Capítulo 2:

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LÓGICA DIFUSA

Una de las disciplinas matemáticas con mayor número de seguidores actualmente es la llamada lógica difusa o borrosa, que es la lógica que utiliza expresiones que no son ni totalmente ciertas ni completamente falsas, es decir, es la lógica aplicada a conceptos que pueden tomar un valor cualquiera de veracidad dentro de un conjunto de valores que oscilan entre dos extremos, la verdad absoluta y la falsedad total [44]. Conviene recalcar que lo que es difuso, borroso, impreciso o vago no es la lógica en sí, sino el objeto que estudia: expresa la falta de definición del concepto al que se aplica. La lógica difusa permite tratar información imprecisa, como *estatura media* o *temperatura baja*, en términos de conjuntos borrosos que se combinan en reglas para definir acciones: *si la temperatura es alta entonces enfriar mucho*. De esta manera, los sistemas de control basados en lógica difusa combinan variables de entrada, definidas en términos de conjuntos difusos, por medio de grupos de reglas que producen uno o varios valores de salida.

2.1 INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA DIFUSA: BREVE HISTORIA Y APLICACIONES.

La lógica difusa fue investigada, por primera vez, a mediados de los años sesenta en la Universidad de Berkeley (California) por el ingeniero Lotfy A. Zadeh (figura 2.1.1) cuando se dio cuenta de lo que él llamó principio de incompatibilidad: “Conforme la complejidad de un sistema aumenta, nuestra capacidad para ser precisos y construir instrucciones sobre su comportamiento disminuye hasta el umbral más allá del cual, la precisión y el significado son características excluyentes”. Introdujo entonces el concepto de conjunto difuso (Fuzzy Set) bajo el que reside la idea de que los elementos sobre los que se construye el pensamiento humano no son números sino etiquetas lingüísticas. La lógica difusa permite representar el conocimiento común, que es mayoritariamente del tipo lingüístico cualitativo y no necesariamente cuantitativo, en un lenguaje matemático a través de la teoría de conjuntos difusos y funciones características asociadas a ellos. Permite trabajar a la vez con datos numéricos y términos lingüísticos; los términos lingüísticos son inherentemente menos precisos que los datos numéricos pero en muchas ocasiones aportan una información más útil para el razonamiento humano.

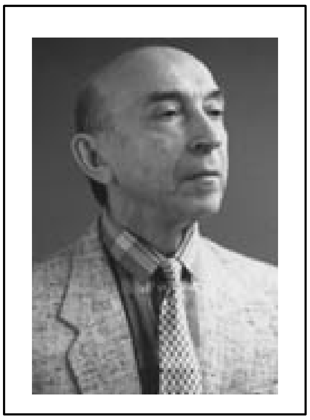

Figura 2.1.1. L. A. Zadeh

El aspecto central de los sistemas basados en la teoría de la lógica difusa [45] es que, a diferencia de los que se basan en la lógica clásica, tienen la capacidad de reproducir aceptablemente los modos usuales del razonamiento, considerando que la certeza de una proposición es una cuestión de grado. Más formalmente se puede decir que si la lógica es la ciencia de los principios formales y normativos del razonamiento, la lógica difusa o borrosa se refiere a los principios formales del razonamiento aproximado, considerando el razonamiento preciso (lógica clásica) como caso límite. Así pues, las características más atractivas de la lógica difusa son su flexibilidad, su tolerancia con la imprecisión, su capacidad para modelar problemas no-lineales, y su base en el lenguaje natural.

Aunque la lógica difusa es conocida con este nombre desde que Zadeh la bautizó así en 1965, la idea que se esconde tras ella y sus orígenes se remontan hasta 2.500 años atrás [46]. Los filósofos griegos, Aristóteles entre ellos, consideraban que existían ciertos grados de veracidad y falsedad y Platón ya trabajó con grados de pertenencia.

El término borroso aplicado a la lógica y a la teoría de conjuntos y sistemas procede de la expresión fuzzy sets (conjuntos borrosos) acuñada por Lofti A. Zadeh, brillante ingeniero eléctrico iraní nacionalizado en Estados Unidos, profesor en las más prestigiosas universidades norteamericanas y doctor honoris causa de varias instituciones académicas. Sus tesis entroncan, como podemos observar, con la obra de pensadores de distintas disciplinas que tenían una visión similar de los problemas alejada de la lógica tradicional. La paradoja del conjunto de Bertrand Russell, el principio de incertidumbre de la física cuántica de W. Heisenberg, la teoría de los conjuntos vagos de Max Black, sin olvidar la fundamental aportación del polaco Jan Lukasiewicz, creador de la lógica multivaluada, influyeron para que Zadeh publicase su famoso ensayo "Fuzzy Sets" en "Informations and Control" en 1965 y más tarde "Fuzzy algorithm" en la misma revista en 1968. Mientras que Russell y Black utilizaron el término vagueness (vaguedad, vago) para referirse a la nueva lógica o para calificar a los conjuntos en la teorización sobre los mismos, Zadeh prefirió el término fuzzy (borroso, difuso) para denominar a sus conjuntos y a la lógica en la que se apoya su análisis.

Aunque en un principio la lógica difusa encontró una fuerte resistencia entre la comunidad científica, algunos investigadores se convirtieron en seguidores de las teorías de Zadeh y mientras él siguió ampliando y asentando los fundamentos de la teoría de conjuntos difusos estos investigadores exploraron estas nuevas teorías durante la década posterior a su nacimiento. Además de las contribuciones del propio Zadeh, otros autores como Bellman, Lakoff, Goguen, Kohout, Smith, Sugeno, Chang, Dunn, Bezdek, Negoita, Mizumoto, Tanaka, Kandel, Zimmermann, etc... hicieron aportaciones al desarrollo de las bases de esta teoría. Durante esta primera década, gran parte de estructuras lógicas y matemáticas son generalizadas en términos de lógica difusa: relaciones lógicas, funciones, grupos, operaciones, operadores, algoritmos, etc...

A principios de la década de los setenta, se establecen varios grupos de investigación en lógica difusa en algunas pequeñas universidades japonesas; los profesores Terano y Shibata en Tokio y los profesores Tanaka y Asai en Osaka, y pese a encontrar también un ambiente hostil en estos primeros años de investigación, hacen grandes contribuciones tanto al desarrollo de la teoría de la lógica difusa como al estudio de sus aplicaciones.

Un hito importante en el desarrollo de la lógica difusa fue establecido por Assilian y Mamdani en 1974 en el Reino Unido al desarrollar el primer controlador difuso diseñado para una máquina de vapor, pero la primera implantación real de un controlador de este tipo fue realizada en 1980 por F.L. Smidth & Co. en una planta cementera en Dinamarca. En 1983 Fuji aplica la lógica difusa para el control de inyección química en plantas depuradoras de agua por primera vez en Japón y en 1987 Hitachi pone en marcha un controlador fuzzy para el control del tren-metro de Sendai, y la empresa Omron desarrolla los primeros controladores difusos comerciales.

Paralelamente al desarrollo de las aplicaciones de la lógica difusa, investigadores teóricos siguen, en la década de los ochenta, el camino iniciado por Mamdani. Así, Takagi y Sugeno desarrollan la primera aproximación para construir reglas fuzzy a partir de datos de entrenamiento, y aunque en un principio no tiene mucha repercusión, más tarde será el punto de partida para investigar la identificación de modelos fuzzy. Otro de los factores que contribuye a seguir con la investigación en este campo es el creciente interés en las redes neuronales y su similitud con los sistemas fuzzy; la tendencia es buscar vías de relación entre las dos técnicas y los resultados son los llamados neuro-fuzzy systems, sistemas fuzzy que usan métodos de aprendizaje basados en redes neuronales para identificar y optimizar sus parámetros. B. Kosko es conocido por su contribución a los sistemas neuro-fuzzy y con sus publicaciones introdujo en la lógica difusa a muchos lectores interesados en las redes neuronales.

En la década de los noventa, además de las redes neuronales y los sistemas fuzzy, hacen su aparición los algoritmos genéticos. Estas tres técnicas computacionales, que pueden combinarse de múltiple maneras y se pueden considerar complementarias, son herramientas de trabajo muy potentes en el campo de los sistemas de control en la última década.

En realidad, la intención original del profesor Zadeh era crear un formalismo para manipular de forma más eficiente la imprecisión y la vaguedad del razonamiento humano expresado lingüísticamente, sin embargo causó cierta sorpresa que el éxito de la lógica borrosa llegase en el campo del control automático de procesos. Esto se debió básicamente al boom que la lógica borrosa causó en Japón, iniciado en 1987 y que alcanzó su máximo apogeo a principios de los noventa. Este boom fue el resultado de una estrecha colaboración entre el gobierno, las universidades y las industrias japonesas, estableciéndose dos proyectos nacionales a gran escala llevados a cabo por el Ministerio de Industria y Comercio (MITI) y la Agencia de Ciencia y Tecnología (STA) en consorcio con el LIFE, Laboratory for International Fuzzy Research, y en los que se involucraron más de 50 compañías durante seis años. Desde entonces, han sido infinidad los productos lanzados al mercado que usan tecnología borrosa, muchos de ellos utilizando la etiqueta fuzzy como símbolo de calidad y prestaciones avanzadas. El control difuso ha sido aplicado con éxito en muy diversas ramas tecnológicas, por ejemplo la metalurgia, robots para la fabricación, controles de maniobras de aviones, sensores de imagen y sonido (sistema de estabilización de la imagen en cámaras fotográfica y de video Sony, Sanyo y Cannon), lavadoras (Panasonic y Bosch) que son capaces de autorregular la cantidad de jabón que requiere un lavado dependiendo del grado de suciedad de la ropa, aire acondicionado (Mitsubishi) en el que el sistema fuzzy evita las oscilaciones entre el exceso y el defecto de temperatura), rice-cooker capaces de elaborar diversas variedades de arroz regulando la cantidad de agua y la temperatura en cada caso para que el grano quede cocido y suelto, en automoción, sistemas de frenado ABS (Mazda y Nissan), cambio automático de Renault, control automático de velocidad que controla la frenada en casos peligrosos y selecciona la relación de marchas a partir del rendimiento del motor, climatizadores, fotocopiadoras (ajusta el voltaje del tambor a partir de la densidad de la imagen, la temperatura y la humedad), lavaplatos (ajusta el ciclo de lavado y enjuague a partir del número de platos y cantidad de comida adherida), ascensores (reduce el tiempo de espera a partir del número de personas), humidificadores (ajusta el contenido de humedad a las condiciones de la habitación), mejoras en imágenes médicas (ajustando el contraste en los bordes), sistemas de reconocimiento de escritura, hornos microondas (establece y afina el programa de energía y cocción), neveras (establece los tiempos de descongelación y enfriamiento en función del uso que se haga), televisores (ajusta el color de la pantalla y la textura de cada imagen), mecanismos de atraque automático de naves espaciales, sistemas automáticos de regulación de la cantidad de anestesia que se suministra a los pacientes en un quirófano -aunque bajo supervisión médica, por supuesto-, sistemas de concesión -o denegación- automática de créditos según el perfil económico del solicitante, etc... Estas son algunas de las muchísimas aplicaciones de la lógica difusa [44], que ya están funcionando en el campo de los llamados sistemas expertos. Todos estos sistemas utilizan información, esencialmente, imprecisa con el fin de lograr sus cometidos.

La lógica difusa está teniendo, por lo tanto, bastante éxito en su utilización sobre los sistemas de control, aplicación que ya podría considerarse como rutinaria. Sin embargo, los investigadores buscan nuevos campos de aplicación de esta técnica. Se investiga en áreas como el reconocimiento de patrones visuales o la identificación de segmentos de ADN, por mencionar dos ejemplos. Además, según algunos de los más prestigiosos investigadores en Internet [47], parece que el futuro para abordar la ingente cantidad de datos, recuperar la información, controlar y gestionar la red, pasa por el uso de las tecnologías borrosas. Esta intuición parece ser que coincide con la nueva orientación que, según el profesor Zadeh, debe seguir la lógica borrosa. Prueba de ello fue la celebración del primer encuentro sobre lógica borrosa e internet en el año 2001 (FLINT 2001) en la universidad de Berkeley organizado por el propio Zadeh.

2.2 CONJUNTOS DIFUSOS Y FUNCIONES CARACTERÍSTICAS

El primer ejemplo utilizado por Lofti A. Zadeh, para ilustrar el concepto de conjunto difuso, fue el conjunto "hombres altos". Según la teoría de la lógica clásica el conjunto "hombres altos" es un conjunto al que pertenecerían los hombres con una estatura mayor a un cierto valor, que podemos establecer en 1.80 metros, por ejemplo, y todos los hombres con una altura inferior a este valor quedarían fuera del conjunto. Así tendríamos que un hombre que mide 1.81 metros de estatura pertenecería al conjunto hombre altos, y en cambio un hombre que mida 1.79 metros de altura ya no pertenecería a ese conjunto. Sin embargo, no parece muy lógico decir que un hombre es alto y otro no lo es cuando su altura difiere en dos centímetros. El enfoque de la lógica difusa considera que el conjunto "hombres altos" es un conjunto que no tiene una frontera clara para pertenecer o no pertenecer a él: mediante una función que define la transición de "alto" a "no alto" se asigna a cada valor de altura un grado de pertenencia al conjunto, entre 0 y 1. Así por ejemplo, un hombre que mida 1.79 podría pertenecer al conjunto difuso "hombres altos" con un grado 0.8 de pertenencia, uno que mida 1.81 con un grado 0.85, y uno que mida 1.50 m con un grado 0.1. Visto desde esta perspectiva se puede considerar que la lógica clásica es un caso límite de la lógica difusa en el que se asigna un grado de pertenencia 1 a los hombres con una altura mayor o igual a 1.80 y un grado de pertenencia 0 a los que tienen una altura menor (figura 2.2.1).

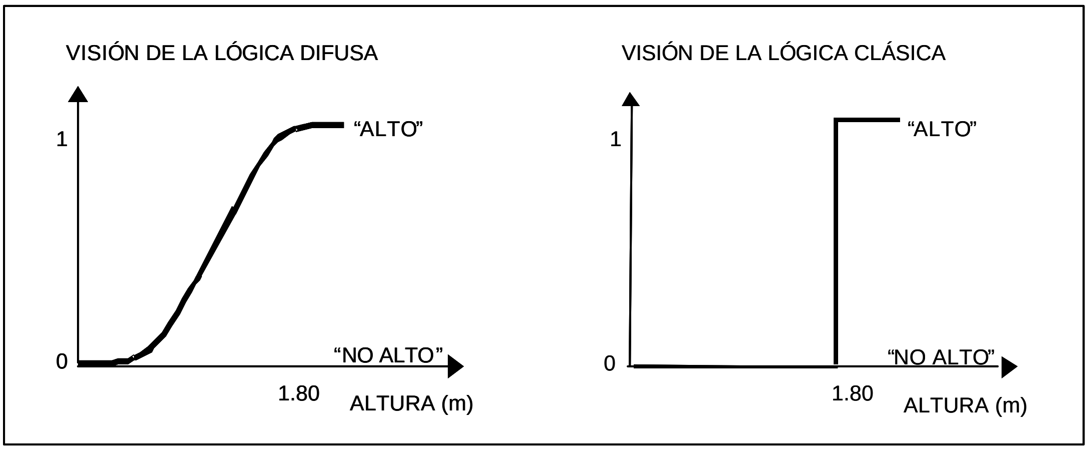

Figura 2.2.1 Lógica clásica versus lógica difusa.

Así pues, los conjuntos difusos pueden ser considerados como una generalización de los conjuntos clásicos [48]: la teoría clásica de conjuntos sólo contempla la pertenencia o no pertenencia de un elemento a un conjunto, sin embargo la teoría de conjuntos difusos contempla la pertenencia parcial de un elemento a un conjunto, es decir, cada elemento presenta un grado de pertenencia a un conjunto difuso que puede tomar cualquier valor entre 0 y 1. Este grado de pertenencia se define mediante la función característica asociada al conjunto difuso: para cada valor que pueda tomar un elemento o variable de entrada *x* la función característica $m_A(x)$ proporciona el grado de pertenencia de este valor de x al conjunto difuso *A*.

Formalmente, un conjunto clásico *A*, en un universo de discurso *U*, se puede definir de varias formas: enumerando los elementos que pertenecen al conjunto, especificando las propiedades que deben cumplir los elementos que pertenecen a ese conjunto o, en términos de la función de pertenencia $\mu_A(x)$:

$$m_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Podemos además decir que el conjunto *A* es matemáticamente equivalente a su función de pertenencia o característica $m_A(x)$, ya que conocer $m_A(x)$ es lo mismo que conocer *A*.
Un conjunto difuso en el universo de discurso *U* se caracteriza por una función de pertenencia $\mu_A(x)$ que toma valores en el intervalo [0.1], y puede representarse como un conjunto de pares ordenados de un elemento *x* y su valor de pertenencia al conjunto:

$$A = \{(x, m_A(x)) \mid x \in U\}$$

Muchos conceptos de teoría clásica de conjuntos se pueden hacer extensivos a los conjuntos difusos, otros son exclusivos e inherentes a la teoría de conjuntos difusos. Algunos de los que más utilizados son los siguientes:

- El soporte de un conjunto difuso *A* en el universo de discurso *U* es un conjunto "crisp" (numérico) que contiene todos los elementos de *U* que tienen un valor de pertenencia distinto de cero en *A*, esto es,
  $$sop(x) = \{x \in U \mid m_A(x) > 0\}$$
  Si el soporte de un conjunto difuso no contiene ningún elemento tendremos un conjunto difuso vacío. Si el soporte de un conjunto difuso es un solo punto tendremos lo que se conoce como "singleton" difuso.
- El punto de cruce de un conjunto difuso es el punto de *U* cuyo valor de pertenencia al conjunto es igual a 0.5.

- Dos conjuntos difusos *A* y *B* son iguales si y sólo si sus funciones características $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$ son iguales
- El conjunto difuso *B* contiene al conjunto difuso *A*, esto es $A \subset B$, si y sólo si $\mu A(x) \leq \mu B(x)$ para todo $x \in U$.

La función característica proporciona una medida del grado de similaridad de un elemento de *U* con el conjunto difuso. La forma de la función característica utilizada, depende del criterio aplicado en la resolución de cada problema y variará en función de la cultura, geografía, época o punto de vista del usuario. La única condición que debe cumplir una función característica es que tome valores entre 0 y 1, con continuidad. Las funciones características más comúnmente utilizadas por su simplicidad matemática y su manejabilidad son: triangular, trapezoidal, gaussiana, sigmoidal, gamma, pi, campana etc... (figura 2.2.2) [20]. Conceptualmente existen dos aproximaciones para determinar la función característica asociada a un conjunto: la primera aproximación está basada en el conocimiento humano de los expertos, y la segunda aproximación es utilizar una colección de datos para diseñar la función.

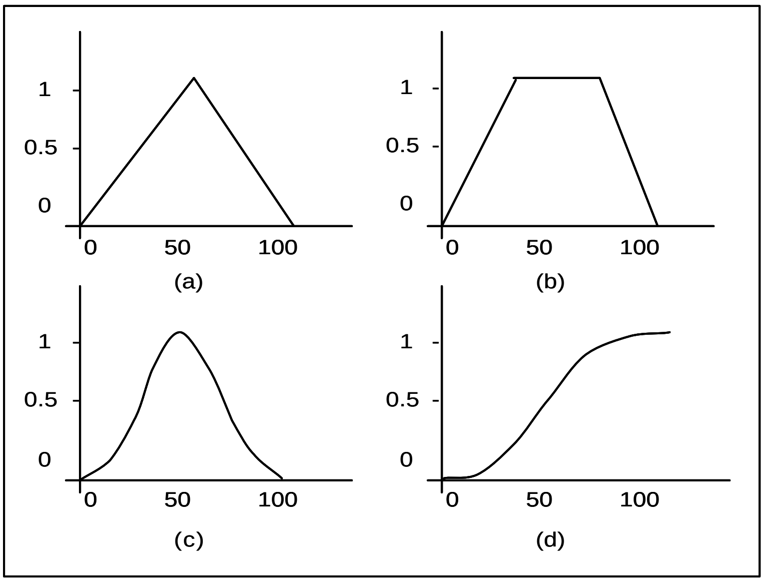

Figura 2.2.2. Algunas de las funciones características más habituales: (a) triangular, (b) trapezoidal, (c) gaussiana y (d) sigmoidal.

El número de funciones características asociadas a una misma variable es elegido por el experto: a mayor número de funciones características tendremos mayor resolución pero también mayor complejidad computacional; además estas funciones pueden estar solapadas o no, el hecho de estar solapadas pone de manifiesto un aspecto clave de la lógica difusa: una variable puede pertenecer con diferentes grados a varios conjuntos difusos a la vez , es decir, "el vaso puede estar medio lleno y medio vacío a la vez" .

2.2.1 Operaciones con conjuntos difusos

Las operaciones básicas entre conjuntos difusos son las siguientes:

- El conjunto complementario $\overline{A}$ de un conjunto difuso *A* es aquel cuya función característica viene definida por:
  $m_{\overline{A}}(x) = 1 - m_A(x)$
- La unión de dos conjuntos difusos *A* y *B* es un conjunto difuso $A \bigcup B$ en *U* cuya función de pertenencia es:
  $m_{A \cup B}(x) = máx[m_A(x), m_B(x)]$
- La intersección de dos conjuntos difusos *A* y *B* es un conjunto difuso $A \cap B$ en *U* con función característica:
  $m_{A \cap B}(x) = mín[m_A(x), m_B(x)]$

Estas tres operaciones definidas para conjuntos difusos cumplen, al igual que en la teoría clásica de conjuntos, asociatividad, conmutatividad y distributividad así como las leyes de Morgan.

Sin embargo, también hay que destacar que existen dos leyes fundamentales de la teoría clásica de conjuntos como son el Principio de contradicción: $A \cup \overline{A} = U$, y el Principio de exclusión: $A \cap \overline{A} = \Phi$ que no se cumplen en la teoría de conjuntos difusos; de hecho una de las formas para describir en qué se diferencia la teoría clásica de conjuntos de la teoría difusa es explicar que estas dos leyes en términos de fuzzy logic no se cumplen. En consecuencia, algunas de las teorías derivadas de la teoría de conjuntos como por ejemplo la de la probabilidad será muy diferente planteada en términos difusos.

Las funciones que definen la unión y la intersección de conjuntos difusos pueden generalizarse, a condición de cumplir ciertas restricciones. Las funciones que cumplen estas condiciones se conocen como Conorma Triangular (T-Conorma) y Norma

Triangular (T-Norma). Los principales operadores que cumplen las condiciones para ser t-conormas son el operador máximo y la suma algebraica $\left[m_{A\cup B}(x) = m_A(x) + m_B(x) - m_A(x)m_B(x)\right]$ y los principales operadores que cumplen las condiciones para ser t-normas son el operador mínimo y el producto algebraico $\left[m_{A\cap B}(x) = m_A(x)m_B(x)\right]$. En la mayoría de las aplicaciones a la ingeniería de la lógica difusa se usan como t-conorma el operador máximo y como t-norma los operadores mínimo o producto.

2.2.2 Relaciones difusas

Una relación difusa representa el grado de presencia o ausencia de asociación, interacción o interconexión entre elementos de dos o más conjuntos difusos, por ejemplo: "x es mayor que y". Supongamos *U* y *V* dos universos de discurso, la relación difusa *R(U,V)* es un conjunto difuso en el espacio producto *UxV* que se caracteriza por la función de pertenencia $\mu_R(x, y)$ dónde *x* pertenece a *U* e *y* pertenece a *V*, es decir,

$$R(U,V) = \{((x,y), m_R(x,y)) \mid (x,y) \in U \times V\}$$

en el caso de las relaciones difusas $\mu_R(x, y) \in [0,1]$ y en caso de las relaciones clásicas $\mu_R(x,y) = 0$ ó 1.

Como las relaciones difusas son en si mismas un conjunto difuso en el espacio producto, las operaciones entre conjuntos y los operadores definidos anteriormente también pueden ser aplicadas a ellas. Supongamos *R(x,y)* y *S(x,y)* dos relaciones en el mismo espacio producto *UxV*. La intersección o unión entre *R* y *S*, que son composiciones entre las dos relaciones, se definen como:

$$m_{R\cap S}(x,y) = m_R(x,y) * m_S(x,y)$$
$$m_{R\cup S}(x,y) = m_R(x,y) \oplus m_S(x,y)$$

dónde $*$ es cualquier t-norma, y $\oplus$ es cualquier t-conorma.

Si consideramos las relaciones difusas *R* y *S* que pertenecen a diferentes espacios producto *R(U, V)* y *S(V, W)*, por ejemplo "x es mayor que y" y "y es cercano a z", su composición difusa se define de forma análoga a la composición clásica teniendo en cuenta que en el caso difuso la relación difusa *R* tiene asociada una función característica $\mu_R(x, y)$ que toma valores en el intervalo [0,1] y la relación difusa *S* también tiene asociada una función característica $\mu_S(y,z)$ que de igual forma toma valores en el intervalo [0,1]. Entonces la composición difusa entre *R* y *S*, es decir $R \circ S$, cuando *R* y *S* pertenecen a universos discretos de discurso, se define como una relación difusa en *UxW* cuya función de pertenencia viene dada por:

$$m_{R \circ S}(x,z) = \sup_{y \in V} \left[m_R(x,y) * m_S(y,z) \right]$$

dónde el operador *sup* es el máximo y el operador $*$ puede ser cualquier t-norma. En función de la t-norma elegida podemos obtener distintas composiciones; las dos composiciones más usadas son la composición máx-min y la composición máx-product:

- La composición máx-min de las relaciones difusas *R(U, V)* y *S(V, W)*, es una relación difusa $R \circ S$ en *UxW* definida por la función de pertenencia

  $$m_{R \circ S}(x,z) = \underset{y \in V}{máx}\, mín \left[m_R(x,y), m_S(y,z) \right]$$

  dónde $(x,z) \in UxW$

- La composición máx-product de las relaciones difusas *R(U,V)* y *S(V,W)*, es una relación difusa $R \circ S$ en *UxW* definida por la función característica

  $$m_{R \circ S}(x,z) = \underset{y \in V}{máx} \left[m_R(x,y) \cdot m_S(y,z) \right]$$

  dónde $(x,z) \in UxW$.

2.3 INFERENCIA DIFUSA

Se llama *reglas difusas* al conjunto de proposiciones IF-THEN que modelan el problema que se quiere resolver. Una regla difusa simple tiene la forma:

"si *u* es *A* entonces *v* es *B*"

dónde *A* y *B* son conjuntos difusos definidos en los rangos de "*u*" y "*v*" respectivamente. Una regla expresa un tipo de relación entre los conjuntos A y B cuya función característica sería $m_{A \to B}(x, y)$ y representa lo que conocemos como implicación lógica. La elección apropiada de esta función característica está sujeta a las reglas de la lógica proposicional.

Como es bien sabido se puede establecer un isomorfismo entre la teoría de conjuntos, la lógica proposicional y el álgebra booleana que garantiza que cada teorema enunciado en una de ellas tiene un homólogo en las otras dos. La existencia de estos isomorfismos nos permitirá traducir las reglas difusas a relaciones entre conjuntos difusos y éstas a términos de operadores algebraicos con los que podremos trabajar.

2.3.1 Fundamentos de lógica proposicional

En la teoría de la lógica clásica una proposición sólo puede ser cierta o falsa, no admite términos medios; además las proposiciones pueden combinarse de muchas maneras, utilizando tres operaciones fundamentales:

- Conjunción ($p \wedge q$): las dos proposiciones son ciertas simultáneamente
- Disyunción ($p \vee q$): cualquiera de las dos proposiciones es cierta
- Implicación ($p \to q$): el cumplimiento o la verdad de una de las proposiciones tiene como consecuencia el cumplimiento de la otra; generalmente toma la forma de una regla si-entonces. La parte de la regla encabezada por el condicional si, "si *u* es *A*", es el antecedente o premisa de la regla, mientras que la parte encabezada por entonces, "entonces *v* es *B*", es el consecuente o conclusión de la regla.

También existe el operador

- negación (~p) que invierte el sentido de la proposición.

La tabla de verdad (tabla 2.3.1.1) de estas operaciones que se pueden realizar entre las proposiciones es la que se muestra a continuación:

P	Q	$p \wedge q$	$P \vee q$	$p \rightarrow q$	~p
V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V

Tabla 2.3.1.1 Tabla de verdad de las principales operaciones lógicas

Algunas equivalencias de estos operadores con los operadores utilizados en teoría de conjuntos son las siguientes (tabla 2.3.1.2):

Lógica proposicional	Teoría de conjuntos
$\wedge$	$\cap$
$\vee$	$\cup$
~	–

Tabla 2.3.1.2 Correspondencia entre operadores lógicos y de teoría de conjuntos

Y con los operadores algebraicos (tabla 2.3.1.3):

Lógica proposicional	Álgebra de Boole
V	1
F	0
$\wedge$	x
$\vee$	+
~	‘
$\leftrightarrow$	=
P,q,r	a,b,c

Tabla 2.3.1.3 Correspondencia entre operadores lógicos y algebraicos

dónde la comilla ‘ representa el complementario y a,b,c son elementos del conjunto [0,1].

Una tautología se define como una proposición formada por la combinación de otras proposiciones y cuya verdad es independiente de la certeza o falsedad de las proposiciones que la forman. La tautología más importante para el ámbito en el que trabajamos es:

$$(p \to q) \leftrightarrow \sim [\mathrm{p} \wedge (\sim \mathrm{q})]$$

que también puede ser expresada como:

$$(p \to q) \leftrightarrow \sim (\mathrm{p}) \vee \mathrm{q}$$

La importancia de las tautologías reside en que nos permitirán expresar la función característica de la relación de implicación p→q en términos de las funciones características de p, q , ~p y ~q.

En la teoría clásica proposicional existen dos importantes reglas de inferencia, el *Modus Tollens* y el *Modus Ponens*:

- El Modus Ponens o razonamiento directo puede resumirse de la siguiente forma:
  Premisa 1: "*x* es *A*"
  Premisa 2: "SI *x* es *A*, ENTONCES *y* es *B*"
  Consecuencia: "*y* es *B*"
  El Modus Ponens está asociado a la implicación "*A* implica *B*" (*A*®*B*) y en términos de lógica proposicional se expresa: (p∧(p→q))→q.
- El Modus Tollens o razonamiento inverso que puede resumirse de siguiente forma:
  Premisa 1: "*y* es No *B*"
  Premisa 2: "SI *x* es *A* ENTONCES *y* es *B*"
  Consecuencia: "*x* es NO *A*"
  En términos de lógica proposicional esto se expresa: $(\overline{q} \wedge (\mathrm{p} \to \mathrm{q})) \to \overline{p}$.

El Modus Ponens es el utilizado en las aplicaciones de la lógica a la ingeniería ya que conserva la relación causa-efecto mientras que el Modus Tollens apenas se utiliza.

2.3.2 Implicación difusa

Al igual que para describir las nociones básicas de la teoría de conjuntos difusos podemos establecer un paralelismo con las de la teoría clásica de conjuntos, también los fundamentos de la teoría de la lógica difusa parten y toman los conceptos fundamentales de la lógica clásica.

Como ya hemos visto, en términos de teoría de lógica difusa la proposición "SI *u* es *A*, ENTONCES *v* es *B*" donde $u \in U$ y $v \in V$, tiene asociada una función característica $m_{A \to B}(x, y)$ que toma valores en el intervalo [0,1]. Es decir, cada una de las reglas o proposiciones if-then es a su vez un conjunto difuso con su función característica que mide el grado de verdad de la relación de implicación entre *x* e *y*. Ejemplos de posibles funciones características asociadas, extraídas de aplicar las analogías entre operadores y la tautología antes mencionada, son:

$$m_{A\to B}(x,y) = 1 - m_{A \cap B}(x,y) = 1 - \min\left[m_A(x), 1 - m_B(y)\right]$$
$$m_{A\to B}(x,y) = \max\left[1 - m_A(x), m_B(y)\right]$$
$$m_{A\to B}(x,y) = 1 - m_A(x)(1 - m_B(y))$$

En lógica difusa el Modus Ponens se extiende a lo que se llama Modus Ponens Generalizado y que puede resumirse de la siguiente forma:

Premisa 1: "*u* es *A**"
Premisa 2: "SI *u* es *A* ENTONCES *v* es *B*"
Consecuencia: "*v* es *B**"

En dónde el conjunto difuso *A** no tiene por qué ser necesariamente el mismo que el conjunto difuso *A* del antecedente de la regla y el conjunto difuso *B** tampoco tiene por qué ser necesariamente el mismo que el conjunto difuso *B* que aparece en el consecuente de la regla.

Como vemos en lógica clásica una regla se ejecuta sólo si la primera premisa es exactamente la misma que el antecedente de la regla y el resultado de cada regla ejecutada es exacto al consecuente, en cambio en lógica difusa, una regla es ejecuta si existe un grado de similaridad distinto de cero entre la primera premisa y el antecedente de la regla y el resultado de la ejecución de la regla es un consecuente que tiene un grado de similaridad distinto de cero con el consecuente de la regla.

Así pues el Modus Ponens generalizado es una composición difusa en la que la primera relación difusa es el conjunto difuso *A** y que puede expresarse:

$$m_{B*}(y) = \sup_{x \in A*1} \left[m_{A*}(x) * m_{A \to B}(x, y) \right]$$

teniendo en cuenta que, en las aplicaciones de la lógica difusa a la ingeniería la función característica de la implicación se construye con los operadores mínimo y producto, que además de ser los más simples conservan la relación causa-efecto, tendremos dos opciones a elegir:

$$m_{A \to B}(x, y) = \min \left[m_A(x), m_B(y) \right]$$
$$m_{A \to B}(x, y) = m_A(x) \cdot m_B(y)$$

2.3.3 Reglas difusas

Una regla difusa base es un conjunto de reglas SI-ENTONCES que pueden ser expresadas de la siguiente forma:

R^m: SI u_1 es $A_1^{\,m}$ y u_2 es $A_2^{\,m}$ y .... u_p es $A_p^{\,m}$,
ENTONCES v es B^m
Con m=1,2,..., M
Y donde A_i^m y B^m son conjuntos difusos en $U_i \subset Â$ (números reales) y $V Ì Â$ respectivamente, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ $Î$ U_1 x U_2 x ... x U_n y v $Î$ V, y $x = x_1, x_2, ..., x_n$ $Î$ U e y $Î$ V son los valores numéricos concretos de u y v, también respectivamente.

Vemos que esta regla tiene además la particularidad de que es un regla multi antecedente; este tipo de reglas, que combina varias variables en el antecedente, es el más utilizado en el diseño de sistemas difusos. Un sistema difuso estará formado por varias reglas difusas base con diferentes consecuentes, ya que una regla con multi antecedente y multi consecuente siempre podrá ser descompuesta en un conjunto de reglas base con multi antecedente pero un solo consecuente.

Existen dos caminos para obtener el conjunto de reglas correspondiente a un conjunto de datos numéricos:

- Dejar que los datos establezcan los conjuntos difusos que aparecen en los antecedentes y los consecuentes
- Predefinir los conjuntos difusos para antecedentes y consecuentes y luego asociar los datos a esos conjuntos

Para llegar a obtener el conjunto completo de reglas que modelan un problema se puede partir de considerar todas las combinaciones de reglas P_t que es posible establecer teóricamente, entre el número de antecedentes p y el número de conjuntos difusos de entrada A_p considerados para cada antecedente. Así, para cada consecuente, el número teórico de reglas posibles será:

$$P_t = \prod_n A_n \quad \text{para } n = 1....p;$$

Sin embargo entre estas P_t reglas teóricamente posibles para cada consecuente, habrá algunas que no tengan sentido físico y otras que no se ajusten a las características del problema a resolver. Se deberá pues seleccionar, de entre todas las reglas posibles, el conjunto de reglas más adecuadas al problema que se considera.

2.4 DIAGRAMA DE BLOQUES DE UN SISTEMA BASADO EN TÉCNICAS DE LÓGICA DIFUSA

El esquema de un sistema basado en técnicas de lógica difusa se presenta en la figura 2.4.1.

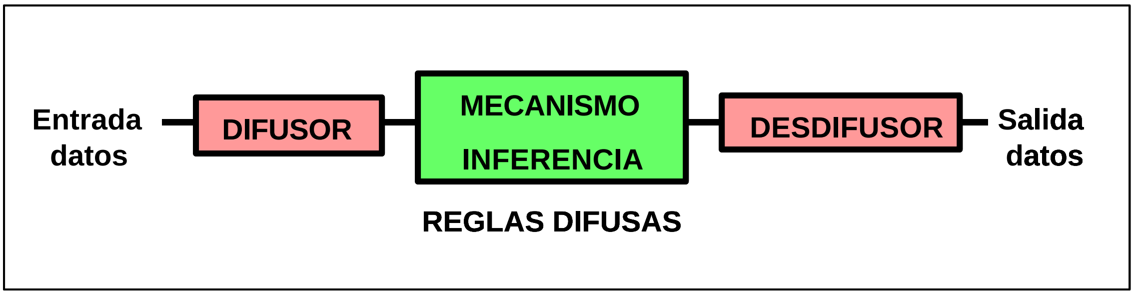

Figura 2.4.1 Esquema general de un sistema basado en lógica difusa

Está compuesto por los siguientes bloques

- **BLOQUE DIFUSOR**: bloque en el que a cada variable de entrada se le asigna un grado de pertenencia a cada uno de los conjuntos difusos que se ha considerado, mediante las funciones características asociadas a estos conjuntos difusos. Las entradas a este bloque son valores concretos de las variables de entrada y las salidas son grados de pertenencia a los conjuntos difusos considerados.

- **BLOQUE DE INFERENCIA**: bloque que, mediante los mecanismos de inferencia que veremos más adelante, relaciona conjuntos difusos de entrada y de salida y que representa a las reglas que definen el sistema. Las entradas a este bloque son conjuntos difusos (grados de pertenencia) y las salidas son también conjuntos difusos, asociados a la variable de salida.

- **DESDIFUSOR***:* bloque en el cual a partir del conjunto difuso obtenido en el mecanismo de inferencia y mediante los métodos matemáticos de desdifusión, se obtiene un valor concreto de la variable de salida, es decir, el resultado.

2.4.1 MECANISMOS DE INFERENCIA

Los mecanismos de inferencia son aquellos en los que se usan los principios de la lógica difusa explicados en el apartado 2.3 (inferencia difusa) para realizar un mapeo de los conjuntos difusos de entrada a los conjuntos difusos de salida. Cada regla es interpretada como una implicación difusa. Es decir, el bloque de inferencia es aquel en el cual se realiza la "traducción matemática" de las reglas difusas: estas reglas modelan el sistema pero para poder trabajar con ellas y extraer un resultado se debe de evaluar matemáticamente la información que reflejan. Como ya se ha mencionado anteriormente, las reglas más utilizadas para diseñar un sistema basado en lógica difusa toman la forma:

"SI u_1 es A_1 y u_2 es A_2 y u_3 es A_3 ENTONCES v es B "

Podemos decir que la implicación de cada regla (el conectivo lógico ENTONCES) es un conjunto difuso cuya función característica sería:

$m_{A \to B}(x, y)$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$

El resultado de evaluar el multi-antecedente también resultaría un conjunto difuso con función característica:

$$m_{A_x}(x) = m_{x_1}(x_1) * m_{x_2}(x_2) * \ldots * m_{x_p}(x_p)$$

donde $*$ representa una t-norma.

Además, como ya hemos visto en el apartado anterior de inferencia difusa podemos asociar las reglas difusas al modus ponens generalizado: cada regla R_m determina un conjunto difuso B_m que es el resultado de la composición entre el conjunto difuso resultante de evaluar el antecedente y el conjunto difuso resultante de la implicación, es decir, $B_m = A_x \circ R_m$. La función característica asociada a estos conjuntos difusos de salida, como ya se ha visto, es:

$$m_{B^m}(y) = m_{A_x} \circ R^m = \sup_{x \in A_x} \left[m_{A_x}(x) * m_{A \to B}(x, y) \right]$$

Y finalmente, el conjunto difuso de salida $B = A_x \circ [R_1, R_2, \ldots, R_m]$, es el resultado de la agregación de todas las reglas que componen la regla base, es decir, de la combinación de los conjuntos difusos B_m resultantes de todas las reglas. Esta combinación se realiza generalmente mediante una t-conorma ya que, aunque no hay una razón teórica convincente que argumente que sea ésta la única manera de hacerlo (de hecho existen y funcionan los sistemas difusos aditivos y la adición no es una t-conorma), en aplicaciones a la ingeniería se obtienen resultados correctos y razonables usando este tipo de operadores. Entonces concluimos que:

$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_M$.

A la vista de lo anteriormente expuesto, queda claro que para procesar la información contenida en las reglas y obtener un resultado se deben elegir los operadores matemáticos que corresponden a los siguientes operadores lógicos:

- Los conectivos lógicos entre antecedentes, es decir, los operadores Y (AND, *), O (OR, $\oplus$) y NO (NOT, $\overline{\ }$):

  "SI u_1 es A_1 y u_2 es A_2 y u_3 es A_3 ENTONCES v es B"

- El operador lógico ENTONCES ($\rightarrow$): implicación.

Además, esto debe realizarse para un conjunto de reglas mediante:

- La unión del resultado de todas las reglas ($\oplus$): agregación.

Vamos a ver cómo se realizan estas tres operaciones.

2.4.1.1 Conectivos lógicos entre antecedentes

Como ya se ha mencionado anteriormente, se puede considerar que la lógica clásica es un caso límite de la lógica difusa. En este caso límite, las tablas de verdad de los operadores lógicos clásicos y las de los operadores lógicos difusos deben coincidir [49]. Considerando las tablas clásicas de verdad de los operadores AND, OR y NOT (Tablas 2.4.1.1.1):

A	B	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	OR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	NOT A
0	1
1	0

Tablas 2.4.1.1.1 Tablas clásicas de verdad de los operadores and, or y not.

Se establece una equivalencia entre la lógica clásica y la lógica difusa, teniendo en cuenta que, la equivalencia de estas tablas de verdad en lógica difusa debe preservar estos resultados y extender los demás valores a números reales entre 0 y 1. Como ya hemos visto anteriormente, una posibilidad para esta equivalencia consiste en la siguiente generalización de los conectivos lógicos:

- AND ⇒ t-norma
- OR Þ t-conorma
- NOT Þ operadores negación

En este caso las mismas tablas de verdad para la lógica difusa serían (fig 2.4.1.1.2):

A	B	T-norma(A,B)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	T-conor(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	compl
0	1
1	0

Tablas 2.4.1.1.2. Tablas de verdad para los operadores and, or y not difusos.

La misma información expresada de manera gráfica sería la siguiente (figura 2.4.1.1.3):

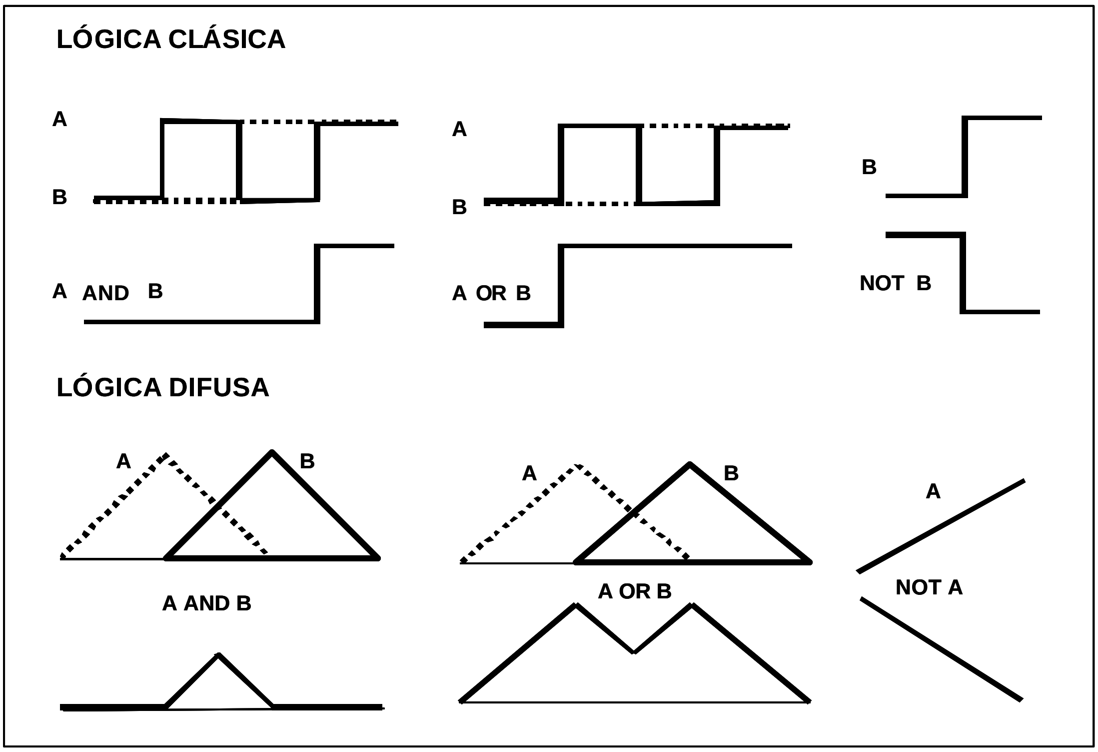

Figura 2.4.1.1.3 Actuación de los operadores and, or y not, según la lógica clásica y la lógica difusa

Como ya hemos visto en apartados anteriores, la intersección (AND) de dos conjuntos difusos A y B se modela mediante una familia de operadores llamados *t-normas*, siendo el *mínimo* y el *producto algebraico*, los dos casos de t-normas más sencillos y utilizados. Igualmente, la unión (OR) de dos conjuntos difusos se modela mediante otra familia de operadores llamados *t-conormas* o s-normas, cuyo representante más habitual es el *máximo.* Por último la negación (NOT) también tiene una familia de operadores para ser modelada, siendo la *complementariedad aditiva* uno de los más habituales.
Así, sustituyendo en cada regla los conectivos lógicos entre antecedentes por uno de sus operadores lógicos equivalentes, se podrá operar con los escalares que representa cada antecedente y obtener como resultado del multi-antecedente un escalar.

Considerando que el antecedente de una regla tiene la forma:

"Si x_1 es A_1 y x_2 es A_2 y x_3 es A_3........si x_p es A_p......"

- Si traducimos el operador lógico "y" mediante la operación mínimo (min), el antecedente será el resultado de:

$$\min\left\{m_{A_1}(x_1), m_{A_2}(x_2), ..., m_{A_p}(x_p)\right\}$$

- Si traducimos el operador lógico "y" mediante el producto (prod), el antecedente será el resultado de:

$$prod\left\{m_{A_1}(x_1), m_{A_2}(x_2), ..., m_{A_p}(x_p)\right\}$$

2.4.1.2 <u>Implicación difusa. Superficies de implicación</u>

El conectivo lógico ENTONCES representa la *implicación* entre antecedente y consecuente. Como ya hemos visto anteriormente, para que se cumpla la equivalencia entre lógica proposicional o clásica y lógica difusa [50], se debe traducir por una *t-norma*, cuyos representantes más utilizados en el ámbito de la ingeniería son el mínimo y el producto algebraico ya que preservan la relación causa-efecto y el sentido físico.

En cada regla, la implicación se realiza de la siguiente manera:

- Si se elige el operador mínimo para realizar la implicación:

$$m_{B_m*}(y) = \text{mín}\{\text{"escalar resultado del antecedente"}, \; m_{B_m}(y)\}$$

Es decir, el escalar resultante del antecedente modifica el conjunto difuso de salida (su función característica) y pasa de ser B a ser B*. Gráficamente, la función característica del conjunto difuso de salida quedará truncada por el valor escalar que resulte del antecedente.

- Si se elige el operador producto

$$m_{B_m*}(y) = \text{prod}\{\text{"escalar resultado del antecedente"}, \; m_{B_m}(y)\}$$

Gráficamente, la función característica del conjunto difuso de salida quedará escalada según el valor del antecedente.

Cada regla define una superficie de implicación: para cada posible valor del antecedente, se puede obtener el conjunto difuso que resulta de realizar la implicación; la superposición de todos estos conjuntos difusos forma la superficie de implicación de esa regla. Todas las reglas que tienen el mismo consecuente, (elegido un operador para realizar la implicación), definirán la misma superficie de implicación ya que la superficie se construye para todos los valores que puede tomar el antecedente. Al particularizar la implicación para el antecedente resultante de cada regla, se obtiene el resultado concreto de esa regla, representado en la superficie de implicación por la intersección de esta superficie con el plano vertical que pasa por el valor del antecedente.

2.4.1.3 <u>Agregación lógica</u>

Una vez evaluadas todas las reglas y obtenidos los conjuntos difusos de salida modificados, hay que realizar la agregación de todas las reglas para obtener un resultado único de la actuación de todas ellas [51]. Esta agregación es una unión lógica y una vez más para conservar la equivalencia entre lógicas clásica y difusa se traduce por una t-conorma: máximo o suma algebraica, obteniéndose así el conjunto difuso de salida, asociado a la variable de salida:

- Si se elige el operador máximo para realizar la agregación, el conjunto difuso de salida será :

$$m_B(y) = \max\left\{m_{B_1^*}(y), m_{B_2^*}(y), \ldots m_{B_m^*}(y)\right\}$$

- Si se elige el operador suma, el resultado de la agregación será :

$$m_B(y) = sum\left\{m_{B_1*}(y), m_{B_2*}(y), \ldots m_{B_m*}(y)\right\}$$

2.4.2 Métodos de desdifusión

El bloque desdifusor realiza la función contraria al difusor. El difusor tiene como entradas valores concretos de las variables de entrada y como salidas grados de pertenencia a conjuntos difusos (entre 0 y 1). La entrada al bloque desdifusor es el conjunto difuso de salida, resultado del bloque de inferencia y la salida es un valor concreto de la variable de salida. Para obtener, a partir del conjunto difuso de salida que resulta de la agregación de todas las reglas, un resultado escalar, se aplican métodos matemáticos. Ejemplos sencillos de algunos de estos métodos de cálculo son:

- **Método del máximo**: se elige como valor para la variable de salida aquel para el cual la función característica del conjunto difuso de salida es máxima. En general no es un método óptimo, ya que este valor máximo puede ser alcanzado por varias salidas.

- **Método del centroide**: utiliza como salida del sistema el centro de gravedad de la función característica de salida. Matemáticamente :

$$\bar{y} = (\int y m_B(y)dy)/(\int m_B(y)dy)$$

Es el método más utilizado en aplicaciones de la lógica difusa a la ingeniería ya que se obtiene una solución única, aunque a veces es difícil de calcular.

- **Método de la altura**: se calcula para cada regla el centro de gravedad del conjunto difuso de salida B_m y después se calcula la salida del sistema como la media ponderada:

$$y_h = (\int \bar{y}_m m_{B_m}(\bar{y}_m)dy)/(\int m_{B_m}(\bar{y}_m)dy)$$