{e}_{\phi_{1x}}, \hat{e}_{\phi_{1y}}, \hat{e}_{\phi_{1z}}] \quad (8.68)$$

$$\hat{e}_{\phi_{1x}} = \frac{-z \sin(\delta_1) - y \cos(\delta_1)}{\sin(\theta_1) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.69)$$

$$\hat{e}_{\phi_{1y}} = \frac{x \cos(\delta_1)}{\sin(\theta_1) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.70)$$

$$\hat{e}_{\phi_{1z}} = \frac{x \sin(\delta_1)}{\sin(\theta_1) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.71)$$

✠ Relación vectores unitarios haz 2: \hat{e}_{θ_2} y $\hat{e}_{\phi_2} \implies$

$$\hat{e}_{\theta_2} = [\hat{e}_{\theta_{2x}}, \hat{e}_{\theta_{2y}}, \hat{e}_{\theta_{2z}}] \quad (8.72)$$

$$\hat{e}_{\theta_{2x}} = \frac{xz \cos(\delta_2) + xy \sin(\delta_2)}{\sin(\theta_2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.73)$$

$$\hat{e}_{\theta_{2y}} = \frac{z^2 \sin(\delta_2) - zy \cos(\delta_2) + x^2 \sin(\delta_2)}{\sin(\theta_2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.74)$$

$$\hat{e}_{\theta_{2z}} = \frac{zy \sin(\delta_2) - y^2 \cos(\delta_2) - x^2 \cos(\delta_2)}{\sin(\theta_2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.75)$$

$$\hat{e}_{\phi_2} = [\hat{e}_{\phi_{2x}}, \hat{e}_{\phi_{2y}}, \hat{e}_{\phi_{2z}}] \quad (8.76)$$

$$\hat{e}_{\phi_{2x}} = \frac{z \sin(\delta_2) - y \cos(\delta_2)}{\sin(\theta_2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.77)$$

$$\hat{e}_{\phi_{2y}} = \frac{x \cos(\delta_2)}{\sin(\theta_2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.78)$$

$$\hat{e}_{\phi_{2z}} = \frac{-x \sin(\delta_2)}{\sin(\theta_2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (8.79)$$