

MODELOS CONSTITUTIVOS PARA LAS ALEACIONES CON MEMORIA DE FORMA NiTi: ANÁLISIS E IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Introducción

2.1. Modelos constitutivos para las aleaciones con memoria de forma

- 2.1.1. Modelos constitutivos micromecánicos
- 2.1.2. Modelos constitutivos micro-macro mecánicos
- 2.1.3. Modelos constitutivos macromecánicos

2.2. Análisis y reformulación de modelos macromecánicos unidimensionales

- 2.2.1. Modelo de Tanaka
 - 2.2.1.1. Reformulación del modelo de Tanaka
 - 2.2.1.2. Análisis y consideraciones del modelo de Tanaka
- 2.2.2. Modelo de Liang y Rogers
 - 2.2.2.1. Reformulación del modelo de Liang y Rogers.
 - 2.2.2.2. Análisis y consideraciones del modelo de Liang y Rogers
- 2.2.3. Modelo de Brinson
 - 2.2.3.1. Reformulación del modelo de Brinson
 - 2.2.3.2. Análisis y consideraciones del modelo de Brinson
- 2.2.4. Modelo de Auricchio: lineal y exponencial
 - 2.2.4.1. Reformulación del modelo de Auricchio exponencial y lineal
 - 2.2.4.2. Análisis y consideraciones del modelo de Auricchio exponencial y lineal.

2.3. Implementación numérica de los modelos analizados

- 2.3.1. Procedimiento para la implementación numérica
- 2.3.2. Implementación numérica del modelo de Tanaka
- 2.3.3. Implementación numérica del modelo de Liang y Rogers
- 2.3.4. Implementación numérica del modelo de Brinson
- 2.3.5. Implementación numérica del modelo de Auricchio lineal.
- 2.3.6. Implementación numérica del modelo de Auricchio exponencial

2.4. Comprobación de las previsiones numéricas de los modelos seleccionados

INTRODUCCIÓN

El comportamiento de las aleaciones con memoria de forma es suficientemente complejo como para que el diseño de cualquier aplicación que explote todas sus propiedades requiera de un modelo constitutivo adecuado que capture todas las peculiaridades de una forma precisa. La necesidad de un análisis más preciso del comportamiento termomecánico de las SMA, así como la creciente necesidad de herramientas computacionales efectivas adecuadas a los niveles de sofisticación de las aplicaciones SMA, han creado un campo de desarrollo, cada vez más interesante, de modelos matemáticos capaces de describir ese comportamiento de forma adecuada.

Sin embargo, la gran variación de modelos desarrollados y existentes en la literatura induce fácilmente a cierto grado de confusión a la hora de aplicar estos materiales. Por tanto, en este capítulo se clasifican algunos de los modelos más extendidos en la literatura, haciendo una distinción entre los modelos desarrollados a nivel micromecánico, micro-macro mecánico y macromecánico. Posteriormente, nos centramos en el análisis detallado de cuatro modelos seleccionados que tratan con cantidades macroscópicas, como tensión y deformación. Estos modelos seleccionados de particular interés, se presentan en una notación unificada, destacando todas sus peculiaridades y permitiendo así, la comparación directa entre los modelos presentados. Por otro lado, dado que un incremento en la complejidad de las aplicaciones de las SMA requiere, necesariamente, que existan herramientas computacionales capaces de soportar los procesos de diseño, se procede a la implementación numérica de dichos modelos macromecánicos seleccionados. Una forma común de evaluar los diferentes modelos es mediante simulaciones numéricas puesto que, modelos que pueden ser simples y eficientes numéricamente, quizás no predicen con precisión el comportamiento del material, o viceversa. Es importante que un modelo constitutivo sea capaz de reproducir el complejo comportamiento termomecánico de las SMA pero que requieran, a ser posible, una solución numérica robusta con recursos computacionales limitados y tiempos discretos de cálculo. De igual forma que existe en la literatura una gran contribución en modelos constitutivos, no ocurre así con respecto a la implementación numérica de esos modelos y, de los modelos implementados

numéricamente, muchos autores no dan demasiados detalles sobre los esquemas numéricos utilizados.

Para conseguir estos objetivos el presente Capítulo 2 se estructura de la siguiente forma: en un primer apartado, se clasifican los modelos encontrados en la literatura y desarrollados tanto en el ámbito micromecánico, mesomecánico (o micro-macromecánico) como macromecánico. En un segundo apartado, se seleccionan 4 modelos macromecánicos que cumplen con un requisito fundamental: utilizan para su implementación parámetros constitutivos obtenibles mediante técnicas experimentales, conduciendo así, a modelos de aparente sencillez y fiabilidad para el diseño. Estos modelos se presentan y analizan detalladamente, en el apartado 2, en notación unificada, tanto en los parámetros como en los rangos de aplicación (para tensión y temperatura) y se implementan numéricamente en el apartado 3, también bajo algoritmos unificados, para poder compararlos tanto en facilidad de uso como en tiempo de computación y resultados de cálculo. *Además, se introducen variaciones a los modelos originales tales como, por ejemplo, la consideración de parámetros materiales no constantes así como diferentes leyes de variación para esos parámetros materiales.* Por otro lado, la implementación numérica se realiza teniendo en cuenta, como parámetros de control, la deformación (strain-driven) y la temperatura, con la consecuente complejidad numérica que se deriva de todo ello. En todos los casos la implementación numérica se realiza desarrollando una programación propia en MATLAB v6. Por último, en el apartado 4, se realizan una serie de simulaciones numéricas para comprobar las previsiones de los resultados para diferentes estados de carga (isotérmica, ciclado superelástico, tensión constante y deformación constante). Estas simulaciones se realizan para diferentes condiciones iniciales y finales, puesto que una de las principales características de las aleaciones con memoria de forma es su dependencia de la historia termomecánica previa. Esta dependencia debe ser capturada adecuadamente por los modelos y su implementación numérica, siendo especialmente complejo en el caso de tensión y deformación constante. Sólo haciendo un conjunto de simulaciones suficientemente completo, bajo diferentes condiciones iniciales y finales de transformación, es posible comprobar la bondad de los modelos y de los algoritmos, así como su capacidad de reproducir los comportamientos más complejos.

No existe en la literatura consultada ningún estudio donde se comparen y analicen con esta profundidad los cuatro modelos macromecánicos presentados en este trabajo, ni tampoco donde se implementen numéricamente en control por deformación y se simulen en diversos estados de carga para proceder a su comparación.

Este análisis comparativo numérico se completa en el Capítulo 4, donde se comparan los modelos con los valores experimentales para los parámetros constitutivos obtenidos en el Capítulo 3; y en el Capítulo 5 donde se validan las ecuaciones constitutivas mediante el desarrollo de un modelo de flexión para viga empotrada implementado numéricamente y verificado experimentalmente.

2.1 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA LAS SMA

En este apartado se realiza una revisión de los modelos constitutivos realizados para las aleaciones SMA. El objetivo de esta revisión es intentar aclarar cuál es el estado actual en esta área de investigación indicando los modelos existentes remarcando las diferencias entre ellos para poder centrarnos, posteriormente, en los modelos seleccionados. Para una revisión más exhaustiva y detallada de los modelos constitutivos, podemos referirnos a [AUR,2001] [JIA, 1996], [BIR,1997], [SCHR, 1998]

En general, los modelos constitutivos que analizan el comportamiento en deformación de los materiales están tradicionalmente motivados por una de las dos siguientes necesidades [GAL,2000]:

- Desarrollo de modelos constitutivos para la implementación en herramientas de análisis explícitas como, por ejemplo, métodos numéricos.
- Modelos constitutivos desarrollados exclusivamente para profundizar cuantitativamente en las relaciones entre variables de entrada microestructurales y la respuesta macroscópica tensión-deformación.

Los modelos que abordan la primera condición son llamados generalmente *modelos fenomenológicos*, y se suelen enmarcar dentro de los llamados *modelos macromecánicos*, pues generalmente describen el comportamiento del material en base a parámetros cuantificables experimentalmente pero a costa de ignorar los detalles de los mecanismos microestructurales. Los modelos que satisfacen la segunda condición son los llamados *modelos micromecánicos* y generalmente requieren un esquema de regulación para traspasar a mayor escala y, por tanto, no están definidos por un conjunto de ecuaciones en forma cerrada. Existe una tercera aproximación intermedia, denominados modelos *mesomecánicos* o *micromacromecánicos* y que utilizan conceptos mezclados de los anteriores para una mejor comprensión de los fenómenos microscópicos inherentes al comportamiento de las SMA.

2.1.1. Modelos constitutivos micromecánicos

Estos modelos están basados en la descripción de los efectos que ocurren a nivel microscópico, como la nucleación, el movimiento de las interfaces, el crecimiento de las maclas, etc. En general, no consideran las fracciones de volumen de material como variables internas a priori, sino como consecuencia de los movimientos de las interfaces. Sin embargo, para limitar la complejidad, muchos de los modelos tratan con una única interfaz pese a que los procesos de transición reales están caracterizados generalmente por un alto número de nucleaciones. Por tanto, los modelos micromecánicos son mucho más adecuados para el desarrollo de un trabajo fundamental que para la descripción cuantitativa de los efectos macroscópicos [GAL,2000]. Dentro de este grupo podemos encontrar los modelos de:

- *Müller et al* [MÜL,1979],[MÜL,1989],[MÜL,1991] propusieron un modelo basado en las termodinámicas, estadística física y energía libre de los materiales ferroeléctricos y ferromagnéticos, extendiéndolo a la relación constitutiva de las aleaciones con memoria de forma. Los efectos de la temperatura se describieron como una fluctuación de la energía de las partículas en el pozo potencial, definido por la profundidad de ese pozo potencial. Se supone que coexisten dos fases de SMA en este modelo, donde cada fase tiene su propia energía libre. Con este modelo se comprende muy bien el fenómeno de la transformación y los

cambios asociados en el comportamiento del material. Sin embargo, su aplicación al diseño de elementos ingenieriles es difícil y compleja, entre otras cosas por la dificultad de evaluar las propiedades de la microestructura en cada proceso.

- **Falk** [FAL,1980],[FAL,1987] desarrolló un modelo unidimensional basado en la teoría clásica de Landau-Devonshire para derivar una expresión de la energía libre de Helmholtz polinomial de 6° orden en función de tensión y temperatura. En una primera aproximación se limitaba la discusión a un monocristal y dentro del contexto unidimensional y posteriormente [FAL,1989] extrapoló el comportamiento del policristal a partir del caso monocristal.
- **Hoffman et al** [HOF,1986],[HOF,1987] también propusieron un modelo basado en la ecuación generalizada de la energía libre función de la temperatura absoluta y la deformación, derivando una ecuación diferencial unidimensional que gobernaba el proceso termomecánico de las aleaciones. Sin embargo, la compleja simulación numérica en la que se basa, hace difícil su utilización en ciertas aplicaciones.
- **Knowles et al:** [ABE,1990], [ABE,1991], [ABE,1993], [ABE,1994], [ABE,1997], [ABE,1998], propusieron un modelo unidimensional para establecer los criterios para la nucleación de las fases basándose en barreras energéticas que deben ser superadas para que se produzca la transformación, además de unas leyes de evolución basadas en la cinética de transformación entre fases. Muchos de estos modelos se basan una función de energía libre multipozo, un criterio de nucleación basado en el concepto de barrera de energía y una ley cinética de la interfase, basada en una teoría de activación térmica. [BHA,1991],[BHA,1997],[BHA,1999]. Como peculiaridad de estos modelos es que consideran las transformaciones inducidas por tensión debido a variaciones prescritas de deformación a alta velocidad. Como resultado, se absorbe y cede calor durante la transformación y las fronteras móviles de fase se comportan como fuentes de calor pese a que el proceso sea esencialmente isotérmico, pudiendo predecir la relación entre la tensión y la deformación a altos ratios de aplicación de la carga [ABE, 1994]. Es por esta razón que algunos autores

denominan y clasifican este modelo dentro de los modelos no-isotérmicos [JIA,1996].

2.1.2. Modelos constitutivos micro-macromecánicos

Los modelos micro-macromecánicos utilizan las leyes de la termodinámica para describir la transformación, y utilizan la micromecánica para establecer la respuesta del material basándose en el comportamiento de pequeñas subunidades durante la transformación. Para modelos de SMA en policristales, los métodos micromecánicos se utilizan a dos niveles: primero se establece la respuesta del monocristal basándose en la formación de variantes y se pasa a policristal uniendo el comportamiento de granos de monocristal. Muchos de esos modelos tienen en cuenta las deformaciones por transformación de las variantes de martensita y otros consideran la autoacomodación de las variantes, la reorientación, la interacción entre variantes y otras características de la transformación martensítica. Todos los modelos combinan, por tanto, ingredientes micromecánicos como planos habituales, variantes de martensita, etc. y termodinámicas macroscópicas, obteniendo las cantidades macroscópicas (o globales) de las cantidades microscópicas (o locales) mediante las adecuadas técnicas de homogenización. En general, los modelos micro-macromecánicos utilizan una expresión de la energía libre de Helmholtz compuesta de tres términos: una variación de energía química asociada a la transición de fase y que generalmente se asume que depende de la temperatura de equilibrio termoquímico y de la fracción de volumen de martensita; una energía de superficie, es decir, asociada a la presencia de una interfaz entre martensita y austenita; y una energía mecánica suma del trabajo mecánico externo (o macro) y que corresponde al trabajo de las cargas exteriores (o macro tensiones) contra las macro-deformaciones, y del trabajo mecánico interno, que corresponde al trabajo realizado por las microtensiones contra las micro deformaciones. Este trabajo interno es consecuencia de las incompatibilidades en las deformaciones entre martensita y austenita o entre las propias variantes. En el caso de policristales, además incluye las incompatibilidades entre granos. Los diferentes modelos micro-macromecánicos generalmente se distinguen en la evaluación de dicha energía mecánica interna y en el esquema de

transición para pasar del análisis del monocristal al policristal. Entre los diferentes modelos, destacamos los siguientes [AUR,2001]:

- **Patoor et al** [PAT,1988]. Separó la energía de interacción del monocristal en dos contribuciones, la primera relativa a la interacción entre martensita y austenita, y la segunda relativa a la interacción entre diferentes variantes de martensita. La extrapolación al caso de policristal se realiza a través de una técnica específica de homogenización. Inicialmente, el modelo se limitaba al rango superelástico isotérmico y era capaz de predecir diferente respuesta en tracción y compresión. Posteriormente [PAT,1994],[ENT,1995] presentaron una extensión del modelo anterior incluyendo el comportamiento dependiente de la temperatura.
- **Siredey et al** [SIR,1999] se centraron en la transición del monocristal al policristal, considerando detalladamente diferentes microestructuras posibles, distinguiendo entre sub-granos (caracterizados por la presencia de una única variante) y dominios de grano. Discutieron sobre la interacción entre sub-granos y granos sugiriendo el uso de una matriz de interacción, dependiendo sólo de la deformación por transformación.
- **Lexcellent et al** [GOO,1997],[LEX,1996],[VIV,1998] se centraron en los monocristales, no teniendo en cuenta la interacción entre granos. Para la expresión de la energía mecánica interna, propusieron una en forma cuadrática en términos de la fracción de martensita, suponiendo cero para los dos casos limitantes de cero martensita y cero austenita. El modelo es capaz de dar diferente respuesta en tracción y compresión.
- **Huang y Brinson** [HUAN,1998] tuvieron en cuenta la presencia de múltiples variantes y, determinaron la energía de interacción entre las variantes y la fase madre, teniendo en cuenta que las variantes autoacomodadas no contribuían a la energía de interacción. Para limitar el nivel de complejidad, se centraron en un monocristal SMA en el cual la transformación de fase sólo produce inclusiones esféricas. Posteriormente, [HUAN,2000],[GAO,2000] extendieron el caso a inclusiones en forma de aguja y en forma de láminas, así como al caso de policristales [GAO,2002].
- **Boyd y Lagoudas** [BOY,1996]_a, [BOY,1996]_b, aunaron los resultados o modelos de Berveiller [BER,1991], Ortin y Planes [ORT,1988],[ORT,1989] Patoor [PAT,1994]

Ranecki y Lexcelent [RAN,1994] y Sun y Hwang [SUN,1993]_a, [SUN,1993]_b para cargas no proporcionales, transformación y reorientación simultánea, deformación adiabática, y endurecimiento isotrópico y cinemático como guía para el desarrollo de un modelo macromecánico fenomenológico adecuado. El modelo tiene en cuenta los estados de carga no proporcionales de SMA policristalinos o composites con componentes de SMA. Supusieron tres clases de transformaciones incluyendo austenita combinada con una, dos o diferentes variantes de martensita. Este modelo fue aplicado al análisis de composites con matriz elastomérica en [BOY,1996]_b. El modelo requiere la determinación de un gran número de constantes y, pese a que incluye todas las áreas de aplicación, requiere mucho tiempo de cálculo y una serie de complejas ecuaciones que pueden ser una gran desventaja para aplicaciones prácticas [BIR,1997].

- **Bo y Lagoudas** [BO,1999]_a, [BO,1999]_b, [BO,1999]_c, [LAG,1999] investigaron una aproximación micro-macroescalar, teniendo en cuenta los efectos de plastificaciones locales, modelizando efectos de adiestrado, ciclos internos de histéresis, y el efecto doble memoria de forma.
- **Sun y Hwang** [SUN,1993]_a, [SUN,1993]_b desarrollaron una teoría constitutiva para SMA policristalinos mediante métodos micromecánicos y termodinámicos que, cuantitativamente tiene en cuenta los mecanismos detallados de deformación de los SMA. El objeto de estudio es una pequeña muestra de material representativa o elemento constitutivo. Derivan expresiones analíticas de la energía libre para el elemento constitutivo, analizando cuantitativamente la variación total de energía con la tensión aplicada, temperatura y variables microestructurales como la fracción de volumen de transformación (o reorientación), deformación de la red, y fricción interfacial. El modelo de Sun y Hwang, al igual que el de Boyd y Lagoudas, utiliza el esquema de promediado de Mori Tanaka para describir la dependencia de la fracción de volumen de martensita dentro de la matriz austenítica durante la transformación desde austenita, y la dependencia de la fracción de volumen de martensita reorientada dentro de la matriz de martensita estable durante la transformación por reorientación de las variantes de martensita.
- **Gall et al** [GAL,1999] Desarrolló un modelo para analizar el efecto de la textura en los criterios de transformación y en los límites de deformación recuperable, para

obtener las curvas tensión deformación a partir de los mecanismos de deformación del policristal e intentar capturar la asimetría entre la tracción y compresión.

- Otros modelos clasificables dentro de este grupo son los modelos de Kafka [KAF,1994]_a, [KAF,1994]_b, Oberaigner [OBE,1993] o Roitburd [ROI,1990] para concluir esta exposición de modelos micro-macromecánicos.

2.1.3. Modelos constitutivos macromecánicos

Pese a que los modelos micromecánicos proveen un detallado análisis del comportamiento microestructural de la SMA durante la transformación y reorientación, requieren la caracterización de ciertos parámetros que son difíciles de determinar por métodos convencionales además de que, en la mayoría de aplicaciones estructurales es inviable tener un conocimiento profundo del comportamiento del monocristal y de la estructura del grano. Sin embargo, los conceptos implicados en el desarrollo de los modelos micromecánicos deben tenerse en cuenta para que los modelos constitutivos macromecánicos puedan ser desarrollados. Estos modelos deben tener en cuenta [AUR,2001]:

1. Dependencia de las condiciones iniciales para la transformación de fase con la tensión y la temperatura.
2. Diferentes condiciones iniciales y finales para cada transformación de fase reproduciendo así el comportamiento en histéresis.
3. Posibilidad de efectos completamente reversibles de transformación de fase a través de ciclados termomecánicos adecuados.

En base a estos prerequisites, los modelos macromecánicos se han desarrollado bien mediante ajuste directo de datos experimentales macroscópicos, bien mediante argumentos clásicos de termodinámicas irreversibles, o mediante procedimientos mezcla de los dos anteriores.

Los modelos de ajuste directo, fenomenológicos o de aproximación experimental, suponen directamente un diagrama de transformación en el espacio tensión-temperatura determinado experimentalmente y, por tanto, basados en parámetros materiales relativos

a diagramas de transformación específicos. En *los modelos termodinámicos o de aproximación termodinámica*, sin embargo, se han utilizado aproximaciones que no suponen directamente dicho diagrama de fase y, por tanto, están basados en parámetros materiales de mayor complejidad de obtención a través de experimentación. En cualquier caso, la mayoría de modelos desarrollados dentro del ámbito macromecánico han sido para casos unidimensionales de tensión, siendo escasos los modelos desarrollados con éxito en tres dimensiones. Esto es lógico si se piensa que la mayoría de aplicaciones de las SMA son en forma de alambre o barra y, por tanto, unidimensionales. Por otro lado, la experimentación en el caso multidimensional es escasa, con lo que la verificación de los modelos tridimensionales está aún en una fase inicial.

En todos los modelos macromecánicos se asume que el comportamiento del material es básicamente *función de tres variables: tensión, deformación y temperatura y sus ratios de variación asociados*. Estas tres variables son interdependientes y el comportamiento del material será función no lineal de esas variables. Por ello, estos modelos constitutivos intentan describir el comportamiento del material a través de funciones que relacionen esas tres variables y la forma en que se relacionan puede ser, como se ha comentado, por aproximación experimental o bien por aproximación termodinámica. La mayoría de los modelos suponen como *variables de control* la tensión y la temperatura, y como variable interna, la fracción de volumen de martensita encontrándonos, por tanto, con una *ecuación constitutiva* que relacione tensión, deformación, temperatura y fracción de martensita, y unas *leyes de evolución* para la variable interna (fracción de volumen de la martensita) en función de las variables de control.

En los *modelos de aproximación experimental* se supone que la tensión, la temperatura y la fracción de volumen de martensita (ξ) están relacionadas por una ecuación de estado $\xi = \xi(\sigma, T)$ y se suele asumir además que existe una ecuación de estado entre la deformación por transformación y la ξ . En *los modelos de aproximación termodinámica*, se deriva una ecuación de evolución para ξ a partir del potencial de disipación. En general, la ecuación de evolución no puede ser integrada en forma

cerrada para obtener una ecuación $\xi = \xi(\sigma, T)$ porque el valor actual de ξ , variable interna, depende del camino de integración en el espacio de estado.

Los modelos de aproximación experimental se derivan del concepto de la energía libre de Helmholtz, derivado a su vez de la aplicación de los principios termodinámicos. La función de energía libre de Helmholtz es función de la variable general de estado ? definida como:

$$\Lambda \equiv (\mathbf{e}, T, \mathbf{x}) \quad \text{EC.2.1}$$

Donde ξ es la fracción de martensita, \mathbf{e} es la deformación de Green y T es la temperatura.

En base a esta expresión, la relación constitutiva puede derivarse utilizando la primera y segunda ley de la termodinámica,

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{s}(\mathbf{e}, T, \mathbf{x}) \quad \text{EC.2.2}$$

De esta segunda ecuación se puede derivar la forma temporal de la ecuación constitutiva que describe los cambios en la tensión como función de los cambios en la deformación, temperatura y fracción de martensita.

$$d\mathbf{s} = E(\mathbf{e}, \mathbf{x}, T)d\mathbf{e} + \Omega(\mathbf{e}, \mathbf{x}, T)d\mathbf{x} + \Theta(\mathbf{e}, \mathbf{x}, T)dT \quad \text{EC. 2.3}$$

Donde σ es la tensión de Piola-Kirkoff, E es el módulo elástico, Ω es el tensor de transformación y Θ es el tensor termoelástico. Estas constantes materiales E , O y T vienen dadas por:

$$E(\mathbf{e}, \mathbf{x}, T) = \mathbf{r}_0 \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{e}^2}; \quad \Omega(\mathbf{e}, \mathbf{x}, T) = \mathbf{r}_0 \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{x}}; \quad \Theta(\mathbf{e}, \mathbf{x}, T) = \mathbf{r}_0 \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{e} \partial T}; \quad \text{EC.2.4}$$

En muchos de los artículos revisados en la bibliografía donde se utiliza o aplica cualquier modelo que emplee esta expresión como ecuación constitutiva, consideran E , O y T como valores constantes durante la transformación, con la consecuente simplificación en la ecuación constitutiva. Estas constantes materiales sin embargo

varían, y en algunos casos de forma notable, durante la transformación y, por tanto, no pueden darse como constantes en un proceso de integración. Este factor se tiene en cuenta en el presente trabajo en el apartado 2.3 modificando convenientemente los modelos para su implementación y suponiendo diferentes aproximaciones para la variación con la fracción de martensita.

La fracción de martensita se elige como la variable de estado que conduce la transformación del material. Como resultado, la elección de una expresión adecuada para la evolución de la fracción de martensita es de gran importancia. Los diferentes modelos utilizados emplean aproximaciones diferentes para la evolución de la fracción de martensita siendo además, deducidas de diferentes formas en cada caso. ***Los modelos de aproximación experimental más destacables son:***

- Tanaka [TAN,1986]_a, [TAN,1986]_b, [TAN,1986]_c, [TAN,1990], [TAN,1992], [TAN,1994]. Fue uno de los primeros modelos desarrollados dentro de esta clasificación. De hecho, fue este autor quien obtuvo la expresión de la ecuación constitutiva EC.2.3 a partir de la segunda ley termodinámica en función de la energía libre de Helmholtz, asumiendo que la deformación unidireccional, la temperatura y la fracción de volumen de martensita son las únicas variables de estado y calculando la tensión en función de esas variables. Como hemos comentado, la fracción de volumen de martensita, a su vez, es función de la tensión y de la temperatura, con lo que la solución de este modelo es necesariamente numérico, para poder resolver simultáneamente la tensión y la fracción de volumen de martensita. ***Las cinéticas de transformación (o la ecuación entre la fracción de martensita y las variables de control) se describen mediante una expresión exponencial*** que describe la fracción de volumen de martensita en función de la tensión y de la temperatura. Estas ecuaciones de transformación se presentaron separadamente para la transformación de austenita a martensita y para la transformación reversa. Los criterios de nucleación para la transformación directa y reversa se formularon utilizando dichas ecuaciones cinéticas y con la suposición de que la transformación está completada cuando la fracción de martensita alcanza el valor de 0,99 o 0,01. Hay que hacer notar que las relaciones constitutivas fueron integradas suponiendo que los tensores elásticos y

termoelásticos así como el componente del tensor material en el caso unidimensional son constantes.

- **Liang y Rogers** [LIA,1990]_a, [LIA,1990]_b formularon un modelo basado en la variación temporal de la ecuación constitutiva desarrollada por Tanaka. Sin embargo, para caracterizar *la evolución de la fracción de volumen de la martensita, desarrollaron una expresión cosenoidal*. Estos autores presentaron un método para determinar las constantes de su ecuación y lo discutieron experimentalmente. Además, analizaron ensayos de recuperación impedida y de deformación controlada. Este modelo además se aplicó para describir el efecto doble memoria de forma [ZHA,1997]. La teoría tridimensional de este modelo fue desarrollada por los mismos autores [LIA,1992]_a, [LIA,1992]_b, con unas ecuaciones constitutivas derivadas en forma temporal no lineales y cuya solución requiere un complejo esfuerzo numérico.
- Dado que una de las principales limitaciones de estos dos modelos es que, en su forma original, sólo describen la transformación de fase de martensita a austenita y viceversa, no son capaces de describir el demaclado de la martensita, responsable principal del efecto memoria de forma a bajas temperaturas. Para poder distinguir entre las diferentes formas de martensita, **Brinson** [BRI,1993]_a, [BRI,1993]_b, [BRI,1997] desarrolló un modelo en el que se separaba la fracción de volumen de martensita en dos partes. Una de ellas, *la fracción de volumen de martensita inducida por tensión* (x_S), que describe la cantidad de martensita orientada o demacliada del material, y una *fracción de volumen de martensita inducida por temperatura* (x_M), que describe la fracción de martensita (conteniendo todas las variantes) que aparece en la transformación reversa de la austenita. Para poder considerar tanto el fenómeno de la pseudoelasticidad o la memoria de forma, los coeficientes de esta ecuación constitutiva son no-constantas. *Las cinéticas de transformación sugeridas en el modelo se basaron en las cinéticas de Liang y Rogers*. Sin embargo, fueron modificadas para incluir las dos fracciones de martensita consideradas por Brinson.
- **Boyd et al** [BOY,1994] propusieron otro modelo unidimensional basado en el modelo exponencial de Tanaka. En el modelo de Boyd se sustituyó la tensión de tracción por la tensión de Von-Misses como en la teoría de plasticidad, debido a

lo inelástico del proceso. Se aplicó la primera y segunda ley de la termodinámica para poder obtener las relaciones de evolución para las variables de estado internas en el proceso inelástico. Se requirió, además, una suposición adicional para el proceso inelástico: la energía se supone que es función general de la fracción de martensita, ξ . Para introducir esta suposición utilizaron la teoría de disipación de potencial de Edelen en la expresión de la energía libre de la mezcla. Es por este motivo que este modelo puede clasificarse como una mezcla entre los modelos de aproximación experimental y los termodinámicos. Posteriormente, **Bo et al** [BO,1994] generalizaron el modelo introduciendo que el valor umbral fuese función de las variables de estado en lugar de una constante, y haciendo la suposición de que algunos parámetros dependiesen de ξ . Con ello, generalizaron y unificaron los modelos de Tanaka, Liang y Rogers y Boyd y Lagoudas.

- **Ivshin y Pence** [IVS,1994]_a, [IVS,1994]_b propusieron también un modelo mezcla de las dos clasificaciones, pues está basado en la combinación de consideraciones termodinámicas, y una ley de evolución fenomenológica para la fracción de martensita. El modelo considera la conexión entre el fenómeno de la transformación completa y la carga y descarga retenida, así como la transición de carga isotérmica a adiabática en un ambiente de convección de calor. Este modelo sólo tiene una variante para cada fase y, por tanto, no captura los fenómenos relacionados con el demaclado asociados normalmente con el efecto memoria de forma. El modelo predice las relaciones entre tensión y temperatura de SMA en un proceso de carga adiabática a través del proceso de carga en un ambiente de calor convectivo. Es un modelo adecuado pues, para altos valores de velocidad de deformación, donde la disipación interna de calor es un fenómeno no despreciable y se suele denominar *modelo no-isotérmico* [JIA,1996].

Dentro del grupo de *modelos de aproximación termodinámica*, a parte de los mencionados anteriormente, que tienen mezcla de ambos, podemos encontrar:

- **Raniecki y Lexcellent** y coautores [RAN,1992], [RAN,1994] ha originado diferentes modelos constitutivos muy interesantes. En particular, Leclercq y Lexcellent [LEC,1996] propusieron un modelo termodinámicamente consistente, comparandolo con un conjunto de datos experimentales para aleaciones base cobre. Lexcellent y Tobushi [LEX,1995]_a se concentraron en una descripción

cuidadosa de ciclos internos en régimen superelástico, mientras que Lexcellent et al [LEX,1995]_b acoplaron un simple modelo mecánico con la ecuación de calor para poder describir los efectos dependientes de la velocidad de aplicación de la carga detectados experimentalmente. Finalmente, Bourbon et al [BOU,1995] investigaron la posibilidad de modelar los efectos del adiestrado para el efecto doble memoria de forma mediante ciclado térmico.

- Una aproximación similar es la adoptada por **Fremond** [FRE,1996] y por **Wilmanski** [WIL,1993]. Éste último propone una energía de activación función de la fracción de martensita y del número de interfaces, esto último considerado como una variable interna adicional. El modelo original de Fremond fue alterado por Savi [SAV,2002] para contemplar la inclusión de una nueva variante asociada a la martensita maclada y considerando dos módulos distintos para las diferentes fases del material. El nuevo modelo incluye fenómenos de expansión térmica y de plasticidad, incorporando un acoplamiento entre la transformación de fase y la plasticidad para obtener un modelo de memoria de forma reversible.

Utilizando una aproximación diferente a las anteriores (fenomenológica y termodinámica), y basados en teorías clásicas de plasticidad, aparecen un nuevo grupo de modelos entre lo que destacan:

- **Graesser y Cozzarelli** [GRA,1991] desarrollaron su modelo basado en las formulaciones inelásticas para fluencia y viscoplasticidad (por tanto es una formulación dependiente del tiempo) con una superficie potencial y un mecanismo de endurecimiento cinemático. Modificaron la evolución de la tensión de vuelta (back-stress) para poder reproducir el comportamiento de las SMA en estados 1D de tensión. Los mismos autores [GRA,1994] extendieron el modelo a 3D, comprobándolo bajo condiciones de carga no proporcionales. Sin embargo, dado que ambos modelos se obtienen de conceptos de plasticidad clásicos, son capaces de reproducir la presencia de una meseta pero no son capaces de reproducir el comportamiento elástico del material totalmente transformado. Por la misma razón, el modelo no permite una buena descripción de los ciclos internos. Se supone en el modelo que el campo de temperatura es uniforme.

- **Auricchio et al** [AUR,1997]_a,[AUR,1997]_b,[AUR,1997]_c,[AUR,1999] presentaron un modelo basado en la teoría desarrollada por Lubliner y Auricchio [LUB,1996] de *plasticidad generalizada* para materiales inelásticos de comportamiento complejo, como los materiales con transiciones de fase sólido-sólido. Presenta unas *leyes de evolución expresadas mediante funciones exponenciales y lineales*. En el caso superelástico tiene en cuenta las diferentes propiedades del material en fase austenita y martensita. El modelo está desarrollado tanto para aplicaciones unidimensionales como para el caso tridimensional.
- **Govindjee y Kasper** [GOV,1997], [GOV,1999] desarrollaron un modelo unidimensional donde se tiene en cuenta la deformación plástica residual, con leyes de evolución lineales y discutiendo en detalle las condiciones de carga y descarga y las posibles situaciones complejas.

2.2 ANÁLISIS Y REFORMULACIÓN DE MODELOS MACROMECAÑICOS UNIDIMENSIONALES

En este apartado nos centramos en cuatro modelos de particular interés por su efectividad junto con, en nuestra opinión una ágil y flexible aproximación. Los cuatro modelos están enmarcados dentro del grupo de macromodelos de acuerdo con la descripción realizada anteriormente y son los *modelos de Tanaka, Liang-Rogers, Brinson y Auricchio, éste último con leyes de evolución exponencial y lineal*. El objetivo de esta sección será presentarlos, dentro de lo posible, en un formato y notación uniforme, haciendo posible una mejor comparación entre ellos y destacando los principales aspectos de cada uno de ellos. La razón fundamental de la elección de estos modelos es porque todos están basados en parámetros obtenibles experimentalmente (modelos de ajuste directo) con lo que la verificación experimental será completa, sin tener que suponer o aproximar prácticamente ningún parámetro (como sería el caso, por ejemplo, de los modelos termodinámicos) siendo posible así su implementación numérica. Se han seleccionado además porque, cumpliendo este requisito, las aproximaciones a partir de las que fueron derivados son completamente diferentes: los tres primeros, Tanaka, Liang-Rogers y Brinson, se derivaron a partir de termodinámicas para la ecuación constitutiva y relaciones experimentales para las

ecuaciones de evolución, mientras que el modelo de Auricchio fue basándose en teorías de plasticidad. Por otro lado, pese a tener aproximaciones diferentes, las ecuaciones de evolución presentan leyes semejantes: Tanaka y Auricchio exponencial y Liang-Rogers y Brinson cosenoidal, con lo que la comparación de modelos con aproximaciones distintas y leyes semejantes es muy interesante. Por último, Brinson y Auricchio contemplan fracciones de martensita diferentes para la martensita inducida por tensión y la inducida por temperatura, mientras que Tanaka y Liang-Rogers sólo presentan una. Pese a que la separación de ambas fracciones es necesaria a bajas temperaturas, no ocurre así a altas temperaturas, con lo que es necesario comprobar si la complejidad introducida con la separación de las fracciones de martensita compensa en estados a altas temperaturas.

Todos los modelos comparados están en formulación unidimensional. La elección de los modelos unidimensionales viene motivada por el hecho de que la mayoría de elementos estructurales en las aplicaciones SMA pueden diseñarse a través de relaciones constitutivas 1D, incluyendo flexión y respuesta axial de las vigas. Además, en 1D es posible predecir con más precisión el comportamiento complejo de estos materiales teniendo en cuenta todas sus particularidades. Por último, y tal y como se comentó en el Capítulo 1 la mayoría de aplicaciones de estas aleaciones es, hoy por hoy, para casos unidimensionales, siendo escasas y poco viables todavía, las aplicaciones tridimensionales.

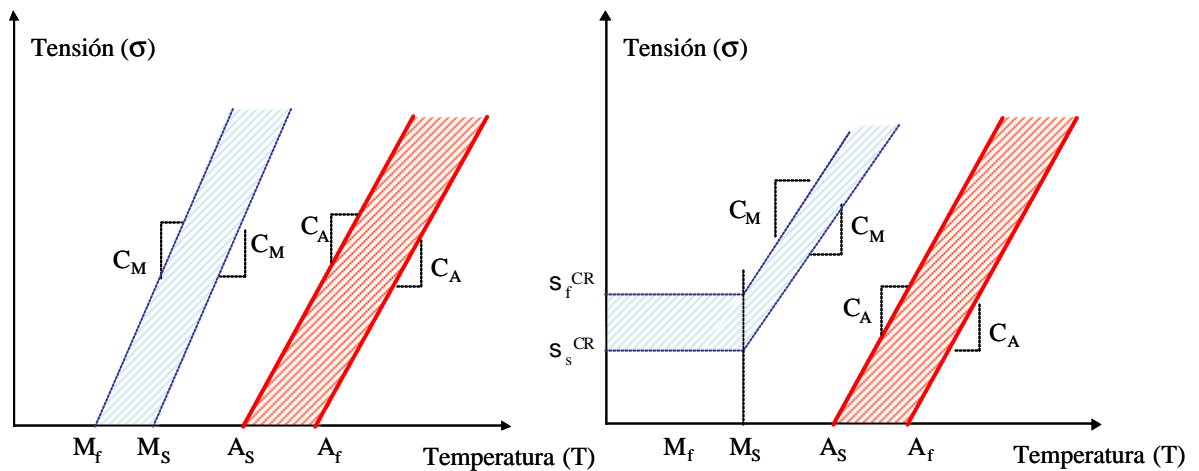
No existe en la literatura un análisis tan detallado de estos modelos semejante al que se presenta a continuación, donde se unifican en notación y, lo más importante, donde se implementan numéricamente en un control por deformación, siempre necesario en aplicaciones estructurales. Existen autores que han comparado experimentalmente algunos modelos como el de Tanaka, Liang-Rogers y/o Brinson experimentalmente [TOB,1992]_b [FOR, 1994] [FOR, 1996] [EPP,1997] [PRA,1999] [PRA,2001] [TAMA, 2001] [ZAK,2003] (estas verificaciones se analizan y comentan en el Capítulo 3) y otros muchos que han comparado teórica o descriptivamente algunos de los modelos presentados en los apartados anteriores, [BO,1994], [JIA,1996], [BIR,1997], [SCHR,1998], [GALL,2000], pero, en ningún caso, se han comparado y analizado los

cuatro modelos expuestos con la profundización presentada en este trabajo para estos modelos.

Todos los modelos considerados están desarrollados en el ámbito de las pequeñas deformaciones dentro de la teoría de termodinámicas irreversibles. De acuerdo con ello, en cada instante, el estado termodinámico de un elemento de volumen homogéneo está caracterizado y completamente descrito por un conjunto adecuado de variables externas o controlables y variables internas. Todos los modelos seleccionados además, pueden ser denominados rate-independent, es decir, que sólo dependen de la tensión o deformación, de su variación temporal y no de la velocidad en la que se aplica dicha deformación o tensión. Este factor deberá tenerse muy presente en la verificación experimental.

Todos los modelos seleccionados están basados en un diagrama de transformación en el espacio tensión-temperatura determinado experimentalmente y, por tanto, basados en parámetros materiales relativos a diagramas de transformación específicos. Este diagrama tiene dos aproximaciones diferentes: para los modelos de Tanaka y Liang-Rogers, donde no se contempla la diferencia entre martensita inducida por tensión y por temperatura (figura 2.1a) y los modelos de Brinson y Auricchio donde sí se contempla esa diferencia (figura 2.1b). Se marcan en ambos gráficos los parámetros materiales deducibles de ellos con la nomenclatura que se tendrá en cuenta a partir de ahora.

Se presenta a continuación la formulación completa de cada modelo identificando y unificando en notación claramente los parámetros constitutivos necesarios para su verificación y comentando los aspectos más destacables para su posterior implementación numérica en control por deformación y temperatura en el apartado 2.3.



(a) Diagrama sin consideración del demaclado (b) Con consideración del demaclado

Figura 2.1: Diagrama de transformación tensión-temperatura obtenible experimentalmente. La aproximación de (a) se emplea en los modelos de Tanaka y Liang-Rogers donde no se distingue la transformación por demaclado ($T < M_f$) y la aproximación de (b) utilizada por Brinson y Auricchio en la que sí se considera dicha transformación.

2.2.1. Modelo de Tanaka

2.2.1.1. Reformulación del Modelo de Tanaka

El modelo de Tanaka fue desarrollado para el caso unidimensional en [TAN,1986] y considera sólo la transformación de martensita inducida por tensión, sin distinguir entre martensita maclada y demaclada y, por tanto, sin considerar el fenómeno del demaclado que se produce a bajas temperaturas.

Para obtener la ecuación constitutiva y las ecuaciones de evolución, Tanaka supone que el proceso termodinámico está totalmente descrito por un conjunto de variables de estado: la deformación de Green, la temperatura y la fracción de martensita. Partiendo del primer principio de la termodinámica (conservación de la energía) expresado en términos de la energía libre de Helmholtz (función de las variables de estado) e introduciendo la desigualdad de Clausius-Duhem (segunda ley de la termodinámica) obtiene la ecuación constitutiva como:

EC.2.5

$$\dot{\mathbf{s}} = E\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \Omega\dot{\boldsymbol{\xi}} + \Theta\dot{T}$$

Donde $\boldsymbol{\sigma}$ es la segunda tensión de Piola-Kirchhoff, T es la temperatura, $\boldsymbol{\varepsilon}$ es la deformación de Green, $\boldsymbol{\xi}$ es la fracción de volumen de martensita (recordemos que sólo utiliza una fracción de martensita, por lo que $(1-\boldsymbol{\xi})$ será la fracción en volumen de austenita) y E , Ω y Θ son constantes materiales que adoptan la siguiente expresión (a partir de la energía libre de Helmholtz Ψ):

EC.2.6

$$E(\mathbf{e}, \mathbf{x}, T) = \mathbf{r}_0 \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{e}^2}; \quad \Omega(\mathbf{e}, \mathbf{x}, T) = \mathbf{r}_0 \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{x}}; \quad \Theta(\mathbf{e}, \mathbf{x}, T) = \mathbf{r}_0 \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{e} \partial T};$$

A partir del potencial de disipación (deducido de la desigualdad de Clausius-Duhem) establece las ecuaciones de evolución (o cinéticas de transformación) para la variable interna $\boldsymbol{\xi}$ de la forma:

EC.2.7

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \hat{\Xi}(\mathbf{s}, T, \mathbf{x})$$

Donde $\hat{\Xi}$ es una función material. Como la transformación martensítica y su transformación reversa son no difusivas se puede definir la transformación a partir de los valores de estado actuales, por tanto:

EC.2.8

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \Xi(\mathbf{s}, T)$$

Que se puede expresar igualmente como:

EC.2.9

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \Xi}{\partial \mathbf{s}} \dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial \Xi}{\partial T} \dot{T}$$

A partir de aquí ya se tiene definida la ecuación constitutiva (EC.2.5) y la forma temporal o evolutiva de la variable interna EC.2.9. Remarquemos de nuevo que Tanaka, en su modelo original, así como otros autores que utilizan este modelo, consideran los parámetros materiales de la EC.2.6 como constantes, pese a que pueden depender de las variables de estado definidas.

Como expresión explícita de las cinéticas de transformación (EC.2.9) Tanaka se basó en las ecuaciones de evolución utilizadas para los aceros por Magee [YU,1997] que se expresan para la transformación directa y reversa como:

- **Transformación directa (de austenita a martensita, ver figura 2.2a):**

EC2.10a

$$\frac{\dot{x}}{1-x} = a_M \dot{T} - b_M \dot{S}$$

Suponiendo los parámetros constantes, puede integrarse dando:

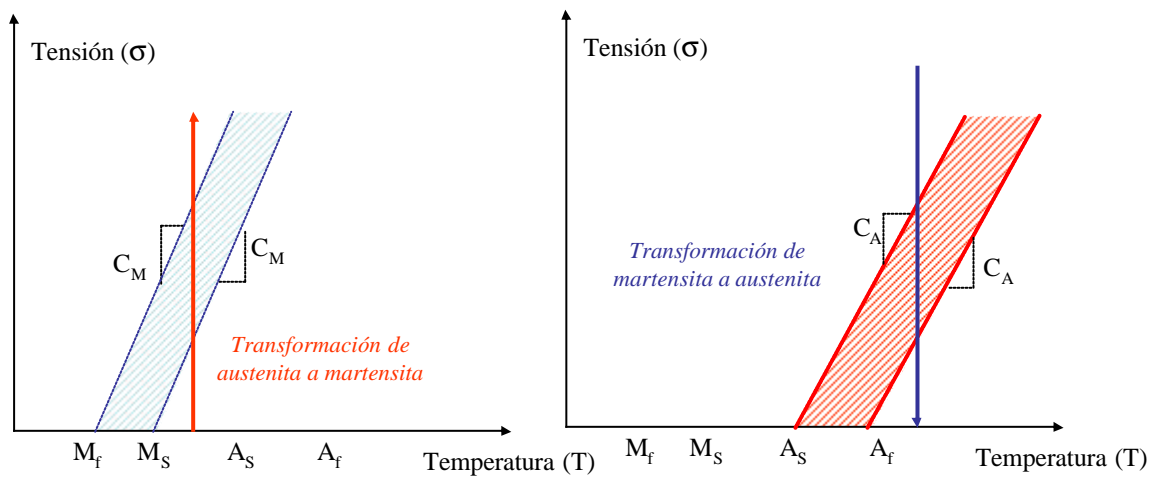
EC2.10b

$$x = 1 - \exp[a_M (M_s - T) + b_M S]$$

Donde a_M y b_M son constantes materiales y M_s la temperatura de inicio de la transformación martensítica a tensión cero. Las ecuaciones EC.2.10 se cumplen bajo la condición:

EC.2.11

$$S \geq \left(\frac{a_M}{b_M} \right) * (T - M_s)$$



(a) Transformación directa (b) Transformación reversa

Figura 2.2: Diagrama de transformación tensión-temperatura donde se indican las zonas de transformación activas (zonas ralladas). En la figura (a) se indica la transformación directa, mostrando las fronteras de validez de la transformación, y en la figura (b) para la transformación reversa.

- **Transformación reversa (de martensita a austenita, ver figura 2.2b):**

EC2.12a

$$-\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\mathbf{x}} = a_A \dot{T} - b_A \dot{\mathbf{s}}$$

Suponiendo los parámetros constantes, puede integrarse dando:

EC2.12b

$$1 - \mathbf{x} = 1 - \exp[a_A (A_s - T) + b_A \mathbf{s}]$$

Donde a_A y b_A son constantes materiales y A_s la temperatura de inicio de la transformación austenítica a tensión cero. Las ecuaciones EC.2.12 se cumplen bajo la condición:

EC.2.13

$$\mathbf{s} \leq -\left(\frac{a_A}{b_A}\right)^* (T - A_s)$$

Observando la figura 2.2 y las ecuaciones EC.2.10-EC.2.12 podemos deducir el valor de las constantes a_M , b_M , a_A , b_A . Suponiendo que la transformación directa está completada cuando $\xi=0,99$ y la reversa para $\xi=0$, podemos deducir los límites de la transformación y, por tanto, establecer las condiciones como:

EC.2.14

$$b_M = -\frac{2 * \ln 10}{C_M}$$

$$a_M = -\frac{2 * \ln 10}{M_s - M_f}$$

$$b_A = \frac{2 * \ln 10}{C_A}$$

$$a_A = \frac{2 * \ln 10}{A_f - A_s}$$

Por tanto, el modelo de Tanaka queda totalmente definido por las ecuaciones EC.2.5 para la ecuación constitutiva, EC.2.10 y EC.2.12 para las ecuaciones de evolución (utilizaremos la expresión temporal, para poder tener en cuenta transformaciones incompletas), EC.2.11 y EC.2.13 para los límites de transformación (condiciones de activación) y EC.2.14 para las constantes materiales empleadas en el modelo.

2.2.1.2. *Análisis y consideraciones del Modelo de Tanaka*

En el modelo de Tanaka, se pueden destacar los siguientes aspectos:

1. Para la verificación del modelo *se requiere la determinación experimental de 9 parámetros*: módulo elástico E , temperaturas de transformación a tensión cero, Ω el tensor de transformación, Θ el tensor termoelástico, así como los coeficientes de influencia de la tensión, o las pendientes C_A y C_M .
2. Observando el proceso de obtención del modelo, especialmente la EC.2.9, se puede deducir cierta analogía con los modelos elastoplásticos tradicionales aunque en este caso con dos condiciones de transformación separadas. Esta observación será muy válida para la forma de implementación numérica del modelo con control por deformación (strain-driven).
3. Tal como se ha comentado, sólo se podrá tener en cuenta transformaciones comprendidas para temperaturas $T \geq M_s$. Para temperaturas inferiores a M_f el valor de la fracción de martensita asume desde el inicio (tensión cero) el valor de 0,99, es decir, supone la transformación completa. Para temperaturas entre M_s y M_f sigue la relación exponencial de la EC.2.10b (figura 2.3). Será pues, conveniente, tener en cuenta en la implementación numérica los valores de la fracción de martensita inicial para temperaturas dentro del intervalo M_s y M_f cuando se analice el caso no isotérmico a tensión cero.

Para la transformación de martensita a austenita el razonamiento es similar, tal como se aprecia también en la figura 2.3.

4. El modelo de Tanaka no especifica una ecuación para la expresión del tensor de transformación Ω . Una forma de interpretarlo puede ser reordenando la ecuación constitutiva tal y como se expresa en la EC2.5, quedando:

EC.2.15

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{E} - \frac{\Omega}{E} \dot{\mathbf{x}} - \frac{\Theta}{E} \dot{T}$$

De esta forma se interpreta que la deformación total está compuesta de un término elástico, un término causante de la transformación (deformación por

transformación) y un término causante de la expansión térmica (deformación térmica). La interpretación del término de la deformación por transformación ϵ_{tr} puede servir para determinar el valor del tensor de transformación Ω , puesto que:

EC.2.16

$$\Omega = -\frac{E^* \dot{\epsilon}_{tr}}{\dot{\mathbf{x}}}$$

Esta expresión será comparable con la obtenida por los siguientes modelos para el mismo tensor de transformación.

- Las ecuaciones de evolución integradas en forma cerrada (EC.2.10b y EC.2.12b) no tienen en cuenta la fracción residual de martensita para el caso de transformaciones incompletas. Será más conveniente utilizar, pues, la expresión temporal (EC.2.10a y EC.2.12a) para contemplar subciclos (transformaciones incompletas) en la implementación numérica.

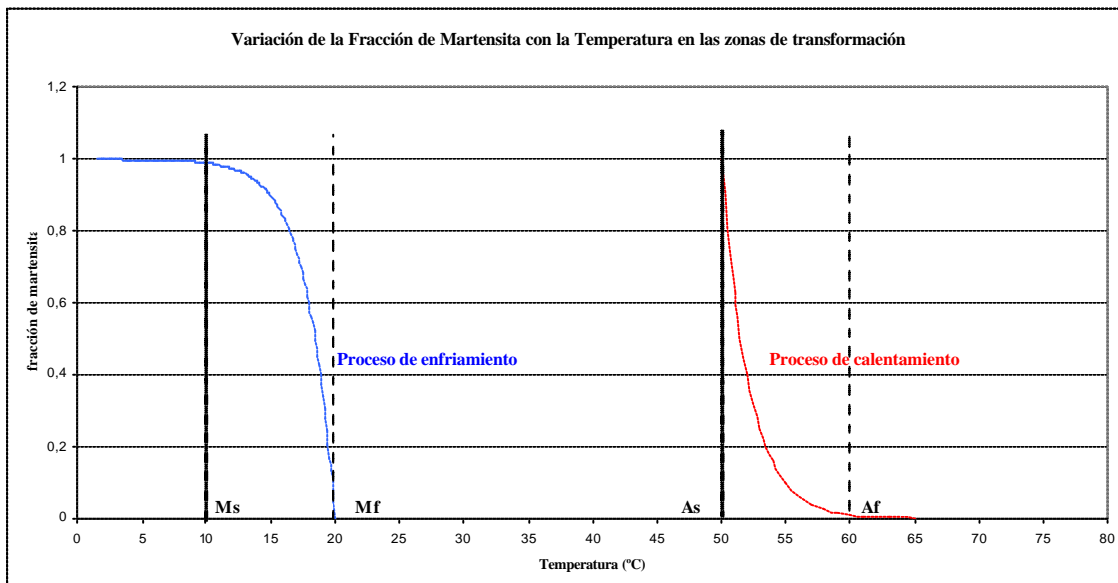


Figura 2.3: Evolución de la fracción de martensita para el modelo de Tanaka dentro del intervalo de temperaturas de transformación a tensión cero. Se han elegido unos valores arbitrarios de $M_s=10^\circ\text{C}$, $M_f=20^\circ\text{C}$, $A_s=50^\circ\text{C}$, $A_f=60^\circ\text{C}$ y $C_A = C_M=15 \text{ MPa}/^\circ\text{C}$.

2.2.2. Modelo de Liang y Rogers

2.2.2.1. Reformulación del Modelo de Liang y Rogers

El modelo unidimensional desarrollado por Liang y Rogers [LIA,1990]_a, [LIA,1990]_b está basado en el modelo expuesto anteriormente de Tanaka, asumiendo por tanto, que las variables de estado que gobiernan el comportamiento constitutivo son la tensión, deformación, temperatura y fracción de volumen de martensita. De nuevo, sólo consideran una fracción de martensita y no distinguen entre martensita inducida por tensión e inducida por temperatura. Como ecuación de gobierno (constitutiva) asumen la expresión de Tanaka (EC.2.5) pero integrada para independizarla del tiempo.

EC.2.17

$$\mathbf{s} - \mathbf{s}_0 = E(\mathbf{e} - \mathbf{e}_0) + \Theta(T - T_0) + \Omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Donde el subíndice 0 representa las condiciones iniciales antes de iniciar la transformación. Nótese que la integración realizada implica necesariamente que los parámetros E, Ω y Θ son constantes en el proceso de transformación.

La diferencia entre el modelo de Liang-Rogers y el modelo de Tanaka es, básicamente, en las ecuaciones de evolución para la fracción de martensita. Liang y Rogers desarrollan unas leyes de evolución basadas totalmente en observaciones experimentales y que se expresan en forma cosenoidal. En una primera aproximación, determinan las ecuaciones de evolución para un estado libre de tensión pero con variación de temperatura. En estas condiciones, las expresiones son:

- *Transformación directa (de austenita a martensita) a tensión cero:*

EC.2.18

$$\mathbf{x} = \frac{1 - \mathbf{x}_{0A}}{2} \cos[a_{ML}(T - M_f)] + \frac{1 + \mathbf{x}_{0A}}{2}$$

- **Transformación reversa (de martensita a austenita) a tensión cero:**

EC.2.19

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_{0M}}{2} \{ \cos[a_{AL}(T - A_s)] + 1 \}$$

Donde las constantes de las EC.2.18 y EC.2.19 se deducen imponiendo las condiciones frontera de $\xi=1$ para $T=M_f$ y $\xi=0$ para $T=A_f$ y vienen expresadas como:

EC.2.20

$$a_{AL} = \frac{\mathbf{p}}{A_f - A_s}$$

$$a_{ML} = \frac{\mathbf{p}}{M_s - M_f}$$

El modelo original expresa las constantes de la EC.2.20 como a_A y a_M . Se ha cambiado la notación (a_{AL} y a_{ML}) para que no haya confusión con el modelo de Tanaka.

Estas ecuaciones, a diferencia del modelo de Tanaka, tienen en cuenta fracciones iniciales de martensita: ξ_{0M} es la fracción inicial de martensita antes de empezar la transformación de M a A y ξ_{0A} es la fracción inicial de martensita antes de empezar el proceso de transformación de A a M.

Teniendo en cuenta la relación entre la tensión y la temperatura de la figura 2.1(a) en la que se pone de manifiesto que, si se aplica una tensión, el ciclo de histéresis fracción de martensita-temperatura se desplaza, se deducen las expresiones para las leyes de evolución con tensión:

- **Transformación directa (de austenita a martensita) a tensión variable:**

EC.2.21

$$\mathbf{x} = \frac{1 - \mathbf{x}_{0A}}{2} \cos[a_{ML}(T - M_f) + b_{ML}\mathbf{s}] + \frac{1 + \mathbf{x}_{0A}}{2}$$

Esta evolución se cumple si:

EC.2.22

$$C_M(T - M_f) - \frac{P}{|b_{ML}|} \leq \mathbf{s} \leq C_M(T - M_f)$$

- **Transformación reversa (de martensita a austenita) a tensión cero:**

EC.2.23

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_{0M}}{2} \{ \cos[a_{AL}(T - A_s) + b_{AL}\mathbf{s}] + 1 \}$$

Que se cumple si:

EC.2.24

$$C_A(T - A_s) - \frac{P}{|b_{AL}|} \leq \mathbf{s} \leq C_A(T - A_s)$$

Donde C_A y C_M son, igual que en el modelo de Tanaka, los coeficientes de influencia de tensión y b_{ML} y b_{AL} dos nuevas constantes que vienen dadas por:

EC.2.25

$$b_{AL} = -\frac{a_A}{C_A}$$

$$b_{ML} = -\frac{a_M}{C_M}$$

Por tanto, el modelo de Liang-Rogers queda totalmente definido por las ecuaciones EC.2.5 (o EC.2.17) para la ecuación constitutiva; EC.2.21 y EC.2.23 para las ecuaciones de evolución; EC.2.22 y EC.2.24 para los límites de transformación (condiciones de activación) y EC.2.20 y EC.2.25 para las constantes materiales empleadas en el modelo.

2.2.2.2. Análisis y consideraciones del Modelo de Liang y Rogers

En el modelo de Liang-Rogers, podemos destacar los siguientes aspectos:

1. Para la verificación del modelo **se requiere la determinación experimental de 9 parámetros**: módulo elástico E , temperaturas de transformación a tensión cero, Ω el tensor de transformación, Θ el tensor termoelástico, así como los coeficientes de influencia de la tensión, o las pendientes C_A y C_M . Los mismos que para Tanaka aunque Liang y Rogers deducen una relación para Ω . Además se debe analizar con cuidado la determinación de las condiciones iniciales ξ_{0M} y ξ_{0A} .
2. Como el modelo de Liang-Rogers está basado en el modelo de Tanaka excepto para las ecuaciones de evolución, se puede deducir también cierta analogía con los modelos elastoplásticos tradicionales aunque con cierto cuidado puesto que las leyes de evolución no están derivadas en forma temporal y deben depender de la historia termomecánica de la aleación.
3. Igual que para el modelo de Tanaka sólo se podrá tener en cuenta transformaciones a temperaturas $T \geq M_s$. En este modelo además, se deben **imponer los límites de validez de las leyes de evolución**, puesto que al ser una expresión cosenoidal, cuando llega al valor 1 (transformación A-M completa) o 0 (transformación M-A completa) no tiene una tendencia asintótica con ese valor pasados los límites de las temperaturas de transformación. Esto puede observarse en la figura 2.4 y comparándola con la figura 2.3 del modelo de Tanaka.
4. Aunque las leyes de evolución no están expresadas en forma temporal, sí tienen en cuenta la posibilidad de que exista una fracción de martensita inicial antes de la transformación. Esto será conveniente para la modelización numérica de transformaciones incompletas. Se debe contemplar además, esta fracción residual para la simulación del fenómeno de recuperación de forma con el calentamiento.

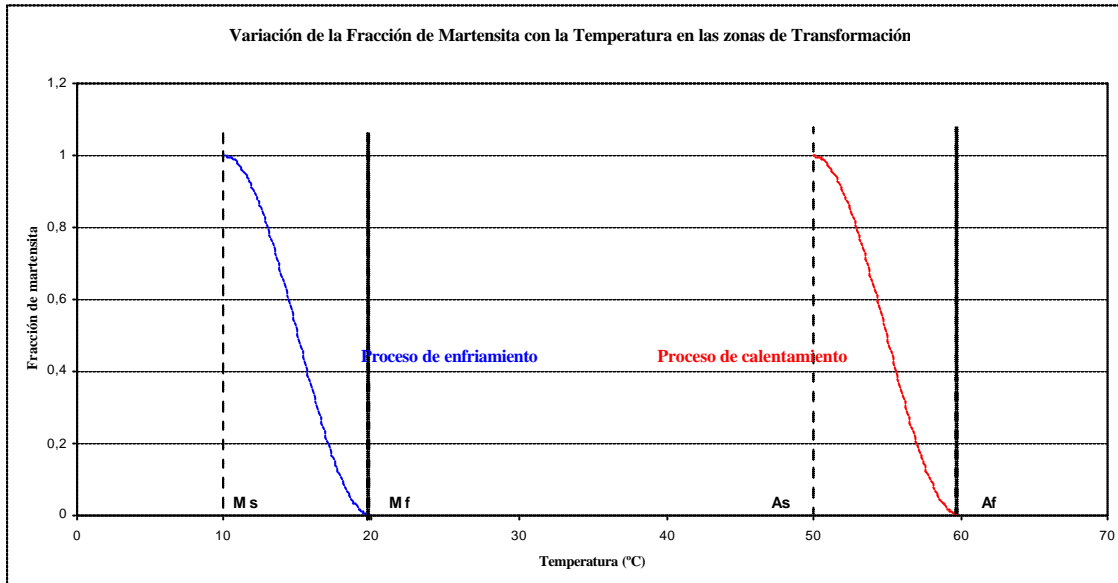


Figura 2.4: Evolución de la fracción de martensita para el modelo de Liang-Rogers dentro del intervalo de temperaturas de transformación a tensión cero. Se han elegido unos valores arbitrarios de $M_s=10^\circ\text{C}$, $M_f=20^\circ\text{C}$, $A_s=50^\circ\text{C}$, $A_f=60^\circ\text{C}$ y $C_A = C_M=15 \text{ MPa}/^\circ\text{C}$.

5. Otra de las diferencias entre los modelos de Liang y Rogers y Tanaka es en la consideración del tensor termoelástico Ω . En el modelo de Liang-Rogers analizan el valor de este parámetro considerando un proceso de descarga a $\xi=1$ y estando el material a temperaturas inferiores a A_s tal y como se ve en la figura 2.5. Al descargar desde cualquier punto de la curva la deformación residual se obtiene de la ecuación constitutiva ($\sigma=0$ y T constante) $\varepsilon_{\text{res}} = -\Omega/E$. Cuando la descarga se produce una vez alcanzado la transformación completa ($\xi=1$) la deformación permanente que queda es e_L o también definida como **máxima deformación recuperable**. De esta manera, en el modelo de Liang-Rogers, el parámetro Ω pasa a ser expresado como:

EC.2.26

$$\Omega = -E * e_L$$

Considerándose una constante material independiente de la temperatura pues establecen que prácticamente no varía entre M_f y A_f . Esta observación deberá ser comprobada experimentalmente.

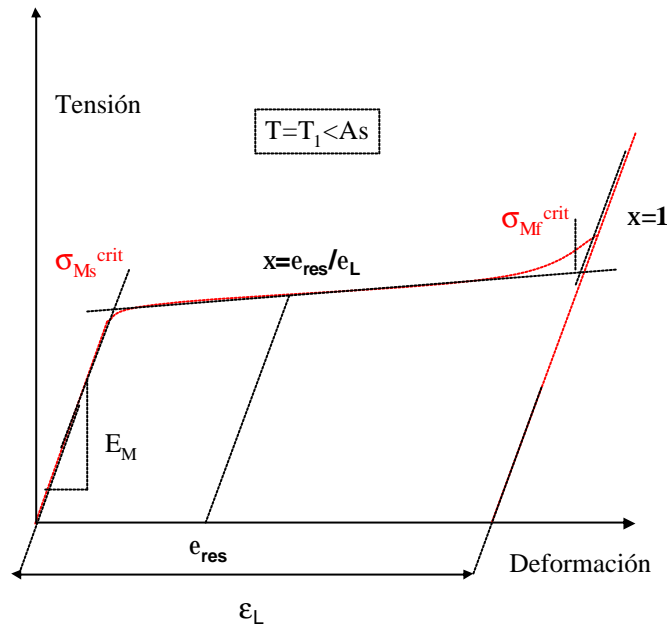


Figura 2.5: Representación gráfica de la interpretación de Liang-Rogers para el tensor termoplástico función de la deformación residual. Se indica en el gráfico la definición de e_L realizada por Liang-Rogers, en el supuesto de que sea constante para temperaturas inferiores a A_s .

6. Los límites establecidos para las leyes de evolución (EC.2.22 y EC.2.24) son los límites representados gráficamente en la figura 2.2 (a) para la transformación A-M y (b) para la transformación M-A. Estos límites pueden ser fácilmente sustituidos por las expresiones siguientes:

- Para la transformación directa (figura 2.2(a)):

EC.2.27

$$C_M(T - M_s) \leq \mathbf{s} \leq C_M(T - M_f)$$

- Para la transformación reversa (figura 2.2(b)):

EC.2.28

$$C_A(T - A_f) \leq \mathbf{s} \leq C_A(T - A_s)$$

Quedando así igual que los límites para el modelo de Tanaka.

2.2.3. Modelo de Brinson

2.2.3.1. Reformulación del Modelo de Brinson

El modelo de Brinson [BRI,1993]_a, [BRI,1993]_b está fundamentado, como se comentó en el apartado 2.1.3, en el modelo de Tanaka y en el modelo de Liang y Rogers presentados, de tal forma que parte de la misma ecuación constitutiva y de las leyes de evolución en forma cosenoidal. Sin embargo, introduce dos modificaciones que cambian, sustancialmente, el enfoque del modelo. En primer lugar redefine el concepto de fracción de martensita (ξ), dividiendo la fracción total en suma de una parte debida a la martensita inducida por temperatura, y otra parte debida a la martensita inducida por tensión. Estas dos fracciones se denominan, *fracción de martensita multivariante* (ξ_M) y *fracción de martensita monovariante* (ξ_S) respectivamente. En segundo lugar, Brinson reformula la ecuación constitutiva para tener en cuenta que los parámetros materiales no son constantes e, introduciendo en dicha ecuación constitutiva la nueva fracción de martensita inducida por tensión. En base a esto, la variable interna considerada por Brinson queda redefinida como:

EC.2.29

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_S + \mathbf{x}_M$$

Donde ξ_S es la fracción monovariante y ξ_M la fracción multivariante.

Con esta aportación, el modelo constitutivo será válido para todo el rango de temperaturas, puesto que, como se comentó en el apartado anterior, los modelos de Tanaka y Liang-Rogers no son válidos para $T < M_f$, pues la ecuación constitutiva a esas temperaturas da una relación lineal (comportamiento puramente elástico) entre la tensión y la deformación. Por otro lado, los anteriores modelos tampoco son capaces de reproducir la transformación a partir de martensita inducida por temperatura, sino sólo la transformación a partir de austenita. Con la separación introducida por Brinson, cualquier transformación por tensión partiendo de una aleación 100% austenita, producirá martensita monovariante (ξ_S) pues es la generada por tensión. Si partimos de una fracción mixta entre austenita y martensita a tensión cero, o bien de 100% martensita, la ξ_M representará la fracción inducida por

temperatura y la β_s crecerá sólo si la tensión aplicada es suficientemente alta como para inducir la transformación.

La ecuación constitutiva, introduciendo la separación de fracciones queda:

EC.2.30

$$d\mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{e}} d\mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}_s} d\mathbf{x}_s + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}_M} d\mathbf{x}_M + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial T} dT$$

$$d\mathbf{s} = E d\mathbf{e} + \Omega_s d\mathbf{x}_s + \Omega_M d\mathbf{x}_M + \Theta dT$$

Sin embargo, considerando el caso de una transformación partiendo de martensita multivariante ($\beta_{M0}=1$), Brinson demuestra que $\Omega_M=0$ y, por tanto ese termino desaparece de la ecuación constitutiva y considerando el caso de transformación partiendo de 100% austenita establece que $\Omega_s = -e_L * E$.

En cuanto a las ecuaciones de evolución, Brinson redefine las leyes de evolución cosenoidales para introducir la transformación por tensión a temperaturas inferiores a M_s . Para ello se basa en el diagrama crítico tensión temperatura representado en la figura 2.1(b). En ese diagrama se representa cómo, por debajo de M_s , las tensiones necesarias para iniciar y finalizar la transformación inducida por tensión son constantes con la temperatura. Esas tensiones críticas se denominan, respectivamente, σ_s^{CR} y σ_f^{CR} . Teniendo en cuenta este nuevo diagrama crítico, las leyes de evolución quedan definidas de la siguiente forma:

- **Transformación directa a martensita monovariante a temperaturas superiores a M_s (figura 2.6(a)):**

EC.2.31

$$\mathbf{x}_s = \frac{1 - \mathbf{x}_{s0}}{2} \cos \left\{ \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{s}_s^{CR} - \mathbf{s}_f^{CR}} \left[\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR} - C_M (T - M_s) \right] \right\} + \frac{1 + \mathbf{x}_{s0}}{2}$$

$$\mathbf{x}_M = \mathbf{x}_{M0} - \frac{\mathbf{x}_{M0}}{1 - \mathbf{x}_{s0}} (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{s0})$$

Cuyo rango de validez es:

EC.2.32

$$T > M_s \quad \& \quad \mathbf{s}_s^{CR} + C_M (T - M_s) < \mathbf{s} < \mathbf{s}_f^{CR} + C_M (T - M_s)$$

- *Transformación directa a martensita monovariante a temperaturas inferiores a M_s (figura 2.6(b)):*

EC.2.33

$$\mathbf{x}_S = \frac{1 - \mathbf{x}_{S0}}{2} \cos \left\{ \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{s}_s^{CR} - \mathbf{s}_f^{CR}} [\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR}] \right\} + \frac{1 + \mathbf{x}_{S0}}{2}$$

$$\mathbf{x}_M = \mathbf{x}_{M0} - \frac{\mathbf{x}_{M0}}{1 - \mathbf{x}_{S0}} (\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_{S0}) + \Delta_{Tx}$$

Cuyo rango de validez es:

EC.2.34

$$T < M_s \quad \& \quad \mathbf{s}_s^{CR} < \mathbf{s} < \mathbf{s}_f^{CR}$$

Si $M_s < T < M_f$ & $T < T_0$:

$$\Delta_{Tx} = \frac{1 - \mathbf{x}_{M0}}{2} \{ \cos [a_{ML} (T - M_f)] + 1 \}$$

si no :

$$\Delta_{Tx} = 0$$

- *Transformación reversa de martensita monovariante a austenita (figura 2.6(c)):*

EC.2.35

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_0}{2} \left\{ \cos \left[a_{AL} \left(T - A_s - \frac{\mathbf{s}}{C_A} \right) \right] + 1 \right\}$$

$$\mathbf{x}_S = \mathbf{x}_{S0} - \frac{\mathbf{x}_{S0}}{\mathbf{x}_0} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})$$

$$\mathbf{x}_M = \mathbf{x}_{M0} - \frac{\mathbf{x}_{M0}}{\mathbf{x}_0} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})$$

Cuyo rango de validez es:

EC.2.36

$$T > A_s \quad \& \quad C_A (T - A_f) < \mathbf{s} < C_A (T - A_s)$$

En todos los casos, la notación utilizada es la misma que en los modelos anteriores. Las constantes a_{AL} y a_{ML} son las definidas por Liang-Rogers en la EC.2.20.

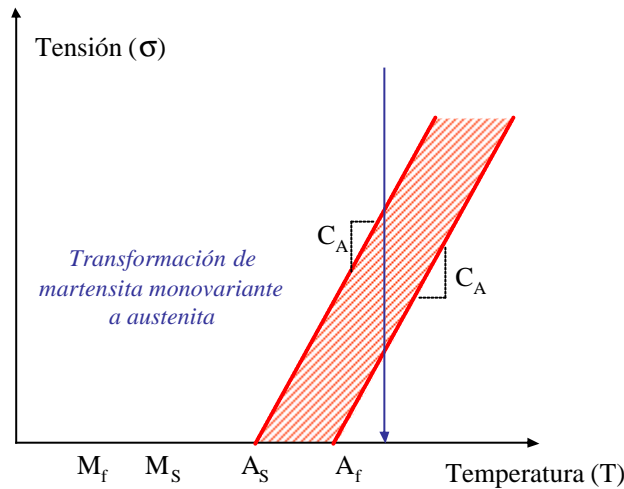
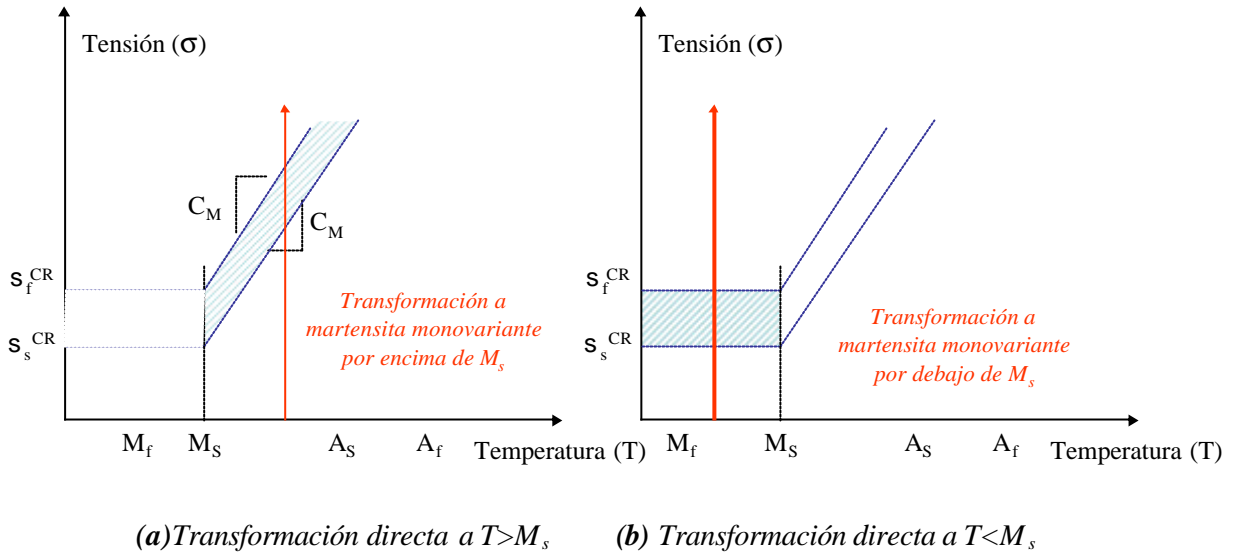


Figura 2.6: Diagrama de transformación tensión-temperatura donde se indican las zonas de transformación activas (zonas ralladas). En la figura (a) se indica la transformación directa a temperaturas superiores a M_s , mostrando las fronteras de validez de la transformación, en la figura (b) para la transformación directa a temperaturas inferiores a M_s y en la figura (c) la transformación reversa.

Por tanto, el modelo de Brinson queda totalmente definido por las ecuaciones EC.2.30 para la ecuación constitutiva; EC.2.31, EC.2.33 y EC.2.35 para las ecuaciones de evolución; EC.2.32, EC.2.34 y EC.2.36 para los límites de transformación (condiciones de activación) y EC.2.20 para las constantes materiales empleadas en el modelo.

2.2.3.2. *Análisis y consideraciones del Modelo de Brinson*

En el modelo de Brinson, podemos destacar los siguientes aspectos:

1. Para la verificación del modelo *se requiere la determinación experimental de 11 parámetros*: módulo elástico E , temperaturas de transformación a tensión cero, ϵ_L o máxima deformación residual para el tensor de transformación, Θ el tensor termoelástico, los coeficientes de influencia de la tensión, o las pendientes C_A y C_M y las tensiones críticas para la transformación por debajo de M_s : σ_s^{CR} y σ_f^{CR} .
2. Como el modelo de Brinson, al igual que el de Liang-Rogers, está basado en el modelo de Tanaka excepto para las ecuaciones de evolución, podemos deducir también cierta analogía con los modelos elastoplásticos tradicionales aunque con cierto cuidado puesto que las leyes de evolución no están derivadas en forma temporal.
3. A diferencia de los modelos anteriores, este modelo es válido para todo el rango de temperaturas, incluyendo $T < M_s$.
4. Igual que el Liang-Rogers aunque las leyes de evolución no están expresadas en forma temporal, sí tienen en cuenta la posibilidad de que exista una fracción de martensita inicial antes de la transformación. Esto será conveniente para la modelización numérica de transformaciones incompletas. Se debe contemplar además, esta fracción residual para la simulación del fenómeno de recuperación de forma con el calentamiento. Es interesante remarcar que esas fracciones iniciales deben ser tomadas como dato de partida en la primera transformación. Para el caso de la martensita inducida por tensión, en el primer ciclo, puede ser considerada como cero (no hay martensita monovariante suponiendo que partimos de un enfriamiento desde temperaturas superiores a A_f sin tensión). Para el caso de la martensita inducida por temperatura, para temperaturas inferiores a M_s , la fracción inicial se puede suponer proporcional a la temperatura (EC.2.34) y para temperaturas superiores a M_s Brinson no prevé ninguna estimación.
5. El proceso de transformación reversa sólo se contempla para temperaturas superiores a A_s , lo que implica que cualquier descarga a temperaturas inferiores a A_s dejará invariantes las fracciones de martensita obtenidas en la

transformación directa. A temperaturas superiores a A_s la EC.2.35 implica que se supone que la fracción que se queda residual de martensita monovariante y multivariante es sólo dependiente de la fracción inicial de esa misma martensita.

6. El proceso de calentamiento o recuperación de forma a tensión cero queda cubierto por la ecuación EC.2.35 pues se supone que hasta que la temperatura no alcance A_s no comienza la transformación reversa.
7. Existe una clara indefinición del modelo para el caso de tensión constante y deformación constante en la zona de temperaturas entre M_f y M_s . Esta indefinición se analiza y corrige en la implementación numérica del modelo tal y como se expone en el apartado 2.4.
8. Dado que una de las mayores aportaciones de Brinson es que los parámetros de la ecuación constitutiva no son constantes, dicha ecuación constitutiva puede expresarse de forma más compacta suponiendo que el módulo elástico sólo depende de la fracción de martensita total (suma de monovariante y multivariante) y que el tensor termoelástico es constante.

EC.2.37

$$\mathbf{s} = E(\mathbf{x})\mathbf{e} - E(\mathbf{x}) * \mathbf{e}_L * \mathbf{x}_s + \Theta * (T - T_0)$$

T_0 es la temperatura a la que la deformación térmica es cero. Podemos observar como, de nuevo, la deformación total está compuesta por una deformación elástica (proporcional a $E(?)$) una deformación por transformación (proporcional a $E(?) * x_s$) y una deformación térmica. Generalmente este término se suele despreciar puesto la deformación térmica es mucho menor que la deformación por transformación.

9. Una última observación muy interesante es la diferencia entre el diagrama crítico tensión-temperatura considerado en el modelo de Brinson y en los modelos de Liang-Rogers y Tanaka. Observando la figura 2.1 vemos como en la figura 2.1(a) las rectas tensión-temperatura pasan todas por las temperaturas de transformación a tensión cero (obtenidas experimentalmente por diversas técnicas como se explica en el Capítulo 3). Sin embargo, en la figura 2.1(b) esto sólo ocurre para las rectas de transformación reversa. Para las de transformación directa, no pasan por las temperaturas martensíticas a tensión cero, sino por el punto (s_s^{CR}, M_s) y el punto (s_f^{CR}, M_s) . Necesariamente, los modelos de Tanaka y Liang-Rogers darán curvas tensión-deformación diferentes a las de Brinson a no ser que se modifique esta

interpretación. Esto es analizado en detalle en el capítulo 4 donde se verifican experimentalmente los modelos.

2.2.4. Modelo de Auricchio: lineal y exponencial

2.2.4.1. *Reformulación del Modelo de Auricchio Exponencial y Lineal*

El modelo de Auricchio [AUR,1997]_a,[AUR,1997]_b,[AUR,1997]_c está basado en un enfoque diferente a los modelos desarrollados anteriormente puesto que se basa en la teoría de plasticidad generalizada desarrollada por Lubliner [LUB,1984], [LUB,1991]. La teoría de plasticidad generalizada es definida por sus autores como un modelo de variable interna para inelasticidad “rate-independent” que incluye la plasticidad clásica como un caso particular. Se desarrolló para poder tener en cuenta el comportamiento de sólidos elastoplásticos en los que, después de una carga plástica inicial y descarga elástica, una subsecuente recarga no tiene porqué ser elástica hasta el estado en el que comenzó la descarga. Esta teoría fue aplicada, posteriormente, por Lubliner y Auricchio [LUB,1996] para el modelado de las SMA. Inicialmente la aplicó en el modelado del efecto superelástico denominando al modelo 1D-1 (para casos unidimensionales) y 3D-1 (tridimensionales) y, posteriormente lo aplicó al efecto memoria de forma (1D-2 y 3D-2). Nos centraremos en este apartado directamente en el análisis del modelo 1D-2 pues contempla todo el rango de temperaturas.

El modelo, al igual que en el caso de Brinson, contempla dos variables internas, la fracción de martensita monovariante (ξ_S) y la fracción multivariante (ξ_M) proponiendo, para ambas, las ecuaciones de evolución en forma temporal. Esta es una de las diferencias significativas de este modelo frente a los otros analizados: las leyes de evolución no son deducidas experimentalmente sino mediante la aplicación rigurosa de los principios termodinámicos al igual que en las teorías de plasticidad clásica. Con ello se permite que, en la construcción de las ecuaciones de evolución, los diferentes procesos de transformación se presenten en forma desacoplada. Los procesos de transformación que considera son:

- Producción de martensita multivariante (ξ_M)

- Producción de martensita monovariante (ξ_S)
- Producción de austenita ($1-\xi_M-\xi_S$).

Para cada uno de los procesos, el modelo presenta la ley de evolución de las dos fracciones de martensita y de austenita. Sumando las ecuaciones de evolución individuales de cada proceso obtiene las reglas de flujo totales para $\dot{\xi}_S$ y $\dot{\xi}_M$ (pues la de austenita es deducible automáticamente).

Las regiones donde se producen estas transformaciones están definidas por un diagrama crítico tensión-temperatura semejante al empleado en modelo de Brinson pero con una pequeña modificación (figura 2.7) para la zona entre M_S y M_f para poder contemplar la transformación dentro de ese rango.

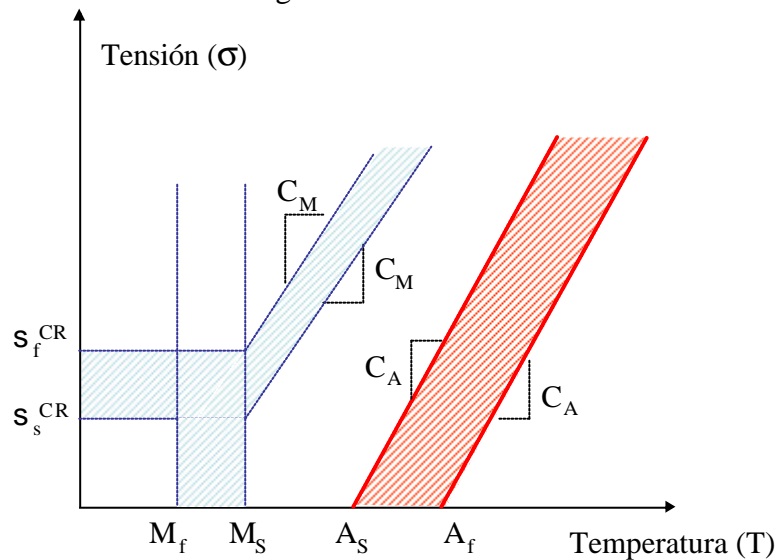
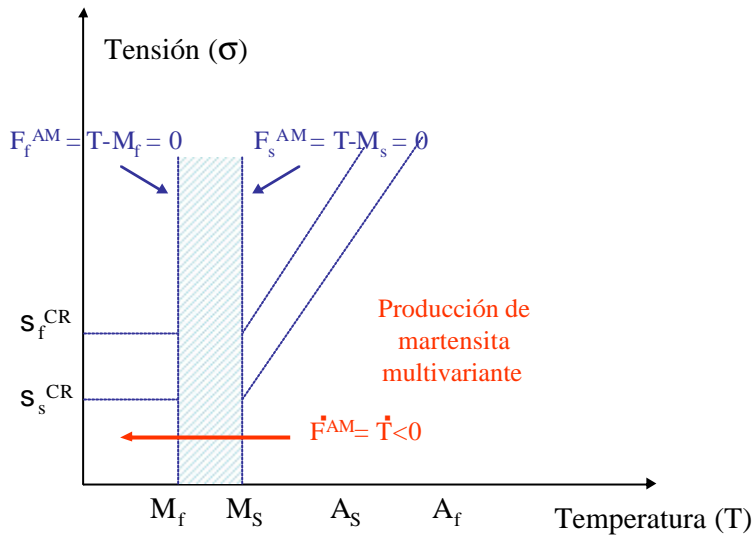
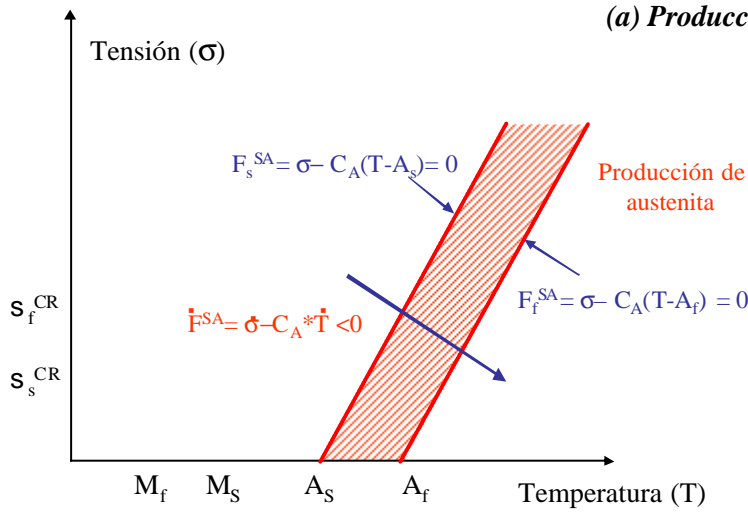


Figura 2.7: Diagrama de transformación tensión-temperatura utilizado en el modelo de Auricchio donde se indican las zonas de transformación activas (zonas ralladas).

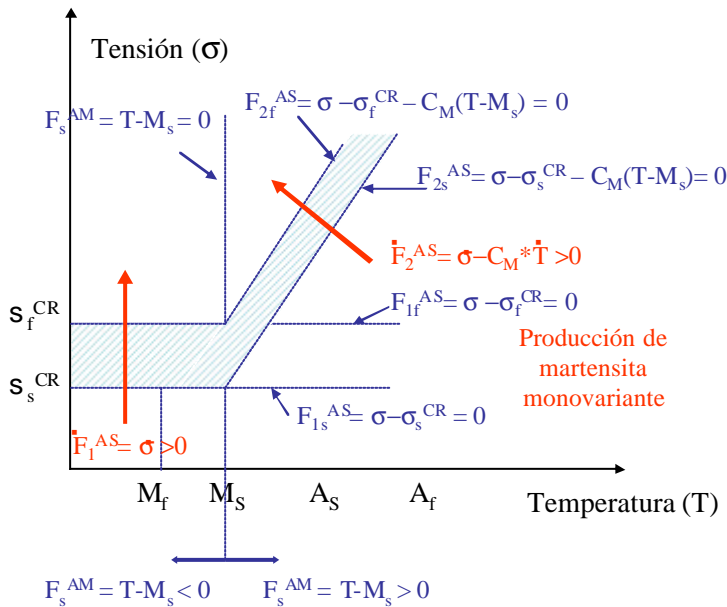
Para la construcción del modelo sigue el siguiente procedimiento: para cada proceso de transformación, delimita en primer lugar las regiones de transformación (en función de la temperatura y de la tensión) y construye las ecuaciones en forma temporal para la fracción que se reduce en la transformación. Las otras fracciones las deduce imponiendo que la suma total sea cero. Las ecuaciones de evolución dependen, en cada caso, de los límites de la transformación y de la condición de activación, además de una función de las variables de estado. Esta función es la que, en nuestro caso, analizaremos como lineal o exponencial, dando lugar a dos modelos diferentes. Este proceso se entiende fácilmente observando la figura 2.8 (a)-(c).



(a) Producción de martensita multivariante



(b) Producción de austenita



(c) Producción de martensita monovariante

Figura 2.8: Representación de los distintos procesos de transformación indicando las zonas activas.

Las leyes de evolución siguiendo la notación de la Figura 2.8 quedan pues, de la siguiente forma:

- **Leyes de evolución exponencial:**

Si $F_s^{AM} \leq 0$:

EC.2.38

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_S &= H_1^{AS} \left\{ \mathbf{b}^{AS} (1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) + \mathbf{b}^{MS} \mathbf{x}_M \right\} \frac{\dot{F}_1^{AS}}{(F_{1,f}^{AS})^2} + H^{SA} \mathbf{b}^{SA} \mathbf{x}_S \frac{\dot{F}^{SA}}{(F_f^{SA})^2} \\ \dot{\mathbf{x}}_M &= -H_1^{AS} \mathbf{b}^{MS} \mathbf{x}_M \frac{\dot{F}_1^{AS}}{(F_{1,f}^{AS})^2} + H^{SA} \mathbf{b}^{MA} \mathbf{x}_M \frac{\dot{F}^{SA}}{(F_f^{SA})^2} - H^{AM} \mathbf{b}^{AM} (1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) \frac{\dot{F}^{AM}}{(F_f^{AM})^2}\end{aligned}$$

Si $F_s^{AM} > 0$:

EC.2.39

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_S &= H_2^{AS} \left\{ \mathbf{b}^{AS} (1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) + \mathbf{b}^{MS} \mathbf{x}_M \right\} \frac{\dot{F}_2^{AS}}{(F_{2,f}^{AS})^2} + H^{SA} \mathbf{b}^{SA} \mathbf{x}_S \frac{\dot{F}^{SA}}{(F_f^{SA})^2} \\ \dot{\mathbf{x}}_M &= -H_2^{AS} \mathbf{b}^{MS} \mathbf{x}_M \frac{\dot{F}_2^{AS}}{(F_{2,f}^{AS})^2} + H^{SA} \mathbf{b}^{MA} \mathbf{x}_M \frac{\dot{F}^{SA}}{(F_f^{SA})^2}\end{aligned}$$

- **Leyes de evolución lineal:**

Si $F_s^{AM} \leq 0$:

EC.2.40

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_S &= -H_1^{AS} \left\{ (1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) + \mathbf{x}_M \right\} \frac{\dot{F}_1^{AS}}{F_{1,f}^{AS}} + H^{SA} \mathbf{x}_S \frac{\dot{F}^{SA}}{F_f^{SA}} \\ \dot{\mathbf{x}}_M &= H_1^{AS} \mathbf{x}_M \frac{\dot{F}_1^{AS}}{F_{1,f}^{AS}} + H^{SA} \mathbf{x}_M \frac{\dot{F}^{SA}}{F_f^{SA}} - H^{AM} (1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) \frac{\dot{F}^{AM}}{F_f^{AM}}\end{aligned}$$

Si $F_s^{AM} > 0$:

EC.2.41

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_S &= -H_2^{AS} \left\{ (1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) + \mathbf{x}_M \right\} \frac{\dot{F}_2^{AS}}{F_{2,f}^{AS}} + H^{SA} \mathbf{x}_S \frac{\dot{F}^{SA}}{F_f^{SA}} \\ \dot{\mathbf{x}}_M &= H_2^{AS} \mathbf{x}_M \frac{\dot{F}_2^{AS}}{F_{2,f}^{AS}} + H^{SA} \mathbf{x}_M \frac{\dot{F}^{SA}}{F_f^{SA}}\end{aligned}$$

Donde, en las leyes exponenciales, β es un parámetro constante escalar que mide la velocidad a la que se produce la transformación, y las H son constantes de valor 1 ó 0 en función de las zonas de transformación, y toman los siguientes valores:

EC.2.41

- $H_1^{AS} = 1$ si $F_s^{AM} < 0$ & $F_{1,s}^{AS} * F_{1,f}^{AS} < 0$ & $\dot{F}_1^{AS} > 0$
 $H_1^{AS} = 0$ el resto
- $H_2^{AS} = 1$ si $F_s^{AM} > 0$ & $F_{2,s}^{AS} * F_{2,f}^{AS} < 0$ & $\dot{F}_2^{AS} > 0$
 $H_2^{AS} = 0$ el resto
- $H^{SA} = 1$ si $F_s^{SA} * F_f^{SA} < 0$ & $\dot{F}^{SA} < 0$
 $H^{SA} = 0$ el resto
- $H^{AM} = 1$ si $F_s^{AM} * F_f^{AM} < 0$ & $\dot{F}^{AM} < 0$
 $H^{AM} = 0$ el resto

Estas leyes de evolución las podemos expresar en función de los mismos parámetros que en los otros modelos, quedando:

• **Leyes de evolución exponencial:**

Si T-M_s ≤ 0:

EC.2.42

$$\dot{\mathbf{x}}_S = H_1^{AS} \left\{ \mathbf{b}^{AS} (1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) + \mathbf{b}^{MS} \mathbf{x}_M \right\} \frac{\dot{\mathbf{s}}}{(\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR})^2} + H^{SA} \mathbf{b}^{SA} \mathbf{x}_S \frac{\dot{\mathbf{s}} - C_A \dot{T}}{(\mathbf{s} - C_A(T - A_f))^2}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_M = -H_1^{AS} \mathbf{b}^{MS} \mathbf{x}_M \frac{\dot{\mathbf{s}}}{(\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR})^2} + H^{SA} \mathbf{b}^{MA} \mathbf{x}_M \frac{\dot{\mathbf{s}} - C_A \dot{T}}{(\mathbf{s} - C_A(T - A_f))^2} - H^{AM} \mathbf{b}^{AM} (1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) \frac{\dot{T}}{(T - M_f)^2}$$

Si T-M_s > 0:

EC.2.43

$$\dot{\mathbf{x}}_S = H_2^{AS} \left\{ \mathbf{b}^{AS} (1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) + \mathbf{b}^{MS} \mathbf{x}_M \right\} \frac{\dot{\mathbf{s}} - C_M \dot{T}}{(\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR} - C_M(T - M_s))^2} + H^{SA} \mathbf{b}^{SA} \mathbf{x}_S \frac{\dot{\mathbf{s}} - C_A \dot{T}}{(\mathbf{s} - C_A(T - A_f))^2}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_M = -H_2^{AS} \mathbf{b}^{MS} \mathbf{x}_M \frac{\dot{\mathbf{s}} - C_M \dot{T}}{(\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR} - C_M(T - M_s))^2} + H^{SA} \mathbf{b}^{MA} \mathbf{x}_M \frac{\dot{\mathbf{s}} - C_A \dot{T}}{(\mathbf{s} - C_A(T - A_f))^2}$$

• **Leyes de evolución lineal:**

Si $T-M_s \leq 0$:

EC.2.44

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_S &= -H_1^{AS} \{(1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) + \mathbf{x}_M\} \frac{\dot{\mathbf{s}}}{\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR}} + H^{SA} \mathbf{x}_S \frac{\dot{\mathbf{s}} - C_A \dot{T}}{\mathbf{s} - C_A(T - A_f)} \\ \dot{\mathbf{x}}_M &= H_1^{AS} \mathbf{x}_M \frac{\dot{\mathbf{s}}}{\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR}} + H^{SA} \mathbf{x}_M \frac{\dot{\mathbf{s}} - C_A \dot{T}}{\mathbf{s} - C_A(T - A_f)} - H^{AM} (1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) \frac{\dot{T}}{T - M_f}\end{aligned}$$

Si $T-M_s > 0$:

EC.2.45

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_S &= -H_2^{AS} \{(1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) + \mathbf{x}_M\} \frac{\dot{\mathbf{s}} - C_M \dot{T}}{\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR} - C_M(T - M_s)} + H^{SA} \mathbf{x}_S \frac{\dot{\mathbf{s}} - C_A \dot{T}}{\mathbf{s} - C_A(T - A_f)} \\ \dot{\mathbf{x}}_M &= H_2^{AS} \mathbf{x}_M \frac{\dot{\mathbf{s}} - C_M \dot{T}}{\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR} - C_M(T - M_s)} + H^{SA} \mathbf{x}_M \frac{\dot{\mathbf{s}} - C_A \dot{T}}{\mathbf{s} - C_A(T - A_f)}\end{aligned}$$

Donde, ahora las H toman los siguientes valores:

EC.2.46

- $H_1^{AS} = 1$ si $(T - M_s) < 0$ & $(\mathbf{s} - \mathbf{s}_S^{CR}) * (\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR}) < 0$ & $\dot{\mathbf{s}} > 0$
- $H_1^{AS} = 0$ el resto
- $H_2^{AS} = 1$ si $(T - M_s) > 0$ & $(\mathbf{s} - \mathbf{s}_S^{CR} - C_M(T - M_s)) * (\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR} - C_M(T - M_s)) < 0$ & $\dot{\mathbf{s}} - C_M \dot{T} > 0$
- $H_2^{AS} = 0$ el resto
- $H^{SA} = 1$ si $(\mathbf{s} - C_A(T - A_s)) * (\mathbf{s} - C_A(T - A_f)) < 0$ & $\dot{\mathbf{s}} - C_A \dot{T} < 0$
- $H^{SA} = 0$ el resto
- $H^{AM} = 1$ si $(T - M_s) * (T - M_f) < 0$ & $\dot{T} < 0$
- $H^{AM} = 0$ el resto

Todos los parámetros que se emplean son experimentalmente obtenibles y han sido definidos en los anteriores modelos.

En cuanto a la ecuación constitutiva, dentro del régimen de pequeñas deformaciones, considerando una descomposición aditiva de la deformación total, separa dicha deformación total en una parte de deformación elástica y otra deformación por transformación, quedando la expresión:

EC.2.47

$$\mathbf{s} = E * \mathbf{e}^e$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}_L * \mathbf{x}_s$$

Donde E es el módulo elástico, que inicialmente, Auricchio lo consideró constante para poder integrar en forma cerrada las ecuaciones de evolución y e_L es la deformación máxima recuperable, constante material, que mide la deformación máxima obtenible sólo por demaclado de la martensita multivariante. Es, por tanto, una medida de la deformación máxima obtenible alineando todas las variantes de martensita en una única dirección.

Por tanto, los dos modelos de Auricchio analizados (lineal y exponencial) quedan totalmente definidos por las ecuaciones EC.2.47 para la ecuación constitutiva; EC.2.42, y EC.2.43 para las ecuaciones de evolución en forma exponencial y EC.2.44, y EC.2.45 para las ecuaciones de evolución en forma lineal y EC.2.46 para los límites de transformación (condiciones de activación). El resto de parámetros son obtenibles experimentalmente.

2.2.4.2. *Análisis y consideraciones del Modelo Auricchio Exponencial y Lineal*

En el modelo de Auricchio, podemos destacar los siguientes aspectos:

1. Para la verificación del modelo *se requiere la determinación experimental de 10 parámetros*: módulo elástico E , temperaturas de transformación a tensión cero, e_L o máxima deformación residual para el tensor de transformación, los coeficientes de influencia de la tensión, o las pendientes C_A y C_M y las tensiones críticas para la transformación por debajo de M_s : σ_s^{CR} y σ_f^{CR} .
2. Para las leyes de evolución exponencial se debe, además, estimar el parámetro β (o los diferentes parámetros si se considera diferentes velocidades para cada transformación). Dado que Auricchio no aporta ningún detalle sobre la determinación de estos parámetros deberán ser obtenidos mediante ajuste

experimental. En el apartado 2.4 se analizan las implicaciones en los resultados en función de este parámetro.

3. En este modelo, al estar basado en la teoría de plasticidad generalizada que contiene a la plasticidad clásica como caso especial, será más directa la analogía con los modelos elastoplásticos tradicionales para el algoritmo numérico de implementación. Nótese que, en esta ocasión, las ecuaciones de evolución están en forma temporal. Si los parámetros son constantes, puede deducirse una integración en forma cerrada. Sin embargo, dado que no consideraremos los parámetros constantes, deberemos deducir un algoritmo adecuado de integración.
4. Igual que el modelo de Brinson, este modelo es válido para todo el rango de temperaturas, incluyendo $T < M_s$.
5. Al estar la leyes de evolución expresadas en forma temporal, sí tienen en cuenta la posibilidad de que exista una fracción de martensita inicial antes de la transformación. Esto será conveniente para la modelización numérica de transformaciones incompletas. Deberemos contemplar además, esta fracción residual para la simulación del fenómeno de recuperación de forma con el calentamiento. Es interesante remarcar que esas fracciones iniciales deben ser tomadas como dato de partida en la primera transformación. Sin embargo, el procedimiento aquí más adecuado, será suponer que la primera transformación es de enfriamiento (partiendo de 100% austenita) hasta la temperatura donde se quiera ensayar. La fracción de martensita calculada a través de las leyes de evolución, nos darán la fracción inicial para la siguiente transformación.
6. Al igual que en Brinson, el proceso de transformación reversa sólo se contempla para temperaturas superiores a A_s , lo que implica que cualquier descarga a temperaturas inferiores a A_s dejará invariantes las fracciones de martensita obtenidas en la transformación directa.
7. El proceso de calentamiento o recuperación de forma a tensión cero queda cubierto por la condición $H^{SA} = 1$ pues se supone que hasta que la temperatura no alcance A_s no comienza la transformación reversa.

8. En este modelo, a diferencia del modelo de Brinson, no existe indefinición en la transformación a tensión y deformación constante para el rango de temperaturas entre M_s y M_f , pues queda contemplado con la condición $H^{AM}=1$.
9. De nuevo podemos hacer la misma observación que en el modelo de Brinson respecto a la diferencia entre el diagrama crítico tensión-temperatura considerado en modelo de Auricchio o Brinson y en los modelos de Liang-Rogers y Tanaka.
10. Se ha de hacer notar que en la bibliografía consultada para el modelo de Auricchio [LUB,1996], [AUR,1997]_a,[AUR,1997]_b,[AUR,1997]_c, existen ciertas discrepancias en los signos y en algunas notaciones de las ecuaciones de las leyes de evolución, posiblemente debido a errores tipográficos. Las ecuaciones presentadas en este trabajo incluyen las modificaciones y correcciones que se han considerando oportunas.

2.3. IMPLEMENTACION NUMÉRICA DE LOS MODELOS

2.3.1. Procedimiento para la implementación numérica

Una vez presentadas las reformulaciones teóricas de los cuatro modelos y el análisis detallado de los mismos, el siguiente paso consiste en la implementación numérica para poder comparar la capacidad de cada modelo en simular los principales fenómenos característicos de estas aleaciones: la superelasticidad, la memoria de forma (incluyendo la recuperación mediante calentamiento), la recuperación impedida (variación de temperatura a deformación fija obteniendo la tensión) y la variación de la temperatura a tensión fija (deformación recuperable bajo tensión). Además de comparar la capacidad para modelizar adecuadamente estas características termomecánicas bajo condiciones de carga casi estáticas de las SMA, se debe analizar su adecuación numérica para ser implementados en herramientas de diseño computacional o programas de análisis de control.

La implementación numérica se realiza traduciendo cada modelo a un modelo discreto en el tiempo y tratando el comportamiento no lineal del material como un problema controlado por la deformación y discreto en el tiempo. Para ello, debemos discretizar

temporalmente las ecuaciones de evolución y obtener así la tensión a través de la variación de la deformación mediante un algoritmo adecuado de mapeo de retorno (predicción elástica, corrección plástica) [SIM,1986] que se programa en MATLAB v.6. [PAL,2001], [HOF,1992]. El hecho de que los algoritmos de mapeo de retorno sean gobernados por la deformación hace que sean directamente aplicables a entornos o aplicaciones basados en el desplazamiento como, por ejemplo, en la simulación del comportamiento a flexión de una viga de SMA que se desarrolla en el Capítulo 5. La idea, pues, de utilizar estos algoritmos es muy adecuada en la integración de la respuesta constitutiva termomecánica de las SMA [MARS,1994]. La independencia de la velocidad de deformación y la dependencia de la historia de carga, permiten que el comportamiento de las SMA sea definido, como hemos visto en los modelos, por una relación de estado tensión-deformación que incluya a la variable interna, una ecuación de evolución diferencial para la deformación por transformación y una función de transformación para definir los límites de la transformación de fase. Esta estructura implica que, un algoritmo numérico probado como el de mapeo de retorno, pueda ser utilizado de forma adaptada para los modelos expuestos en los apartados anteriores [SIM,1998].

El algoritmo de mapeo de retorno que se utiliza en ecuaciones constitutivas elastoplásticas supone un estado de prueba (estado “trial”) elástico que es seguido por una corrección plástica (mapeo de retorno) si la solución elástica viola las condiciones del modelo [SIM,1998]. Estos algoritmos se diferencian por el tipo de discretización empleada en la integración numérica de las ecuaciones de evolución y en el procedimiento iterativo numérico adoptado para resolver el conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales de la parte correctora. Generalmente, para la discretización se suele emplear el método Backward-Euler o implícito pues se ha demostrado que, en la mayoría de los casos, se mejora la estabilidad de la solución incremental, y para el procedimiento iterativo de la solución se suele utilizar el método de Newton-Raphson [FU,2001].

A diferencia de los algoritmos de plasticidad tradicional, en el comportamiento de las SMA no existe una única condición que separe el dominio elástico del plástico, sino que

el material puede encontrarse en diferentes situaciones: o bien no ha iniciado la transformación (campo elástico inicial, condición de prueba o trial correcto), bien está transformando (corrección por transformación) o bien, puede estar completamente transformado y en régimen de nuevo lineal. Esto hace que el algoritmo deba incluir dos estados de prueba: uno que suponga que no hay transformación y otro que suponga que la transformación es completa. La corrección se hará en caso de violación de ambas condiciones.

Por tanto, el procedimiento empleado en el algoritmo para la implementación de los modelos constitutivos es:

1. Se discretizan, en el caso que sea necesario, las ecuaciones de evolución mediante el esquema de integración de Backward-Euler suponiendo que conocemos, en cada momento, el valor de la deformación y la temperatura en el tiempo t_{n+1} , conocemos los valores de todas las variables en el tiempo t_n (paso anterior) y queremos conocer el valor de las variables en el tiempo t_{n+1} . Expresaremos, además, cada modelo constitutivo, en forma incremental para incrementos dados de deformación y temperatura, puesto que es necesario en análisis basados en deformaciones incrementales, de la siguiente manera:

EC.2.48

$$d\sigma = \mathcal{L} * d\varepsilon + \mathcal{J} * dT$$

Donde \mathcal{L} es el tensor de rigidez tangente y \mathcal{J} es el tensor del módulo térmico tangente.

2. Dividiremos el diagrama crítico tensión-temperatura en las diferentes regiones de transformación. Para cada una de ellas, estableceremos dos estados de prueba (estados “trial”) y las condiciones para la transformación. En el caso de no cumplirse las condiciones, se recalcula la variable interna por procedimientos iterativos (Newton-Raphson) tomando como valor inicial el valor de prueba calculado para cada uno de los modelos.
3. Calculada la fracción de martensita (o fracciones, en el caso de distinción entre monovariante ξ_S y multivariante ξ_M) calcularemos la tensión y obtendremos,

para futuras aplicaciones, el módulo tangente y el tensor del módulo térmico tangente.

Otro segundo aspecto a destacar antes de exponer los algoritmos de implementación es cómo analizaremos la dependencia de los parámetros materiales con la variable interna. Ya se comentó que los modelos de Tanaka y Liang-Rogers consideraban que, tanto el módulo elástico E , como el módulo termoelástico Θ eran constantes. Brinson y Aurcchio, por el contrario, consideraban la dependencia del módulo elástico con la fracción de martensita total (suma de monovariante ξ_S y multivariante ξ_M). En la implementación numérica, sin embargo, analizamos dos diferentes ecuaciones de E para la dependencia con la fracción de martensita: el *esquema de Reuss* y el *esquema de Voigt* [PAT,1993]. Estos dos esquemas se introducen en todos los modelos (incluidos el de Tanaka y Liang-Rogers) teniendo en cuenta los consecuentes cambios en el tratamiento de las ecuaciones.

En el *esquema de Reuss* se supone el material compuesto periódicamente de austenita y martensita. En el caso investigado (uniaxial con tracción en dirección longitudinal al elemento) se puede suponer que la transformación de fase se produce por nucleación y crecimiento de inclusiones laminares principalmente en la dirección ortogonal a la longitud del elemento. Por tanto, podemos representar la transformación según la figura 2.9(a). Suponiendo que el material sufre una elongación u de la celda, esa elongación será la suma de la contribución de la porción austenita más la contribución de la martensita. Esto se puede expresar como:

EC.2.49

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{s}_A = \mathbf{s}_M \\ u &= \mathbf{e} * L = u_A + u_M = \mathbf{e}_A * L_A + \mathbf{e}_M * L_M \\ \mathbf{e} &= \frac{\mathbf{e}_A L_A}{L} + \frac{\mathbf{e}_M L_M}{L} = \mathbf{e}_A * (1 - \mathbf{x}) + \mathbf{e}_M * \mathbf{x} \\ \frac{\mathbf{s}}{E} &= \frac{\mathbf{s}}{E_A} (1 - \mathbf{x}) + \frac{\mathbf{s}}{E_M} \mathbf{x} \\ E &= \frac{E_A * E_M}{E_M * (1 - \mathbf{x}) + E_A * \mathbf{x}} \end{aligned}$$

De donde podemos deducir que el módulo global del conjunto martensita y austenita se obtiene en función del módulo elástico de la austenita (E_A), de la martensita (E_M) y de la fracción total de martensita:

EC.2.50

$$E = \frac{E_A}{1 + \left(\frac{E_A}{E_S} - 1 \right) * x}$$

Obteniendo la expresión la denominada *expresión o fórmula de Reuss*.

En el *esquema de Voigt* se considera el material compuesto por fibras de austenita y martensita dispuestas en paralelo a la dirección de aplicación de la fuerza tal y como se aprecia en la figura 2.9(b). De esta manera, la deformación que sufre el conjunto es la misma que la deformación que sufre cada porción, y esto lo podemos expresar como:

Ec.2.51

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{e}_M = \mathbf{e}_A \\ \mathbf{s} &= \mathbf{s}_M * x + \mathbf{s}_A * (1 - x) \\ E * \mathbf{e} &= \mathbf{e}_M * E_M * x + \mathbf{e}_A * E_A * (1 - x) \end{aligned}$$

En este caso, la expresión para el módulo elástico del conjunto queda:

EC.2.52

$$E = x * E_M + (1 - x) * E_A$$

Esta expresión, denominada *fórmula de Voigt*, pese a ser la más empleada en los modelos que utilizan propiedades diferentes en martensita y austenita como, por ejemplo el modelo de Brinson, es la menos realista de las dos, puesto que experimentalmente se ha demostrado que suponer paralelismo a la dirección de aplicación de la fuerza no es adecuado [AUR,1997]_b.

Si se representa gráficamente la evolución de ambos esquemas con la fracción de martensita obtenemos la figura 2.10 donde se puede observar la diferencia en la consideración de ambas expresiones para el módulo elástico, así como la diferencia en el supuesto de considerar el módulo elástico del material constante. En el apartado 2.4

se analiza la influencia de ambas expresiones en el comportamiento de las Aleaciones con Memoria de Forma ensayadas en el presente trabajo.

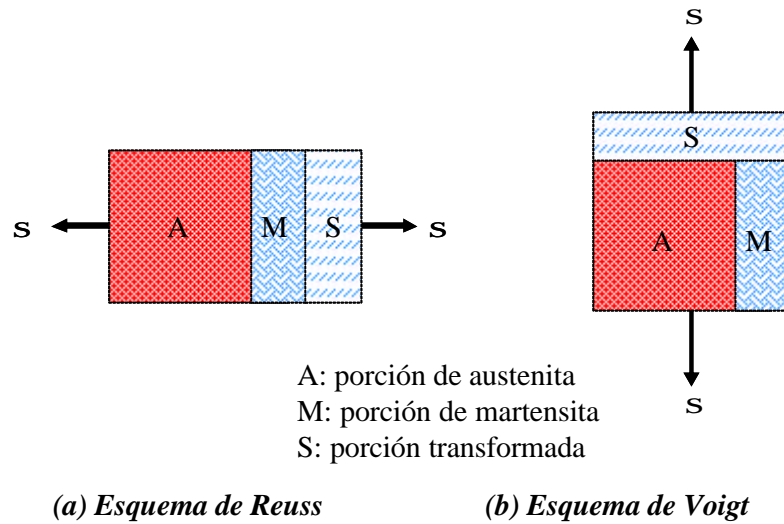


Figura 2.9: Representación de los esquemas de Reuss (a) y Voigt (b) para la dependencia del módulo elástico con la fracción de martensita.

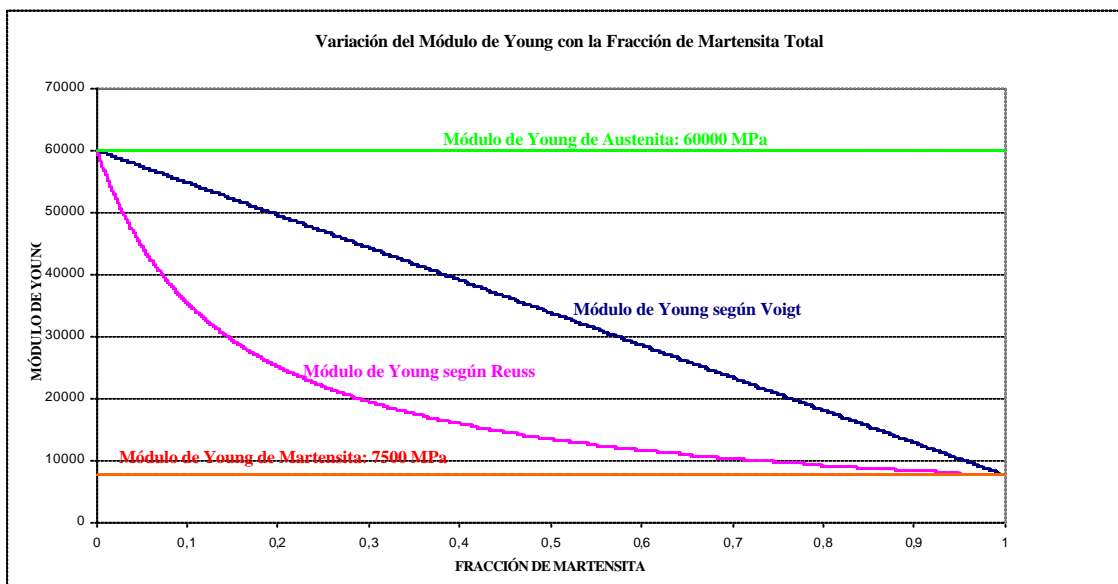


Figura 2.10: Representación de los esquemas de Reuss y Voigt para la dependencia del módulo elástico con la fracción de martensita total para dos módulos elásticos supuestos $E_A=60000$ MPa y $E_M=7500$ MPa. Se representa, además, las rectas que indican el supuesto de considerar el módulo elástico constante en el proceso de transformación.

La programación de los modelos está compuesta de diferentes bloques donde los únicos bloques diferenciables entre los modelos son los correspondientes a los cálculos de la fracción de martensita, de los módulos tangentes y de la tensión. De esta manera se consigue más flexibilidad a la hora de ejecutar los diferentes modelos constitutivos y se reduce la posibilidad de fallos en los cálculos al permitir, así, una depuración del programa logrando mayor sencillez y estructuración. También se consigue, de esta forma, poder comparar más adecuadamente todos los modelos y facilitar la interpretación de los algoritmos. En la implementación se intenta, en la medida de lo posible, que las estructuras de gestión de datos así como los procedimientos operativos optimicen lo máximo posible el tiempo de utilización de CPU para conseguir modelos convergentes y finitos en el tiempo. Los bloques que componen los programas se esquematizan en la figura 2.11 para el caso de la simulación de procesos carga-descarga controlados por la deformación y la temperatura. El esquema presentado en esta figura es común para todos los casos de carga contemplados:

- Deformación variable y temperatura constante (carga o descarga isotérmicas): el programa calcula la tensión (ver figura 2.12a para la representación esquemática sobre el diagrama crítico Tensión-Temperatura)
- Deformación constante y temperatura variable (recuperación impedida): se calcula también la tensión (figura 2.12b).
- Tensión constante y temperatura variable: en este caso calculamos la deformación (figura 2.12c).

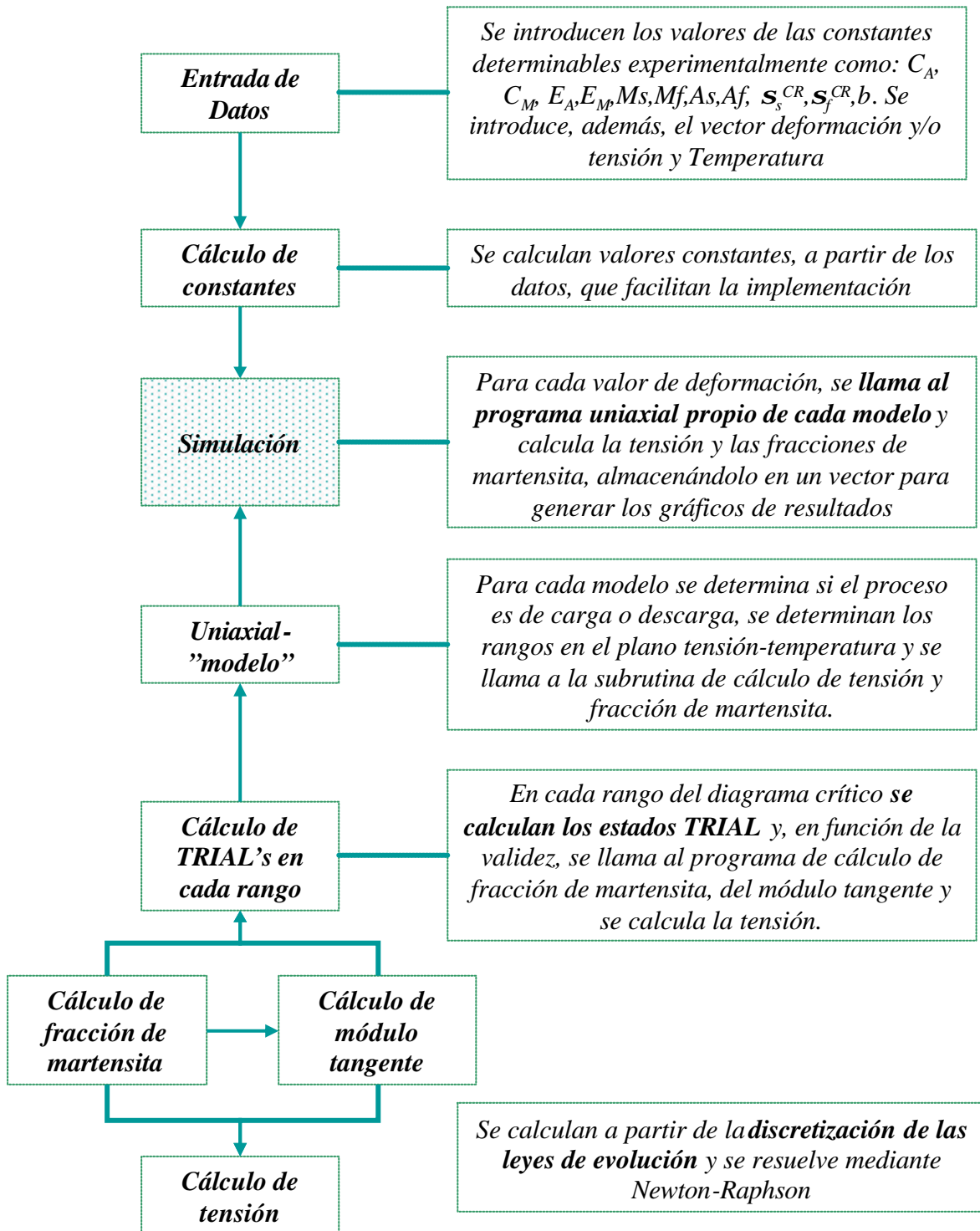


Figura 2.11: Esquema de los bloques de programación comunes a todos los modelos para los proceso de carga y descarga con control por deformación y temperatura.

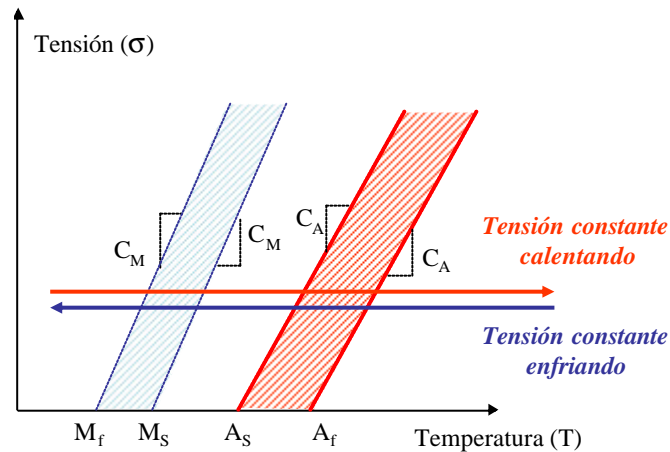
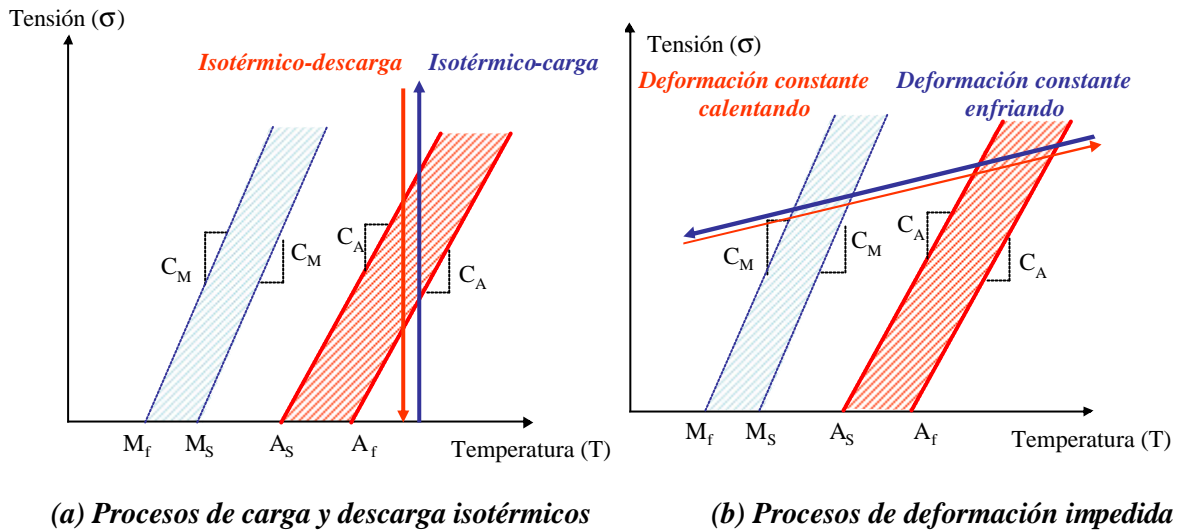


Figura 2.12: Representación sobre el diagrama crítico tensión-temperatura, de todos los casos de transformación contemplados en la implementación numérica.

En los dos primeros casos sólo se tiene que modificar el bloque “entrada de datos” generándose, bien un vector de deformaciones, bien un vector de temperaturas. En el último caso, dado que la tensión es constante (y conocida) no es necesario crear los estados de prueba (trial), y la fracción de martensita se puede calcular directamente. Sin embargo, excepto esta modificación, mantendremos, por coherencia, el resto de la estructura de la programación igual.

Antes de presentar, para cada modelo, la discretización de las ecuaciones así como los algoritmos implementados, establecemos a continuación el procedimiento común de

resolución para la obtención de la tensión y de la fracción de martensita utilizado en todos ellos para facilitar tanto la comparación, como la implementación.

PROCEDIMIENTO A (modelos de Tanaka y Liang-Rogers)

Para los modelos de Tanaka y Liang-Rogers, dado que sólo consideran una fracción de martensita, el procedimiento para la obtención de la fracción de martensita (ξ) y de la tensión (σ) a partir de los valores conocidos de deformación (ϵ) y temperatura (T), es el siguiente:

- Dada una ley de evolución y la ley de la tensión, las expresamos en forma diferencial:

EC.2.53

$$\begin{aligned}d\mathbf{x} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{s}, T) \\d\mathbf{s} &= g(\mathbf{x}, \mathbf{e}, T)\end{aligned}$$

- Expresamos la derivada temporal utilizando la regla de la cadena:

EC.2.54a-b

$$\begin{aligned}d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} \dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial T} \dot{T} = A * \dot{\mathbf{s}} + B * \dot{T} \\d\mathbf{s} = \dot{\mathbf{s}} &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{e}} \dot{\mathbf{e}} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial T} \dot{T} = D * \dot{\mathbf{x}} + C * \dot{\mathbf{e}} + F * \dot{T}\end{aligned}$$

- Discretizamos la derivada temporal de la fracción de martensita (ξ):

EC.2.55

$$\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n = A_{n+1} \{C_{n+1} * (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n) + D_{n+1} * (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) + F_{n+1} * (T_{n+1} - T_n)\} + B_{n+1} * (T_{n+1} - T_n)$$

Esta expresión obtenida depende toda, implícitamente de ξ_{n+1}

- Solucionamos la ecuación en ξ_{n+1} mediante el procedimiento iterativo de Newton-Raphson:

EC.2.56

$$f(\mathbf{x}_{n+1}) = EC.2.55$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{f(\mathbf{x}_k)}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})_k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})_k = \frac{f(\mathbf{x}_k + h) - f(\mathbf{x}_k)}{h}$$

$$\text{convergencia si: } \frac{|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k|}{|\mathbf{x}_k|} \leq TOL$$

Donde h es el valor incremental para el cálculo de la derivada y TOL la tolerancia exigida para el proceso iterativo.

- Obtenida la ξ_{n+1} , podemos obtener la tensión σ_{n+1} a través de la EC.2.54b o bien, a través de los operadores tangentes obtenidos en cada caso y discretizados adecuadamente.

EC.2.57

$$\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_n = C_{n+1} * (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n) + D_{n+1} * (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) + F_{n+1} * (T_{n+1} - T_n)$$

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \mathbf{f}_{n+1}(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) + \vartheta_{n+1}(T_{n+1} - T_n)$$

PROCEDIMIENTO B (modelos de Brinson y Auricchio lineal y exponencial)

Para los modelos de Brinson y Auricchio, al considerar dos fracciones de martensita, el procedimiento para la obtención de cada fracción de martensita (ξ_S y ξ_M) y de la tensión (σ) a partir de los valores conocidos de deformación (ϵ) y temperatura (T), es el siguiente:

- Dada las dos leyes de evolución y la ley de la tensión, las expresamos en forma diferencial:

EC.2.58

$$d\mathbf{x}_S = f_1(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_M, \mathbf{s}, T)$$

$$d\mathbf{x}_M = f_2(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_M, \mathbf{s}, T)$$

$$d\mathbf{s} = g(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_M, \mathbf{e}, T)$$

- Expresamos la derivada temporal utilizando la regla de la cadena:

EC.2.59a-c

$$d\mathbf{x}_S = \dot{\mathbf{x}}_S = \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_M} \dot{\mathbf{x}}_M + \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{s}} \dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial T} \dot{T} = A * \dot{\mathbf{x}}_M + B * \dot{\mathbf{s}} + C * \dot{T}$$

$$d\mathbf{s} = \dot{\mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}_S} \dot{\mathbf{x}}_S + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}_M} \dot{\mathbf{x}}_M + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{e}} \dot{\mathbf{e}} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial T} \dot{T} = D * \dot{\mathbf{x}}_S + F * \dot{\mathbf{x}}_M + R * \dot{\mathbf{e}} + G * \dot{T}$$

$$d\mathbf{x}_M = \dot{\mathbf{x}}_M = \frac{\partial \mathbf{x}_M}{\partial \mathbf{x}_S} \dot{\mathbf{x}}_S + \frac{\partial \mathbf{x}_M}{\partial \mathbf{s}} \dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial \mathbf{x}_M}{\partial T} \dot{T} = H * \dot{\mathbf{x}}_S + J * \dot{\mathbf{s}} + K * \dot{T}$$

- Discretizamos las derivadas temporales de las fracciones de martensita (ξ_S y ξ_M):

EC.2.60

$$\mathbf{x}_{S,n+1} - \mathbf{x}_{S,n} = A_{n+1} * (\mathbf{x}_{M,n+1} - \mathbf{x}_{M,n}) + C_{n+1} * (T_{n+1} - T_n) + B_{n+1} \{ R_{n+1} * (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n) + D_{n+1} * (\mathbf{x}_{S,n+1} - \mathbf{x}_{S,n}) + G_{n+1} * (T_{n+1} - T_n) + F_{n+1} * (\mathbf{x}_{M,n+1} - \mathbf{x}_{M,n}) \}$$

EC.2.61

$$\mathbf{x}_{M,n+1} - \mathbf{x}_{M,n} = H_{n+1} * (\mathbf{x}_{S,n+1} - \mathbf{x}_{S,n}) + K_{n+1} * (T_{n+1} - T_n) + J_{n+1} \{ R_{n+1} * (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n) + D_{n+1} * (\mathbf{x}_{S,n+1} - \mathbf{x}_{S,n}) + G_{n+1} * (T_{n+1} - T_n) + F_{n+1} * (\mathbf{x}_{M,n+1} - \mathbf{x}_{M,n}) \}$$

De tal forma que ambas ecuaciones EC.2.60 y Ec.2.61 sólo dependan de $\xi_{S,n+1}$ y $\xi_{M,n+1}$

- Solucionamos las ecuaciones en $\xi_{S,n+1}$ y $\xi_{M,n+1}$ mediante el procedimiento iterativo de Newton-Raphson multivariable:

EC.2.62

$$f(\mathbf{x}_{S,n+1}, \mathbf{x}_{M,n+1}) = EC.2.60$$

$$g(\mathbf{x}_{S,n+1}, \mathbf{x}_{M,n+1}) = EC.2.61$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_S} & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_M} \\ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_S} & \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_M} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} p_S \\ p_M \end{Bmatrix}_k = - \begin{Bmatrix} f(\mathbf{x}_{S,k}, \mathbf{x}_{M,k}) \\ g(\mathbf{x}_{S,k}, \mathbf{x}_{M,k}) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{S,k+1} = \mathbf{x}_{S,k} + p_{S,k}; \quad \mathbf{x}_{M,k+1} = \mathbf{x}_{M,k} + p_{M,k}$$

donde:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_S} = \frac{f(\mathbf{x}_{S,k} + h, \mathbf{x}_{M,k}) - f(\mathbf{x}_{S,k}, \mathbf{x}_{M,k})}{h}; \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_M} = \frac{f(\mathbf{x}_{S,k}, \mathbf{x}_{M,k} + h) - f(\mathbf{x}_{S,k}, \mathbf{x}_{M,k})}{h}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_S} = \frac{g(\mathbf{x}_{S,k} + h, \mathbf{x}_{M,k}) - g(\mathbf{x}_{S,k}, \mathbf{x}_{M,k})}{h}; \quad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_M} = \frac{g(\mathbf{x}_{S,k}, \mathbf{x}_{M,k} + h) - g(\mathbf{x}_{S,k}, \mathbf{x}_{M,k})}{h}$$

convergencia si:

$$\frac{|\mathbf{x}_{S,k+1}, \mathbf{x}_{M,k+1} - \mathbf{x}_{S,k}, \mathbf{x}_{M,k}|}{|\mathbf{x}_{S,k}, \mathbf{x}_{M,k}|} \leq TOL$$

Donde h y TOL tienen el mismo significado de antes.

- Obtenida la $\xi_{S,n+1}$ y la $\xi_{M,n+1}$ podemos obtener la tensión σ_{n+1} a través de la EC.2.59b o bien, a través de los operadores tangentes obtenidos en cada caso y discretizados adecuadamente.

EC.2.63

$$\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_n = R_{n+1} * (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n) + D_{n+1} * (\mathbf{x}_{S,n+1} - \mathbf{x}_{S,n}) + F_{n+1} * (\mathbf{x}_{M,n+1} - \mathbf{x}_{M,n}) + G_{n+1} * (T_{n+1} - T_n)$$

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \mathbf{f}_{n+1} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) + \vartheta_{n+1} (T_{n+1} - T_n)$$

En los dos procedimientos presentados, en los procesos iterativos del cálculo de Newton-Raphson, el valor inicial de iteración es el valor obtenido en cada caso TRIAL anterior. Este punto es fundamental para asegurar una convergencia rápida del proceso iterativo.

Dado que suponemos dos diferentes variaciones del módulo elástico con la fracción de martensita total (esquema de Reuss y esquema de Voigt) *los dos procedimientos explicados deben implementarse dos veces en cada modelo*, uno por cada esquema utilizado, tal y como presentamos a continuación.

2.3.2. Implementación numérica del modelo de Tanaka

En primer lugar se deducen las ecuaciones correspondientes a este modelo para el caso de Voigt y Reuss tal y como se ha explicado en el **Procedimiento A**

- *Transformación directa (austenita a martensita) Voigt:*

EC.2.64

$$\dot{\mathbf{x}} = (1 - \mathbf{x}) \{ a_M \dot{T} - b_M \dot{\mathbf{s}} \}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = E^* \dot{\mathbf{e}} + H \dot{\mathbf{x}} + \Theta \dot{T}$$

$$H = (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}) E^* - \mathbf{e}_L E$$

$$E^* = E_M - E_A; \quad E = E_A + \mathbf{x} E^*$$

obtención de los módulos tangentes:

$$d\mathbf{s} = \frac{E}{L_1} d\mathbf{e} + \frac{\Theta + H * (1 - \mathbf{x}) * a_M}{L_1} dT$$

$$\text{con } L_1 = 1 + H(1 - \mathbf{x}) * b_M$$

- **Transformación reversa (martensita a austenita) Voigt:**

EC.2.65

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} \left\{ -a_A \dot{T} + b_A \dot{\mathbf{s}} \right\} \\ \dot{\mathbf{s}} &= E^* \dot{\mathbf{e}} + H \dot{\mathbf{x}} + \Theta \dot{T} \\ H &= (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}) E^* - \mathbf{e}_L E \\ E^* &= E_M - E_A \\ \text{obtención de los módulos tangentes :} \\ d\mathbf{s} &= \frac{E}{L_2} d\mathbf{e} + \frac{\Theta - H^* \mathbf{x}^* a_M}{L_2} dT \\ \text{con } L_2 &= 1 - H^* \mathbf{x}^* b_M\end{aligned}$$

- **Transformación directa (austenita a martensita) Reuss:**

EC.2.66

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (1 - \mathbf{x}) \left\{ a_M \dot{T} - b_M \dot{\mathbf{s}} \right\} \\ \dot{\mathbf{s}} &= E^* \dot{\mathbf{e}} + H \dot{\mathbf{x}} + \Theta \dot{T} \\ H &= (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}) E^{**} - \mathbf{e}_L E \\ E^{**} &= \frac{-E_A T_E}{(1 + T_E \mathbf{x})^2}; T_E = \frac{E_A}{E_M} - 1 \\ \text{obtención de los módulos tangentes :} \\ d\mathbf{s} &= \frac{E}{L_1} d\mathbf{e} + \frac{\Theta + H^* (1 - \mathbf{x})^* a_M}{L_1} dT \\ \text{con } L_1 &= 1 + H (1 - \mathbf{x})^* b_M\end{aligned}$$

- **Transformación reversa (martensita a austenita) Reuss:**

EC.2.67

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} \left\{ -a_A \dot{T} + b_A \dot{\mathbf{s}} \right\} \\ \dot{\mathbf{s}} &= E^* \dot{\mathbf{e}} + H \dot{\mathbf{x}} + \Theta \dot{T} \\ H &= (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}) E^{**} - \mathbf{e}_L E \\ E^{**} &= \frac{-E_A T_E}{(1 + T_E \mathbf{x})^2}; T_E = \frac{E_A}{E_M} - 1 \\ \text{obtención de los módulos tangentes :} \\ d\mathbf{s} &= \frac{E}{L_2} d\mathbf{e} + \frac{\Theta - H^* \mathbf{x}^* a_M}{L_2} dT \\ \text{con } L_2 &= 1 - H^* \mathbf{x}^* b_M\end{aligned}$$

Y el algoritmo de implementación para la variación de deformación y/o temperatura es el expuesto en la Tabla 2.1, Tabla 2.2 y Tabla 2.3 para el esquema de Voigt y la Tabla 2.4, Tabla 2.5 y Tabla 2.6 para el esquema de Reuss.

Tabla 2.1 Algoritmo general para detectar proceso de carga Tanaka Voigt

```

if ( $\epsilon_{n+1}-\epsilon_n$ )>0 or ( $T_{n+1}-T_n$ )<0
    Transformación directa Tanaka Voigt (Tabla 2.2)
else
    if ( $\epsilon_{n+1}-\epsilon_n$ )<0 or ( $T_{n+1}-T_n$ )>0
        Transformación reversa Tanaka Voigt (Tabla 2.3)
    else
        * no hay variación en la deformación o en la temperatura*
    end if
end if

```

Tabla 2.2 Algoritmo "Transformación directa Tanaka Voigt"

Calculamos el TRIAL-1: no hay transformación de fase A/M

$$\mathbf{x}_{n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_n$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_A + \mathbf{x}_{n+1}^{TR1} (E_M - E_A)$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_{n+1}^{TR1} \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_{n+1}^{TR1} \} + \Theta(T_{n+1} - T_n)$$

Calculamos el TRIAL-2: transformación de fase A/M completada

$$\mathbf{x}_{n+1}^{TR1} = 1$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_M$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_M \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \} + \Theta(T_{n+1} - T_n)$$

* Verificamos los dos estados TRIAL*

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR1}| < C_M(T-M_s)$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR1}$$

else

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR2}| > C_M(T-M_s) \ \& \ \mathbf{e}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}^{TR2} > 0$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^{TR2}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR2}$$

else

Cálculo de \mathbf{x}_{n+1} (EC.2.64)

Cálculo de los módulos tangentes (EC.2.64)

Cálculo de la tensión \mathbf{s}_{n+1} (EC.2.64)

end if

end if

Tabla 2.3 Algoritmo “Transformación reversa Tanaka Voigt”

Calculamos el TRIAL-1: no hay transformación de fase M/A

$$\mathbf{x}_{n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_n$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_A + \mathbf{x}_{n+1}^{TR1} (E_M - E_A)$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_{n+1}^{TR1} \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_{n+1}^{TR1} \} + \Theta (T_{n+1} - T_n)$$

Calculamos el TRIAL-2: transformación de fase M/A completada

$$\mathbf{x}_{n+1}^{TR1} = 0$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_A$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_A \{ \mathbf{e}_{n+1} \} + \Theta (T_{n+1} - T_n)$$

* Verificamos los dos estados TRIAL*

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR1}| > C_A(T-A_s)$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR1}$$

else

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR2}| < C_A(T-A_f) \ \& \ \mathbf{e}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}^{TR2} > 0$

$$\mathbf{x}_{n+1} = 0$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR2}$$

else

Cálculo de \mathbf{x}_{n+1} (EC.2.65)

Cálculo de los módulos tangentes (EC.2.65)

Cálculo de la tensión \mathbf{s}_{n+1} (EC.2.65)

end if

end if

Tabla 2.4 Algoritmo general para detectar proceso de carga Tanaka Reuss

if $(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) > 0$ or $(T_{n+1} - T_n) < 0$

Transformación directa Tanaka Reuss (Tabla 2.5)

else

if $(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) < 0$ or $(T_{n+1} - T_n) > 0$

Transformación reversa Tanaka Reuss (Tabla 2.6)

else

* no hay variación en la deformación o en la temperatura*

end if

end if

Tabla 2.5 Algoritmo “Transformación directa Tanaka Reuss”

Calculamos el TRIAL-1: no hay transformación de fase A/M

$$\mathbf{x}_{n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_n$$

$$E_{n+1}^{TR1} = \frac{E_A}{1 + \left(\frac{E_A}{E_M} - 1\right) \mathbf{x}_{n+1}^{TR1}}$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_{n+1}^{TR1} \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_{n+1}^{TR1} \} + \Theta(T_{n+1} - T_n)$$

Calculamos el TRIAL-2: transformación de fase A/M completada

$$\mathbf{x}_{n+1}^{TR1} = 1$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_M$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_M \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \} + \Theta(T_{n+1} - T_n)$$

* Verificamos los dos estados TRIAL*

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR1}| < C_M(T - M_s)$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR1}$$

else

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR2}| > C_M(T - M_s) \ \& \ \mathbf{e}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}^{TR2} > 0$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^{TR2}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR2}$$

else

Cálculo de \mathbf{x}_{n+1} (EC.2.66)

Cálculo de los módulos tangentes (EC.2.66)

Cálculo de la tensión \mathbf{s}_{n+1} (EC.2.66)

end if

end if

Tabla 2.6 Algoritmo “Transformación reversa Tanaka Reuss”

Calculamos el TRIAL-1: no hay transformación de fase M/A

$$\mathbf{x}_{n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_n$$

$$E_{n+1}^{TR1} = \frac{E_A}{1 + \left(\frac{E_A}{E_M} - 1\right)\mathbf{x}_{n+1}^{TR1}}$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_{n+1}^{TR1} \left\{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_{n+1}^{TR1} \right\} + \Theta(T_{n+1} - T_n)$$

Calculamos el TRIAL-2: transformación de fase M/A completada

$$\mathbf{x}_{n+1}^{TR1} = 0$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_A$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_A \left\{ \mathbf{e}_{n+1} \right\} + \Theta(T_{n+1} - T_n)$$

* Verificamos los dos estados TRIAL*

if $\left| \mathbf{s}_{n+1}^{TR1} \right| > C_A(T - A_s)$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR1}$$

else

if $\left| \mathbf{s}_{n+1}^{TR2} \right| < C_A(T - A_f) \ \& \ \mathbf{e}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}^{TR2} > 0$

$$\mathbf{x}_{n+1} = 0$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR2}$$

else

Cálculo de \mathbf{x}_{n+1} (EC.2.67)

Cálculo de los módulos tangentes (EC.2.67)

Cálculo de la tensión \mathbf{s}_{n+1} (EC.2.67)

end if

end if

Para la simulación de *procesos a tensión constante y temperatura variable* los algoritmos de implementación se simplifican mucho puesto que, como se comentó, no es necesario el cálculo de los estados TRIAL. En esta situación, los algoritmos son los presentados en las tablas 2.7, 2.8 y 2.9 para el esquema de Voigt. Los correspondientes al esquema de Reuss son iguales pero con el valor del módulo elástico de la fórmula de Reuss.

Tabla 2.7 Algoritmo general para detectar proceso de carga a tensión constante Tanaka Voigt

```

if (Tn+1-Tn)<0
    Transformación directa tensión constante Tanaka Voigt (Tabla 2.8)
else
    if (Tn+1-Tn)>0
        Transformación reversa tensión const. Tanaka Voigt (Tabla 2.9)
    else
        * no hay variación en la temperatura *
    end if
end if
end if

```

Tabla 2.8 Algoritmo “Transformación directa tensión constante Tanaka Voigt”

```

if  $\sigma \leq C_M(T_{n+1}-M_s)$  &  $\sigma \geq C_M(T_{n+1}-M_f)$ 
    Cálculo de  $\mathbf{x}_{n+1}$  (EC.2.64)
    Cálculo de  $\varepsilon_{n+1}$  (EC.2.64)
else
    *no hay transformación y los valores de  $\mathbf{x}_{n+1}$  permanecen igual*
     $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n$ 
    
$$\mathbf{e}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}}{E_n} + \mathbf{e}_L \mathbf{x}_n - \frac{\Theta}{E_n} (T_{n+1} - T_n)$$

end if

```

Tabla 2.9 Algoritmo “Transformación reversa tensión constante Tanaka Voigt”

```

if  $\sigma \geq C_M(T_{n+1}-A_s)$  &  $\sigma \leq C_M(T_{n+1}-A_f)$ 
    Cálculo de  $\mathbf{x}_{n+1}$  (EC.2.65)
    Cálculo de  $\varepsilon_{n+1}$  (EC.2.65)
else
    *no hay transformación y los valores de  $\mathbf{x}_{n+1}$  permanecen igual*
     $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n$ 
    
$$\mathbf{e}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}}{E_n} + \mathbf{e}_L \mathbf{x}_n - \frac{\Theta}{E_n} (T_{n+1} - T_n)$$

end if

```

2.3.3. Implementación numérica del modelo de Liang-Rogers

El modelo de Liang-Rogers también está enmarcado dentro del **Procedimiento A** para el cálculo de las fracciones de martensita y de la tensión. Las ecuaciones son:

- **Transformación directa (austenita a martensita) Voigt:**

EC.2.68

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A_1 a_{ML} \dot{T} + A_1 b_{ML} \dot{\mathbf{s}} \\ A_1 &= -\frac{1-\mathbf{x}_0}{2} \text{sen}[a_{ML}(T - M_f) + b_{ML} \mathbf{s}] \\ \dot{\mathbf{s}} &= E^* \dot{\mathbf{e}} + H \dot{\mathbf{x}} + \Theta \dot{T} \\ H &= (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}) E^* - \mathbf{e}_L E \\ E^* &= E_M - E_A \\ \text{obtención de los módulos tangentes :} \\ d\mathbf{s} &= \frac{E}{L_1} d\mathbf{e} + \frac{\Theta + H^* A_1^* a_{ML}}{L_1} dT \\ \text{con } L_1 &= 1 - H^* A_1^* b_M\end{aligned}$$

- **Transformación reversa (austenita a martensita) Voigt:**

EC.2.69

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A_2 a_{AL} \dot{T} + A_2 b_{AL} \dot{\mathbf{s}} \\ A_2 &= -\frac{\mathbf{x}_0}{2} \text{sen}[a_{AL}(T - A_s) + b_{AL} \mathbf{s}] \\ \dot{\mathbf{s}} &= E^* \dot{\mathbf{e}} + H \dot{\mathbf{x}} + \Theta \dot{T} \\ H &= (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}) E^* - \mathbf{e}_L E \\ E^* &= E_M - E_A \\ \text{obtención de los módulos tangentes :} \\ d\mathbf{s} &= \frac{E}{L_2} d\mathbf{e} + \frac{\Theta + H^* A_2^* a_{AL}}{L_2} dT \\ \text{con } L_2 &= 1 - H^* A_2^* b_A\end{aligned}$$

- **Transformación directa (austenita a martensita) Reuss:**

EC.2.70

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A_1 a_{ML} \dot{T} + A_1 b_{ML} \dot{\mathbf{s}} \\ A_1 &= -\frac{1-\mathbf{x}_0}{2} \text{sen}[a_{ML}(T - M_f) + b_{ML} \mathbf{s}] \\ \dot{\mathbf{s}} &= E^* \dot{\mathbf{e}} + H \dot{\mathbf{x}} + \Theta \dot{T} \\ H &= (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}) E^{**} - \mathbf{e}_L E \\ E^{**} &= \frac{-E_A T_E}{(1 + T_E \mathbf{x})^2}; T_E = \frac{E_A}{E_M} - 1 \\ \text{obtención de los módulos tangentes:} \\ d\mathbf{s} &= \frac{E}{L_1} d\mathbf{e} + \frac{\Theta + H^* A_1^* a_{ML}}{L_1} dT \\ \text{con } L_1 &= 1 - H^* A_1^* b_M\end{aligned}$$

- **Transformación reversa (austenita a martensita) Reuss:**

EC.2.71

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A_2 a_{AL} \dot{T} + A_2 b_{AL} \dot{\mathbf{s}} \\ A_2 &= -\frac{\mathbf{x}_0}{2} \text{sen}[a_{AL}(T - A_s) + b_{AL} \mathbf{s}] \\ \dot{\mathbf{s}} &= E^* \dot{\mathbf{e}} + H \dot{\mathbf{x}} + \Theta \dot{T} \\ H &= (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}) E^{**} - \mathbf{e}_L E \\ E^{**} &= \frac{-E_A T_E}{(1 + T_E \mathbf{x})^2}; T_E = \frac{E_A}{E_M} - 1 \\ \text{obtención de los módulos tangentes:} \\ d\mathbf{s} &= \frac{E}{L_2} d\mathbf{e} + \frac{\Theta + H^* A_2^* a_{AL}}{L_2} dT \\ \text{con } L_2 &= 1 - H^* A_2^* b_A\end{aligned}$$

Los algoritmos de integración para este modelo son exactamente iguales que para el modelo de Tanaka, pues se fundamentan en el mismo diagrama crítico tensión-temperatura. Únicamente se han de reemplazar las ecuaciones derivadas. De esta forma, en las Tablas 2.2 y 2.3 se han referenciado las expresiones de las ecuaciones EC.2.68 y EC.2.69 respectivamente y en las Tablas 2.5 y 2.6 (correspondientes al esquema de Reuss), se han de emplear las ecuaciones EC.2.70 y EC.2.71. Igualmente ocurre para las tablas del algoritmo para los procesos a tensión constante: en las tablas 2.8 y 2.9 hay que referenciar las ecuaciones EC.2.68 y EC.2.69.

Otra observación interesante es que, tal y como se han planteado las ecuaciones anteriores (EC.2.68, EC.2.69 y EC.2.70, EC.2.71), el esquema de Reuss y el esquema de Voigt tan sólo difieren en la constante E^* para el Voigt y E^{**} para Reuss. Así pues, en los siguientes modelos, sólo se presenta, por brevedad, el esquema de Voigt. El esquema de Reuss se deduce sustituyendo E^* por E^{**} .

2.3.4. Implementación numérica del modelo de Brinson

El modelo de Brinson se debe implementar siguiendo el **Procedimiento B** para el cálculo de las fracciones de martensita y de la tensión puesto que considera dos fracciones diferentes de martensita. Recordemos, además, que dado que el diagrama crítico tensión-temperatura era diferente, tendremos tres regiones de transformación. Las ecuaciones, siguiendo el procedimiento B, son:

- *Transformación directa a martensita monovariante a temperaturas superiores a M_s esquema de Voigt:*

EC.2.72

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_S &= A_1 * \dot{\mathbf{s}} - A_1 * C_M * \dot{\mathbf{T}} \\ A_1 &= -\frac{1 - \mathbf{x}_{S0}}{2} \operatorname{sen} \left[\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{s}_s^{CR} - \mathbf{s}_f^{CR}} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR} - C_M (T - M_s)) \right] \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{s}_s^{CR} - \mathbf{s}_f^{CR}} \\ \dot{\mathbf{x}}_M &= R * \dot{\mathbf{x}}_S; \quad R = -\frac{\mathbf{x}_{M0}}{1 - \mathbf{x}_{S0}} \\ \dot{\mathbf{s}} &= E^* \dot{\mathbf{e}} + H_1 * \dot{\mathbf{x}}_S + H_2 * \dot{\mathbf{x}}_M + \Theta * \dot{\mathbf{T}} \\ H_1 &= E^* (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) - \mathbf{e}_L E \\ H_2 &= E^* (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) \\ E^* &= E_M - E_A \\ \text{obtención de los módulos tangentes :} \\ d\mathbf{s} &= \frac{E}{L_1} d\mathbf{e} + \frac{\Theta - H * A_1 * C_M}{L_1} dT \\ L_1 &= 1 - H * A_1 \\ H &= E^* (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) (1 + R) - \mathbf{e}_L E\end{aligned}$$

- **Transformación directa a martensita monovariante a temperaturas inferiores a M_s esquema de Voigt:**

EC.2.73

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_S &= A_2 * \dot{\mathbf{s}} \\ A_2 &= -\frac{1 - \mathbf{x}_{S0}}{2} \operatorname{sen} \left[\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{s}_s^{CR} - \mathbf{s}_f^{CR}} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR}) \right] \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{s}_s^{CR} - \mathbf{s}_f^{CR}} \\ \dot{\mathbf{x}}_M &= R * \dot{\mathbf{x}}_S + A_3 \dot{T} \\ R &= -\frac{\mathbf{x}_{M0}}{1 - \mathbf{x}_{S0}} \\ A_3 &= -\frac{1 - \mathbf{x}_{M0}}{2} \operatorname{sen} [a_{ML} (T - M_f)] a_{ML} \\ \dot{\mathbf{s}} &= E * \dot{\mathbf{e}} + H_1 * \dot{\mathbf{x}}_S + H_2 * \dot{\mathbf{x}}_M + \Theta * \dot{T} \\ H_1 &= E * (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) - \mathbf{e}_L E \\ H_2 &= E * (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) \\ E^* &= E_M - E_A \\ \text{obtención de los módulos tangentes :} \\ d\mathbf{s} &= \frac{E}{L_2} d\mathbf{e} + \frac{\Theta + H_2 * A_3}{L_2} dT \\ L_1 &= 1 - H * A_2 \\ H &= E * (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S)(1 + R) - \mathbf{e}_L E \end{aligned}$$

- **Transformación reversa de martensita monovariante a austenita, esquema de Voigt:**

EC.2.74

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_S &= \frac{\mathbf{x}_{S0}}{\mathbf{x}_{S0} + \mathbf{x}_{M0}} \left\{ A_4 a_{AL} \dot{T} - A_3 \frac{a_{AL}}{C_A} \dot{\mathbf{s}} \right\} \\ \dot{\mathbf{x}}_M &= \frac{\mathbf{x}_{M0}}{\mathbf{x}_{S0} + \mathbf{x}_{M0}} \left\{ A_4 a_{AL} \dot{T} - A_3 \frac{a_{AL}}{C_A} \dot{\mathbf{s}} \right\} \\ A_4 &= -\frac{\mathbf{x}_{S0} + \mathbf{x}_{M0}}{2} \operatorname{sen} \left[a_A \left(T - A_s - \frac{\mathbf{s}}{C_A} \right) \right] \\ \dot{\mathbf{s}} &= E^* \dot{\mathbf{e}} + H_1 * \dot{\mathbf{x}}_S + H_2 * \dot{\mathbf{x}}_M + \Theta * \dot{T} \\ H_1 &= E^* (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) - \mathbf{e}_L E; \quad H_2 = E^* (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) \\ E^* &= E_M - E_A \\ \text{obtención de los módulos tangentes :} \\ d\mathbf{s} &= \frac{E}{1-H} d\mathbf{e} + \frac{N}{1-H} dT \\ N &= A_4 a_{AL} \left\{ H_2 - \mathbf{e}_L E \frac{\mathbf{x}_{S0}}{\mathbf{x}_{S0} + \mathbf{x}_{M0}} \right\} + \Theta \\ H &= A_4 \frac{a_{AL}}{C_A} \left\{ \mathbf{e}_L E \frac{\mathbf{x}_{S0}}{\mathbf{x}_{S0} + \mathbf{x}_{M0}} - E^* (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) \right\}\end{aligned}$$

Y, el esquema de Reuss será el mismo pero considerando $E^{**} = \frac{-T_1}{(1+T_1 \mathbf{x})^2}$ donde

$$T_1 = \frac{E_A}{E_M} - 1 \text{ y teniendo en cuenta que } \xi = \xi_S + \xi_M.$$

En la Tabla 2.10 se presenta el algoritmo donde se determina la zona del diagrama crítico tensión-transformación en la que se produce la transformación (temperaturas mayores de M_s o menor de M_s) y si el proceso es de carga o descarga. En cada caso se llama a la subrutina adecuada de cálculo de tensiones TRIAL y, a su vez, a las subrutinas de cálculo de fracción de martensita y de tensiones.

Tabla 2.10 Algoritmo general para detectar proceso de carga Brinson Voigt

```

if  $T_{n+1} > M_s$  * proceso SE o de EMF partiendo de mezcla A/M*
  if  $(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) > 0$  or  $(T_{n+1} - T_n) < 0$ 
    Transformación directa A/S Brinson Voigt (Tabla 2.11)
  else
    if  $(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) < 0$  or  $(T_{n+1} - T_n) > 0$ 
      Transformación reversa S/A Brinson Voigt (Tabla 2.12)
    else
      * no hay variación en la deformación o en temperatura*
    end if
  end if
else
  * si  $T_{n+1} < M_s$  entonces estamos en el rango de transformación de M/S*
  if  $(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) > 0$  or  $(T_{n+1} - T_n) < 0$ 
    Transformación directa M/S Brinson Voigt (Tabla 2.13)
  else
    if  $(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) < 0$ 
      *en la descarga no hay transformación, la fracción de
      martensita es la remanente en la carga*
       $\xi_{S,n+1} = \xi_{S,n}$ 
       $\xi_{M,n+1} = \xi_{M,n}$ 
       $E_{n+1} = E_A + (\xi_{S,n+1} + \xi_{M,n+1}) * (E_S - E_A)$ 
       $\sigma_{n+1} = E_{n+1} * (\epsilon_{n+1} - \epsilon_L * \xi_{S,n+1}) + \Theta(T_{n+1} - T_n)$ 
    else
      * no hay variación en la deformación*
    end if
  end if
end if

```

Tabla 2.11 Algoritmo “Transformación directa A/S Brinson Voigt”

Calculamos el TRIAL-1: no hay transformación de fase A/S

$$\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_{S,n}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_{M,n}$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_A + (\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} + \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1})(E_M - E_A)$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_{n+1}^{TR1} \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} \} + \Theta(T_{n+1} - T_n)$$

Calculamos el TRIAL-2: transformación de fase A/S completada

$$\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} = 1$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1} = 0$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_M$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_M \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \} + \Theta(T_{n+1} - T_n)$$

* Verificamos los dos estados TRIAL*

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR1}| < \{ C_M(T-M_s) + \mathbf{s}_S^{CR} \}$

$$\mathbf{x}_{S,n+1} = \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1} = \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR1}$$

else

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR2}| > \{ C_M(T-M_s) + \mathbf{s}_f^{CR} \} \& \mathbf{e}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}^{TR2} > 0$

$$\mathbf{x}_{S,n+1} = \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR2}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1} = \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR2}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR2}$$

else

Cálculo de $\mathbf{x}_{S,n+1}$ y $\mathbf{x}_{M,n+1}$ (EC.2.72)

Cálculo de los módulos tangentes (EC.2.72)

Cálculo de la tensión \mathbf{s}_{n+1} (EC.2.72)

end if

end if

Tabla 2.12 Algoritmo “Transformación reversa S/A Brinson Voigt”

Calculamos el TRIAL-1: no hay transformación de fase S/A

$$\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_{S,n}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_{M,n}$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_A + (\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} + \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1})(E_M - E_A)$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_{n+1}^{TR1} \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} \} + \Theta(T_{n+1} - T_n)$$

Calculamos el TRIAL-2: transformación de fase S/A completada

$$\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} = 0$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1} = 0$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_A$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_A \{ \mathbf{e}_{n+1} \} + \Theta(T_{n+1} - T_n)$$

* Verificamos los dos estados TRIAL*

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR1}| > C_A(T-A_s)$

$$\mathbf{x}_{S,n+1} = \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1} = \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR1}$$

else

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR2}| < C_A(T-A_f) \ \& \ \mathbf{e}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}^{TR2} > 0$

$$\mathbf{x}_{S,n+1} = 0$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1} = 0$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR2}$$

else

Cálculo de $\mathbf{x}_{S,n+1}$ y $\mathbf{x}_{M,n+1}$ (EC.2.74)

Cálculo de los módulos tangentes (EC.2.74)

Cálculo de la tensión \mathbf{s}_{n+1} (EC.2.74)

end if

end if

Tabla 2.13 Algoritmo “Transformación directa M/S Brinson Voigt”

Calculamos el TRIAL-1: no hay transformación de fase M/S

$$\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_{S,n}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_{M,n}$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_A + (\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} + \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1})(E_M - E_A)$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_{n+1}^{TR1} \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} \} + \Theta(T_{n+1} - T_n)$$

Calculamos el TRIAL-2: transformación de fase M/S completada

$$\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} = 1$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1} = 0$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_M$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_M \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \} + \Theta(T_{n+1} - T_n)$$

* Verificamos los dos estados TRIAL*

$$\text{if } |\mathbf{s}_{n+1}^{TR1}| < \{ \mathbf{s}_S^{CR} \}$$

$$\mathbf{x}_{S,n+1} = \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1} = \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR1}$$

else

$$\text{if } |\mathbf{s}_{n+1}^{TR2}| > \{ \mathbf{s}_f^{CR} \} \ \& \ \mathbf{e}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}^{TR2} > 0$$

$$\mathbf{x}_{S,n+1} = \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR2}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1} = \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR2}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR2}$$

else

Cálculo de $\mathbf{x}_{S,n+1}$ y $\mathbf{x}_{M,n+1}$ (EC.2.73)

Cálculo de los módulos tangentes (EC.2.73)

Cálculo de la tensión \mathbf{s}_{n+1} (EC.2.73)

end if

end if

Como en los dos modelos anteriores, los algoritmos correspondientes al esquema de Reuss, son iguales pero sustituyendo, en cada caso, la expresión del módulo elástico de Voigt por la de Reuss.

Para los procesos de carga y/o descarga a tensión constante y temperatura variable los algoritmos son los presentados en las tablas 2.14, 2.15 y 2.16.

Tabla 2.14 Algoritmo general para detectar proceso de carga a tensión constante Brinson Voigt

```

if  $(T_{n+1} - T_n) < 0$ 
  Transformación A/S tensión constante Brinson Voigt (Tabla 2.15)
else
  if  $(T_{n+1} - T_n) > 0$ 
    Transformación S/A tensión const. Brinson Voigt (Tabla 2.16)
  else
    * no hay variación en la temperatura *
  end if
end if
end if

```

Tabla 2.15 Algoritmo “Transformación A/S tensión constante Brinson Voigt”

```

if  $T_{n+1} \geq M_s$  &  $\mathbf{s}_f^{CR} + C_M (T_{n+1} - M_s) \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_s^{CR} + C_M (T_{n+1} - M_s)$ 
  Cálculo de  $\mathbf{x}_{n+1}$  (EC.2.72)
  Cálculo de  $\epsilon_{n+1}$  (EC.2.72)
else
  if  $T_{n+1} \leq M_s$  &  $T_{n+1} \geq M_f$  &  $\mathbf{s}_f^{CR} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_s^{CR}$ 
    Cálculo de  $\mathbf{x}_{n+1}$  (EC.2.73)
    Cálculo de  $\epsilon_{n+1}$  (EC.2.73)
  else
    *no hay transformación y los valores de  $\mathbf{x}_{n+1}$  permanecen igual*
     $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n$ 
    
$$\mathbf{e}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}}{E_n} + \mathbf{e}_L \mathbf{x}_n - \frac{\Theta}{E_n} (T_{n+1} - T_n)$$

  end if
end if
end if

```

Tabla 2.16 Algoritmo “Transformación S/A tensión constante Brinson Voigt”

```

if  $\sigma \geq C_A(T_{n+1}-A_s)$  &  $\sigma \leq C_A(T_{n+1}-A_f)$ 
    Cálculo de  $\mathbf{x}_{n+1}$  (EC.2.74)
    Cálculo de  $\varepsilon_{n+1}$  (EC.2.74)

else
    *no hay transformación y los valores de  $\mathbf{x}_{n+1}$  permanecen igual*
     $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n$ 
    
$$\mathbf{e}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}}{E_n} + \mathbf{e}_L \mathbf{x}_n - \frac{\Theta}{E_n} (T_{n+1} - T_n)$$

end if

```

2.3.5. Implementación numérica del modelo de Auricchio Lineal

El modelo de Auricchio lineal se debe implementar, al igual que el modelo de Brinson, siguiendo el **Procedimiento B** para el cálculo de las fracciones de martensita y de la tensión puesto que también considera dos fracciones diferentes de martensita. Recordemos, además, que también el diagrama crítico tensión-temperatura era diferente, y, consecuentemente, tendremos las siguientes posibles transformaciones: transformación directa a martensita monovariante a temperaturas superiores a M_s ; transformación directa a martensita monovariante a temperaturas inferiores a M_s ; transformación reversa a austenita y, a diferencia del modelo de Brinson, transformación desde austenita a martensita multivariante por enfriamiento se considera como otra transformación separada. Así pues, las ecuaciones, siguiendo el procedimiento B, son:

- **Transformación directa a martensita monovariante a temperaturas superiores a M_s esquema de Voigt:**

EC.2.75

$$\dot{\mathbf{x}}_S = (\mathbf{x}_S - 1) * \left\{ \frac{\dot{\mathbf{s}}}{A_2} - \frac{C_M}{A_2} * \dot{T} \right\}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_M = \mathbf{x}_M * \left\{ \frac{\dot{\mathbf{s}}}{A_2} - \frac{C_M}{A_2} * \dot{T} \right\}$$

$$A_2 = \mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR} - C_M (T - M_s)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = E^* \dot{\mathbf{e}} + H_1 * \dot{\mathbf{x}}_S + H_2 * \dot{\mathbf{x}}_M$$

$$H_1 = E^* (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) - \mathbf{e}_L E; \quad H_2 = E^* (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S)$$

$$E^* = E_M - E_A$$

obtención de los módulos tangentes :

$$d\mathbf{s} = \frac{E}{L_1} d\mathbf{e} + \frac{H}{L_1} dT$$

$$L_1 = 1 - \frac{H_1}{A_2} (\mathbf{x}_S - 1) - H_2 \frac{\mathbf{x}_M}{A_2}$$

$$H = -\frac{H_1}{A_2} C_M (\mathbf{x}_S - 1) - H_2 \frac{\mathbf{x}_M}{A_2} C_M$$

- **Transformación directa a martensita monovariante a temperaturas inferiores a M_s esquema de Voigt:**

EC.2.76

$$\dot{\mathbf{x}}_S = (\mathbf{x}_S - 1) * \left\{ \frac{\dot{\mathbf{s}}}{A_4} \right\}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_M = \mathbf{x}_M * \left\{ \frac{\dot{\mathbf{s}}}{A_4} \right\}$$

$$A_4 = \mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = E^* \dot{\mathbf{e}} + H_1 * \dot{\mathbf{x}}_S + H_2 * \dot{\mathbf{x}}_M$$

$$H_1 = E^* (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) - \mathbf{e}_L E; \quad H_2 = E^* (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S)$$

$$E^* = E_M - E_A$$

obtención de los módulos tangentes :

$$d\mathbf{s} = \frac{E}{L_2} d\mathbf{e}$$

$$L_2 = 1 - \frac{H_1}{A_4} (\mathbf{x}_S - 1) - H_2 \frac{\mathbf{x}_M}{A_4}$$

- **Transformación reversa de martensita monovariante a austenita esquema de Voigt:**

EC.2.77

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_S &= \mathbf{x}_S * \left\{ \frac{\dot{\mathbf{s}}}{A_5} - \frac{C_A}{A_5} \dot{T} \right\} \\ \dot{\mathbf{x}}_M &= \mathbf{x}_M * \left\{ \frac{\dot{\mathbf{s}}}{A_5} - \frac{C_A}{A_5} \dot{T} \right\} \\ A_5 &= \mathbf{s} - C_A (T - A_f) \\ \dot{\mathbf{s}} &= E * \dot{\mathbf{e}} + H_1 * \dot{\mathbf{x}}_S + H_2 * \dot{\mathbf{x}}_M \\ H_1 &= E * (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) - \mathbf{e}_L E \\ H_2 &= E * (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) \\ E^* &= E_M - E_A \\ \text{obtención de los módulos tangentes :} \\ d\mathbf{s} &= \frac{E}{L_3} d\mathbf{e} + \frac{H}{L_3} \dot{T} \\ L_3 &= 1 - \frac{H_1}{A_5} \mathbf{x}_S - H_2 \frac{\mathbf{x}_M}{A_5} \\ H &= -\frac{H_1}{A_5} C_A \mathbf{x}_S - H_2 C_A \frac{\mathbf{x}_M}{A_5}\end{aligned}$$

- **Transformación a martensita multivariante por enfriamiento esquema de Voigt:**

EC.2.78

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_M &= \frac{A_6}{A_7} \dot{T} \\ A_6 &= \mathbf{x}_M + \mathbf{x}_S - 1 \\ A_7 &= T - M_f \\ \text{obtención de los módulos tangentes :} \\ \dot{\mathbf{s}} &= E * \dot{\mathbf{e}} + H \dot{T} \\ H &= H_2 \frac{A_6}{A_7} \\ H_2 &= E * (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) \\ E^* &= E_M - E_A\end{aligned}$$

Las ecuaciones para el esquema de Reuss serán iguales pero considerando

$$E^{**} = \frac{-T_1}{(1 + T_1 \mathbf{x})^2} \text{ donde } T_1 = \frac{E_A}{E_M} - 1 \text{ y teniendo en cuenta que } \xi = \xi_S + \xi_M.$$

En la Tabla 2.17 se presenta el algoritmo donde se determina la zona del diagrama crítico tensión-transformación en la que se produce la transformación (temperaturas mayores de M_s o menor de M_s) y si el proceso es de carga o descarga o bien de enfriamiento o calentamiento. En cada caso se llama a la subrutina adecuada de cálculo de tensiones TRIAL y, a su vez, a las subrutinas de cálculo de fracción de martensita y de tensiones.

Tabla 2.17 Algoritmo general para detectar transformación Auricchio lineal Voigt

```

if  $T_{n+1} > M_s$  * proceso SE o de EMF partiendo de mezcla A/M*
  if  $(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) > 0$  or  $(T_{n+1} - T_n) < 0$ 
    Transformación directa A/S Auricchio lineal Voigt (Tabla 2.18)
  else
    if  $(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) < 0$  or  $(T_{n+1} - T_n) > 0$ 
      Transformación reversa S/A Auricchio lineal Voigt (Tabla 2.19)
    else
      * no hay variación en la deformación o en temperatura*
    end if
  end if
else
  * si  $T_{n+1} < M_s$  entonces estamos en el rango de transformación de M/S*
  if  $(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n) > 0$ 
    Transformación directa M/S Auricchio lineal Voigt (Tabla 2.20)
  else
    if  $T_{n+1} < T_n$  &  $T_{n+1} > M_f$  &  $T_{n+1} < M_s$ 
      *si no incremento de deformación, puede haber enfriamiento
      y producción de martensita multivariante*

      Transformación A/M Auricchio lineal Voigt (Tabla 2.21)
    else
      *si no incrementa la deformación ni decremanta la
      temperatura en ese rango, todo se mantiene*
       $\xi_{S,n+1} = \xi_{S,n}$ 
       $\xi_{M,n+1} = \xi_{M,n}$ 
       $E_{n+1} = E_A + (\xi_{S,n+1} + \xi_{M,n+1}) * (E_S - E_A)$ 
       $\sigma_{n+1} = E_{n+1} * (\epsilon_{n+1} - \epsilon_L * \xi_{S,n+1})$ 
    end if
  end if
end if
end if

```

Tabla 2.18 Algoritmo “Transformación directa A/S Auricchio lineal Voigt”

Calculamos el TRIAL-1: no hay transformación de fase A/S

$$\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_{S,n}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_{M,n}$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_A + (\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} + \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1})(E_M - E_A)$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_{n+1}^{TR1} \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} \}$$

Calculamos el TRIAL-2: transformación de fase A/S completada

$$\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} = 1$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1} = 0$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_M$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_M \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \}$$

* Verificamos los dos estados TRIAL*

$$\text{if } |\mathbf{s}_{n+1}^{TR1}| < \{ C_M(T-M_s) + \mathbf{s}_S^{CR} \}$$

$$\mathbf{x}_{S,n+1} = \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1} = \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR1}$$

else

$$\text{if } |\mathbf{s}_{n+1}^{TR2}| > \{ C_M(T-M_s) + \mathbf{s}_f^{CR} \} \ \& \ \mathbf{e}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}^{TR2} > 0$$

$$\mathbf{x}_{S,n+1} = \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR2}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1} = \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR2}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR2}$$

else

Cálculo de $\mathbf{x}_{S,n+1}$ y $\mathbf{x}_{M,n+1}$ (EC.2.75)

Cálculo de los módulos tangentes (EC.2.75)

Cálculo de la tensión \mathbf{s}_{n+1} (EC.2.75)

end if

end if

Tabla 2.19 Algoritmo “Transformación reversa S/A Auricchio lineal Voigt”

Calculamos el TRIAL-1: no hay transformación de fase S/A

$$\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_{S,n}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_{M,n}$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_A + (\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} + \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1})(E_M - E_A)$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_{n+1}^{TR1} \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} \}$$

Calculamos el TRIAL-2: transformación de fase S/A completada

$$\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} = 0$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1} = 0$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_A$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_A \{ \mathbf{e}_{n+1} \}$$

* Verificamos los dos estados TRIAL*

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR1}| > C_A(T-A_s)$

$$\mathbf{x}_{S,n+1} = \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1} = \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR1}$$

else

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR2}| < C_A(T-A_f) \ \& \ \mathbf{e}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}^{TR2} > 0$

$$\mathbf{x}_{S,n+1} = 0$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1} = 0$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR2}$$

else

Cálculo de $\mathbf{x}_{S,n+1}$ y $\mathbf{x}_{M,n+1}$ (EC.2.77)

Cálculo de los módulos tangentes (EC.2.77)

Cálculo de la tensión \mathbf{s}_{n+1} (EC.2.77)

end if

end if

Tabla 2.20 Algoritmo “Transformación directa M/S Auricchio lineal Voigt”

Calculamos el TRIAL-1: no hay transformación de fase M/S

$$\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_{S,n}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1} = \mathbf{x}_{M,n}$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_A + (\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} + \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1})(E_M - E_A)$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_{n+1}^{TR1} \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} \}$$

Calculamos el TRIAL-2: transformación de fase M/S completada

$$\mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1} = 1$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1} = 0$$

$$E_{n+1}^{TR1} = E_M$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{TR1} = E_M \{ \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_L \}$$

* Verificamos los dos estados TRIAL*

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR1}| < \{ \mathbf{s}_S^{CR} \}$

$$\mathbf{x}_{S,n+1} = \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1} = \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR1}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR1}$$

else

if $|\mathbf{s}_{n+1}^{TR2}| > \{ \mathbf{s}_f^{CR} \} \& \mathbf{e}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}^{TR2} > 0$

$$\mathbf{x}_{S,n+1} = \mathbf{x}_{S,n+1}^{TR2}$$

$$\mathbf{x}_{M,n+1} = \mathbf{x}_{M,n+1}^{TR2}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{TR2}$$

else

Cálculo de $\mathbf{x}_{S,n+1}$ y $\mathbf{x}_{M,n+1}$ (EC.2.76)

Cálculo de los módulos tangentes (EC.2.76)

Cálculo de la tensión \mathbf{s}_{n+1} (EC.2.76)

end if

end if

Tabla 2.21 Algoritmo “Transformación A/M Auricchio lineal Voigt”

En este proceso no existen TRIAL's puesto que producimos martensita multivariante por enfriamiento, o bien a tensión constante, o bien a deformación constante

```

while  $T_{n+1} \leq M_s$  &  $T_{n+1} \geq M_f$ 
    Cálculo de  $\mathbf{x}_{S,n+1}$  y  $\mathbf{x}_{M,n+1}$  (EC.2.78)
    Cálculo de los módulos tangentes (EC.2.78)
    Cálculo de la tensión  $\mathbf{s}_{n+1}$  (EC.2.78)
end while

```

Como en los modelos anteriores, los algoritmos correspondientes al esquema de Reuss, son iguales pero sustituyendo, en cada caso, la expresión del módulo elástico de Voigt por la de Reuss.

Para los procesos de carga y/o descarga a tensión constante y temperatura variable los algoritmos son los presentados en las tablas 2.22, 2.23 y 2.24.

Tabla 2.22 Algoritmo general para detectar proceso de carga a tensión constante Auricchio lineal Voigt

```

if  $(T_{n+1} - T_n) < 0$ 
    Transformación A/S tensión constante Auricchio lineal Voigt (Tabla 2.23)
else
    if  $(T_{n+1} - T_n) > 0$ 
        Transformación S/A tensión const. Auricchio lineal Voigt (Tabla 2.24)
    else
        * no hay variación en la temperatura*
    end if
end if

```

Tabla 2.23 Algoritmo “Transformación directa tensión constante Auricchio Voigt”

if $T_{n+1} \geq M_s$ & $\mathbf{s}_f^{CR} + C_M (T_{n+1} - M_s) \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_s^{CR} + C_M (T_{n+1} - M_s)$

 Cálculo de \mathbf{x}_{n+1} (EC.2.75)

 Cálculo de ε_{n+1} (EC.2.75)

else

 if $T_{n+1} \leq M_s$ & $T_{n+1} \geq M_f$

 Cálculo de \mathbf{x}_{n+1} (EC.2.78)

 Cálculo de ε_{n+1} (EC.2.78)

 else

 no hay transformación y los valores de \mathbf{x}_{n+1} permanecen igual

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n$$

$$\mathbf{e}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}}{E_n} + \mathbf{e}_L \mathbf{x}_n$$

 end if

end if

Tabla 2.24 Algoritmo “Transformación reversa tensión constante Auricchio lineal Voigt”

if $\sigma \geq C_A (T_{n+1} - A_s)$ & $\sigma \leq C_A (T_{n+1} - A_f)$

 Cálculo de \mathbf{x}_{n+1} (EC.2.77)

 Cálculo de ε_{n+1} (EC.2.77)

else

 no hay transformación y los valores de \mathbf{x}_{n+1} permanecen igual

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n$$

$$\mathbf{e}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}}{E_n} + \mathbf{e}_L \mathbf{x}_n$$

end if

2.3.6. Implementación numérica del modelo de Auricchio Exponencial

El modelo de Auricchio exponencial, al igual que en el caso lineal, se debe implementar siguiendo el **Procedimiento B** para el cálculo de las fracciones de martensita y de la tensión puesto que también considera dos fracciones diferentes de martensita. Sin embargo, y tal como se han estructurado los algoritmos de implementación expuestos en el apartado anterior para Auricchio lineal, las únicas modificaciones que se deben hacer para el caso exponencial son respecto a las ecuaciones de obtención de las fracciones de martensita y austenita, así como para la obtención de los módulos tangentes. Por tanto, todos los algoritmos expuestos en las tablas 2.17, 2.18, 2.19, 2.20 y 2.21 para las transformaciones controladas por la deformación y temperatura, así como las tablas 2.22, 2.23 y 2.24 para las transformaciones controladas por la tensión y temperatura son igualmente válidas para el caso exponencial pero cambiando las ecuaciones para la obtención de las fracciones de martensita y las tensiones o deformaciones. Estas ecuaciones son las expuestas a continuación.

- **Transformación directa a martensita monovariante a temperaturas superiores a M_s , esquema de Voigt:**

EC.2.79

$$\dot{\mathbf{x}}_S = A_1 * \left\{ \frac{\dot{\mathbf{s}}}{A_2} - \frac{C_M}{A_2} * \dot{\mathbf{T}} \right\}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_M = \mathbf{x}_M * \mathbf{b}^{MS} * \left\{ -\frac{\dot{\mathbf{s}}}{A_2} + \frac{C_M}{A_2} * \dot{\mathbf{T}} \right\}$$

$$A_1 = \mathbf{b}^{AS} (1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) + \mathbf{b}^{MS} \mathbf{x}_M$$

$$A_2 = [\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR} - C_M (T - M_s)]^2$$

$$\dot{\mathbf{s}} = E * \dot{\mathbf{e}} + H_1 * \dot{\mathbf{x}}_S + H_2 * \dot{\mathbf{x}}_M$$

$$H_1 = E^* (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) - \mathbf{e}_L E; \quad H_2 = E^* (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S); \quad E^* = E_M - E_A$$

obtención de los módulos tangentes :

$$d\mathbf{s} = \frac{E}{L_1} d\mathbf{e} + \frac{H}{L_1} dT$$

$$L_1 = 1 - \frac{H_1 A_1}{A_2} + H_2 \frac{\mathbf{x}_M}{A_2} \mathbf{b}^{MS}$$

$$H = -\frac{H_1 A_1}{A_2} C_M + H_2 \frac{\mathbf{x}_M}{A_2} C_M \mathbf{b}^{MS}$$

- *Transformación directa a martensita monovariante a temperaturas inferiores a M_s esquema de Voigt:*

EC.2.80

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_S &= \frac{A_3}{A_4} \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{x}}_M &= \mathbf{x}_M * \frac{\mathbf{b}^{MS}}{A_4} \dot{\mathbf{s}} \\ A_3 &= -\{\mathbf{b}^{AS}(1 - \mathbf{x}_S - \mathbf{x}_M) + \mathbf{b}^{MS}\mathbf{x}_M\} \\ A_4 &= [\mathbf{s} - \mathbf{s}_f^{CR}]^2 \\ \dot{\mathbf{s}} &= E^* \dot{\mathbf{e}} + H_1 * \dot{\mathbf{x}}_S + H_2 * \dot{\mathbf{x}}_M \\ H_1 &= E^*(\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) - \mathbf{e}_L E; \quad H_2 = E^*(\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) \\ E^* &= E_M - E_A \\ \text{obtención de los módulos tangentes :} \\ d\mathbf{s} &= \frac{E}{L_2} d\mathbf{e} \\ L_2 &= 1 - \frac{H_1 A_3}{A_4} - H_2 \frac{\mathbf{x}_M}{A_4} \mathbf{b}^{MS}\end{aligned}$$

- *Transformación reversa de martensita monovariante a austenita esquema de Voigt:*

EC.2.81

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_S &= \mathbf{x}_S \mathbf{b}^{SA} * \left\{ \frac{\dot{\mathbf{s}}}{A_5} - \frac{C_A}{A_5} \dot{T} \right\} \\ \dot{\mathbf{x}}_M &= \mathbf{x}_M \mathbf{b}^{MA} * \left\{ \frac{\dot{\mathbf{s}}}{A_5} - \frac{C_A}{A_5} \dot{T} \right\} \\ A_5 &= [\mathbf{s} - C_A(T - A_f)]^2 \\ \dot{\mathbf{s}} &= E^* \dot{\mathbf{e}} + H_1 * \dot{\mathbf{x}}_S + H_2 * \dot{\mathbf{x}}_M \\ H_1 &= E^*(\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S) - \mathbf{e}_L E; \quad H_2 = E^*(\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S); \quad E^* = E_M - E_A \\ \text{obtención de los módulos tangentes :} \\ d\mathbf{s} &= \frac{E}{L_3} d\mathbf{e} + \frac{H}{L_3} \dot{T} \\ L_3 &= 1 - \frac{H_1}{A_5} \mathbf{x}_S \mathbf{b}^{SA} - H_2 \frac{\mathbf{x}_M}{A_5} \mathbf{b}^{MA} \\ H &= -\frac{H_1}{A_5} C_A \mathbf{x}_S \mathbf{b}^{SA} - H_2 C_A \frac{\mathbf{x}_M}{A_5} \mathbf{b}^{MA}\end{aligned}$$

- **Transformación a martensita multivariante por enfriamiento esquema de Voigt:**

EC.2.82

$$\dot{\mathbf{x}}_M = \frac{A_6}{A_7} \dot{T}$$

$$A_6 = -\mathbf{b}^{AM} (1 - \mathbf{x}_M - \mathbf{x}_S)$$

$$A_7 = (T - M_f)^2$$

obtención de los módulos tangentes :

$$\dot{\mathbf{s}} = E^* \dot{\mathbf{e}} + H \dot{T}$$

$$H = H_2 \frac{A_6}{A_7}$$

$$H_2 = E^* (\mathbf{e} - \mathbf{e}_L \mathbf{x}_S)$$

$$E^* = E_M - E_A$$

Las ecuaciones para el esquema de Reuss serán iguales pero considerando

$$E^{**} = \frac{-T_1}{(1 + T_1 \mathbf{x})^2} \text{ donde } T_1 = \frac{E_A}{E_M} - 1 \text{ y teniendo en cuenta que } \xi = \xi_S + \xi_M.$$

2.4 COMPROBACIÓN DE LAS PREVISIONES NUMÉRICAS DE LOS MODELOS SELECCIONADOS

Una vez implementados numéricamente todos los modelos, se presenta a continuación la verificación de dicha implementación simulando, con unos parámetros teóricos, diferentes condiciones de variación de deformación, tensión y temperatura. En el Capítulo 3 se presenta toda la sistemática experimental para la obtención de los parámetros constitutivos a partir de ensayos en el laboratorio y, en el Capítulo 4 se presenta la verificación de los modelos con los parámetros experimentales obtenidos. Sin embargo, es fundamental realizar previamente simulaciones bajo diferentes estados de carga posible (isotérmicos con posterior recuperación de la deformación por calentamiento o efecto memoria de forma, ciclado en condiciones superelásticas, tensión constante y deformación constante) pues es la forma de comprobar la capacidad del modelo para capturar todos los efectos relacionados con esos modos de carga así como el efecto de la historia termomecánica previa. Mediante estas simulaciones,

además, se puede comprobar la bondad de la implementación realizada antes de la verificación experimental.

En esta simulación de los modelos se emplean los parámetros empleados por Brinson [BRI, 1993]_a. Estos parámetros utilizados para estas simulaciones son:

Tabla 2.25. Parámetros teóricos para la simulación numérica de los modelos

Parámetro	Valor teórico
<i>Temperatura martensita final (M_f) °C</i>	9
<i>Temperatura martensita inicial (M_s) °C</i>	18,4
<i>Temperatura austenita inicial (A_s) °C</i>	38,5
<i>Temperatura austenita inicial (A_f) °C</i>	49
<i>Módulo de Young Austenita (E_A) MPa</i>	67000
<i>Módulo de Young Martensita (E_M) MPa</i>	26300
<i>Coefficiente de influencia de tensión (C_M) MPa/°C</i>	8
<i>Coefficiente de influencia de tensión (C_A) MPa/°C</i>	8
<i>Tensión crítica inicial para la transformación T < M_s: s_s^{CR} (MPa)</i>	100
<i>Tensión crítica inicial para la transformación T < M_s: s_F^{CR} (MPa)</i>	170
<i>Deformación máxima recuperable (e_L) (mm/mm)</i>	0,067
<i>Coefficiente b medida de la evolución de la transformación (MPa)</i>	1, 10 y 100 MPa

Las diferentes simulaciones que se realizan se presentan a continuación. En todas ellas es fundamental determinar claramente cuáles son las condiciones iniciales para, como se ha comentado, tener en cuenta el efecto debido a la historia termomecánica previa.

SIMULACIONES ISOTÉRMICAS DE CARGA Y DESCARGA COMPLETA:

Se realizarán a diferentes temperaturas:

1. **T₁: T₁ > A_f:** proceso totalmente superelástico, puesto que la temperatura de ensayo está por encima de la temperatura de transformación austenítica total. Se supondrá que la fracción inicial de martensita es cero.

2. **T₂: A_s<T₂<A_f:** en este caso la transformación debe ser pseudoelástica, puesto que la temperatura de ensayo está por debajo de la final austenítica. Supondremos también que la fracción inicial de la martensita es cero.
3. **T₃: M_s<T₃<A_s:** esta temperatura corresponde a un ensayo de memoria de forma donde la fracción de martensita multivariante inicial puede ser diferente de cero (mezcla de austenita y martensita). Se supone que el material viene de un proceso de calentamiento previo con lo que la fracción de martensita es cero.
4. **T₄: T₄<M_s:** este proceso también es representativo de la memoria de forma y también realizaremos diferentes casos: T₄₋₁ y T₄₋₂ donde la fracción de martensita inicial será proporcional a la diferencia de las temperaturas de transformación.
5. **T₅: T₅<M_f:** en este caso, la fracción de martensita multivariante inicial es uno y también es un proceso representativo de la memoria de forma.

Las simulaciones del punto 4 y punto 5 sólo pueden realizarse para los modelos de Brinson y Auricchio lineal y exponencial, puesto que Tanaka y Liang y Rogers no consideran tramo lineal previo a la transformación a $T < M_s$. En estos modelos se simula un ensayo a $M_s = 18,4^\circ\text{C}$.

En los procesos anteriores donde la descarga produzca una deformación residual permanente, se simula un ciclo posterior de incremento de temperatura a $T > A_f$ para la recuperación de la memoria de forma.

Las simulaciones se resumen en la Tabla 2.26 y en la figura 2.13 y se presentan, a continuación, los resultados de la simulación.

Tabla 2.26. Temperaturas utilizadas en la simulación isotérmica

Temperatura	Valor	Fracción inicial	Recuperación de Forma
$T_1 > A_f$	60°C	$\xi_S = \xi_M = 0$	--
$T_2: A_s < T_2 < A_f$	40°C	$\xi_S = \xi_M = 0$	Calentamiento hasta 60°C
$T_3: M_s < T_3 < A_s$	25°C	$\xi_S = \xi_M = 0$	Calentamiento hasta 60°C
$T_{4-1}: T_4 < M_s$ (*)	15°C	$\xi_S = 0$ y $\xi_M =$ función de la ecuación del modelo	Calentamiento hasta 60°C
$T_{4-2}: T_4 < M_s$ (*)	12°C	$\xi_S = 0$ y $\xi_M =$ función de la ecuación del modelo	Calentamiento hasta 60°C
$T_5: T_5 < M_f$	5°C	$\xi_S = 0$ y $\xi_M = 1$	Calentamiento hasta 60°C

(*) Para los modelos de Tanaka y Liang y Rogers se simula a 18,4°C.

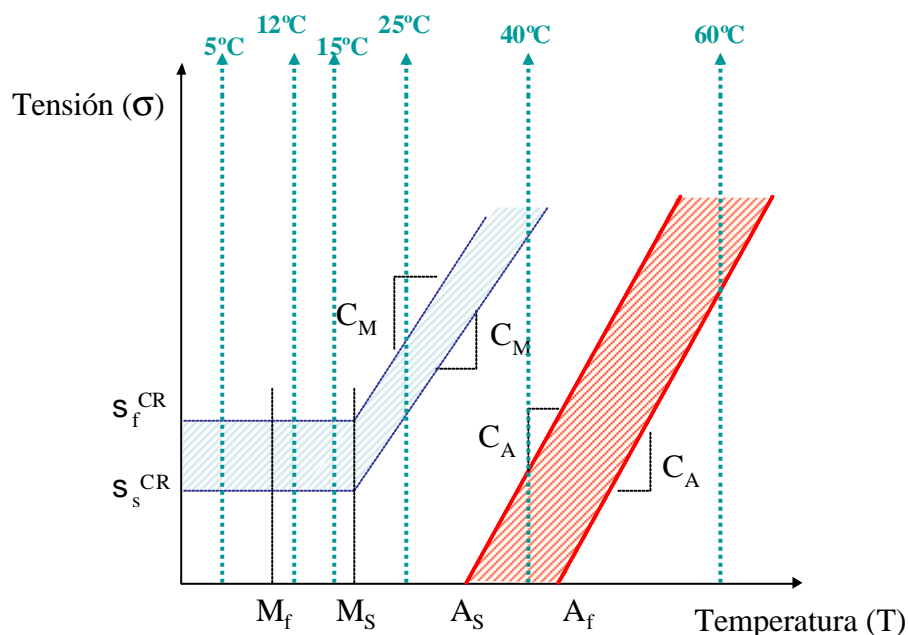


Figura 2.13: Representación sobre el diagrama crítico tensión-temperatura, de todas las simulaciones isotérmicas realizadas.

En la figura 2.14 se presentan las *simulaciones isotérmicas para el Modelo de Tanaka Voigt* y en la figura 2.15 se muestra el detalle de la simulación a 25°C indicando los puntos de transformación en el gráfico tensión-deformación, evolución de fracción de martensita durante la transformación y un gráfico 3D para el proceso de recuperación de

forma. Todos los ensayos se han realizado a una deformación máxima del 8,5% para conseguir una transformación completa.

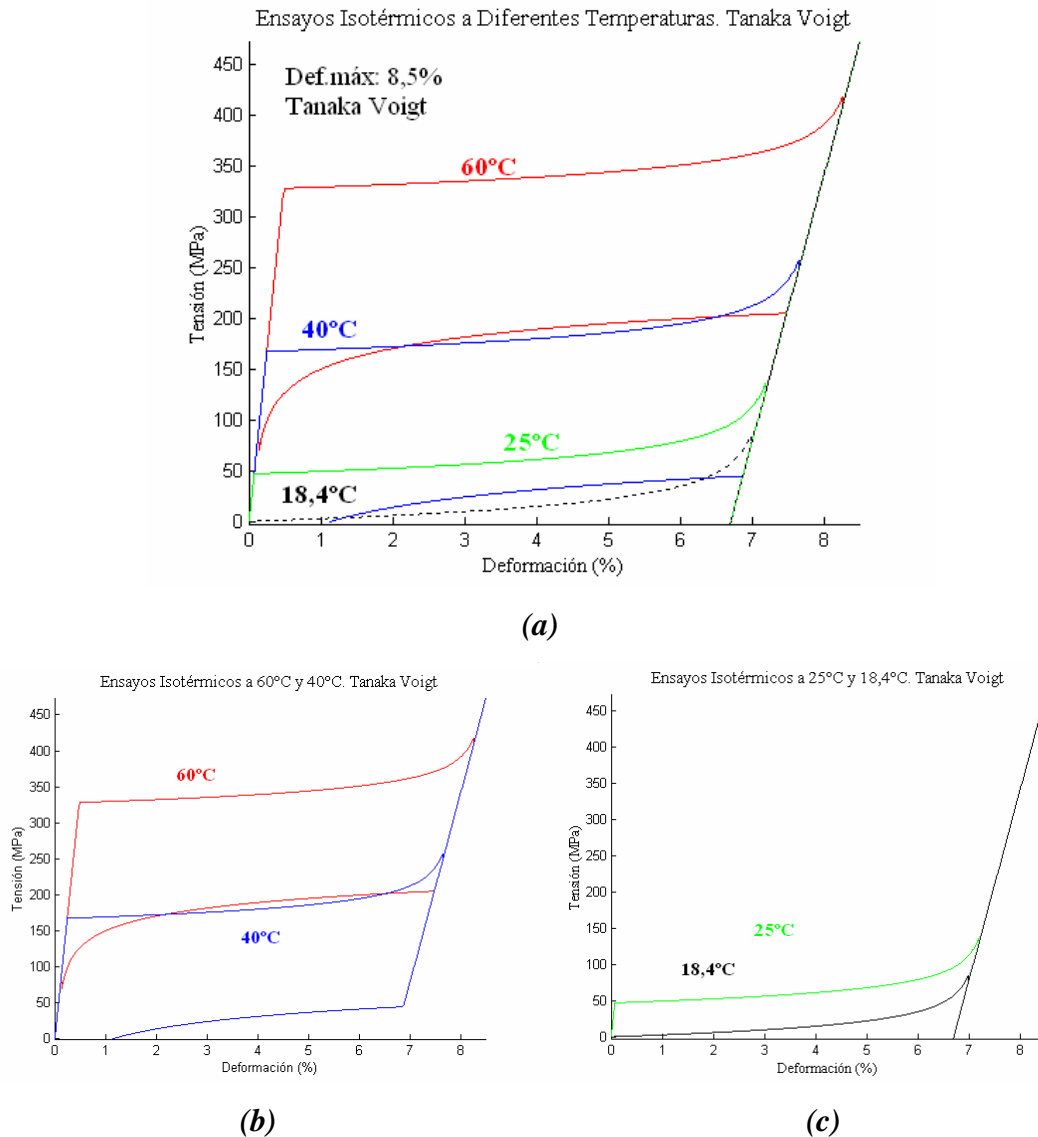


Figura 2.14: Gráfico Tensión-Deformación para las simulaciones isotérmicas del Modelo de Tanaka Voigt. (a) conjunto de ensayos a 60°C, 40°C, 25°C y 18,4°C. (b) Simulaciones a 60°C y 40°C y (c) simulaciones a 25°C y 18,4°C.

Puede observarse en la figura 2.14 como en la simulación a 18,4°C el proceso inicia directamente la fase de transformación sin tramo lineal previo. Esto es consecuencia de la no consideración de diferentes fracciones de martensita y, por tanto, de la suposición de transformación directa dentro del rango de temperaturas entre M_f y M_s .

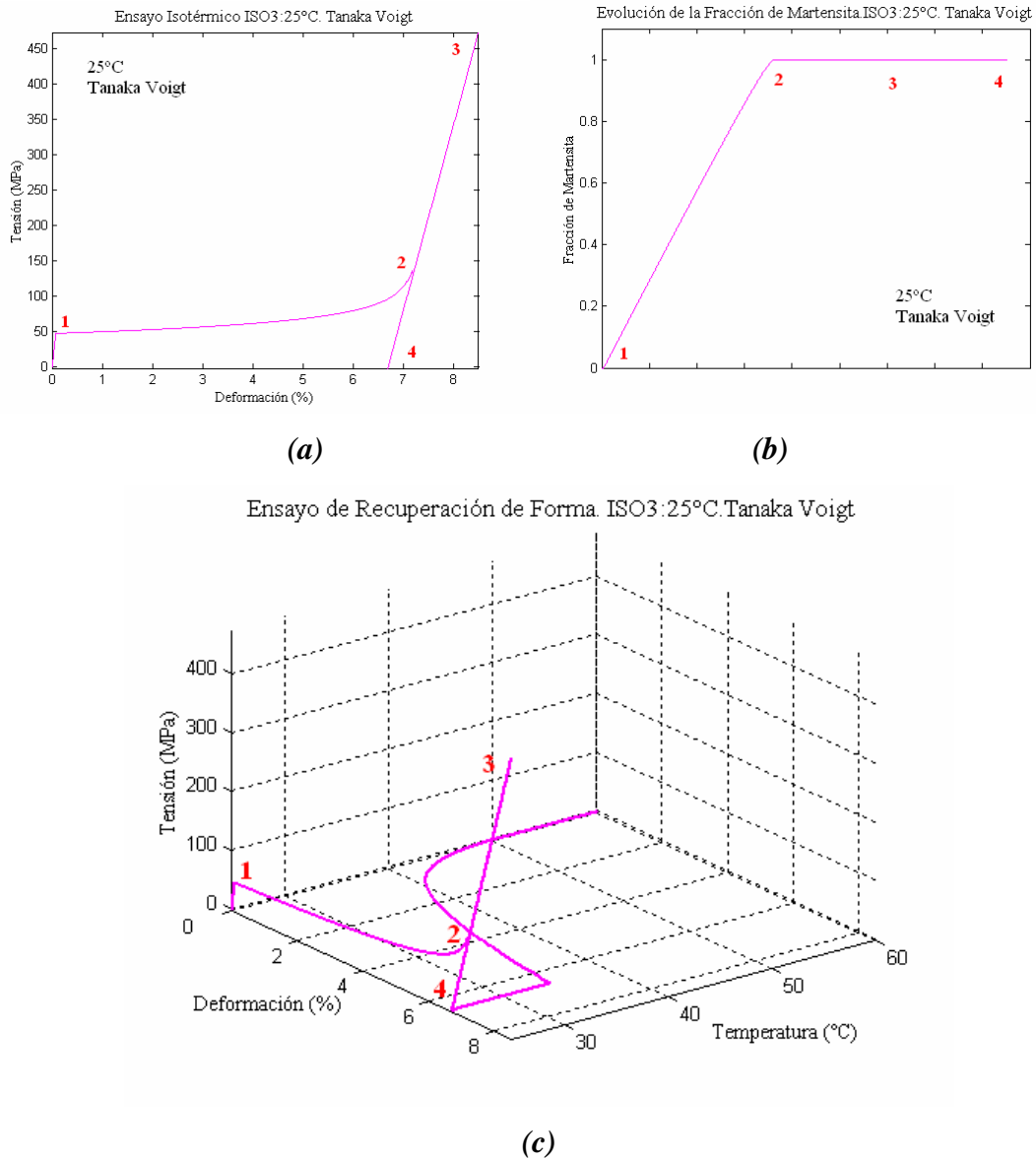


Figura 2.15: Gráfico Tensión-Deformación para las simulaciones a 25°C del Modelo de Tanaka Voigt donde se indican los puntos característicos de la transformación para un mejor entendimiento del gráfico.(a) proceso isotérmico tensión deformación (b) evolución temporal de la fracción de martensita durante el proceso isotérmico (c) proceso de recuperación de la deformación mediante un calentamiento hasta 60°C

De las figuras 2.14 y 2.15 puede deducirse que el modelo reproduce adecuadamente el comportamiento teórico de las SMA mediante un tramo recto inicial elástico previo al inicio de la transformación, un tramo de evolución exponencial dentro del rango de transformación, y un tramo último lineal a diferente pendiente, correspondiente a la deformación elástica de la martensita.

En la figura 2.16 se representan los ensayos a todas las temperaturas contempladas para el modelo Tanaka Reuss y en la figura 2.17A y 2.17B se comparan ambas simulaciones (Voigt y Reuss) para analizar las diferencias.

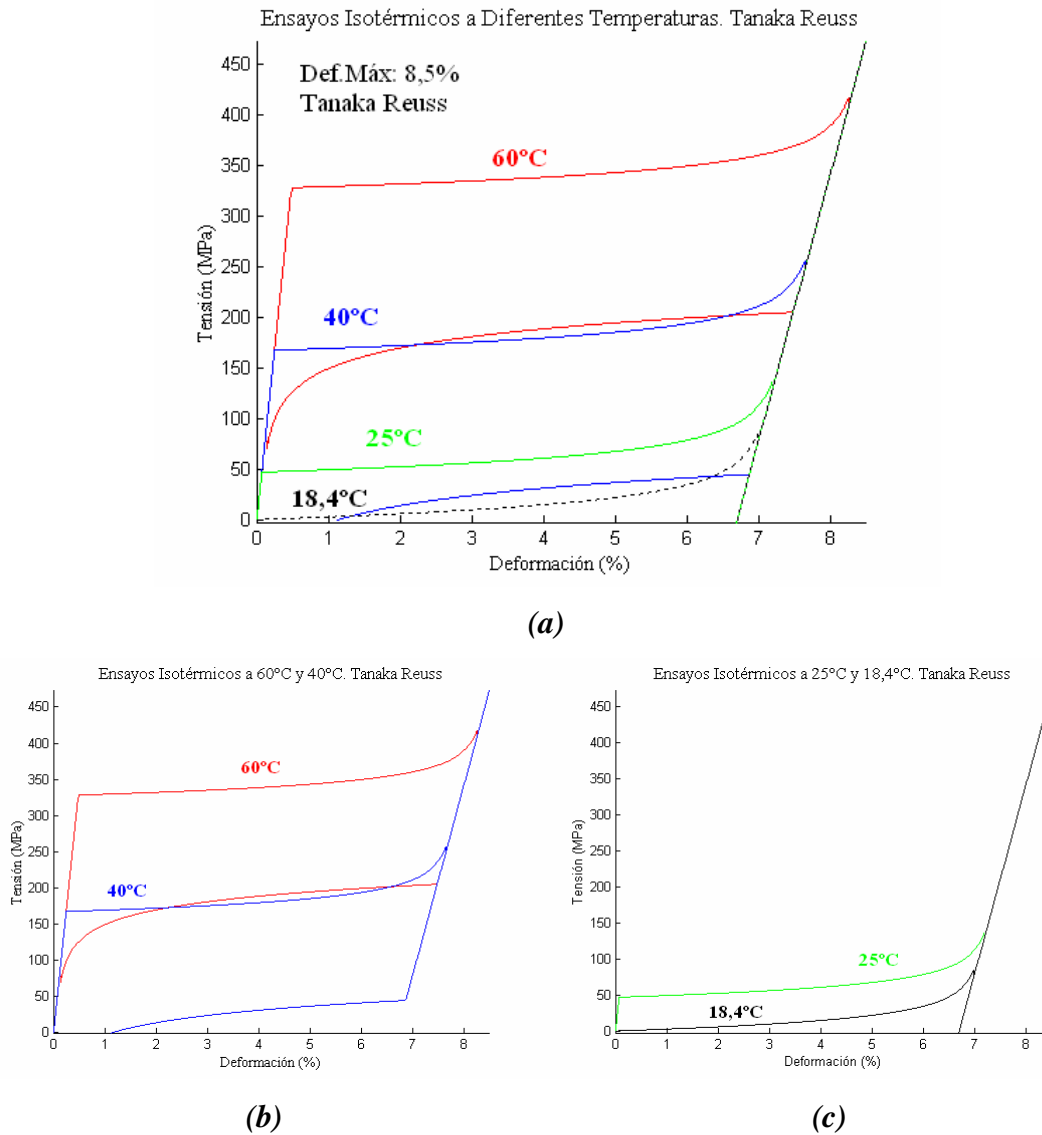


Figura 2.16: Gráfico Tensión-Deformación para las simulaciones isotérmicas del Modelo de Tanaka Reuss. (a) conjunto de ensayos a 60°C, 40°C, 25°C y 18,4°C. (b) Simulaciones a 60°C y 40°C y (c) simulaciones a 25°C y 18,4°C.

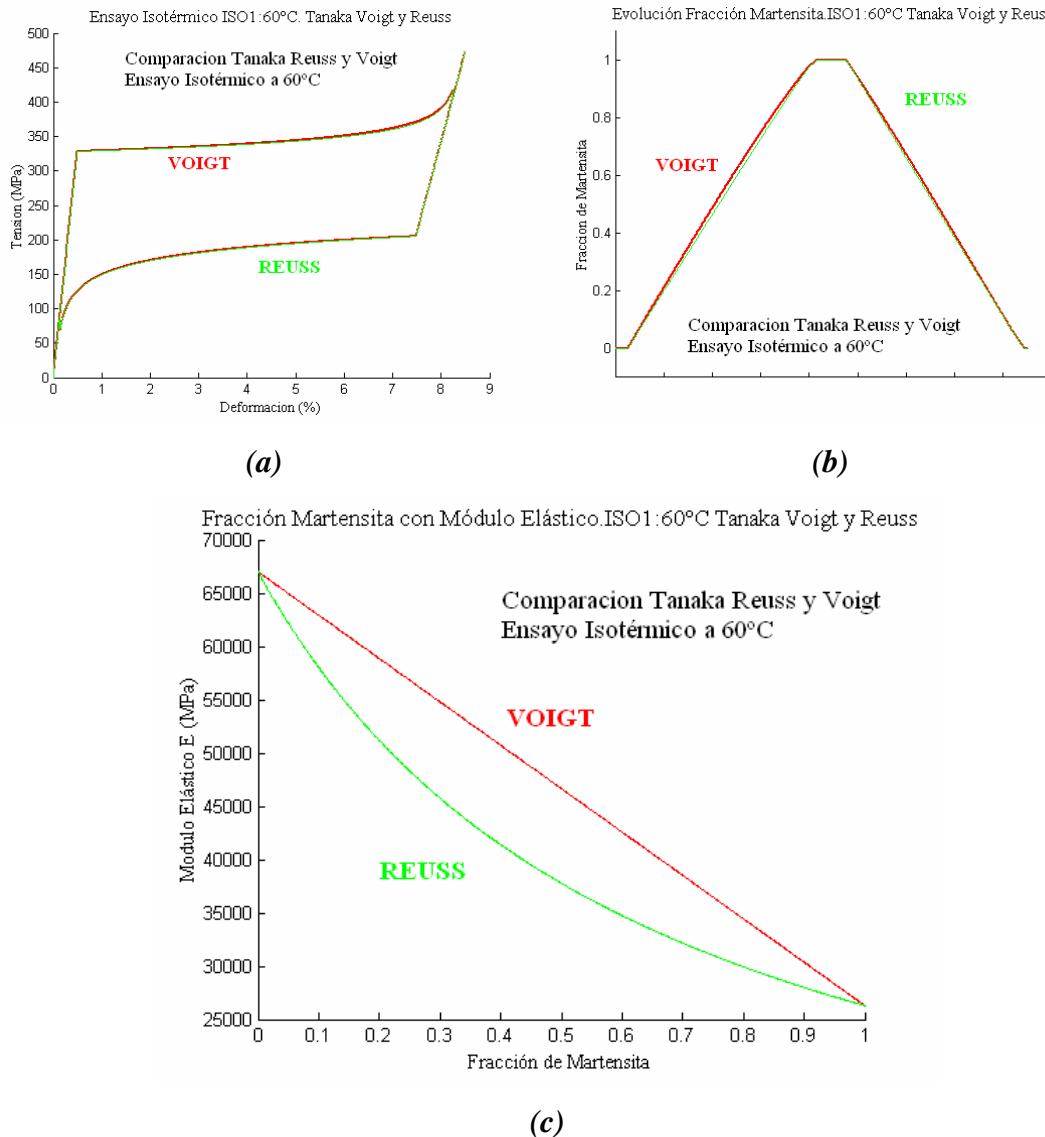


Figura 2.17A: Comparación de la simulación a 60°C de los modelos de Tanaka Voigt y Reuss (a) gráfico tensión deformación (b) evolución temporal de la fracción de martensita (c) representación del módulo elástico frente a la fracción de martensita.

Se observa de las figuras 2.17A y 2.17B que la comparación entre ambas aproximaciones para el módulo elástico no producen diferencias significativas en el gráfico tensión deformación. La diferencia es ligeramente apreciable en el caso de la evolución de la fracción de martensita, como se refleja en la figura 2.17A(b) y 2.17A(c).

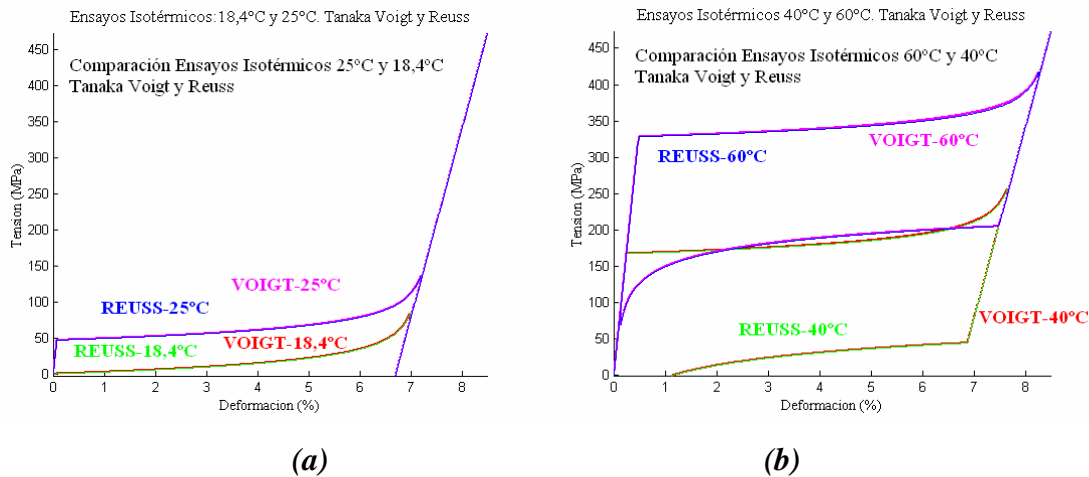
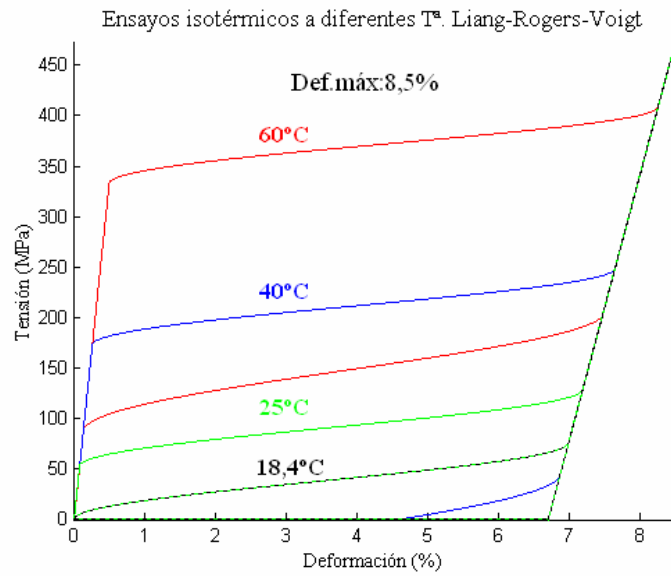


Figura 2.17B: Comparación de la simulación a todas las temperaturas de los modelos de Tanaka Voigt y Reuss (a) gráfico tensión deformación para 25°C y 18,4°C (b) para 60°C y 40°C.

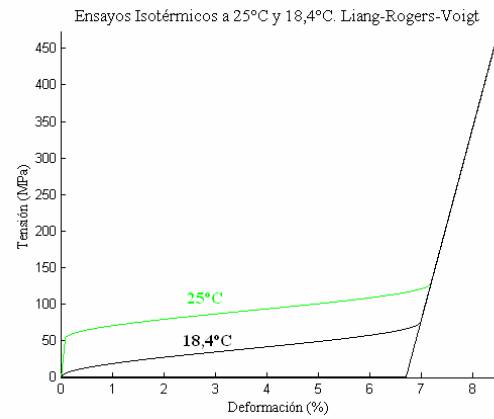
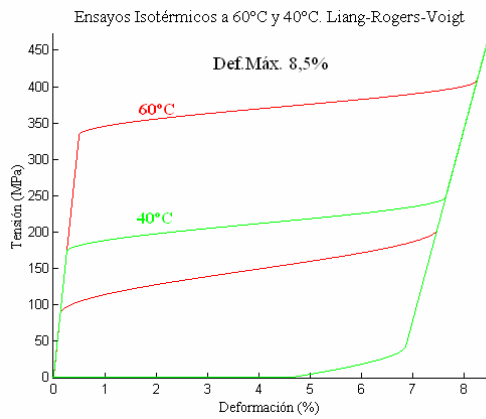
En la simulación isotérmica del modelo de Tanaka, tanto Voigt como Reuss, la única observación apreciable radica en la discontinuidad que se detecta en los cambios de tramo (de la zona de transformación a la zona elástica de la martensita). Esta ligera discontinuidad es fruto de la consideración de que, en la zona elástica de la martensita, el estado TRIAL para la fracción de martensita es 1 mientras que la evolución es exponencial y, necesariamente, implica un salto al considerar el estado final 1. Aumentando la precisión del vector deformación en la simulación se corrige la discontinuidad con el consecuente incremento del tiempo de cálculo.

Se presentan en la figuras 2.18 y 2.19 las *simulaciones correspondientes al modelo de Liang y Rogers* que, recordemos, se diferenciaba del modelo de Tanaka en la expresión de las ecuaciones de evolución. En las figuras 2.20 y 2.21 se presenta la simulación para el modelo de Liang-Rogers Reuss y se analiza la diferencia entre la aproximación de Voigt y Reuss.



(a)

(b)



(c)

Figura 2.18: Gráfico Tensión-Deformación para las simulaciones isotérmicas del Modelo de Liang y Rogers Voigt. (a) conjunto de ensayos a 60°C, 40°C, 25°C y 18,4°C. (b) Simulaciones a 60°C y 40°C y (c) simulaciones a 25°C y 18,4°C.

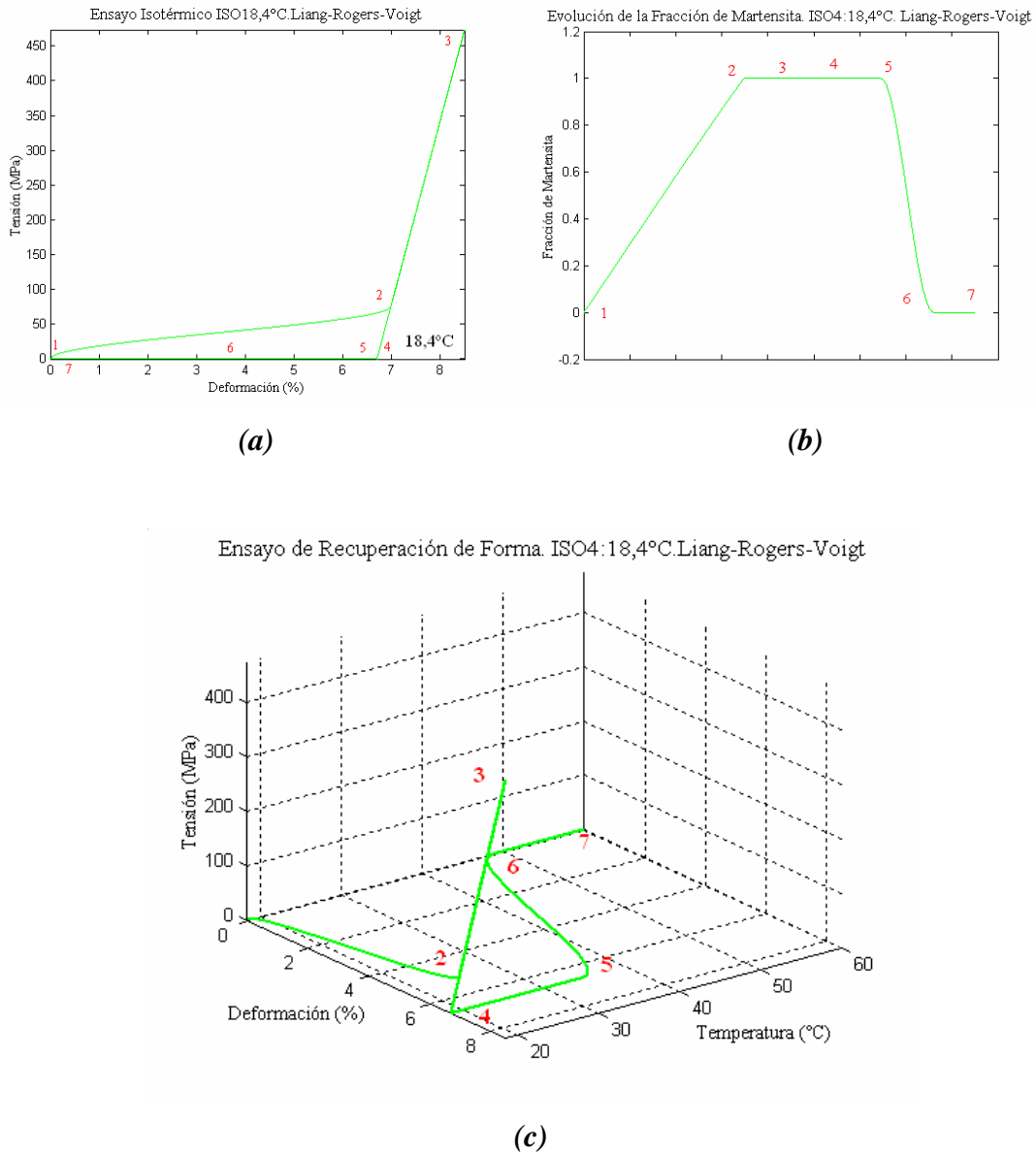
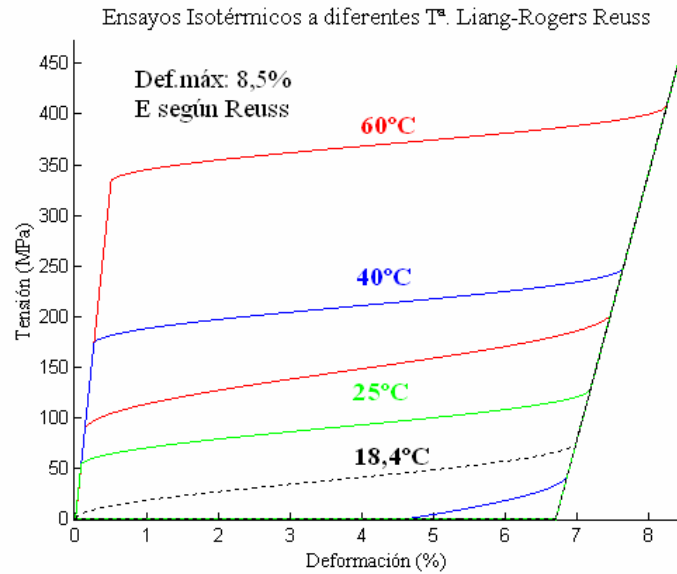
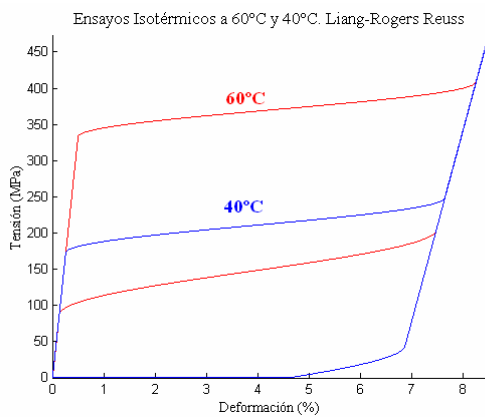


Figura 2.19: Gráfico Tensión-Deformación para las simulaciones a 18,4°C del Modelo de Liang y Rogers Voigt donde se indican los puntos característicos de la transformación para un mejor entendimiento del gráfico.(a) proceso isotérmico tensión deformación (b) evolución temporal de la fracción de martensita durante el proceso isotérmico (c) proceso de recuperación de la deformación mediante un calentamiento hasta 60°C

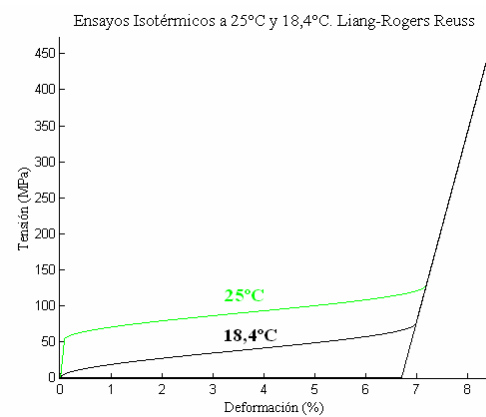
Se aprecia de nuevo como el modelo de Liang y Rogers, a 18,4°C (M_s) ya no contempla un tramo inicial de comportamiento elástico, comenzando directamente con un proceso de transformación de evolución cosenoidal. Por encima de dicha temperatura, el modelo es capaz de reproducir el comportamiento teórico de las SMA aunque con un proceso de transformación de aproximación diferente al modelo de Tanaka.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.20: Gráfico Tensión-Deformación para las simulaciones isotérmicas del Modelo de Liang y Rogers Reuss. (a) conjunto de ensayos a 60°C, 40°C, 25°C y 18,4°C. (b) Simulaciones a 60°C y 40°C y (c) simulaciones a 25°C y 18,4°C.

Analizando la simulación del modelo de Liang y Rogers Reuss y Voigt vemos como, al igual que en el caso de Tanaka, no se aprecian grandes diferencias entre ambas aproximaciones, dando la aproximación de Voigt valores superiores de tensión a igualdad de deformación en la meseta de transformación debido a que, a igualdad de fracción de martensita, el módulo elástico para la aproximación de Voigt es mayor que para Reuss.

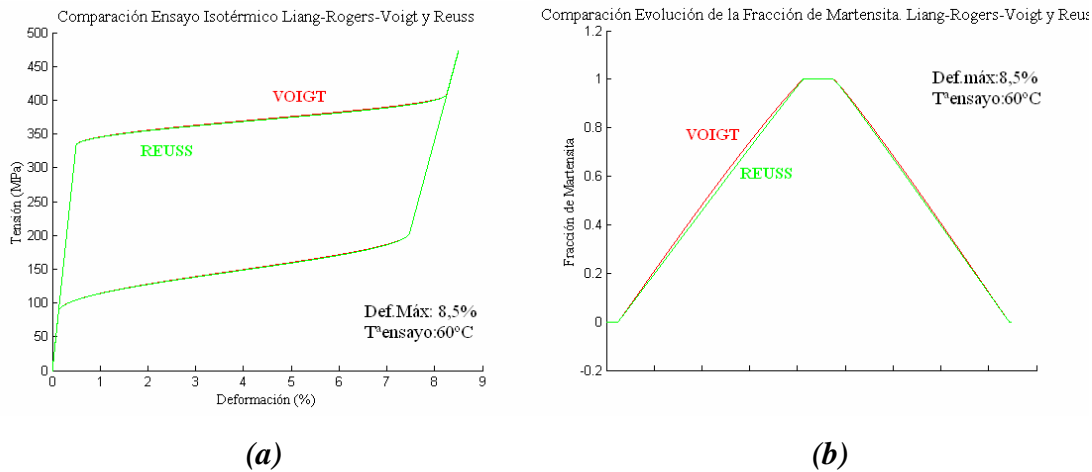


Figura 2.21 Comparación de la simulación a 60°C de los modelos de Liang y Rogers Voigt y Reuss (a) gráfico tensión deformación (b) evolución temporal de la fracción de martensita

En la figura 2.22(a-d) presentamos las *simulaciones correspondientes al modelo de Brinson* para todas las temperaturas donde se relaciona la tensión con la deformación y la fracción de martensita con la tensión. Recordemos que este modelo se diferencia de los anteriores en la consideración de diferentes fracciones de martensita y esto se refleja claramente en la figura 2.22(d). En ella se muestra la evolución de la fracción de martensita multivariante (ξ_M) con la tensión. Se puede apreciar como para las temperaturas dentro del intervalo de transformación, la fracción inicial es función de la temperatura, siendo el valor máximo (1) a $T < M_f$. Esta diferencia en la fracción inicial produce que en el gráfico tensión deformación (figura 2.22c) las pendientes del tramo recto inicial sean diferentes.

Se presenta en la figura 2.23 el proceso completo de transformación para la simulación a 15°C, señalándose los diferentes puntos característicos en el proceso.

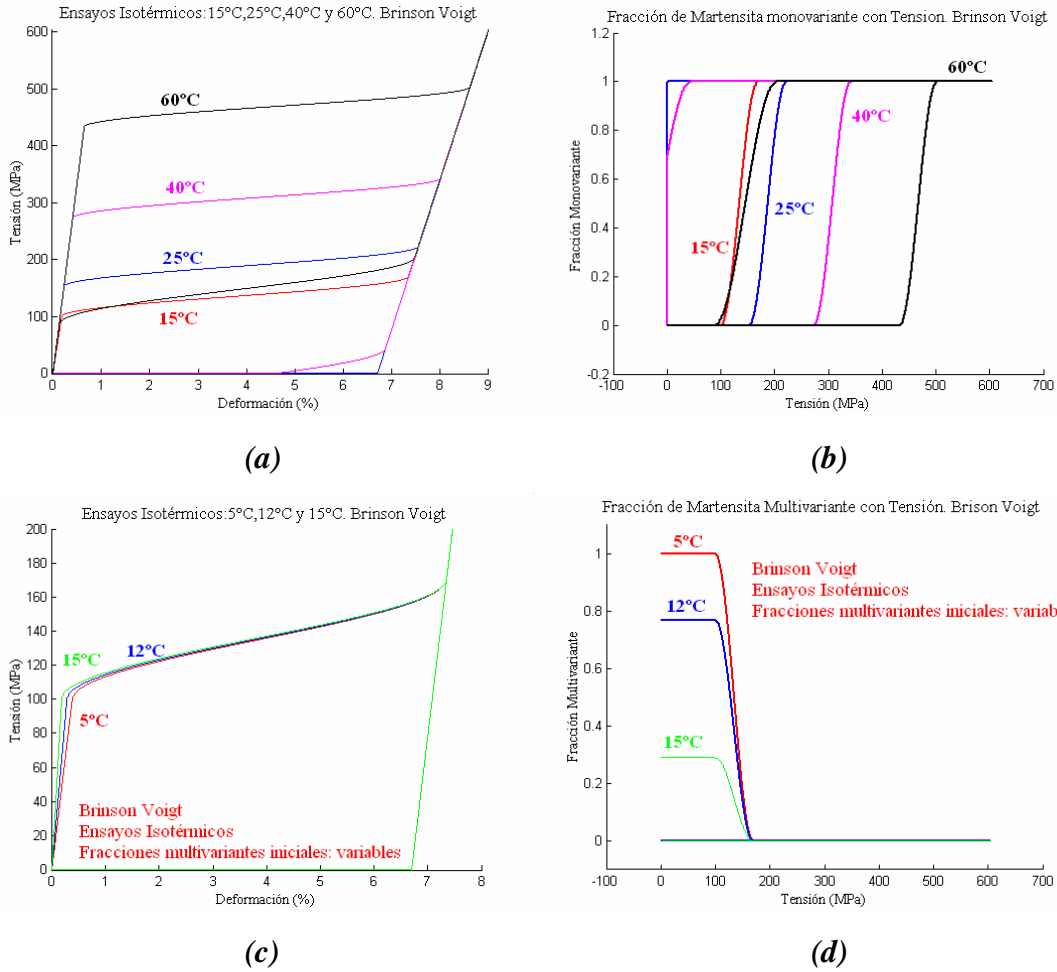
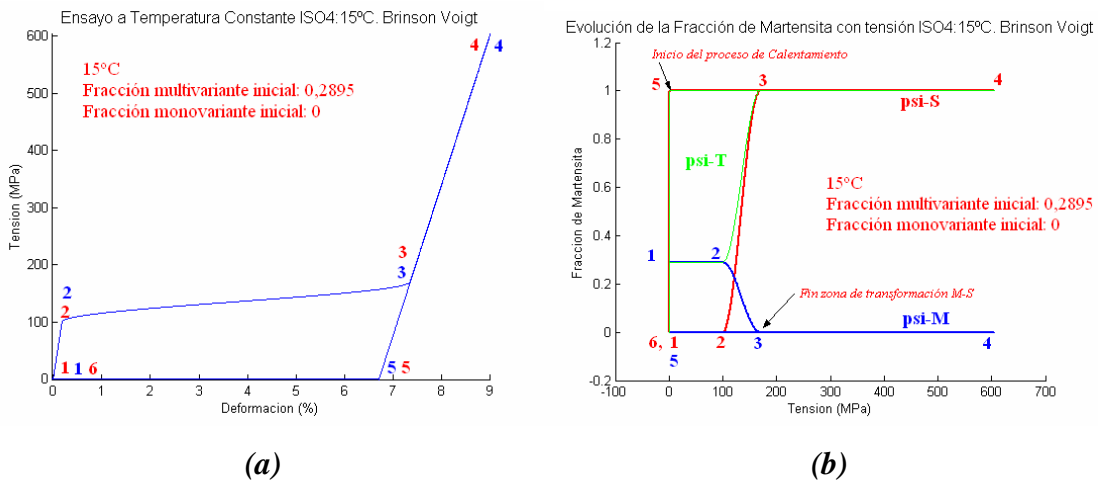


Figura 2.22: Gráfico Tensión-Deformación para las simulaciones isotérmicas del Modelo de Brinson Voigt. (a) conjunto de ensayos a 60°C, 40°C, 25°C y 15°C. (b) evolución de la fracción de martensita monovariante para las mismas temperaturas (c) simulaciones a 15°C, 12°C y 5°C y (d) evolución de la fracción de martensita multivariante con la tensión.



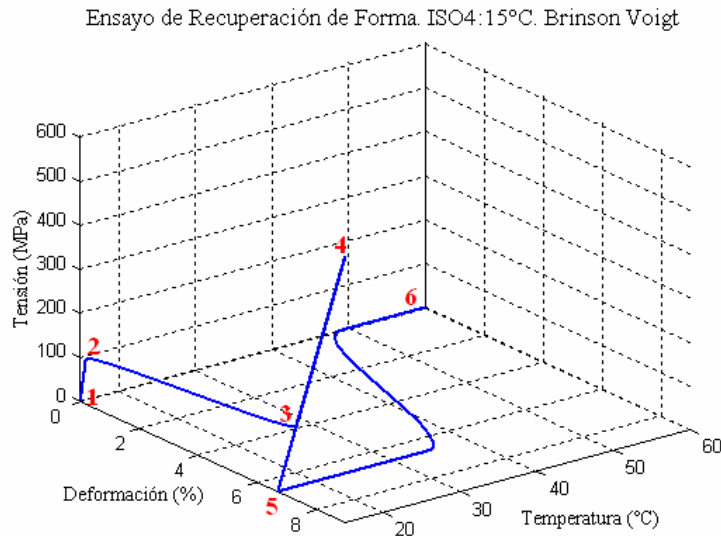


Figura 2.23: Gráfico Tensión-Deformación para la simulación isotérmica del Modelo de Brinson Voigt a 15°C. (a) tensión deformación indicando los puntos representativos de la transformación (b) fracciones de martensita monovariante (ψ_i-S), multivariante (ψ_i-M) y total (ψ_i-T) con tensión. (c) Gráfico tensión temperatura deformación incluyendo la recuperación de la deformación con la temperatura.

En la figura 2.24 se presentan los mismos gráficos que en la figura 2.22 pero para el modelo de Brinson Reuss y en la figura 2.25 se comparan ambas aproximaciones. Para el rango de temperaturas comprendidas entre las temperaturas de transformación ($M_s > T > M_f$) la diferencia en el gráfico tensión-deformación es apreciable como se observa en la figura 2.25b. Esto es lógico, puesto que en este rango de temperaturas la fracción inicial de martensita es diferente (mayor a menor temperatura) y, por tanto, el módulo elástico es diferente (mayor pendiente a menor temperatura y, a su vez, valores mayores para la aproximación de Voigt que para la de Reuss).

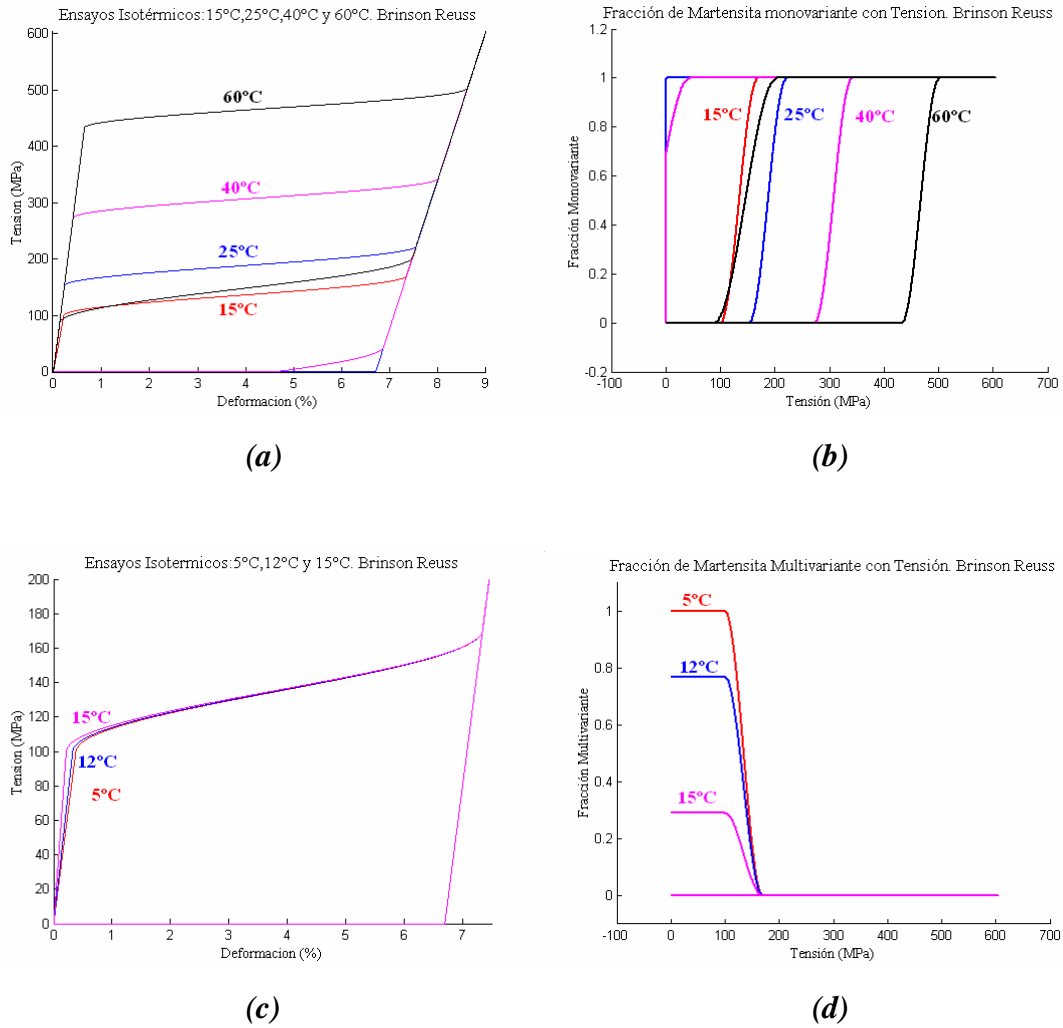


Figura 2.24: Gráfico Tensión-Deformación para las simulaciones isotérmicas del Modelo de Brinson Reuss. (a) conjunto de ensayos a 60°C, 40°C, 25°C y 15°C. (b) evolución de la fracción de martensita monovariante para las mismas temperaturas (c) simulaciones a 15°C, 12°C .y 5°C y (d) evolución de la fracción de martensita multivariante con la tensión.

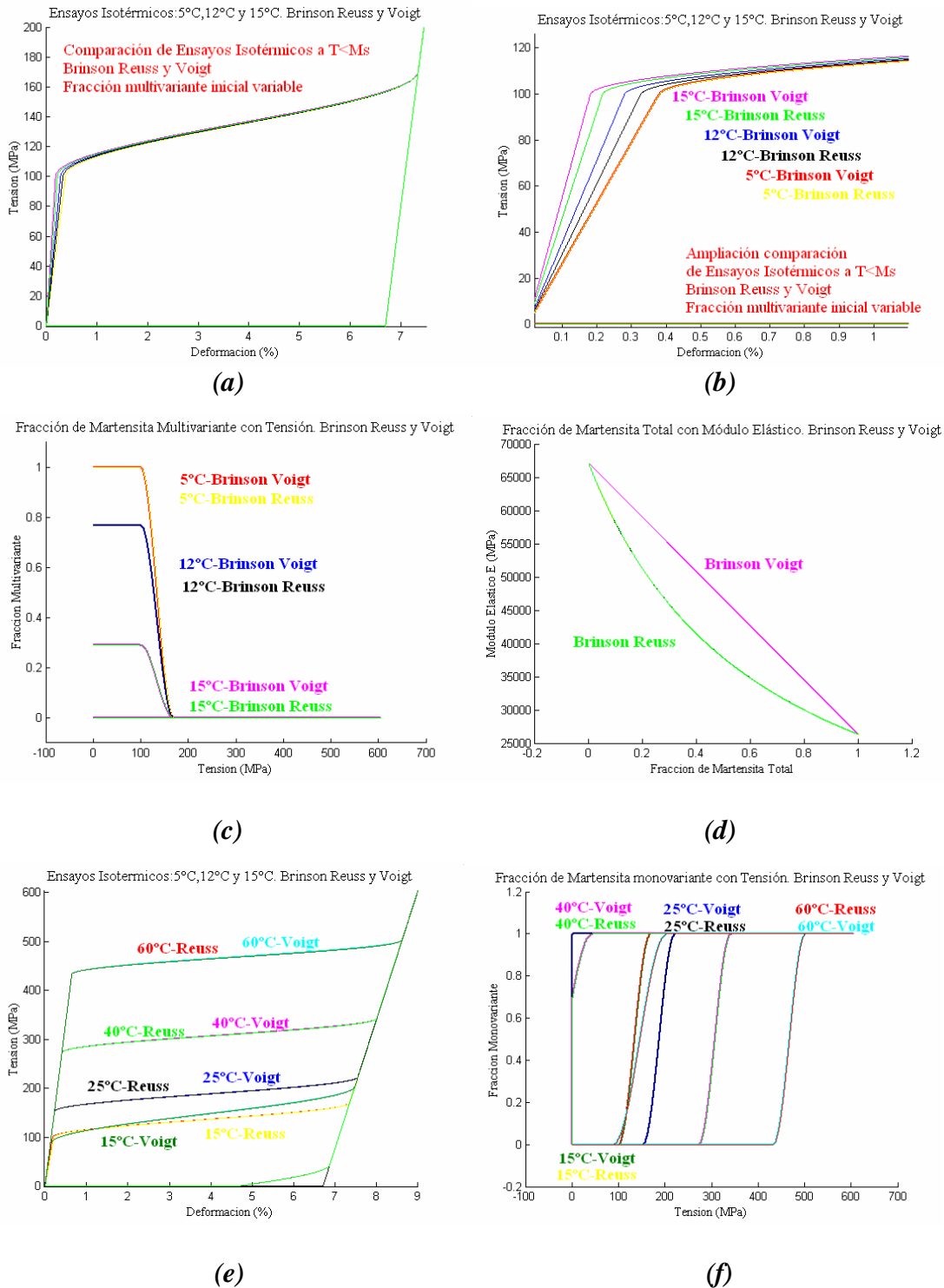


Figura 2.25: Gráfico Tensión-Deformación comparando las simulaciones isotérmicas del Modelo de Brinson Voigt y Reuss. (a) Conjunto de ensayos a 15°C, 12°C y 5°C (b) Ampliación del gráfico (a). (c) evolución de la fracción de martensita multivariante con la tensión para las mismas temperaturas (d) evolución del módulo elástico con la fracción Total de martensita (e) ensayos a altas temperaturas y (f) evolución de la fracción de martensita monovariante con la tensión para las mismas temperaturas.

En las simulaciones de los modelos de Liang y Rogers, así como en el de Brinson, no aparecen discontinuidades en las zonas de transición dado que, al ser transiciones cosenoidales, en los límites de transformación el valor de la ley de evolución es exacto (0 ó 1).

En las siguientes figuras presentamos la misma simulación que en el modelo de Brinson pero para *el modelo de Auricchio lineal*, observándose un comportamiento similar excepto en la zona de transformación que, para el modelo de Auricchio se aproxima a una recta. En la figura 2.26 se presenta el conjunto completo de simulaciones isotérmicas.

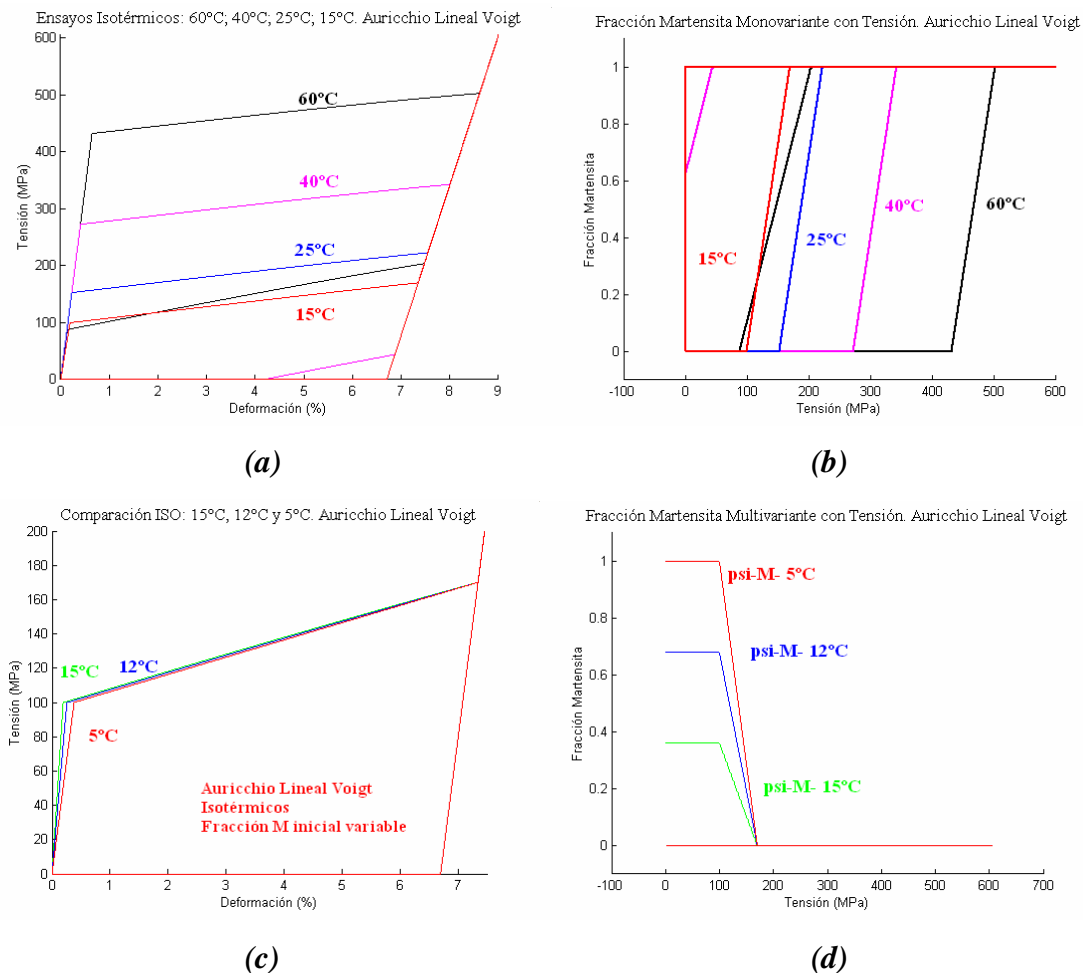


Figura 2.26: Gráfico Tensión-Deformación para las simulaciones isotérmicas del Modelo de Auricchio Lineal Voigt. (a) conjunto de ensayos a 60°C, 40°C, 25°C y 15°C. (b) evolución de la fracción de martensita monovariante para las mismas temperaturas (c) simulaciones a 15°C, 12°C y 5°C y (d) evolución de la fracción de martensita multivariante con la tensión.

En la figura 2.27 se presenta el detalle de la simulación a 15°C. Nótese la diferencia en la fracción de martensita multivariante inicial para la simulación de Brinson y Auricchio causa de diferencia en la aproximación utilizada en ambos modelos para dicha fracción de martensita (cosenoidal o lineal).

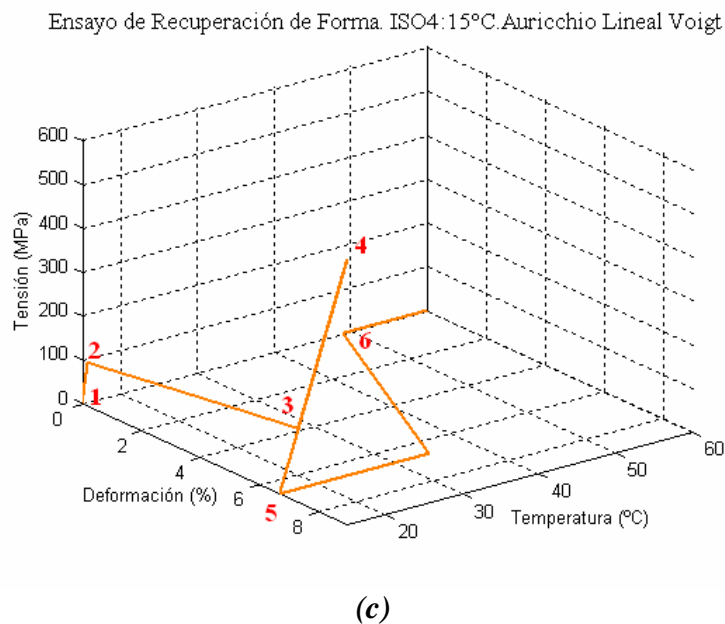
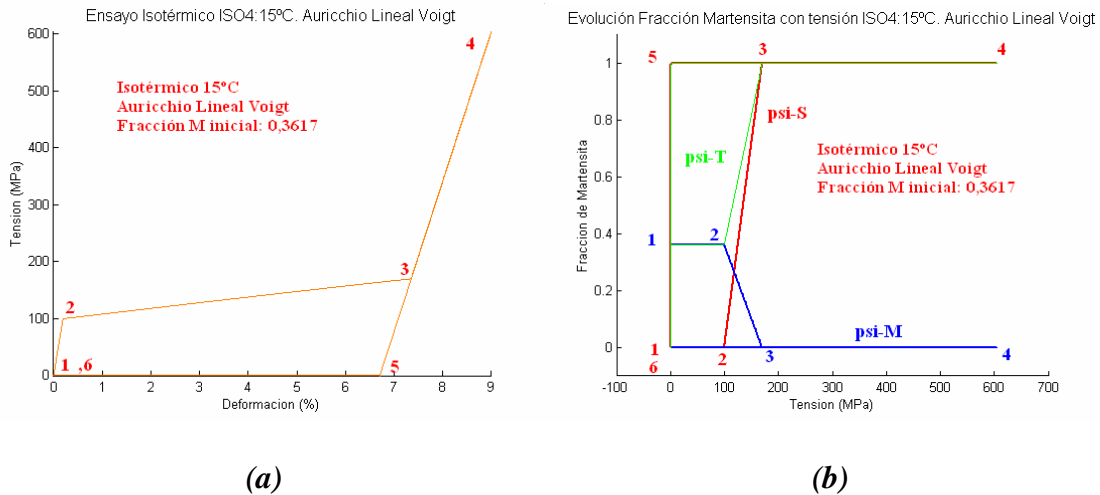


Figura 2.27: Gráfico Tensión-Deformación para la simulación isotérmica del Modelo de Auricchio Lineal Voigt a 15°C. (a) tensión deformación indicando los puntos representativos de la transformación (b) fracciones de martensita monovariante (ψ -S), multivariante (ψ -M) y total (ψ -T) con tensión. (c) Gráfico tensión temperatura deformación incluyendo la recuperación de la deformación con la temperatura.

Por último, se presenta en la figura 2.28 la comparación en las simulaciones isotérmicas para el modelo de Auricchio Lineal con aproximación de Voigt y Reuss. Las diferencias observables entre ambas aproximaciones se explican de igual forma que en el modelo de Brinson.

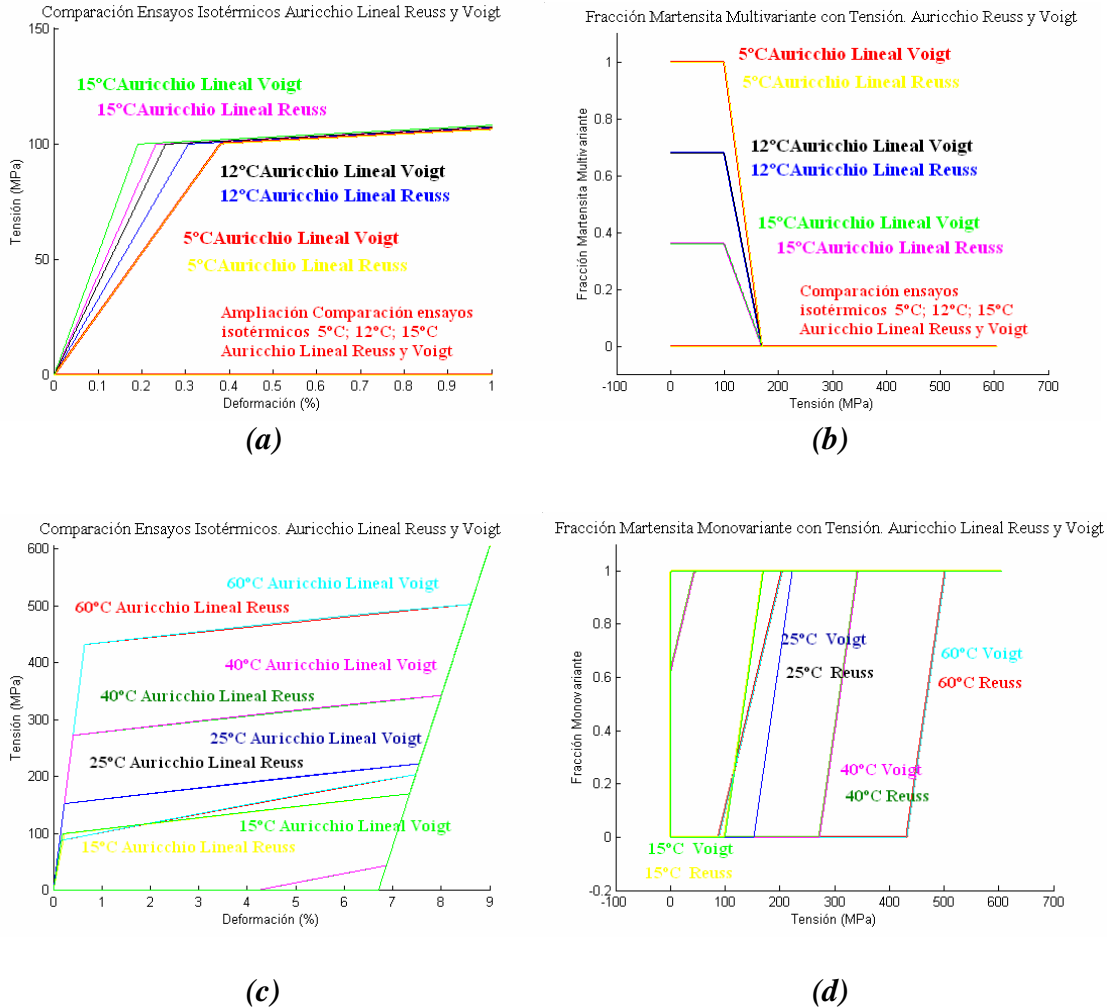
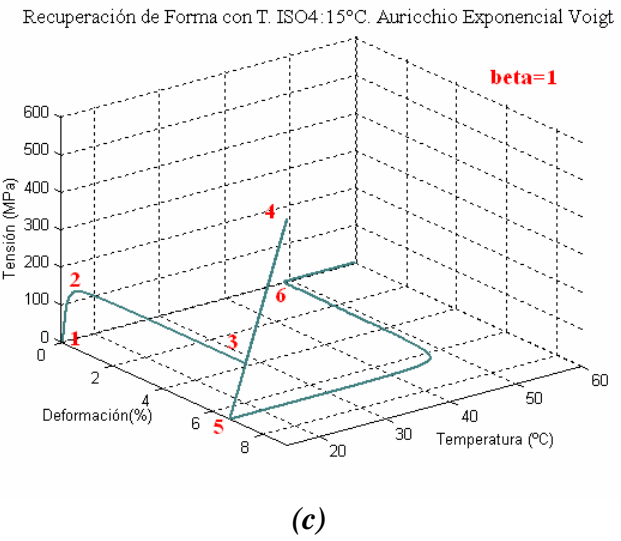
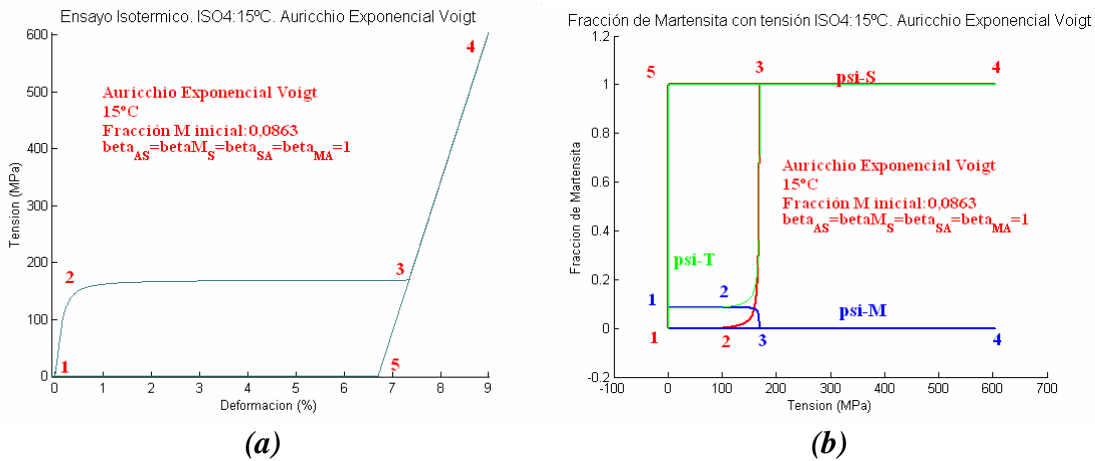
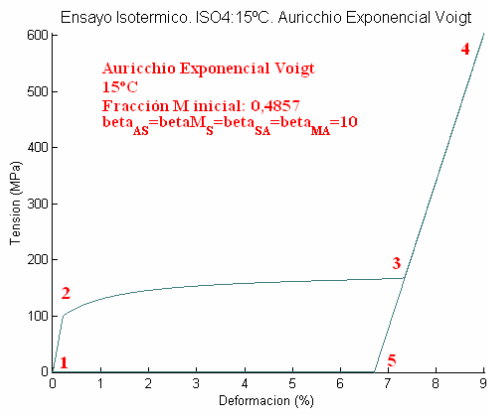


Figura 2.28: Gráfico Tensión-Deformación comparando las simulaciones isotérmicas del Modelo de Auricchio Lineal Voigt y Reuss. (a) Ampliación del conjunto de simulaciones a 15°C, 12°C y 5°C (b) evolución de la fracción de martensita multivariante con la tensión para las mismas temperaturas (c) simulaciones a altas temperaturas y (d) evolución de la fracción de martensita monovariante con la tensión para las mismas temperaturas.

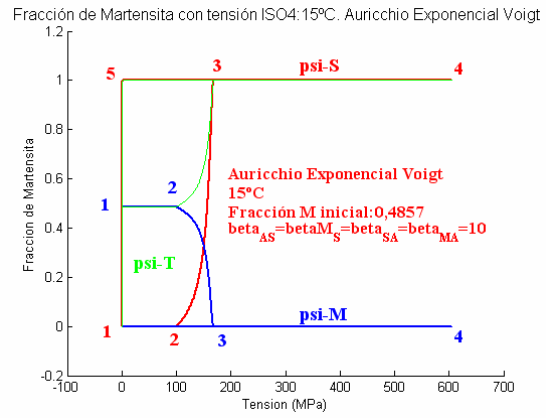
El último modelo analizado, *el modelo de Auricchio Exponencial*, incluye un parámetro β que depende de la evolución de la transformación. Simularemos los ensayos isotérmicos considerando tres casos extremos de β : 1 MPa; 10 MPa y 100 MPa para poder analizar su influencia en la relación tensión-deformación.

En la figura 2.29 se presenta la simulación para 15°C con los tres valores de β , incluyendo el gráfico tensión-deformación, la evolución de las fracciones de martensita (ξ_S , ξ_M y ξ_T) y el gráfico 3D para el efecto memoria de forma. En la figura 2.31 se superponen las tres simulaciones observándose cómo, a medida que varía el valor de β cambia la forma de la curva en la zona de transformación, siendo más convexo cuanto mayor es β . Este parámetro hace que el modelo sea mucho más versátil, puesto que permite ajustar la aproximación del modelo a los valores experimentales. Debemos comprobar, sin embargo, si el valor de β es siempre el mismo para todos los procesos isotérmicos o condiciones de carga: el modelo permite variar el parámetro para cada zona de transformación (β_{MA} , β_{AS} , β_{MS} , β_{SA}) pese a que en esta simulación, por simplicidad, los hemos supuesto iguales.



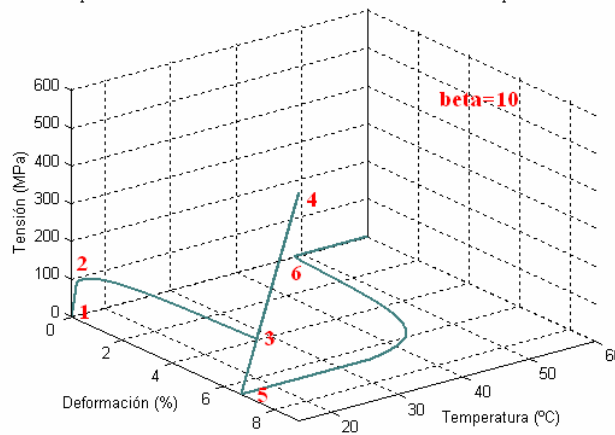


(d)

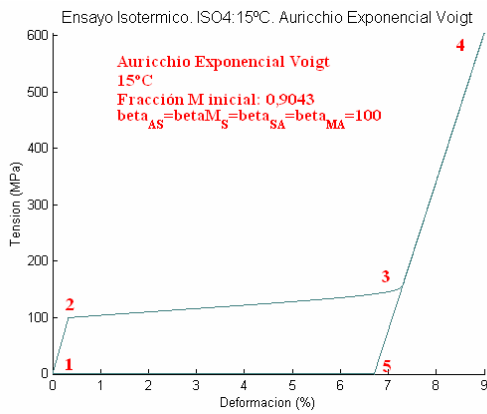


(e)

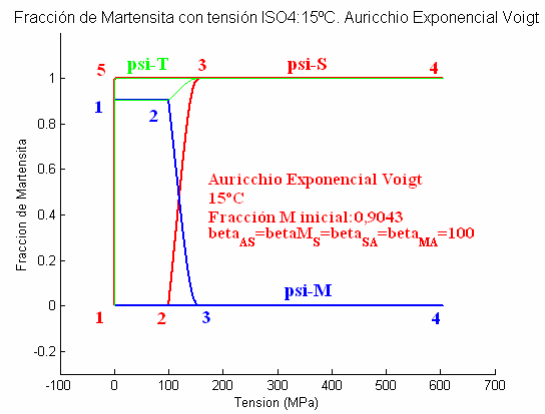
Recuperación de Forma con T. ISO4: 15°C. Auricchio Exponencial Voigt



(f)

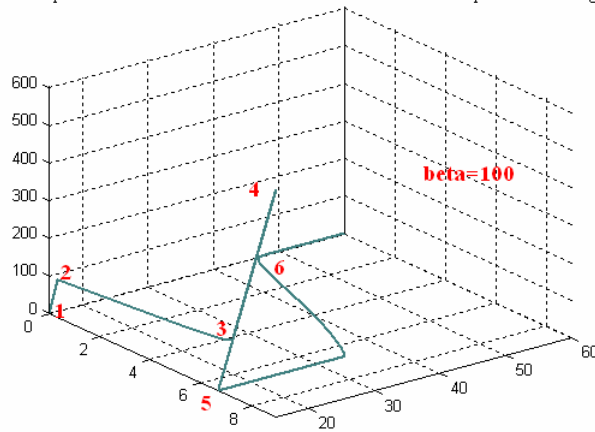


(g)



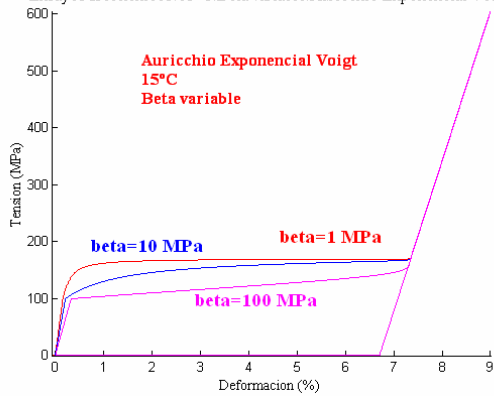
(h)

Recuperación de Forma con T. ISO4:15°C. Auricchio Exponencial Voigt



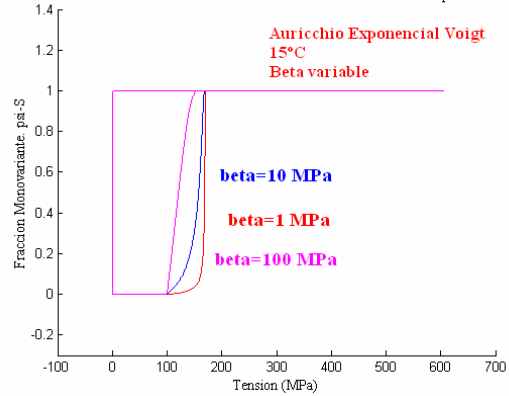
(i)

Ensayos Isotermicos:15°C.Beta variable. Auricchio Exponencial Voigt



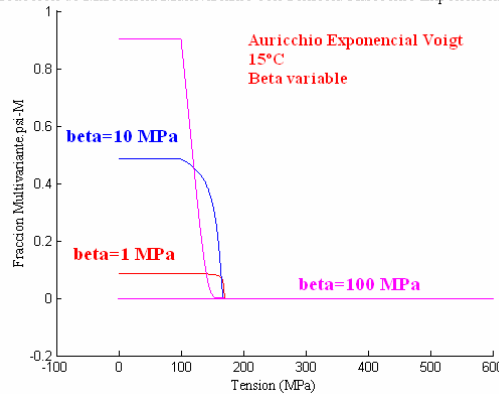
(j)

Fraccion de Martensita monovariante con Tension. Auricchio Exponencial Voigt



(k)

Fraccion de Martensita Multivariante con Tension. Auricchio Exponencial Voigt



(l)

Figura 2.29: Simulación isotérmica 15°C del modelo Auricchio Exponencial Voigt con diferentes valores de **b**. (a),(d),(g),(j) Tensión deformación para **b**=1MPa, **b**=10 MPa y **b**=100 MPa y el conjunto, respectivamente. (b),(e),(h),(k) evolución de la fracción de martensita monovariante con la tensión para las mismas condiciones y (c),(f),(i),(l) evolución de la fracción de martensita multivariante con la tensión para los mismos valores de **b**.

Se puede observar también de la figura 2.29(l) que la consideración de un valor u otro para el parámetro β varía notablemente la fracción de martensita inicial en el rango de temperaturas comprendidas dentro de la zona $M_f < T < M_s$, pues el valor de esta fracción ξ_M depende del parámetro a través de la ecuación EC2.82 que se reproduce a continuación.

EC.2.82

$$\dot{x}_M = \frac{A_6}{A_7} \dot{T}$$

$$A_6 = -b^{AM} (1 - x_M - x_S)$$

$$A_7 = (T - M_f)^2$$

Esta expresión es fácilmente integrable imponiendo como límites de integración la condición de $\xi_M=0$ para $T=M_s$ suponiendo que el proceso previo es un enfriamiento desde austenita pura.

En la figura 2.30 se presentan, conjuntamente, los gráficos tensión deformación para 60°C, 40°C, 25°C y 15°C así como la evolución de las diferentes fracciones de martensita con la tensión para los tres valores elegidos de β y en la figura 2.31 los mismos gráficos conjuntos pero para las temperaturas de 15°C, 12°C y 5°C. De nuevo se remarca la influencia del parámetro β elegido sobre todo en el rango de temperaturas dentro del intervalo de transformación martensítica.

En la figura 2.32 se muestra la comparación isotérmica para 60°C, 40°C, 25°C y 15°C y para 15°C, 12°C y 5°C para el modelo Auricchio Exponencial Reuss, presentándose únicamente el gráfico tensión- deformación por brevedad.

Por último, en la figura 2.33 se presentan las comparaciones entre la aproximación de Reuss y Voigt únicamente para las temperaturas de 60°C, 15°C y 5°C, observándose, de nuevo, que es en el rango de temperaturas entre M_s y M_f donde la diferencia entre ambas aproximaciones es apreciable siendo, además, más significativo para el valor de $\beta=10$ MPa (ver figura 2.33e).

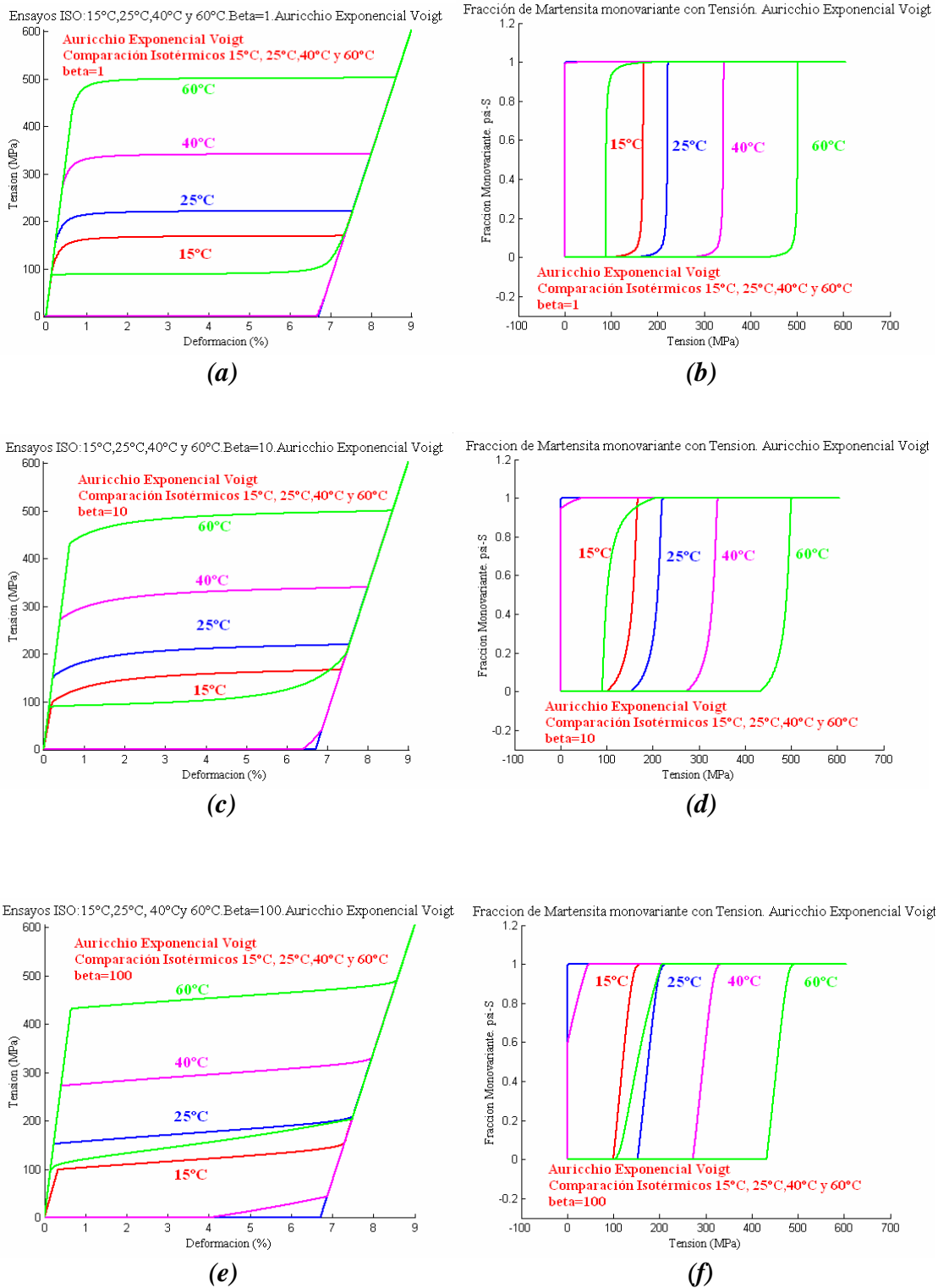


Figura 2.30: Comparación de las simulaciones isotérmicas para 60°C, 40°C, 25°C y 15°C del modelo Auricchio Exponencial Voigt con diferentes valores de b . (a),(c),(e) Tensión deformación para $b=1\text{MPa}$, $b=10\text{ MPa}$ y $b=100\text{ MPa}$ respectivamente. (b),(d),(f) evolución de la fracción de martensita monovariante con la tensión para los mismos valores de b .

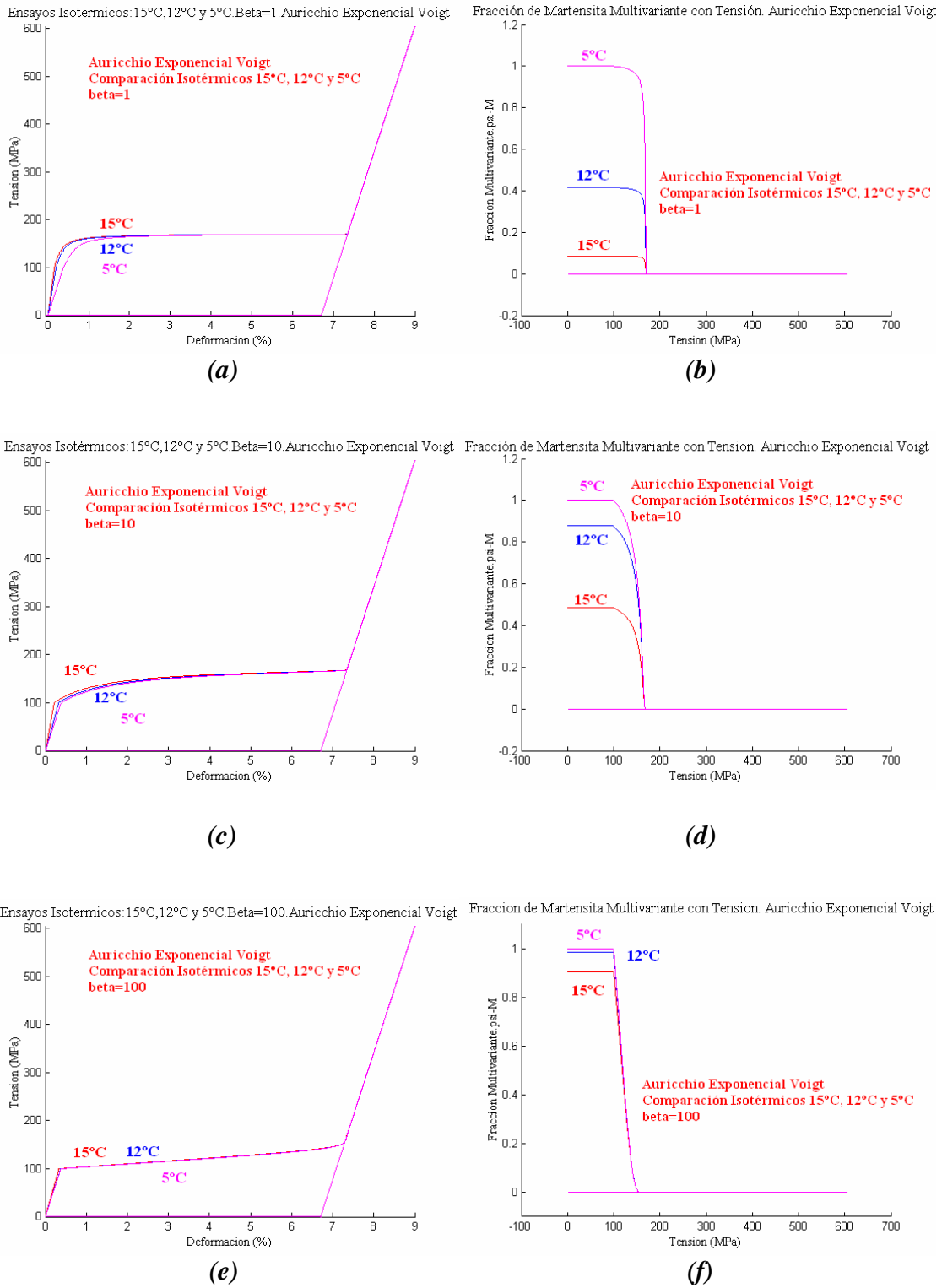


Figura 2.31: Comparación de las simulaciones isotérmicas para 15°C, 12°C y 5°C del modelo Auricchio Exponencial Voigt con diferentes valores de b . (a),(c),(e) Tensión deformación para $b=1$ MPa, $b=10$ MPa y $b=100$ MPa respectivamente.(b),(d),(f) evolución de la fracción de martensita multivariante con la tensión para los mismos valores de b .

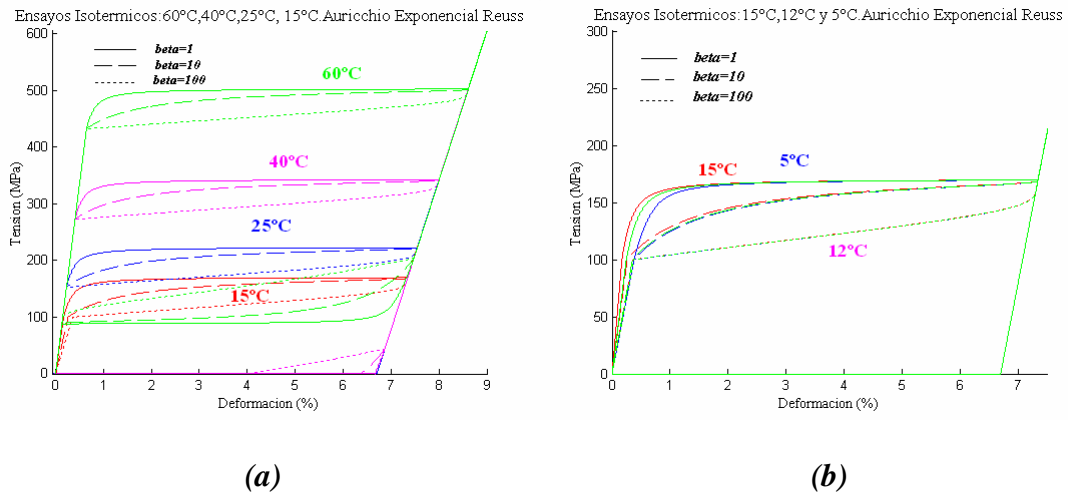
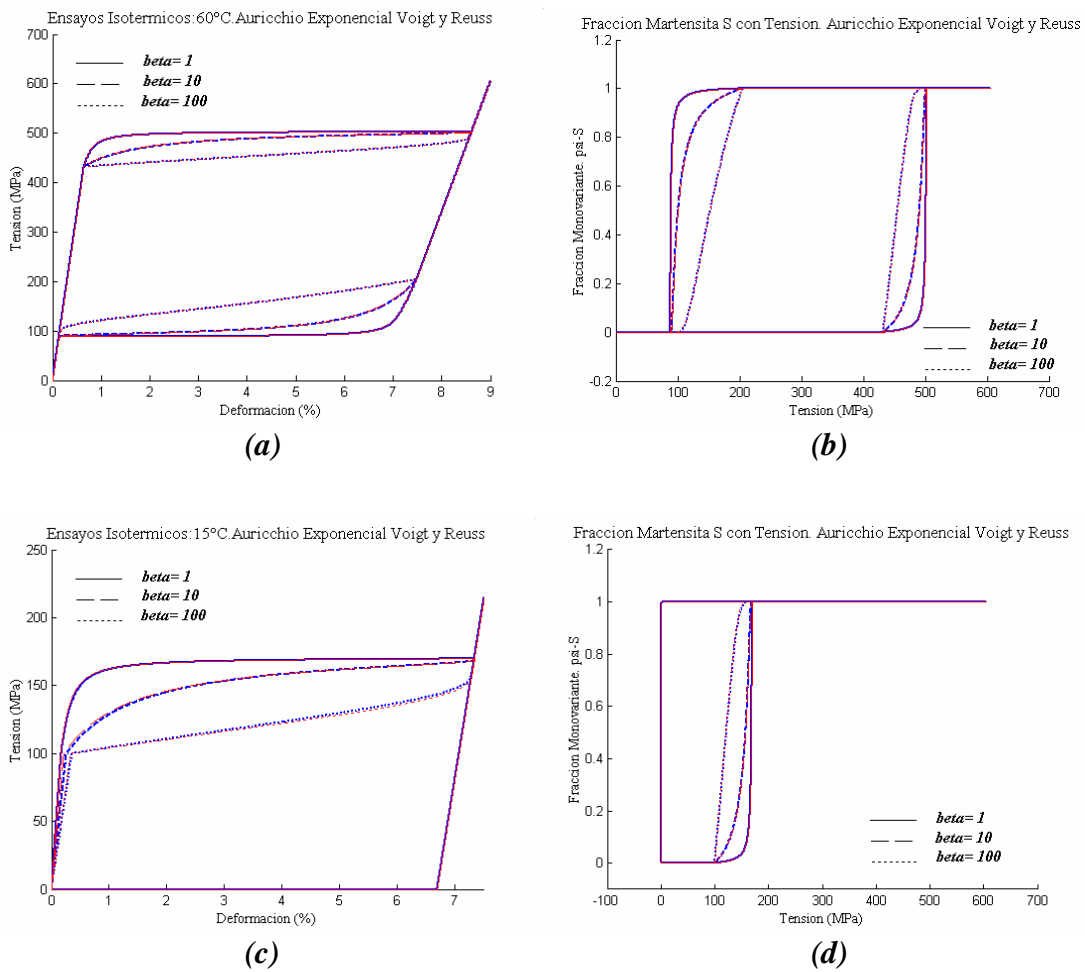


Figura 232: Comparación de las simulaciones isotérmicas del modelo Auricchio Exponencial Reuss para 60°C, 40°C, 25°C y 15°C con los tres valores de **b** analizados y (b) comparación para las temperaturas de 15°C, 12°C y 5°C con los mismos valores de **b**.



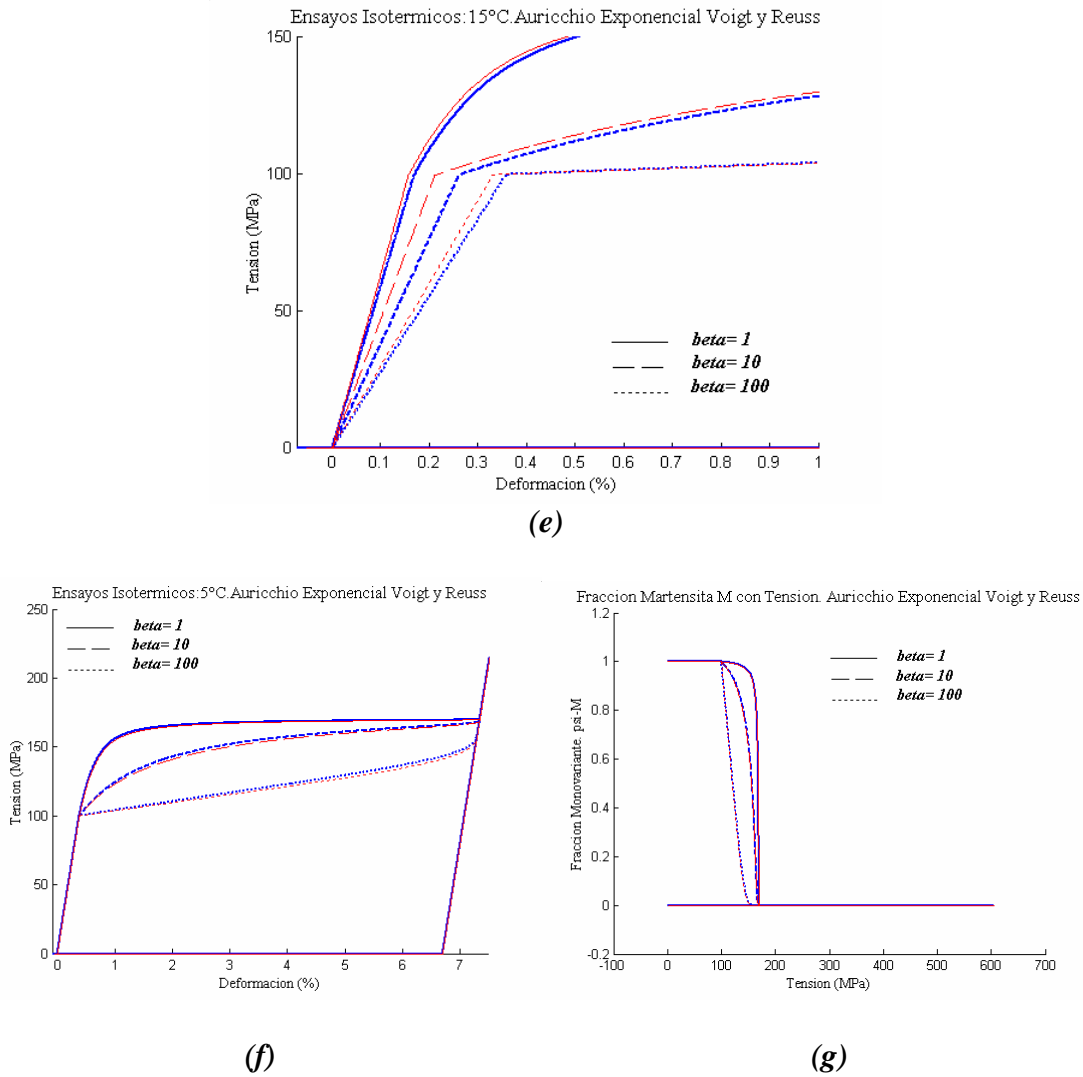


Figura 233: Comparación de las simulaciones isotérmicas del modelo Auricchio Exponencial Reuss para (a) 60°C, (c) 15°C y (f) 5°C con los tres valores de \mathbf{b} analizados y evolución de las fracciones de martensita para (b) 60°C, (d) 15°C y (g) 5°C. En (e) se amplía el gráfico de (c) para observar con más detalle la influencia del parámetro \mathbf{b} . En todos los gráficos, las líneas en color azul corresponden a la aproximación de Reuss y las rojas a Voigt.

SIMULACIONES ISOTÉRMICAS DE CARGA Y DESCARGA CÍCLICA:

La siguiente simulación numérica de los modelos implementados que se presenta está destinada a verificar la capacidad de reproducir procesos de carga y descarga parcial en régimen superelástico (60°C). Para ello, se realizan tres simulaciones:

1. **CICL₁**: después de un proceso de carga y descarga completa, se realizarán sucesivas cargas incompletas y descargas completas. Las cargas serán incrementales con un incremento de deformación del 1%.
2. **CICL₂**: después de un proceso de carga y descarga completa, se realizarán sucesivas descargas incompletas y cargas completas. Las descargas serán decrementales con un decremento de deformación del 1%.
3. **CICL₃**: después de un proceso de carga y descarga completa, se realizarán sucesivas cargas incompletas y descargas incompletas.

Estas simulaciones, pese a que no son verificadas experimentalmente, son muy útiles para comprobar la capacidad del modelo de reproducir estados de carga parciales y, en consecuencia, con fracciones de martensita residuales.

En la figura 2.34 se muestran las tres simulaciones de ciclado para el modelo de Tanaka Voigt, representando el gráfico tensión-deformación y el gráfico de la evolución temporal de la fracción de martensita. En la figura 2.35 se presentan los ensayos de ciclado comparando la aproximación de Reuss y Voigt para el modelo de Tanaka.

En las figuras 2.36-2.39 se presentan la comparación entre las aproximaciones de Voigt y Reuss para todos los modelos analizados: Liang y Rogers; Brinson, Auricchio Lineal y Auricchio Exponencial. Para éste último, por brevedad, se presenta la comparación en ciclos carga con $\beta=1$ MPa, en ciclos descarga con $\beta=10$ MPa y en ciclos incompletos con $\beta=100$ MPa.

Analizando las comparaciones entre las aproximaciones de Reuss y Voigt, se puede observar como, pese a estar a una temperatura elevada (60°C) existen ciertas diferencias entre ambas aproximaciones. Esto es causado por la acumulación de fracción de martensita residual que provoca que varíe el módulo elástico y, por tanto, la relación tensión-deformación.

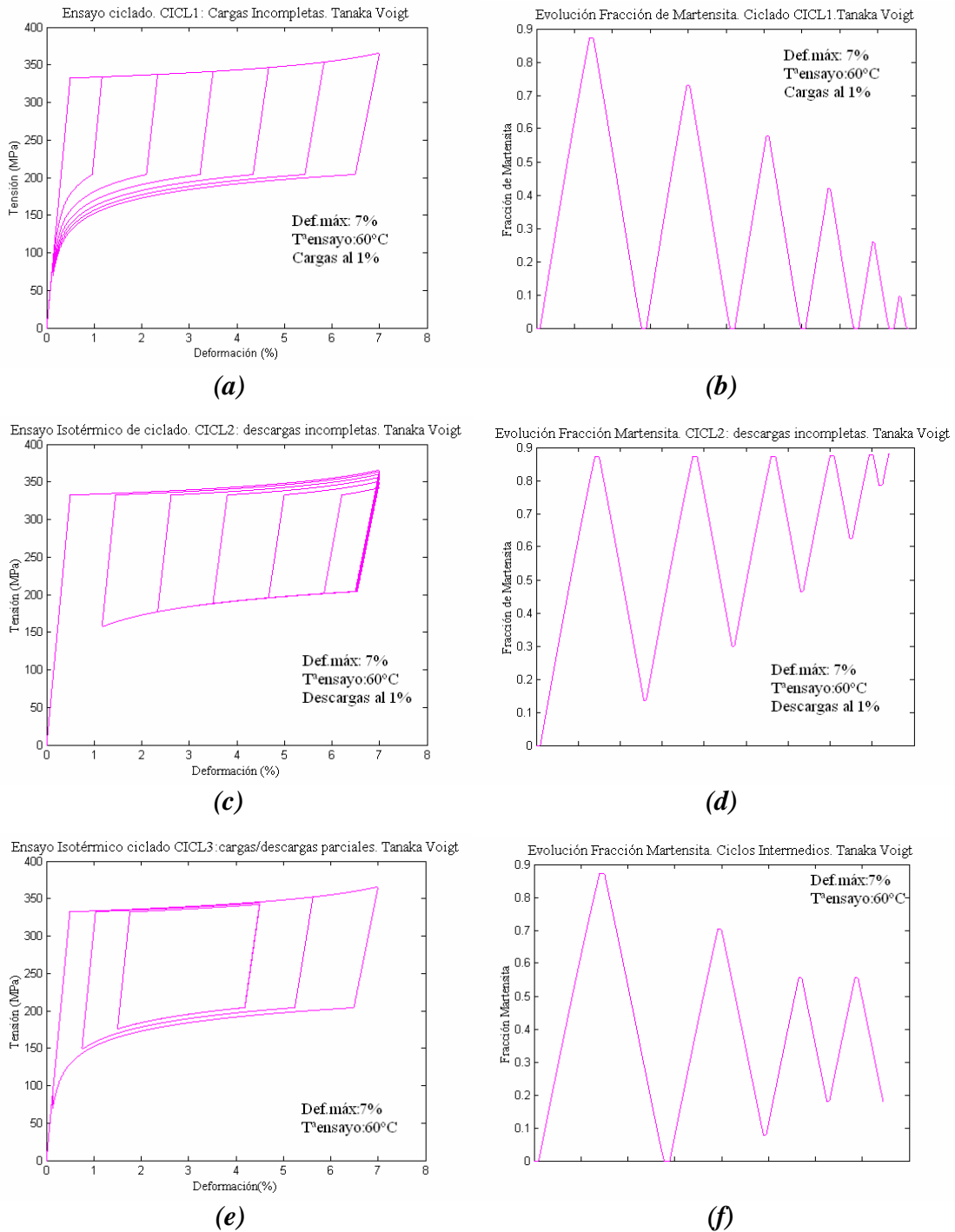


Figura 234: Simulaciones de ciclado en régimen superelástico (60°C) para el Modelo de Tanaka Voigt. (a) tensión-deformación para un ciclado con cargas parciales al 1% (b) para el mismo proceso de carga, evolución temporal de la fracción de martensita. (c) y (d) ciclado con descargas imparciales y (e) y (f) ciclado con cargas y descargas incompletas.

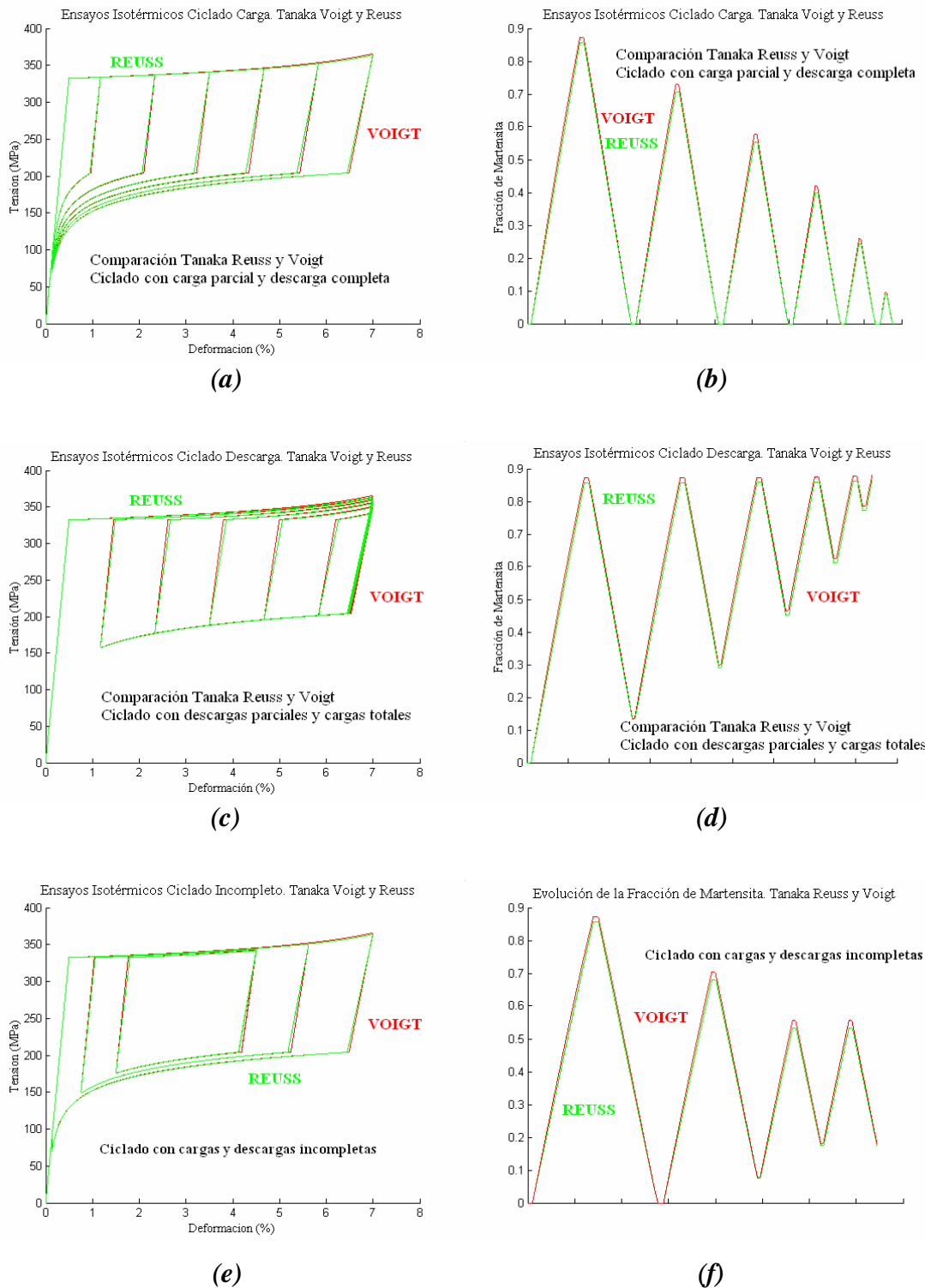
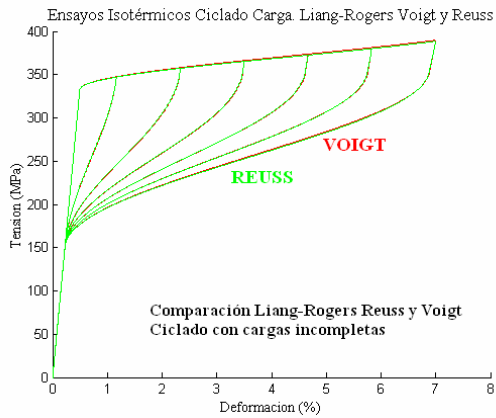
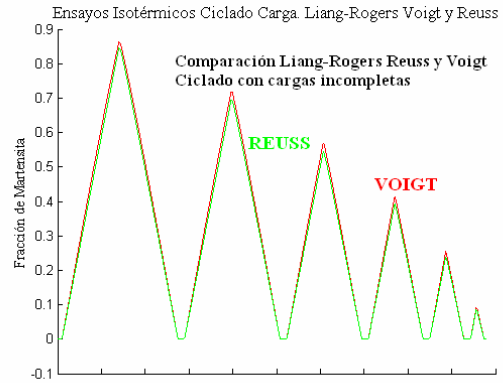


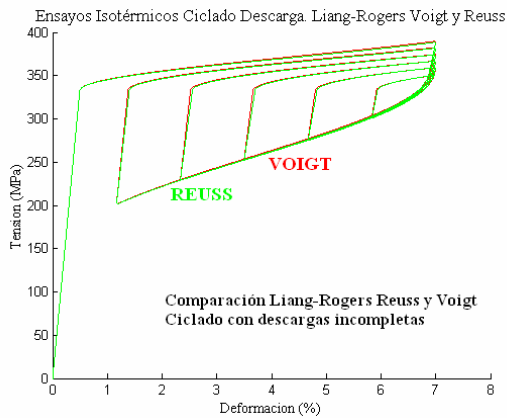
Figura 2.35: Comparación de las simulaciones de ciclado en régimen superelástico (60°C) para el Modelo de Tanaka Voigt y Reuss. (a) tensión-deformación para un ciclado con cargas parciales al 1% (b) para el mismo proceso de carga, evolución temporal de la fracción de martensita. (c) y (d) ciclado con descargas imparciales y (e) y (f) ciclado con cargas y descargas incompletas.



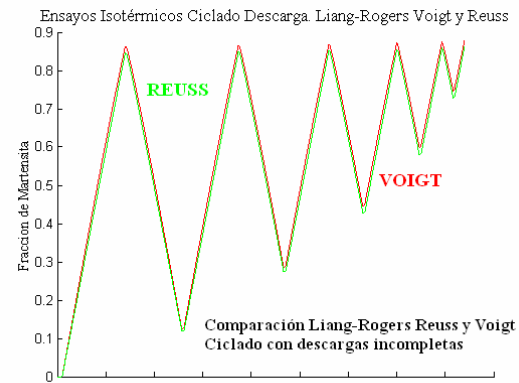
(a)



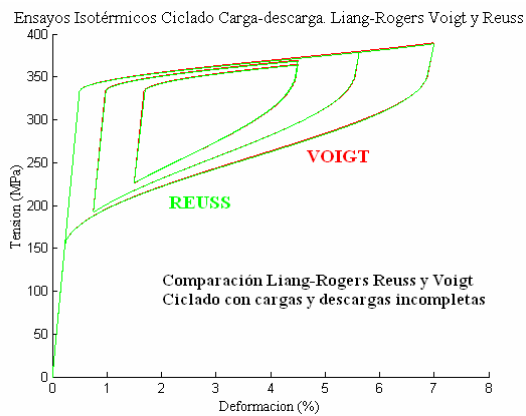
(b)



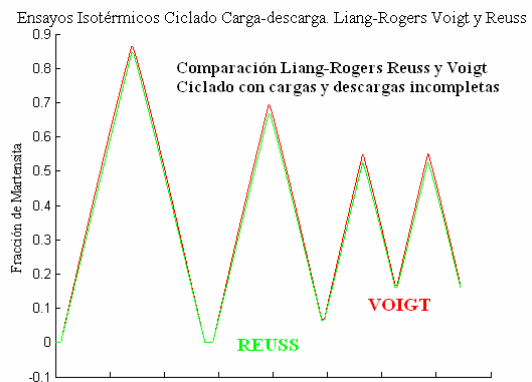
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 2.36: Comparación de las simulaciones de ciclado en régimen superelástico (60°C) para el Modelo de Liang-Rogers Voigt y Reuss. (a) tensión-deformación para un ciclado con cargas parciales al 1% (b) para el mismo proceso de carga, evolución temporal de la fracción de martensita. (c) y (d) ciclado con descargas imparciales y (e) y (f) ciclado con cargas y descargas incompletas.

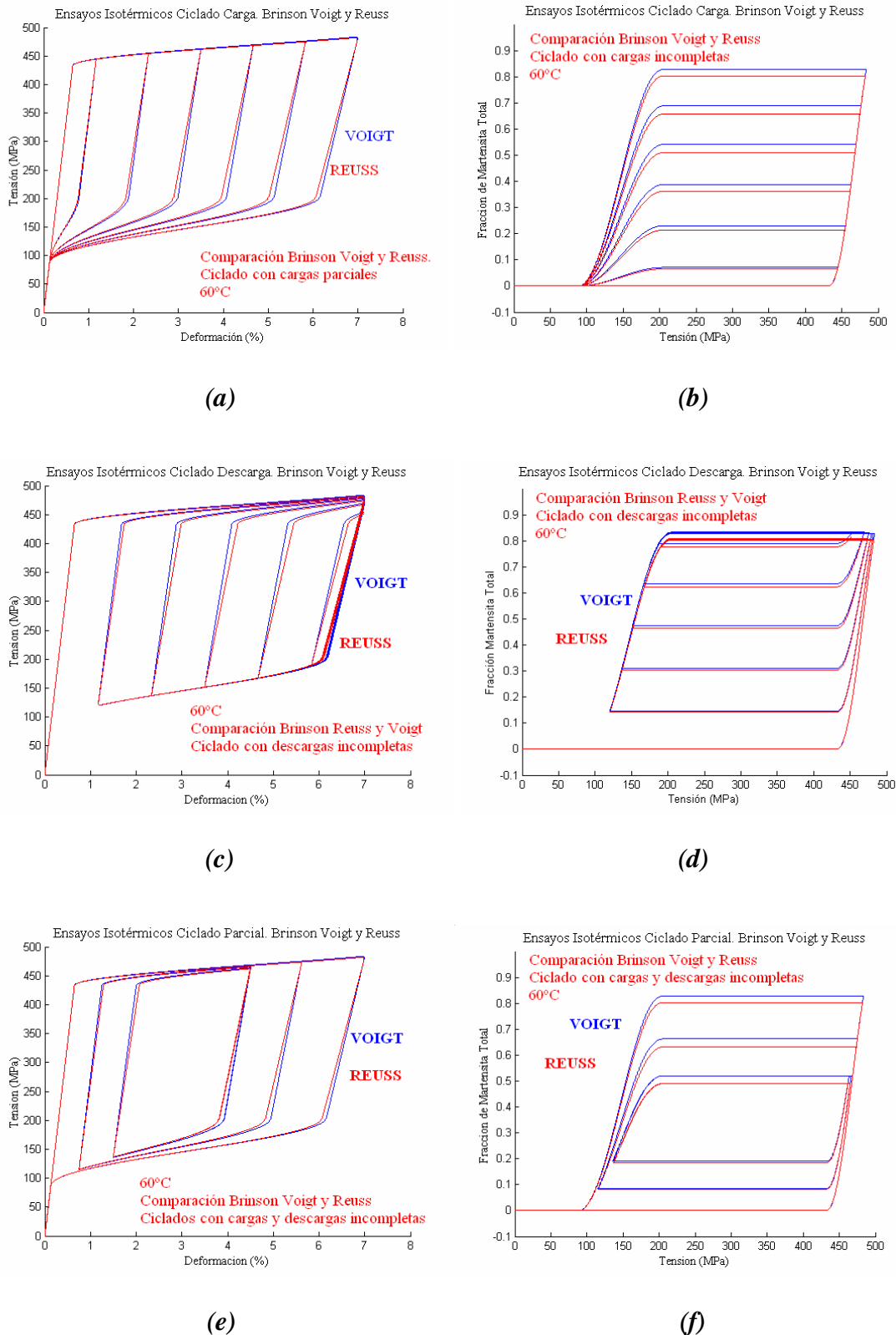


Figura 2.37: Comparación de las simulaciones de ciclado en régimen superelástico (60°C) para el Modelo de Brinson Voigt y Reuss. (a) tensión-deformación para un ciclado con cargas parciales al 1% (b) para el mismo proceso de carga, evolución temporal de la fracción de martensita. (c) y (d) ciclado con descargas imparciales y (e) y (f) ciclado con cargas y descargas incompletas.

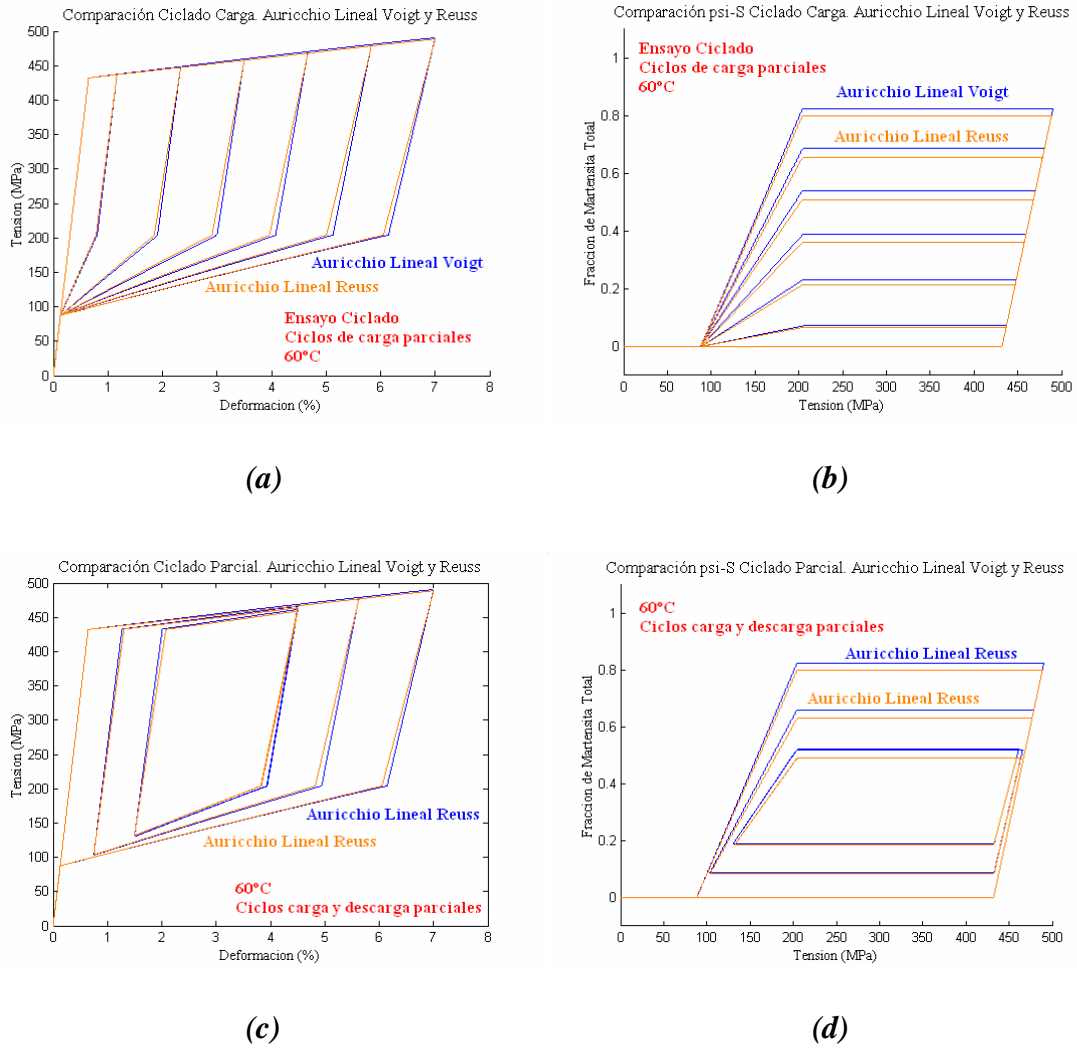


Figura 2.38: Comparación de las simulaciones de ciclado en régimen superelástico (60°C) para el Modelo de Auricchio Lineal Voigt y Reuss. (a) tensión-deformación para un ciclado con cargas parciales al 1% (b) para el mismo proceso de carga, evolución temporal de la fracción de martensita. (c) y (d) ciclado con cargas y descargas incompletas.

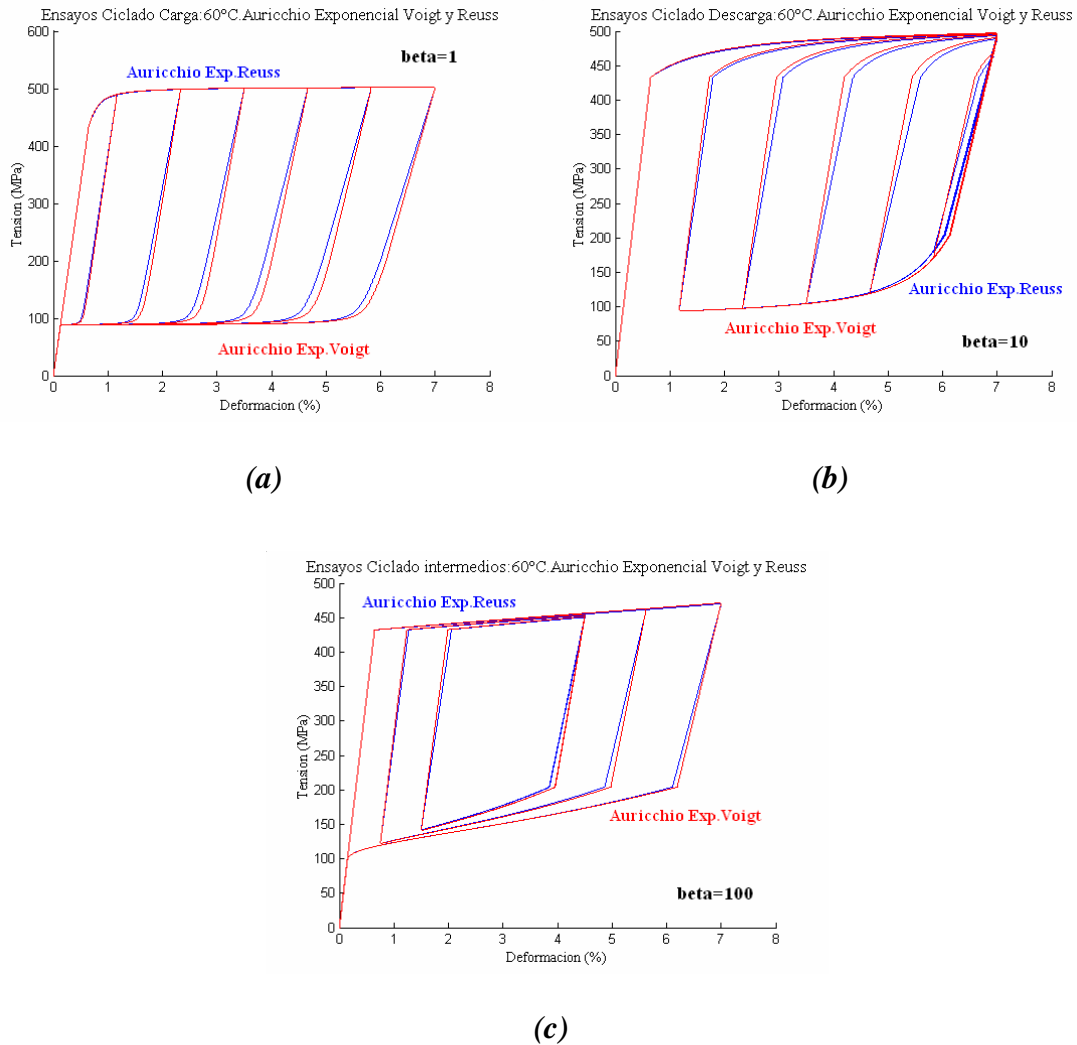


Figura 2.39: Comparación de las simulaciones de ciclado en régimen superelástico (60°C) para el Modelo de Auricchio Exponencial Voigt y Reuss. (a) tensión-deformación para un ciclado con cargas parciales al 1% y $\mathbf{b}=1$ MPa (b) ciclado con descargas incompletas y $\mathbf{b}=10$ MPa (c) ciclado con cargas y descargas incompletas y $\mathbf{b}=100$ MPa.

SIMULACIONES A DEFORMACIÓN CONSTANTE:

La siguiente simulación numérica de los modelos implementados que se presenta está destinada a verificar la capacidad de reproducir ciclos térmicos a deformación constante. Son múltiples las posibles simulaciones que se puede realizar con este estado de carga pues se puede variar la deformación constante con diferentes tensiones iniciales, todo ello como consecuencia del proceso de carga isotérmica realizado previamente. Por ejemplo, si se realiza un proceso de carga completa (hasta $\xi=1$) y se

descarga, la tensión inicial es 0 MPa y la deformación constante es la deformación residual que, por ser un proceso isotérmico completo corresponde al valor de ϵ_L . Si el proceso de carga y descarga isotérmico previo no es completo, la fracción de martensita residual será inferior a 1 y la deformación remanente, que es la deformación constante para el calentamiento posterior, será proporcional a esa fracción remanente y a ϵ_L . Con un calentamiento posterior, se produce un incremento de tensión al entrar en la zona de temperaturas críticas austeníticas. Un posterior enfriamiento a la misma deformación constante, provoca un descenso de las tensiones hasta retornar al punto inicial. Estas condiciones se representan en la Figura 2.40(a-b) para *los modelos de Tanaka y Liang y Rogers*.

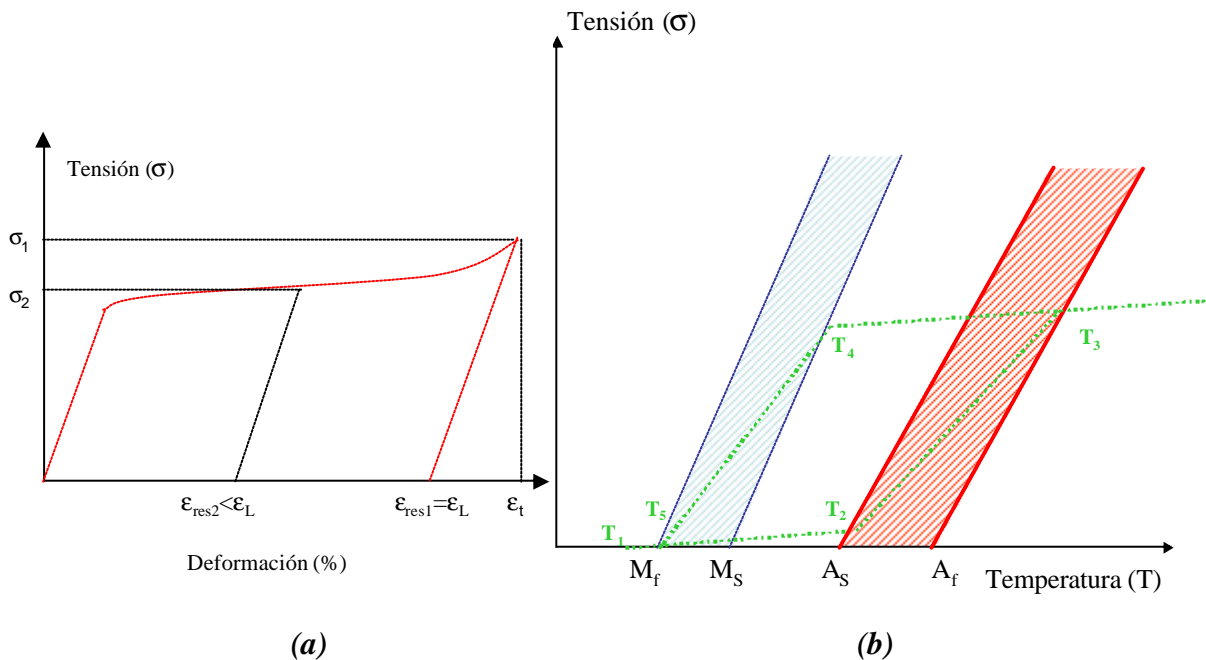


Figura 2.40: Representación esquemática del proceso de carga térmica a deformación constante y 0 MPa. La deformación constante puede ser diferente en función del proceso de carga y descarga isotérmico previo (a). En (b) se esquematiza la variación de la tensión al aumentar y disminuir la T .

Como se deduce del mismo gráfico 2.40b, se pueden conseguir múltiples simulaciones jugando con la T : por ejemplo, que la temperatura de calentamiento no alcance T_3 y, por tanto quede deformación residual, o bien, que la temperatura T_5 sea superior a M_f y no retornemos a la condición de cero de tensión en el enfriamiento.

Una gran limitación en la simulación de estos modelos es que, dado que no contempla transformaciones isotérmicas a temperatura inferiores a M_s , teóricamente no podemos

simular las condiciones iniciales de la figura 2.40(a) a temperatura T_1 . La única forma de conseguirlo es forzando las condiciones iniciales (y no obteniéndolas de un proceso isotérmico previo como sería lo correcto) o bien, iniciando el ensayo a temperaturas comprendidas dentro de la zona de transformación, donde la fracción de martensita será variable de 0 a 1.

También se puede simular el mismo proceso en los modelos de Tanaka y Liang-Rogers pero con una tensión inicial diferente de cero que consistiría en el mismo proceso de la figura 2.40(a) pero sin descargar, es decir, comenzando el calentamiento a σ_2 . En este caso supondremos una tensión de 150 MPa.

Se presenta, en la figura 2.41 un ejemplo de la simulación propuesta para el *modelo de Tanaka Voigt*. La deformación es del 6,7% y se produce un calentamiento y enfriamiento completo. En la figura 2.41(c) se observa el proceso pero con un calentamiento incompleto. En la Figura 2.42 se presentan las mismas condiciones pero a 150 MPa. Como resumen de todas las posibles condiciones iniciales se presenta, en la figura 2.43 sólo los procesos de calentamiento para 0 MPa y 150 MPa. Se señalan, en los gráficos 2.41(b-c) los puntos característicos para un mejor entendimiento del proceso.

En la figura 2.44 se presenta el mismo gráfico que en la figura 2.43 pero para el *Modelo de Tanaka Reuss* y en la figura 2.45 la *comparación Voigt y Reuss* para este gráfico. Puede observarse como la diferencia entre ambas aproximaciones es prácticamente inapreciable.

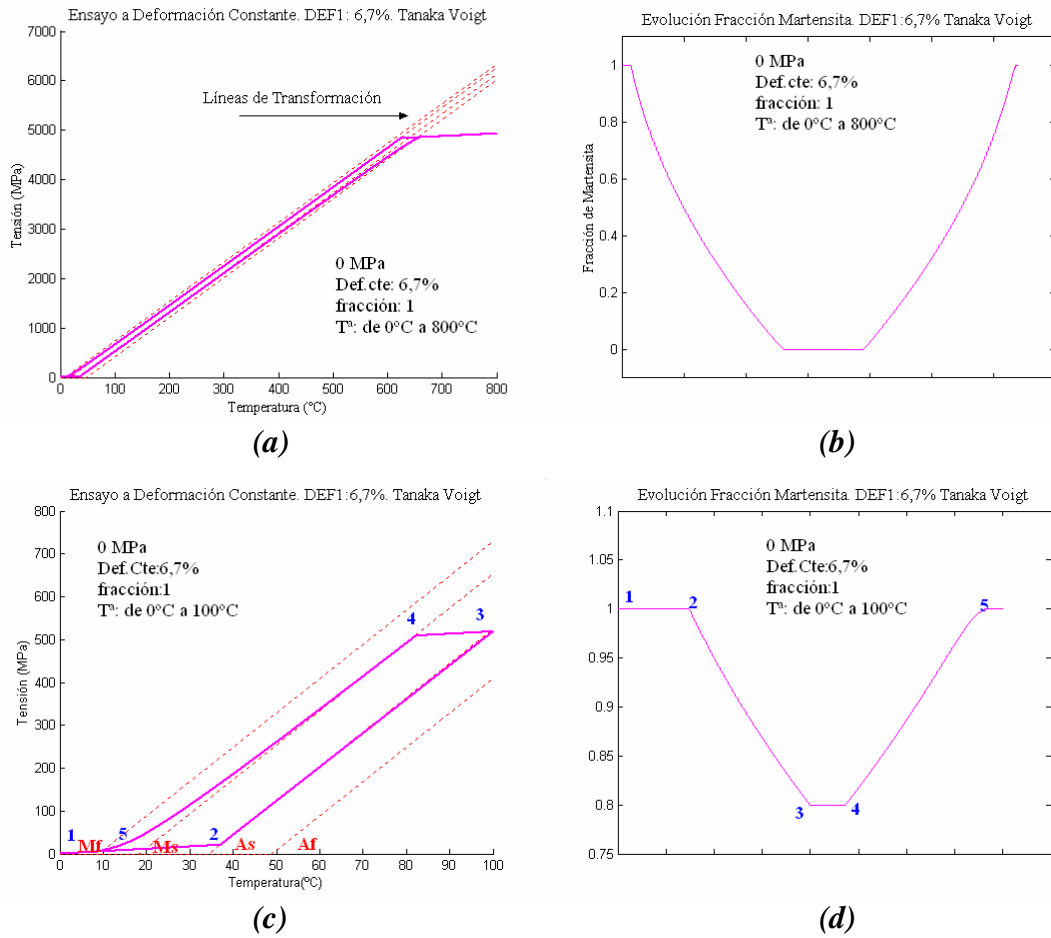


Figura 2.41: Ensayos a deformación constante (6,7%) 0 MPa Tanaka Voigt. En (a-b) se realiza un proceso de calentamiento completo y en (c-d) incompleto. En (a) y (c) se presenta el gráfico tensión deformación indicando las líneas de transformación y en (b) y (d) se presenta la evolución de la fracción de martensita en el proceso.

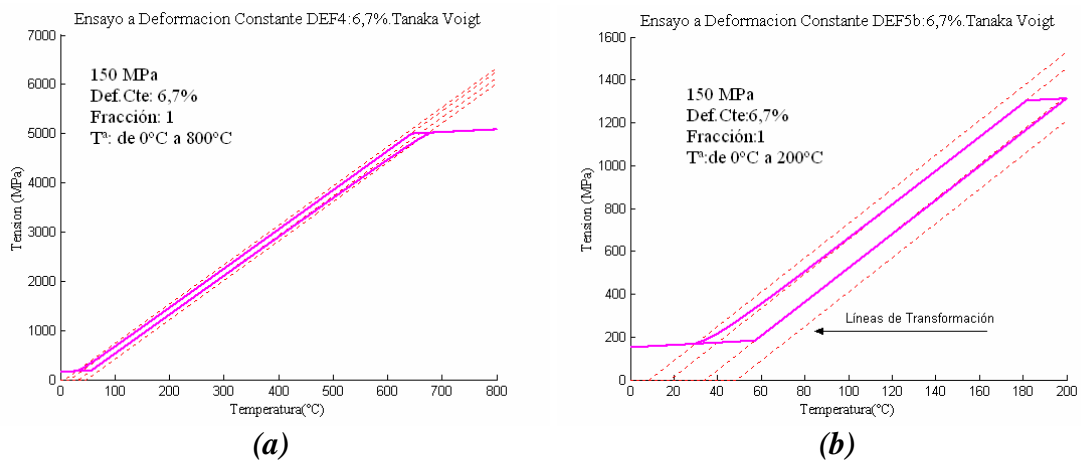


Figura 2.42: Ensayos a deformación constante (6,7%) 150 MPa Tanaka Voigt. En (a) se realiza un proceso de calentamiento completo y en (b) incompleto. En ambos gráficos se han dibujados las líneas de transformación T-tensión.

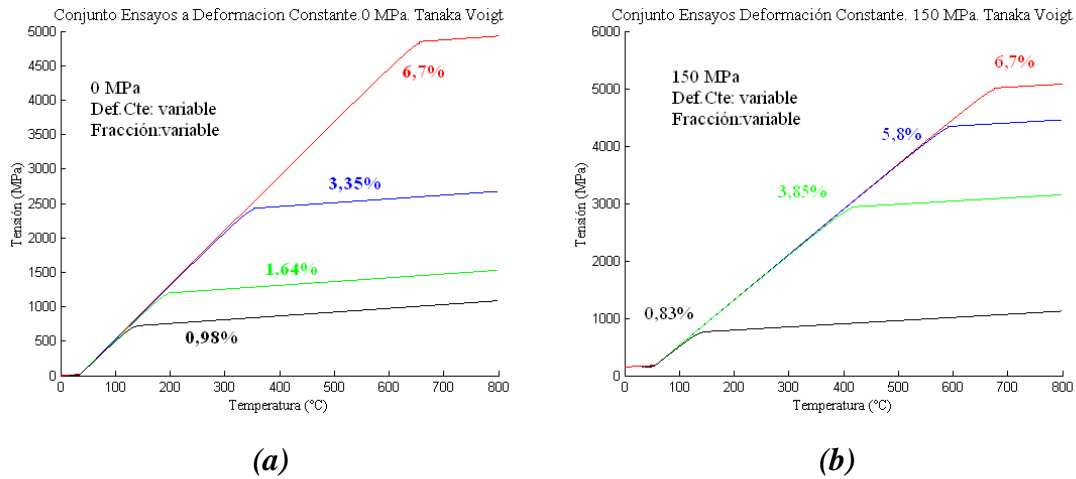


Figura 2.43: Comparación de las simulaciones de deformación constante con diferentes deformaciones constantes y sólo para el proceso de calentamiento del modelo de Tanaka Voigt. En (a) se representan para 0 MPa iniciales y en (b) 150 MPa iniciales.

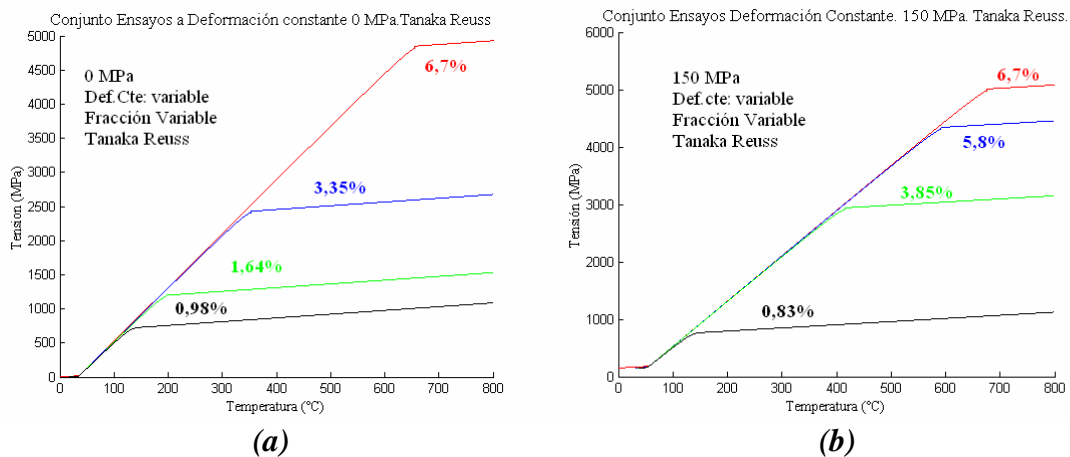


Figura 2.44: Comparación de las simulaciones de deformación constante con diferentes deformaciones constantes y sólo para el proceso de calentamiento del modelo de Tanaka Reuss. En (a) se representan para 0 MPa iniciales y en (b) 150 MPa iniciales.

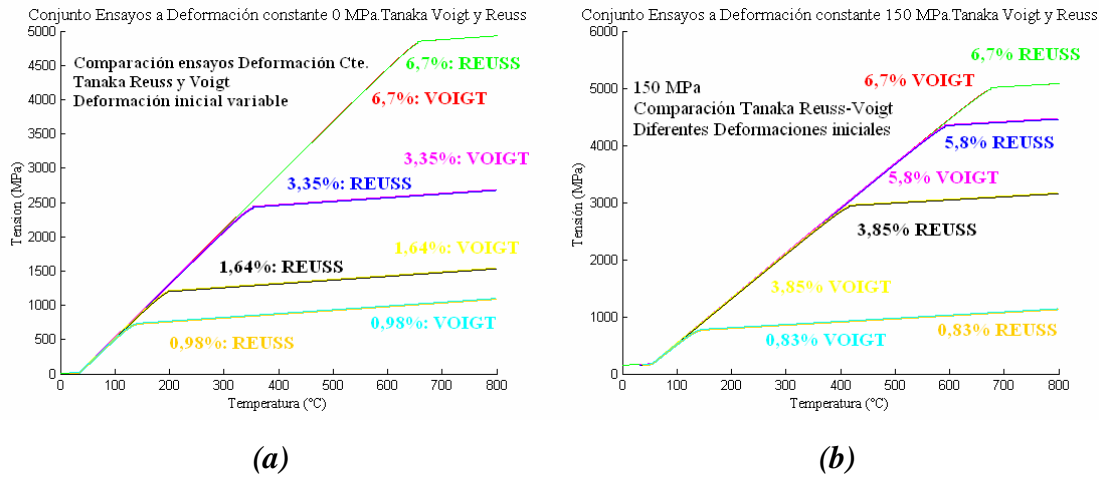


Figura 2.45: Comparación de las simulaciones de deformación constante con diferentes deformaciones constantes y sólo para el proceso de calentamiento de los modelos de Tanaka Voigt y Reuss. En (a) se representan para 0 MPa iniciales y en (b) 150 MPa iniciales.

Para el *modelo de Liang y Rogers* las consideraciones son las mismas que las realizadas para el modelo de Tanaka. Para las simulaciones a diferente fracción de martensita inicial por debajo de M_f , se deben imponer las condiciones iniciales de deformación, no pudiéndose obtener a partir de un proceso isotérmico previo. Se presenta, en la figura 2.46 la simulación correspondiente a una deformación constante del 6,7% y 0 MPa y en la figura 2.47 para 6,7% 150 MPa iniciales, así como la correspondiente ampliación para observar con detalle el proceso. En la figura 2.48 se presentan todas las simulaciones conjuntas para diferentes deformaciones constantes a 0 MPa iniciales y sólo el proceso de calentamiento para *Liang-Rogers Voigt*. En las figuras 2.49 y 2.50 se representan las mismas simulaciones pero para el *Modelo Liang-Rogers Reuss*.

Por último, para poder comparar las simulaciones con las aproximaciones de Voigt y Reuss, se superponen en la figura 2.51 las simulaciones para 0 MPa y 6,7% y 150 MPa 6,7% en el proceso de calentamiento. De nuevo no se observan diferencias significativas entre ambas aproximaciones en el gráfico tensión-temperatura (figura 2.51(a)) pese a las notables diferencias en la evolución de la fracción de martensita (figura 2.51(b)).

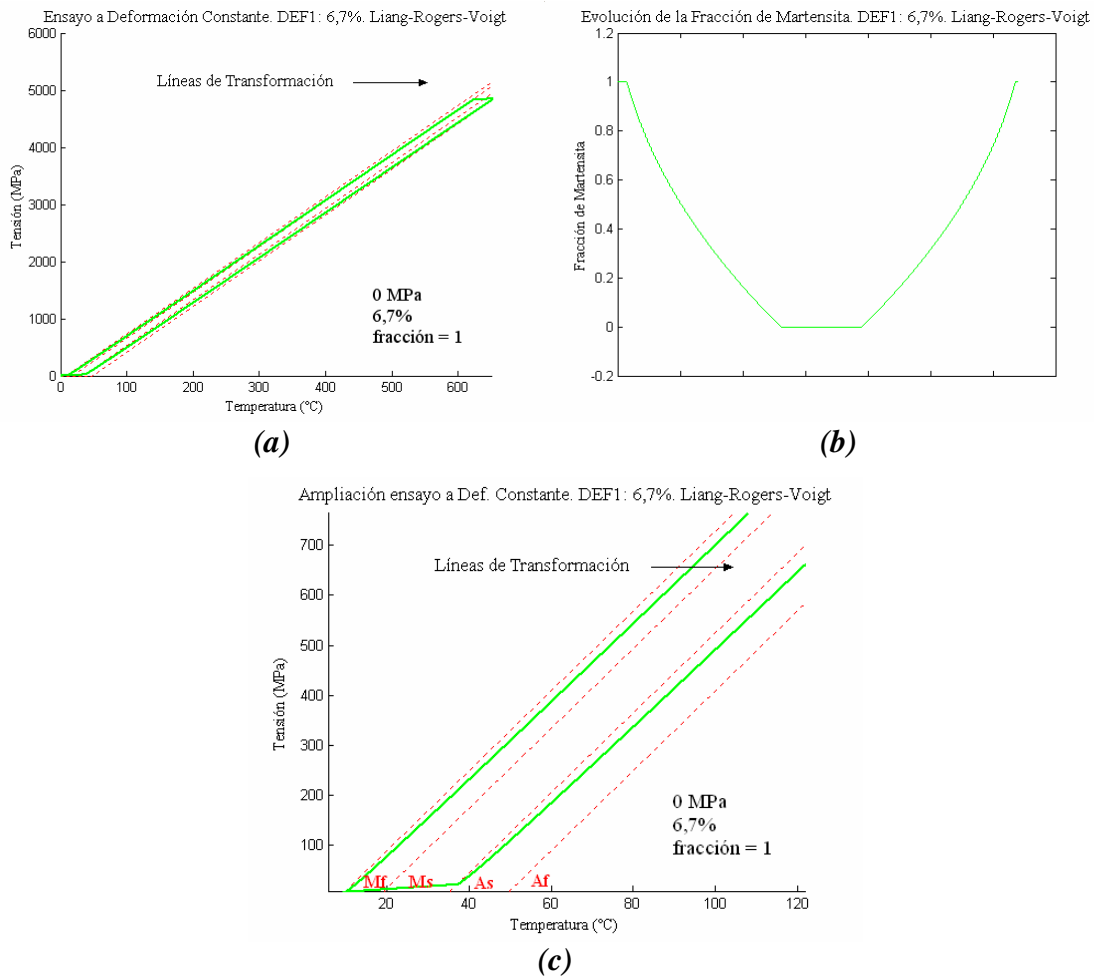


Figura 2.46: Ensayos a deformación constante(6,7%) 0 MPa Liang-Rogers Voigt. En (a-b) se realiza un proceso de calentamiento completo. En (c) se amplía el gráfico (a). En (a) y (c) se presenta el gráfico tensión deformación indicando las líneas de transformación y en (b) se presenta la evolución de la fracción de martensita en el proceso.

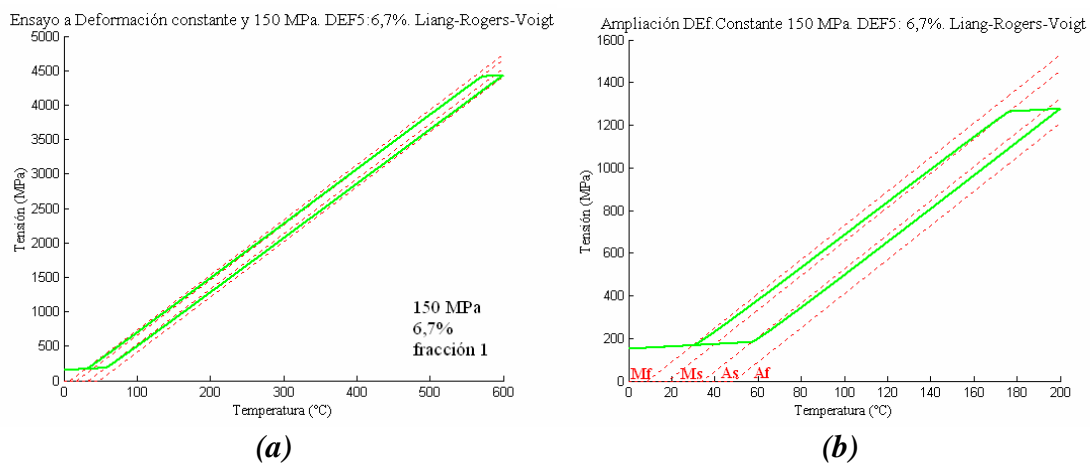


Figura 2.47: Ensayos a deformación constante(6,7%) 150 MPa Liang-Rogers Voigt. En (a) se realiza un proceso de calentamiento completo y en (b) se presenta la ampliación. En ambos gráficos se han dibujados las transformaciones T-tensión.

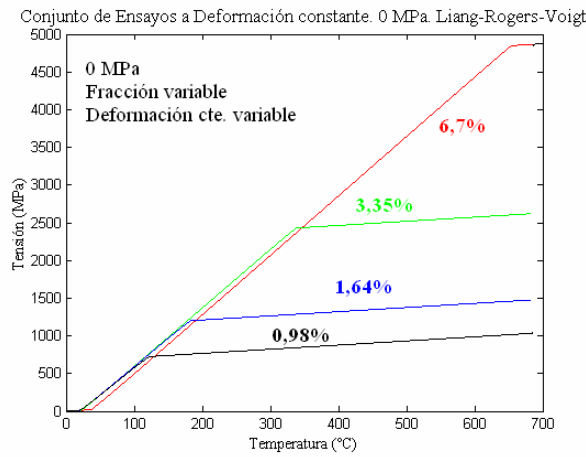
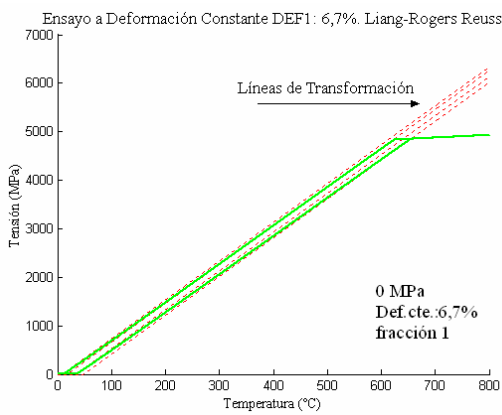
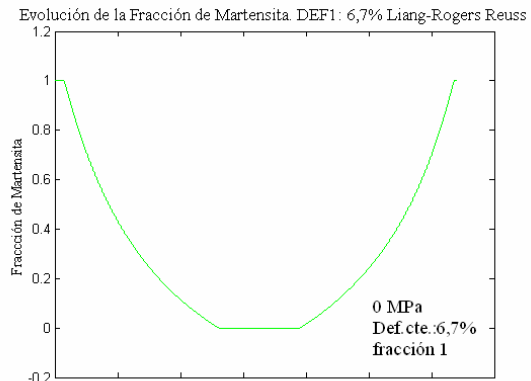


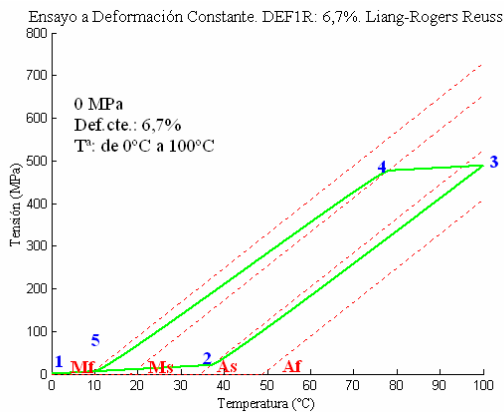
Figura 2.48: Comparación de las simulaciones a 0 MPa con diferentes deformaciones constantes y para el proceso de calentamiento. Liang-Rogers Voigt



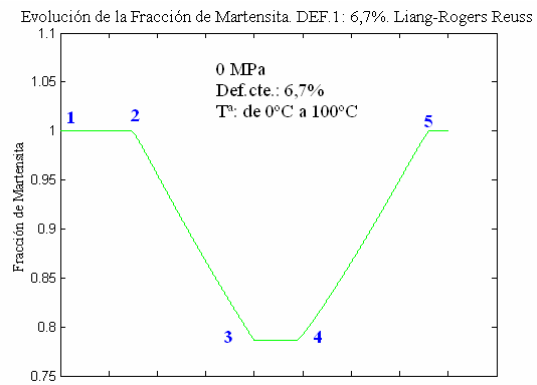
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2.49: Ensayos a deformación constante(6,7%) 0 MPa Liang-Rogers Reuss. En (a-b) se realiza un proceso de calentamiento completo. En (c) se realiza un calentamiento incompleto. En (a) y (c) se presenta el gráfico tensión deformación indicando las líneas de transformación y en (b) y (d) se presenta la evolución de la fracción de martensita en el proceso. En (c) y (d) se señalan los puntos característicos para comprender mejor el proceso.

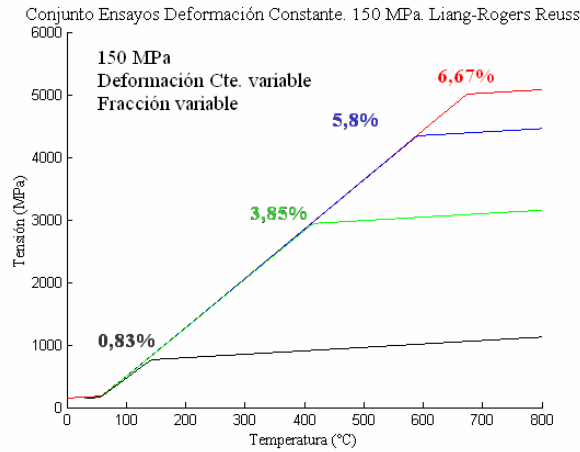
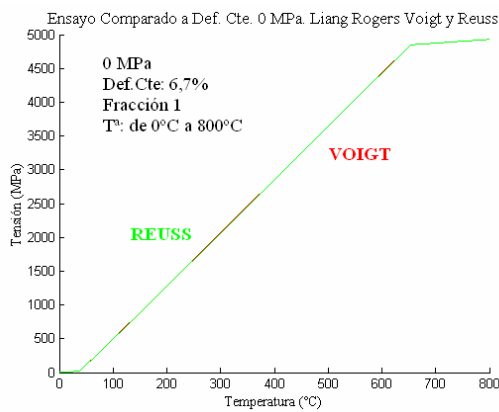
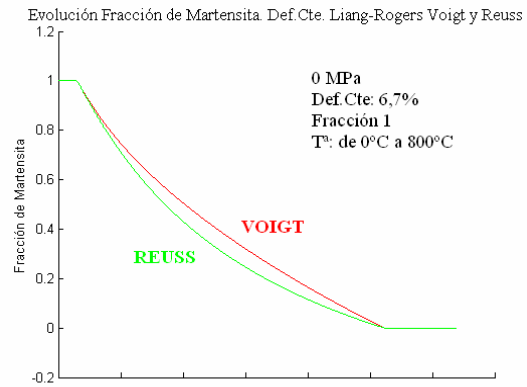


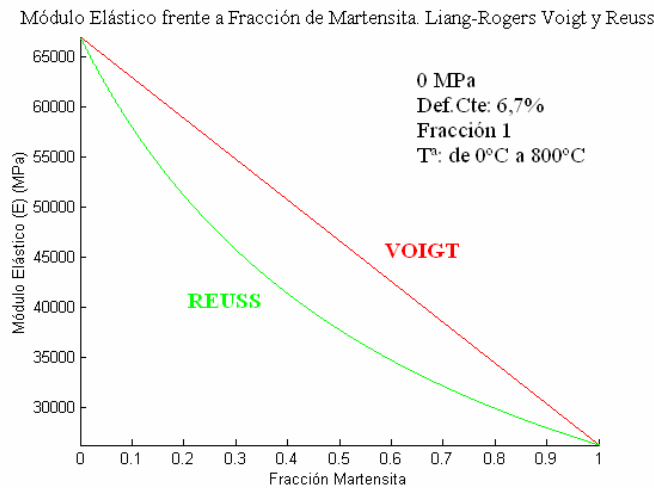
Figura 2.50: Comparación de las simulaciones de deformación constante con diferentes deformaciones constantes y 150 MPa y sólo para el proceso de calentamiento del modelo de Liang-Rogers Reuss.



(a)



(b)



(c)

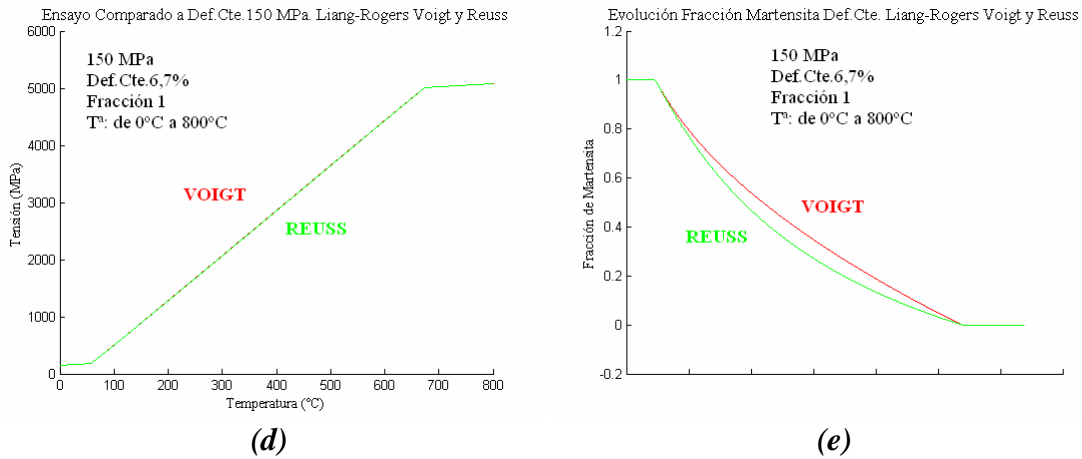


Figura 2.51: Comparación de las simulaciones de deformación constante al 6,7% y sólo para el proceso de calentamiento del modelo de Liang-Rogers Voigt y Reuss. En (a-c) se representan para 0 MPa iniciales y en (b-d) 150 MPa iniciales. En (a) y (d) se presenta el gráfico tensión-temperatura y en (b) y (e) la evolución de la fracción de martensita. En (c) se representa el módulo elástico frente a la fracción de martensita donde se refleja claramente la diferencia entre considerar el módulo elástico con una aproximación u otra.

Para los **modelos de Brinson y Auricchio** la simulación a deformación constante tiene muchas más posibilidades puesto que las condiciones iniciales pueden ser diferentes tanto para ξ_S como para ξ_M . Además, recordemos que el diagrama crítico tensión-temperatura incluye una zona diferente a Tanaka y Liang-Rogers de transformación de ξ_M a ξ_S . Así pues, las combinaciones son múltiples como se representa esquemáticamente en la figura 2.52. En ella se observa como a la misma temperatura inicial de ensayo se pueden tener diferentes condiciones iniciales de fracción de martensita y, por tanto, de deformación, dependiendo, además, del nivel de tensión inicial. Si consideramos como tensión inicial 0 MPa, a la temperatura T_1 , inferior a M_f , podemos empezar con $\xi_S=1$ y $\xi_M=0$, correspondiente a un estado previo de carga isotérmica por encima de σ_f^{CR} y descarga completa. Si, por el contrario el proceso isotérmico no ha superado la σ_f^{CR} y se descarga, existirá mezcla de ambas fracciones. Si el proceso comienza a una temperatura T_2 dentro de la zona de transformación, las condiciones iniciales de ξ_S y ξ_M pueden ser diferentes si esa temperatura T_2 se ha alcanzado previamente viniendo de temperaturas menores ($\xi_S=0$ y $\xi_M=1$) o viniendo de temperaturas mayores ξ_S y ξ_M correspondientes a la transformación de austenita a martensita multivariante por temperatura).

Por otro lado, si la tensión inicial es superior a 0 MPa, de nuevo nos encontramos ante múltiples posibilidades. Si la tensión inicial es de 150 MPa (entre σ_s^{CR} y σ_f^{CR}) y la temperatura inicial es T_1 , a esa tensión y temperatura, las fracciones de martensita pueden ser: $\xi_S=1$ y $\xi_M=0$ correspondientes a un proceso previo de carga total por encima de σ_f^{CR} y descarga hasta 150 MPa; si el proceso es de carga hasta 150 MPa y en ese punto se inicia el calentamiento, las condiciones será de $\xi_S \neq 0$ y $\xi_M \neq 0$. Aún más posibilidades existen si la simulación comienza a una temperatura T_2 dentro del rango de transformación, pues las fracciones de martensita previas al proceso isotérmico de carga, pueden ser $\xi_S=0$ y $\xi_M=1$ (si vengo de temperaturas inferiores) o $\xi_S \neq 0$ y $\xi_M \neq 0$ (viniendo de temperaturas superiores). Al realizar el proceso de carga puede hacer completo (por encima de σ_f^{CR}) y descargar hasta 150 MPa ($\xi_S=1$ y $\xi_M=0$) o incompleto: cargar únicamente hasta 150 MPa ($\xi_S \neq 0$ y $\xi_M \neq 0$). Por último, si la tensión es superior a σ_f^{CR} , por ejemplo, 250 MPa, existen sólo dos posibilidades: $\xi_S=1$ y $\xi_M=0$ si la temperatura inicial es inferior a M_s , o $\xi_S \neq 0$ y $\xi_M \neq 0$ si la temperatura inicial es superior a M_s .

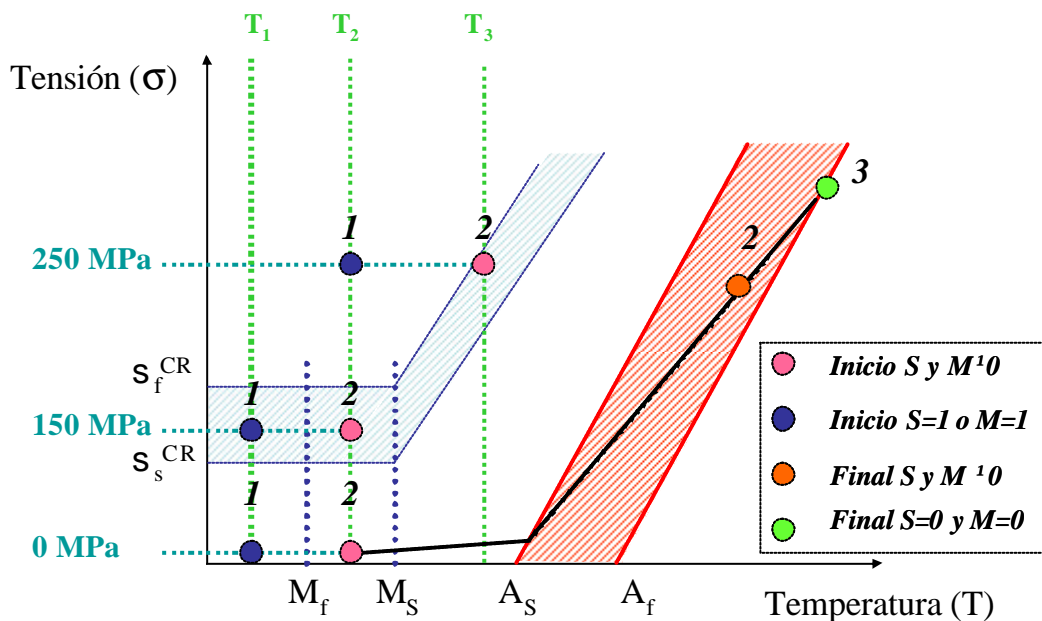
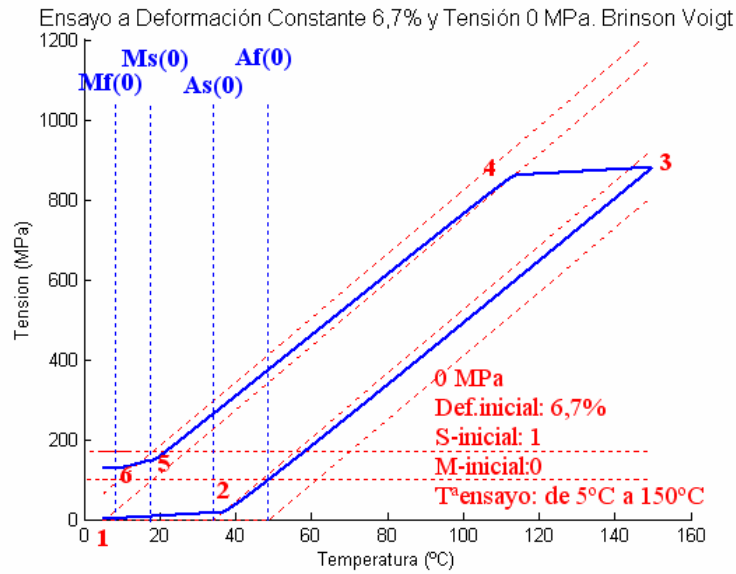


Figura 252: Diagrama crítico tensión temperatura donde se han marcado las diferentes condiciones explicadas de inicio para la simulación a deformación constante. En línea negra se marca esquemáticamente el incremento de la tensión hasta una transformación completa (3) o incompleta (2).

En todos los casos contemplados, además, se pueden realizar procesos de calentamiento parciales, lo que implica que en el proceso de enfriamiento existen fracciones residuales de martensita $\xi_S \neq 0$ y $\xi_M \neq 0$.

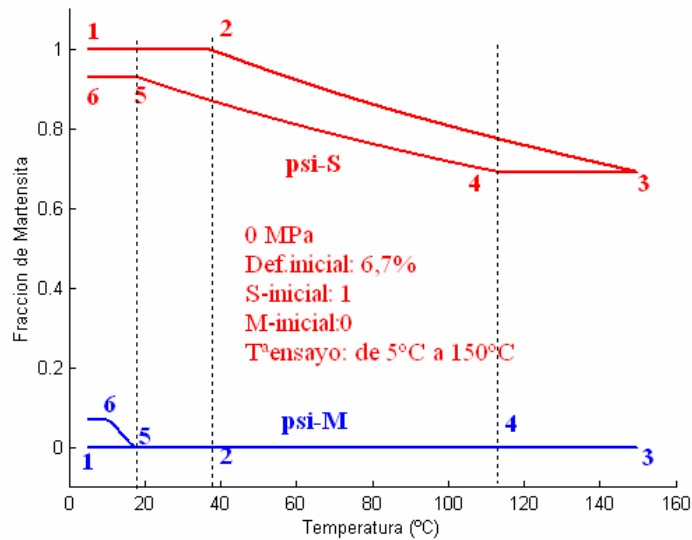
Presentamos a continuación tan sólo alguno de los ejemplos de simulación explicados anteriormente. Hay que remarcar, sin embargo, que ha sido necesario realizar todas las simulaciones para verificar si los modelos son capaces de representar todos los estados de carga así como la historia termomecánica previa. En base a ello se detecta como, *en el modelo de Brinson, existe una indefinición en el proceso de transformación por enfriamiento entre M_s y M_f . Las ecuaciones de Brinson, pensadas básicamente para casos isotérmicos y de recuperación de forma a tensión 0 MPa, no contemplan la posibilidad de transformación dentro de ese rango de temperaturas a tensiones superiores y, especialmente, dentro de la zona S_s^{CR} y S_f^{CR} . En este caso, se han redefinido las ecuaciones para contemplar esta situación.* De igual forma, sólo realizando todas las posibles simulaciones se pueden detectar errores u omisiones en las notaciones originales utilizadas por los autores de cada modelo.

En la figura 2.53 se presenta la simulación correspondiente a 6,7% de deformación y 0 MPa de tensión inicial. *Obsérvese la modificación introducida para simular la transformación en el proceso de enfriamiento dentro del rango de transformación martensítica (puntos 5 al 6).* En el gráfico fracción de martensita-temperatura se observa cómo, al llegar al punto 5 (M_s) la fracción residual de austenita transforma sólo a martensita multivariante (ξ_M) pues dentro de la zona de transición entre M_f y M_s la ξ_S permanece constante. En la figura 2.54 se presenta la simulación para 0 MPa iniciales y deformación constante 1,64% y en la figura 2.55 el conjunto de todas las deformaciones a 0 MPa.



(a)

Evolución de las Fracciones de Martensita con Temperatura. Brinson Voigt



(b)

Figura 2.53: Simulación del modelo de Brinson Voigt a deformación constante 6,7% y 0 MPa partiendo de temperaturas inferiores a M_f y con transformación incompleta. (a) diagrama tensión temperatura y (b) fracciones de martensita con temperatura. La porción de austenita residual se transforma a martensita monovariante (ψ -S) en el enfriamiento (hasta el punto 5) y, del punto 5 al 6, en multivariante, de tal forma que el total a la vuelta vuelve a ser 1.

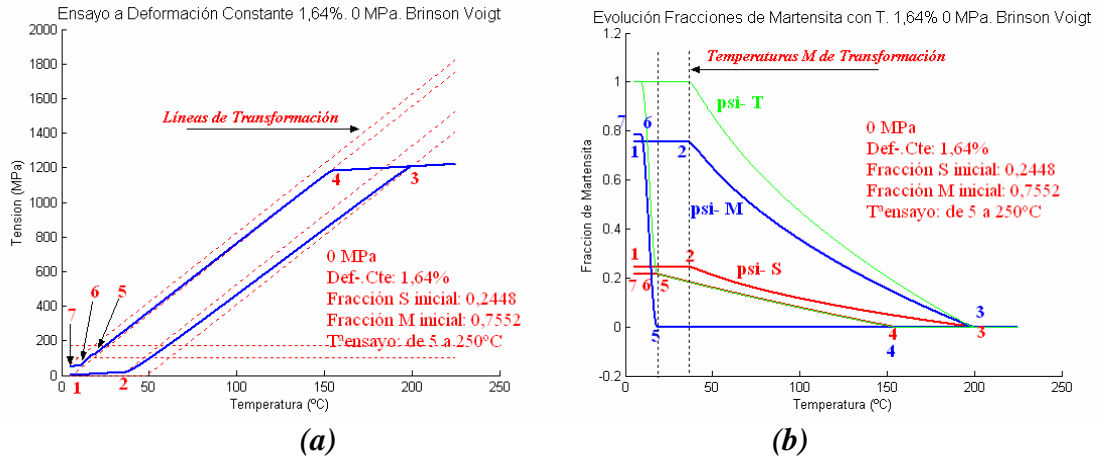


Figura 254: Simulación del modelo de Brinson Voigt a deformación constante 1,64% y 0 MPa partiendo de temperaturas inferiores a M_f y con transformación completa. (a) diagrama tensión temperatura y (b) fracciones de martensita con temperatura.

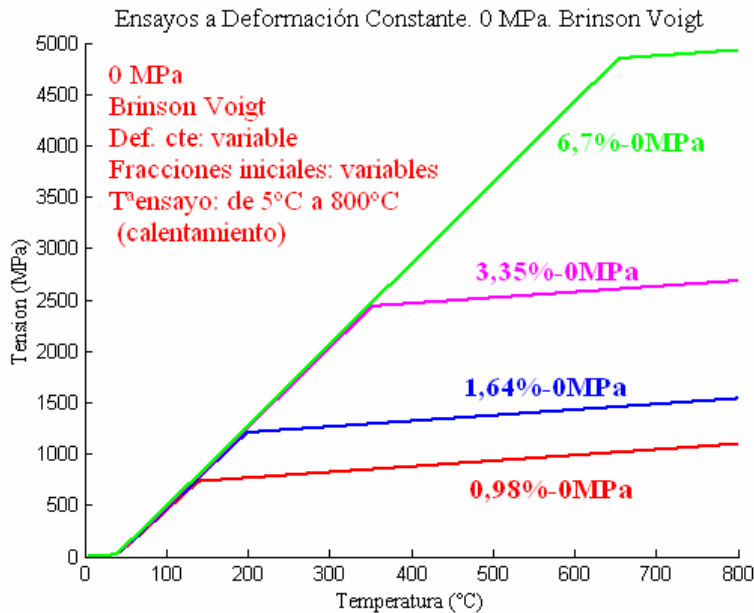


Figura 255: Comparación de las simulaciones de deformación constante con diferentes deformaciones constantes y sólo para el proceso de calentamiento del modelo de Brinson Voigt para tensión inicial 0 MPa.

Para tensión de 150 MPa se presenta en la figura 2.56(a-b) la simulación correspondiente a inicio con $\xi_M=0$ y $\xi_S=1$, correspondiente a un proceso de carga isotérmico previo por encima de la tensión crítica final y descarga hasta 150 MPa. En la figura 2.56(c-d) para las mismas condiciones de fracciones iniciales.

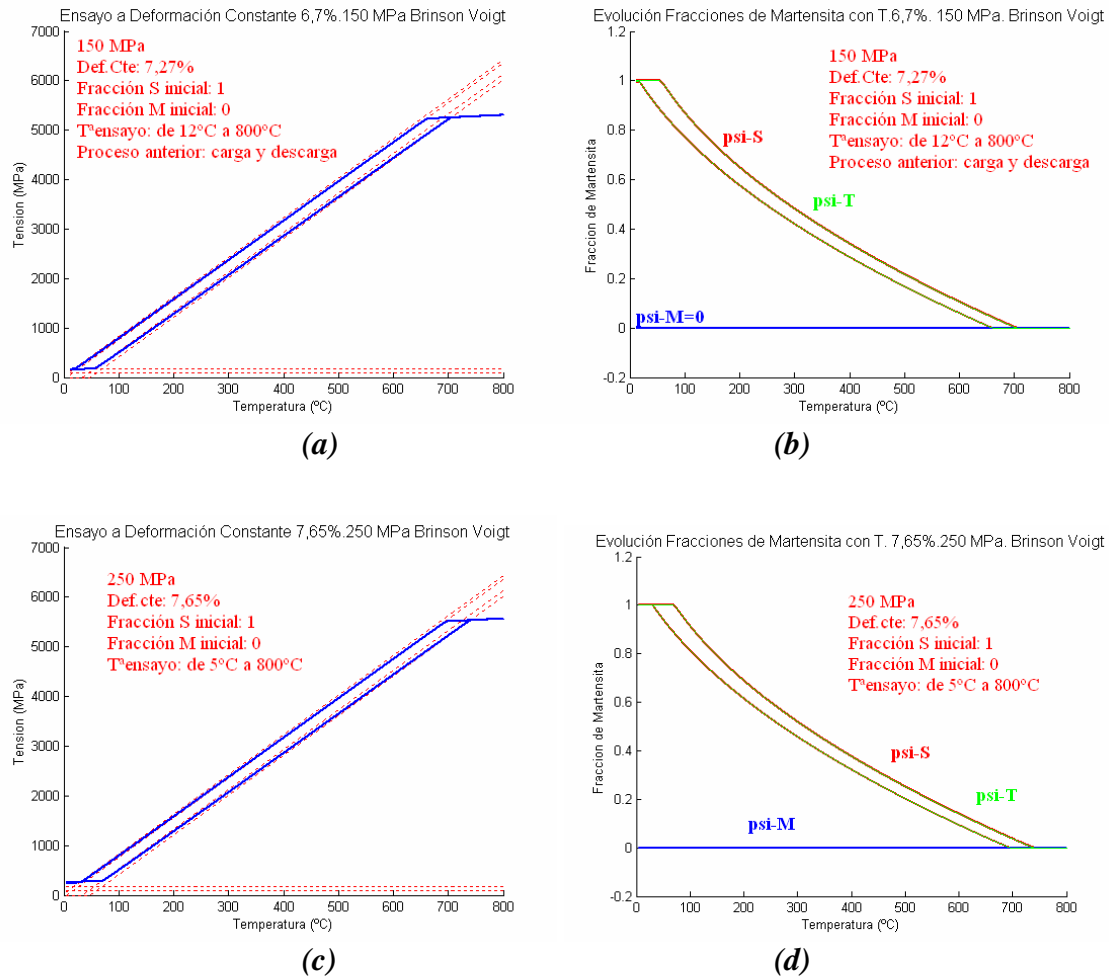
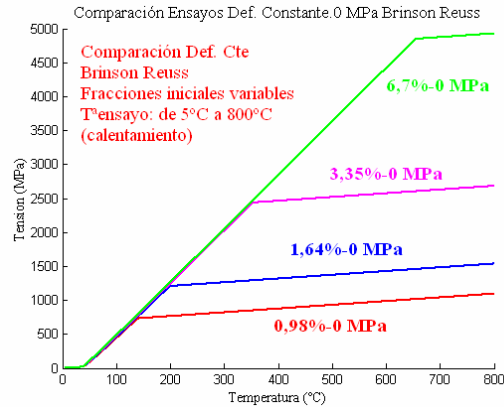
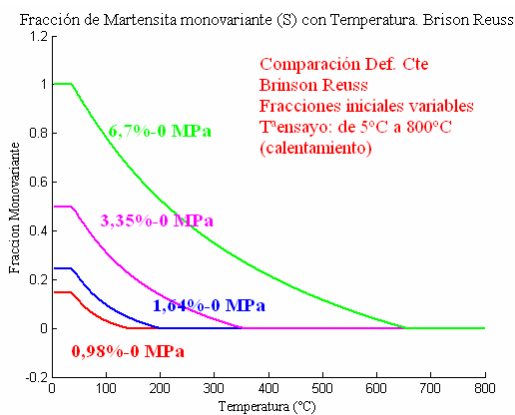


Figura 2.56: Comparación de las simulaciones de deformación constante con para 150 MPa (a-b) y 250 MPa (c-d). En ambos casos, la fracción inicial de martensita monovariante es 1. En (b) y (d) se muestra la evolución de las fracciones de martensita con la tensión.

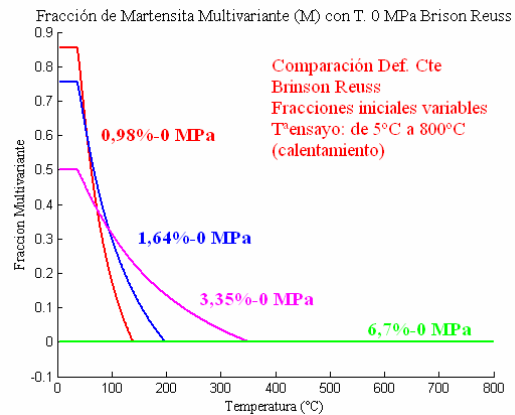
Para el caso de **Brinson Reuss**, se presenta, en la figura 2.57 la comparación de todas las deformaciones constantes para tensión 0 MPa y sólo el proceso de calentamiento. De nuevo se aprecia como la diferencia con la aproximación de Voigt no es significativa en el gráfico tensión-temperatura pero sí en la evolución de la fracción de martensita.



(a)



(b)

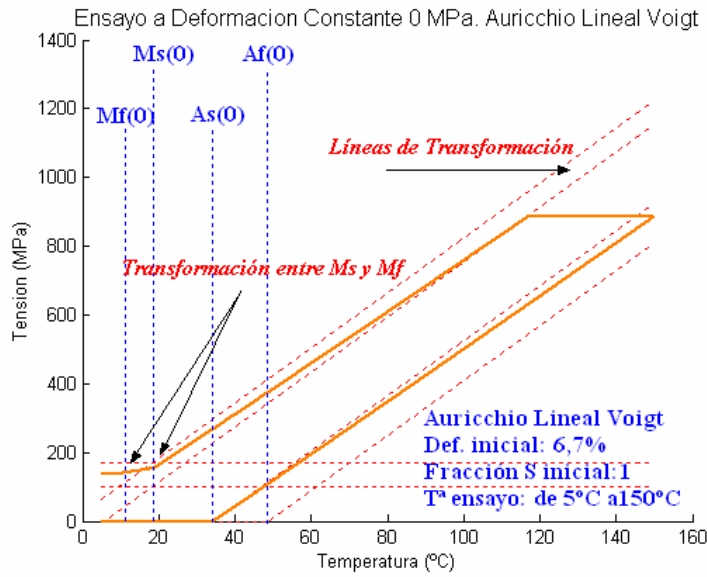


(c)

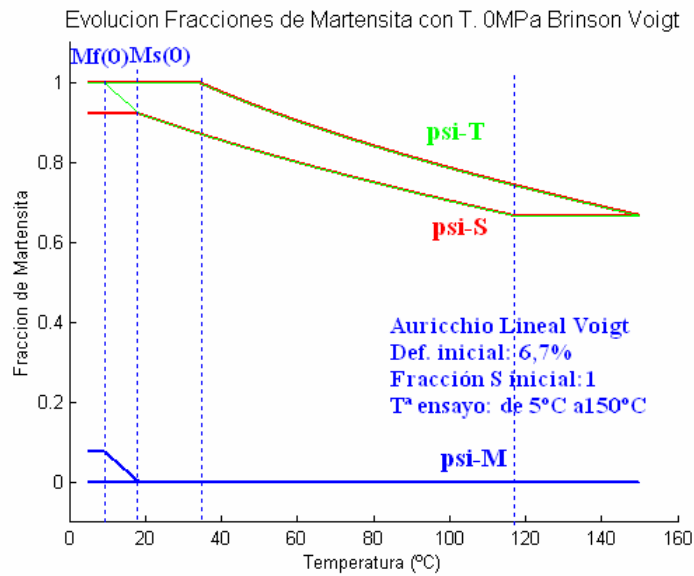
Figura 257: Comparación de las simulaciones de deformación constante con diferentes deformaciones constantes y sólo para el proceso de calentamiento del modelo de Brinson Reuss para tensión inicial 0 MPa. En (a) se presenta la relación entre la tensión y la temperatura. En (b) la evolución de la fracción de martensita monovariante (ψ -S) y en (c) la fracción multivariante (ψ -M).

En el *modelo de Auricchio, tanto lineal como exponencial* a diferencia del modelo de Brinson, no existe la indefinición comentada anteriormente para la zona de temperaturas entre M_f y M_s . El modelo de Auricchio define, con ecuaciones de evolución diferentes, el proceso de transformación dentro de este rango a través de las ecuaciones 2.78.

Se presentan, en las figuras 2.58 y 2.59, las mismas simulaciones realizadas en las figuras 2.53 y 2.54 para el modelo de Brinson pero, ahora, para el modelo de Auricchio Lineal. De esta forma se puede apreciar en detalle las diferencias entre ambos modelos como, por ejemplo, el efecto del coeficiente termoelástico que provoca que la tensión en las zonas muertas (donde no hay transformación) tengan una ligera pendiente.



(a)



(b)

Figura 258: Simulación del modelo de Auricchio Lineal Voigt a deformación constante 6,7% y 0 MPa partiendo de temperaturas inferiores a M_f y con transformación incompleta. (a) diagrama tensión temperatura y (b) fracciones de martensita con temperatura. La porción de austenita residual se transforma a martensita monovariante (ψ -S) en el enfriamiento (hasta M_s) y, entre M_s y M_f , en multivariante, de tal forma que el total a la vuelta vuelve a ser 1. Se aprecia la diferencia con el modelo de Brinson en la forma de transformación.

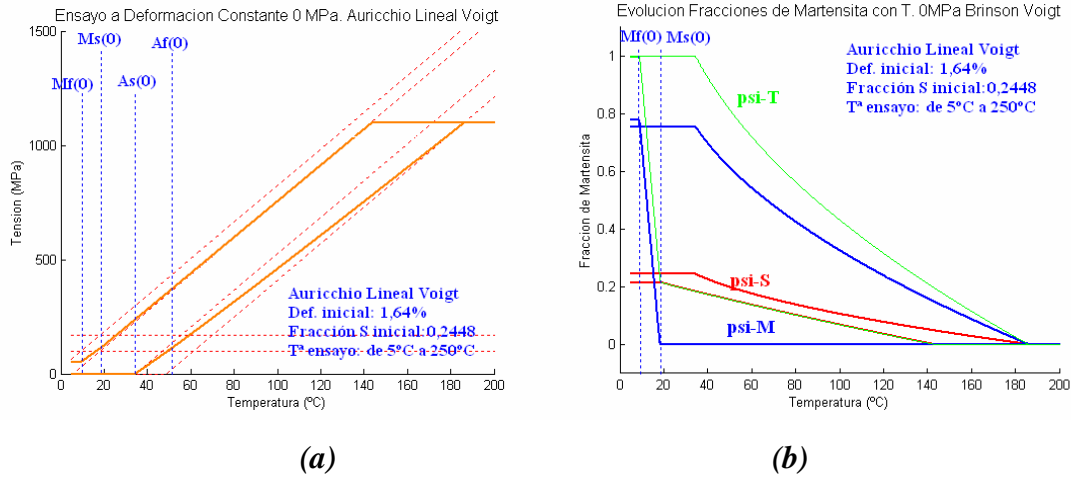


Figura 2.59: Simulación del modelo de Auricchio Lineal Voigt a deformación constante 1,64% y 0 MPa con transformación completa. (a) diagrama tensión temperatura y (b) fracciones de martensita con temperatura.

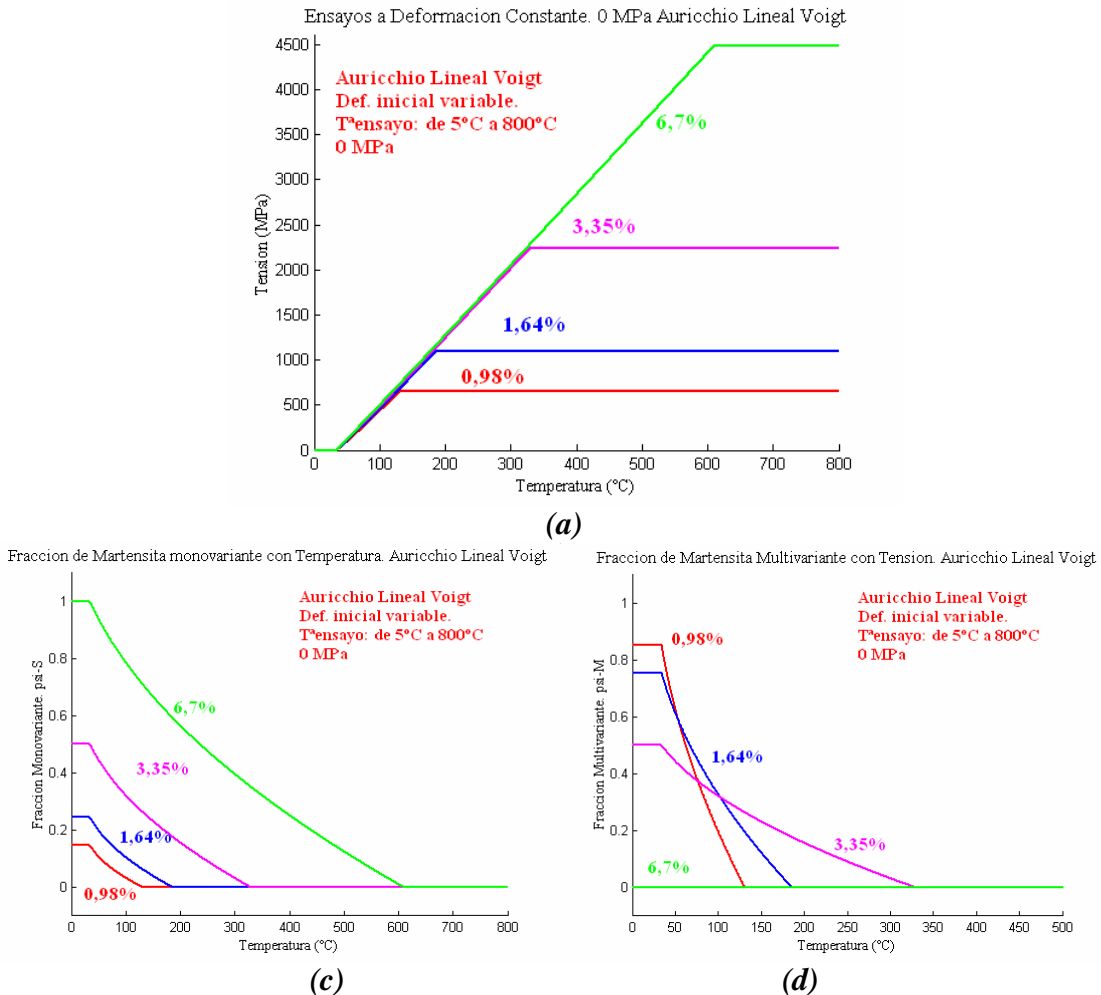


Figura 2.60: Comparación de las simulaciones de deformación constante con diferentes deformaciones constantes y sólo para el proceso de calentamiento del modelo de Auricchio Lineal Voigt para tensión inicial 0 MPa. (a) tensión-temperatura. (b) fracción de martensita monovariante (psi-S) con temperatura y (c) fracción de martensita multivariante (psi-M) con temperatura.

Para las tensiones de 150 MPa, se presentan las simulaciones en la figura 2.61(a-b) comenzando a una temperatura dentro de la zona de transición. La historia termomecánica previa consistió en un proceso isotérmico de tracción hasta 150 MPa partiendo de $\xi_S=0$ y $\xi_M=0,6809$ a tensión cero. Las fracciones de martensita iniciales para el proceso de deformación constante, es decir, después de la tracción isotérmica hasta 150 MPa fueron de: $\xi_M=0,1945$ y $\xi_S=0,7143$. Para la tensión de 250 MPa se muestra en la figura 2.61(c-d) una transformación incompleta partiendo de $\xi_M=0$ y $\xi_S=1$, el caso más normal dentro de esta zona del diagrama crítico.

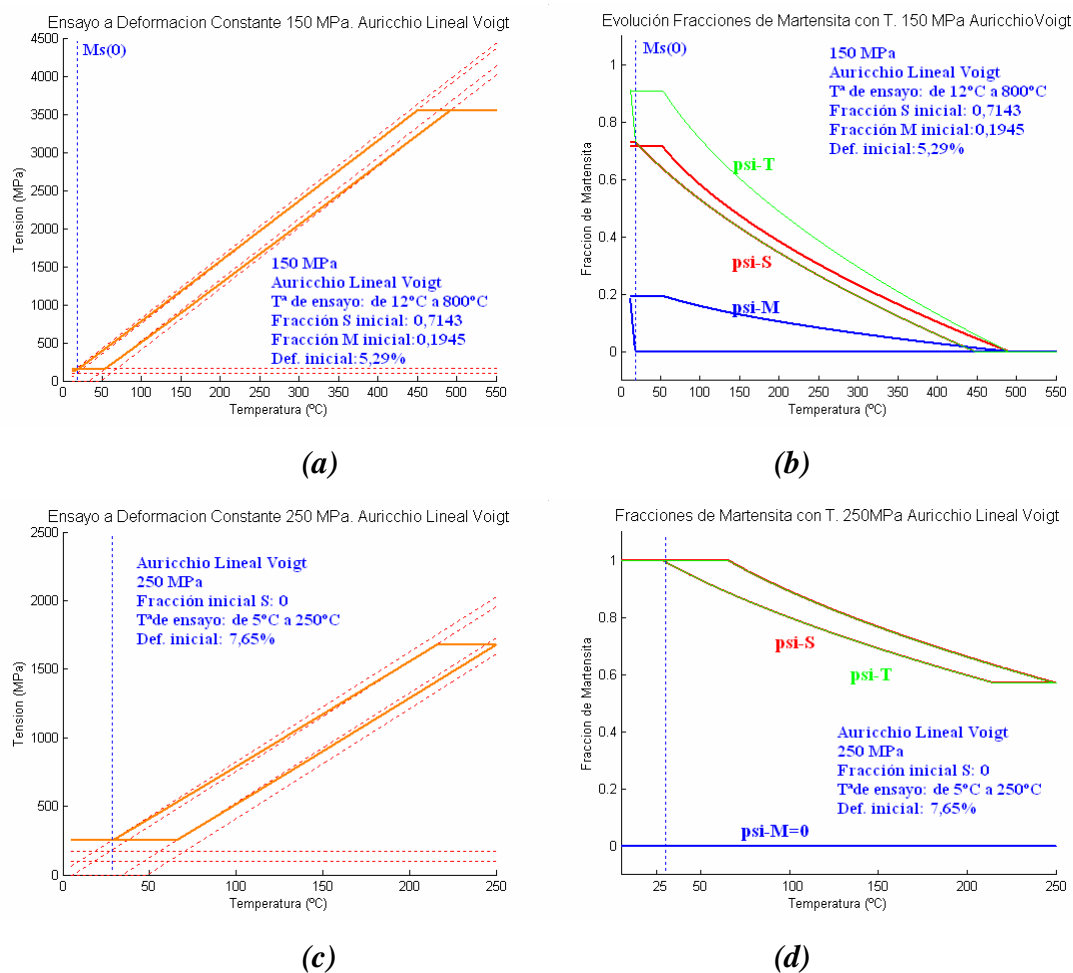


Figura 2.61: Simulaciones a deformación constante y tensión inicial de 150 MPa (a-b) y 250 MPa (c-d). Auricchio Lineal Voigt. Se representan además la evolución de las fracciones de martensita con la temperatura para ambos casos.

Para comparar las aproximaciones de Reuss y Voigt, se presenta, en la figura 2.62, la superposición de los estados a deformación constante para 0 MPa y sólo el proceso de

calentamiento. De nuevo observamos que, si bien la diferencia no es significativa para la relación entre la tensión y la temperatura, sí se aprecia la diferencia en la representación de las fracciones de martensita con la temperatura.

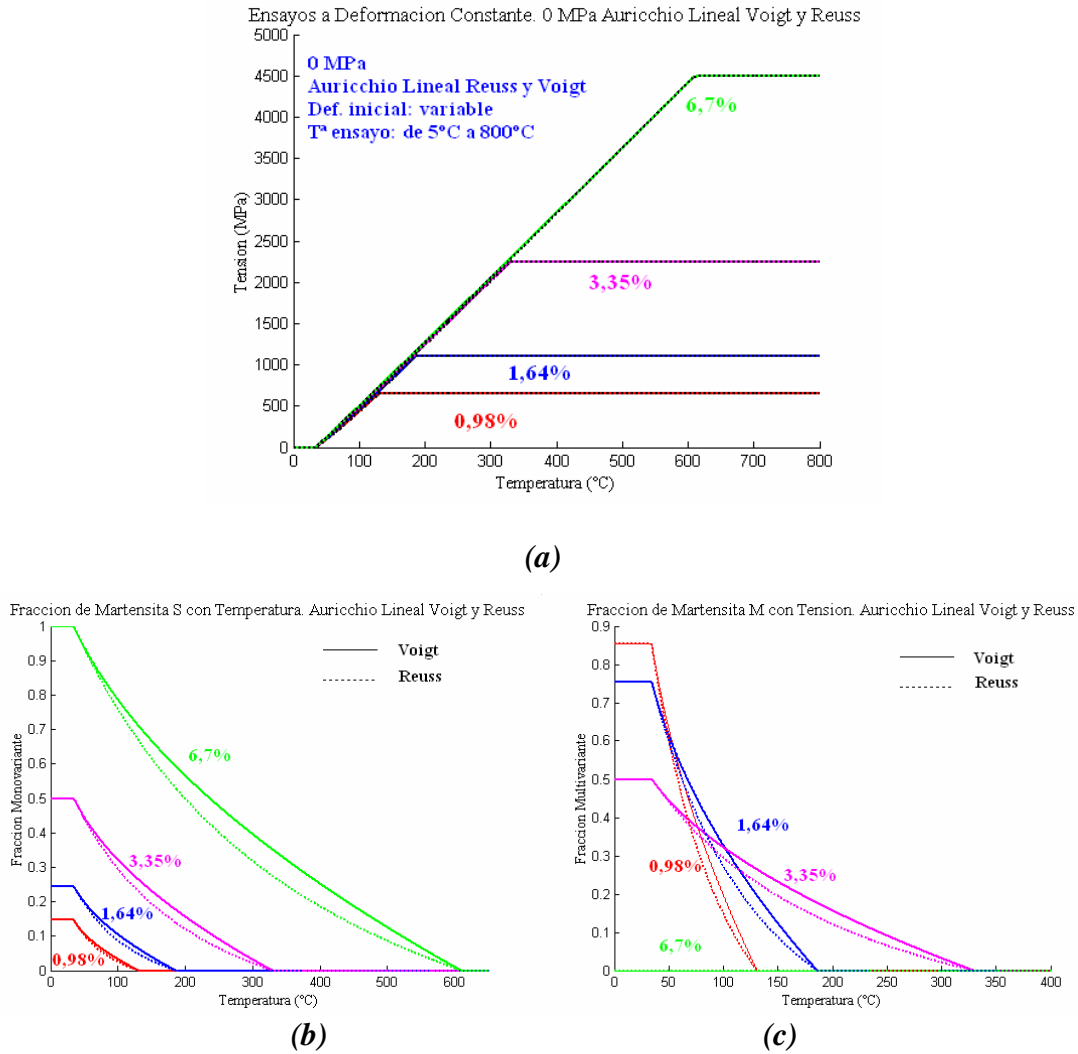


Figura 262: Comparación de las simulaciones de deformación constante con diferentes deformaciones constantes y sólo para el proceso de calentamiento del modelo de Auricchio Lineal Voigt y Reuss para tensión inicial 0 MPa. (a) tensión-temperatura. (b) fracción de martensita monovariante (ψ -S) con temperatura y (c) fracción de martensita multivariante (ψ -M) con temperatura.

El último modelo a verificar con la simulación de deformación constante es el **modelo de Auricchio Exponencial**. En este caso, como anteriormente, supondremos diferentes valores de β : 1, 10 y 100 MPa, presentado la superposición de todos los casos para $\beta=10$ en la figura 2.63 y de todas las β para una deformación del 6,7%.

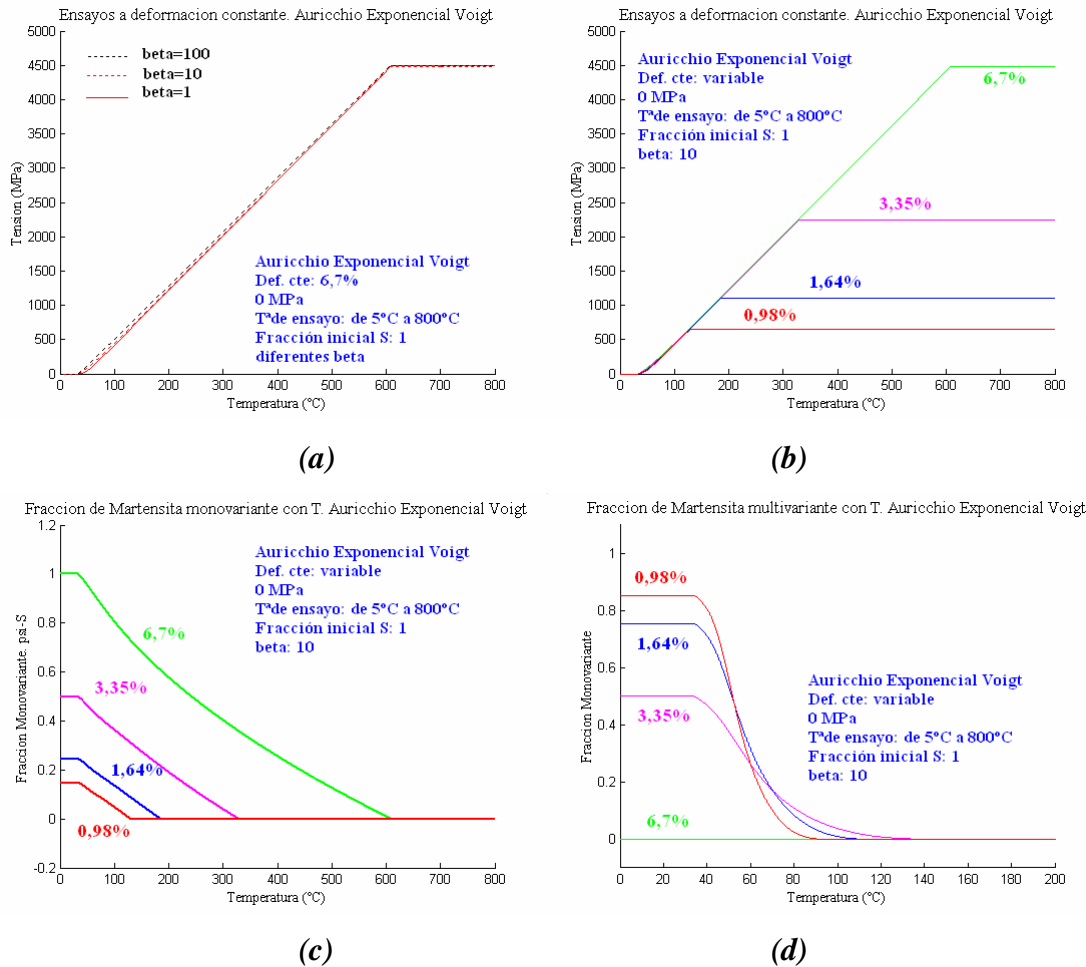


Figura 2.63: Comparación de las simulaciones de deformación constante de Auricchio Exponencial Voigt para (a) $b=1, 10$ y 100 MPa y una deformación del $6,7\%$. Y 0 MPa y en (b) con diferentes deformaciones constantes y sólo para el proceso de calentamiento del modelo Voigt y Reuss para tensión inicial 0 MPa. (c) fracción de martensita monovariante (ψ -S) con temperatura y (c) fracción de martensita multivariante (ψ -M) con temperatura.

Para 150 MPa, en la figura 2.64, se compara un ciclo incompleto desde 5°C hasta 175°C . Previamente se realizó un proceso de carga a tracción hasta 150 MPa partiendo desde $\xi_M=1$ y $\xi_S=0$ y, a partir de ahí, con $\xi_M=0,4444$ y $\xi_S=0,5556$, se comienza el ciclo a deformación constante de $4,29\%$. Se señalan en el gráfico los puntos de transformación críticos para mejor comprensión del proceso.

Para 250 MPa se presenta, en la figura 2.65, la simulación a deformación constante para *Auricchio Exponencial Reuss* y, para comparar ambas aproximaciones se realiza, en la figura 2.66, el proceso de calentamiento desde una temperatura de 15°C , donde las fracciones iniciales son $\xi_M=0$ y $\xi_S=0$ hasta 175°C a 150 MPa, realizando un proceso

incompleto. *Dado que las fracciones iniciales son inferiores a 1 pero iguales para ambas aproximaciones pues dependen de la temperatura inicial y tensión, el módulo elástico inicial será diferente para Reuss y Voigt y, en consecuencia, la deformación cte a la que se realiza el proceso: 4,21% para Reuss y 4,14% para Voigt.*

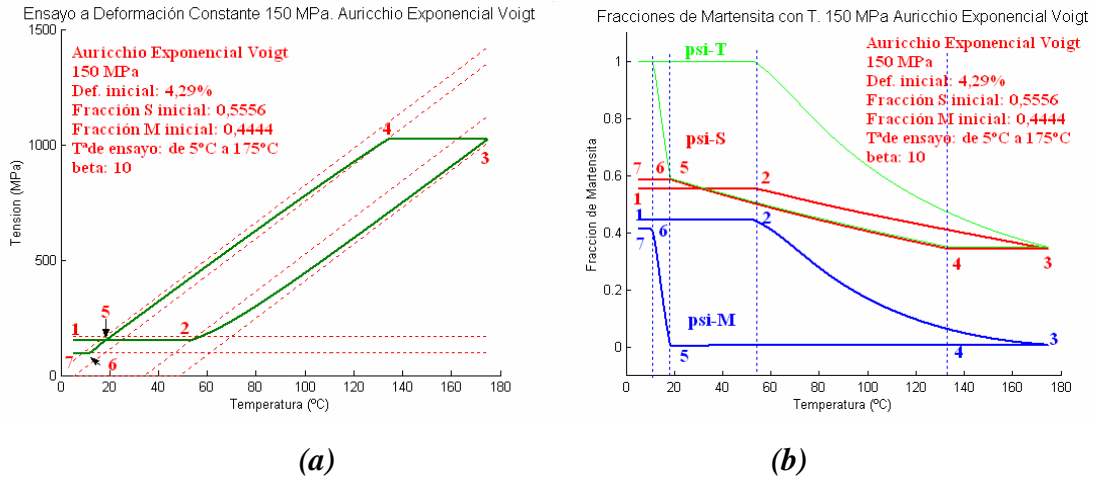


Figura 2.64: Simulación de deformación constante de Auricchio Exponencial Voigt para 150 MPa y $b=10$ MPa. (a) Gráfico tensión-temperatura. (b) fracción de todas las martensita con temperatura.

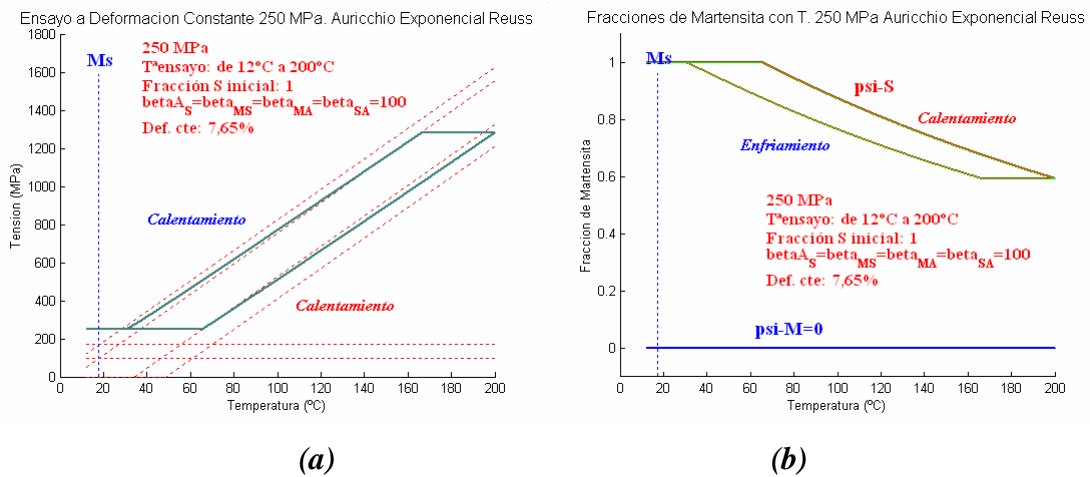


Figura 2.65 Simulación de deformación constante de Auricchio Exponencial Reuss para 250 MPa y $b=100$ MPa. (a) Gráfico tensión-temperatura. (b) fracción de todas las martensita con temperatura.

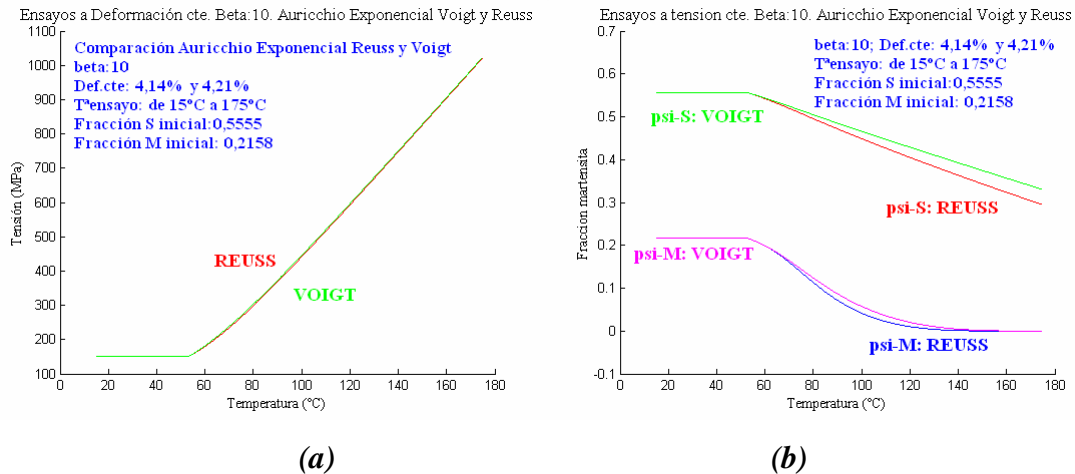


Figura 266 Simulación de deformación constante de Auricchio Exponencial Reuss y Voigt para 150 MPa y $b=10$ MPa y deformación 4,14% y 4,21%. (a) Gráfico tensión-temperatura. (b) fracción de todas las martensita con temperatura.

SIMULACIONES A TENSIÓN CONSTANTE:

La última simulación numérica de los modelos implementados que se presenta está destinada a verificar la capacidad de reproducir ciclados térmicos a tensión constante. De nuevo nos encontramos con múltiples posibles simulaciones que se puede realizar con este estado de carga, pues será diferente si la tensión es 0 MPa, si está dentro de la zona de transformación de M a S (tensiones críticas) o bien, está por encima de la tensión crítica superior. También, como se presentó para deformación constante, las condiciones iniciales para un mismo punto del plano σ -T pueden ser diferentes en función de la historia termomecánica previa. De esta forma, al igual que se presentó para deformación constante, se presenta en la figura 2.67 las posibles opciones comentadas para *los modelos de Tanaka y Liang y Rogers*, y en la figura 2.68 para los *modelos de Brinson y Auricchio*.

El proceso a tensión constante será, pues: determinación de las condiciones iniciales en función de la historia termomecánica previa y de la tensión impuesta como constante y temperatura inicial; calentamiento hasta la temperatura deseada (con transformación completa o incompleta) y enfriamiento hasta la temperatura inicial.

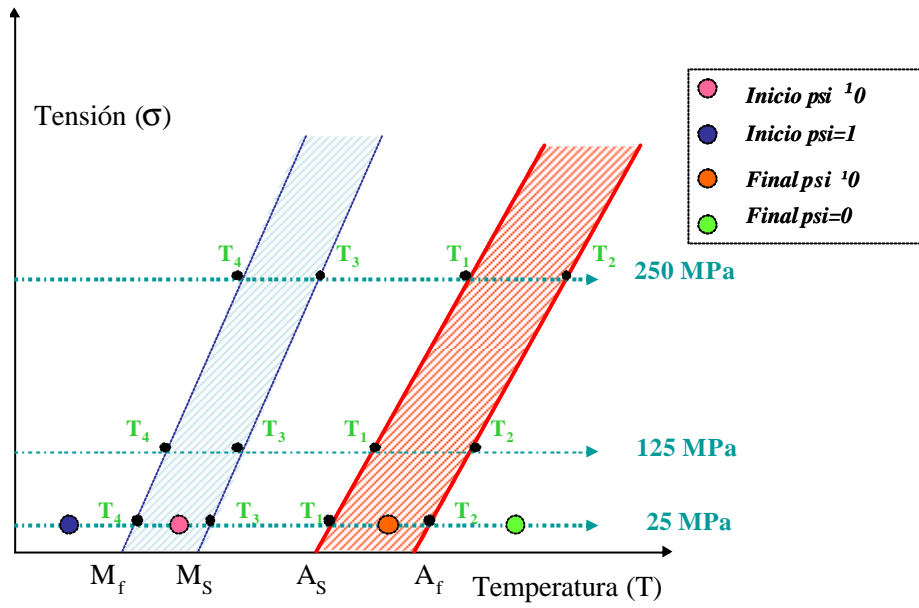


Figura 2.67:Diagrama crítico tensión temperatura para los modelos de Tanaka y Liang y Rogers donde se han marcado las diferentes condiciones explicadas de inicio para la simulación a tensión constante. Se indican las temperaturas (T_1 - T_4) críticas del proceso para cada tensión.

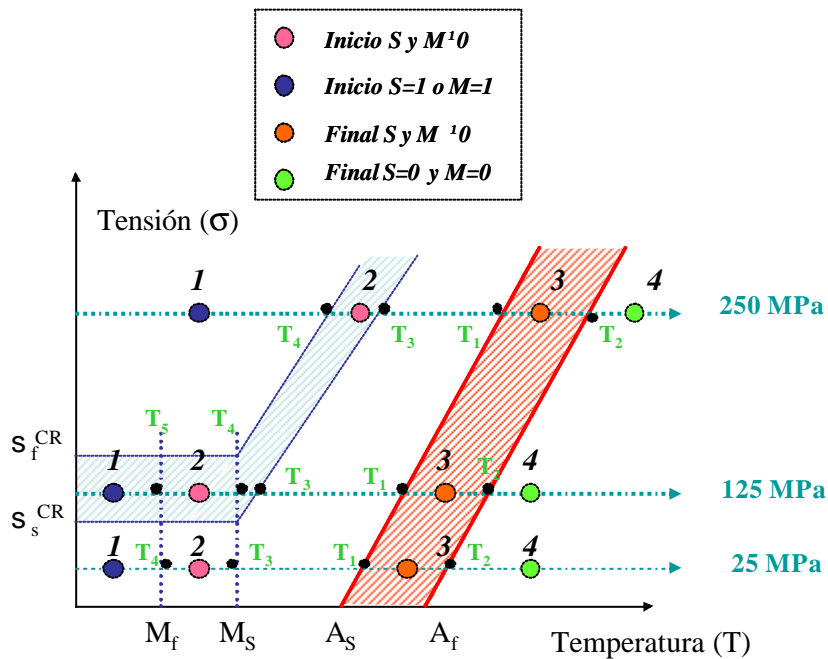


Figura 268:Diagrama crítico tensión temperatura donde se han marcado las diferentes condiciones explicadas de inicio para la simulación a deformación constante. En línea negra se marca esquemáticamente el incremento de la tensión hasta una transformación completa (3) o incompleta (2).

Con las figuras anteriores se puede entender más claramente el proceso de tensión constante: en los modelos de Tanaka y Liang-Rogers (figura 2.67), sea cual sea la tensión constante, el proceso es el mismo: en el calentamiento, hasta que no se alcanza la temperatura T_1 no se inicia la transformación a austenita que procederá hasta T_2 . Dentro de este intervalo, en función de la ley de evolución, la curva deformación-temperatura será decreciente pero podrá tener diversas apariencias. En el enfriamiento, el proceso es similar: hasta no alcanzar la temperatura T_3 el proceso de transformación a martensita no se inicia. Alcanzada T_3 , la transformación procede hasta T_4 . En función de dónde iniciemos el proceso, las condiciones iniciales serán diferentes.

Para Brinson y Auricchio (figura 2.68) existen variantes a los modelos anteriores a causa de las dos posibles fracciones de martensita que se traducen en una zona nueva en el diagrama crítico σ -T. Las posibilidades son:

- Para tensiones inferiores a σ_S^{CR} , en el calentamiento se produce la transformación entre T_1 y T_2 . En el enfriamiento, sólo se producirá transformación entre M_s (T_3) y M_f (T_4) para la fracción de martensita multivariante (ξ_M), puesto que la monovariante (ξ_S) sólo varía con el incremento de tensión. De nuevo, **para el modelo de Brinson, se han redefinido las ecuaciones originales del autor puesto que existe una indefinición de este fenómeno a tensiones diferentes de 0 MPa. Para la redefinición, se ha contemplado que sólo la fracción de austenita remanente se transforma a multivariante, teniendo en cuenta la fracción de monovariante que permanece constante.**
- Para tensiones dentro de la zona de tensiones críticas $\sigma_S^{CR} < \sigma < \sigma_f^{CR}$ se presenta la zona más interesante: en el calentamiento se produce la transformación entre T_1 y T_2 . En el enfriamiento existen dos procesos de transformación; alcanzado T_3 se produce, hasta T_4 un proceso de transformación tanto de la ξ_S como de la ξ_M . Alcanzado T_4 y hasta T_5 , únicamente la ξ_M transforma a partir de la austenita remanente y con ξ_S constante y, en T_5 se finaliza la transformación. **Este comportamiento se debe contemplar en la simulación numérica y, de nuevo, se ha tenido que redefinir para el modelo de Brinson.**
- Para tensiones superiores a σ_f^{CR} el proceso de transformación es similar al explicado para los modelos de Tanaka y Liang-Rogers.

Se presentan, a continuación, las simulaciones realizadas para la verificación del *modelo de Tanaka Voigt*. En la figura 2.69 se muestra, conjuntamente, las simulaciones para 25 MPa, 125 MPa y 250 MPa, observándose, claramente cómo, a mayor tensión, las temperaturas de inicio y final de la transformación se desplazan hacia la derecha. Para los tres casos, la deformación inicial es la correspondiente a la tensión y a la fracción inicial (1 en todos los casos). En la 2.70, para *Tanaka Reuss* se presenta, en primer lugar una simulación a 25 MPa desde 5°C pero con transformación incompleta y, en 2.71 la comparación de las tres tensiones para una transformación completa.

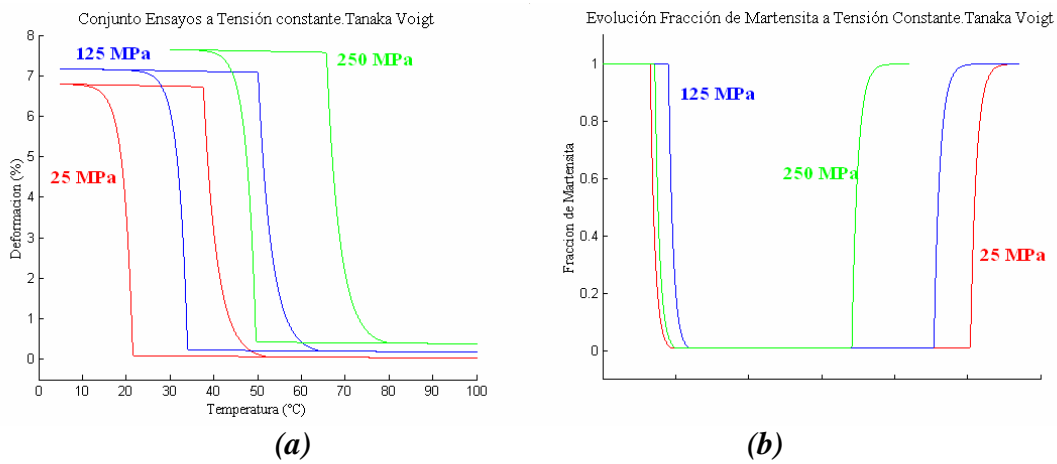


Figura 2.69: Comparación de los ensayos a tensión constante para el modelo de Tanaka Voigt y una fracción inicial de 1. (a) deformación-T y (b)evolución de la fracción de martensita durante el proceso.

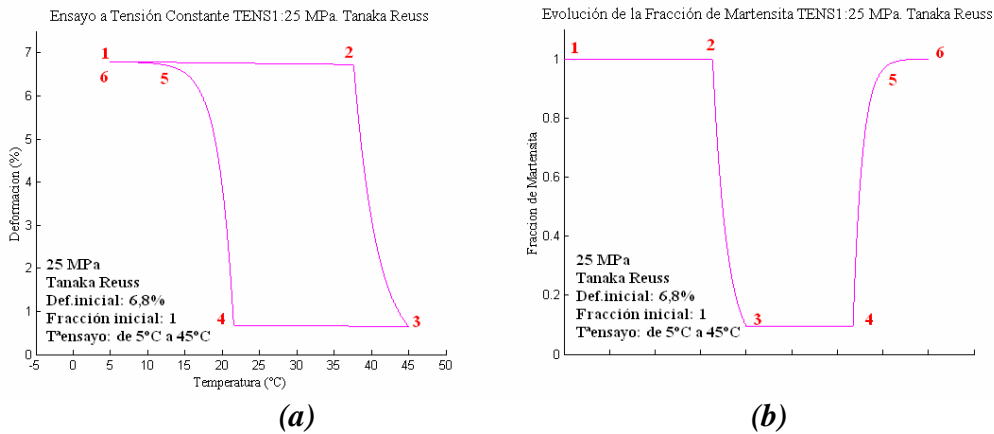


Figura 2.70: simulación del modelo de Tanaka Reuss a tensión constante 25 MPa para un proceso incompleto: en el punto 3, la fracción remanente de martensita es superior a cero. (a) deformación-T y (b)evolución de la fracción de martensita durante el proceso.

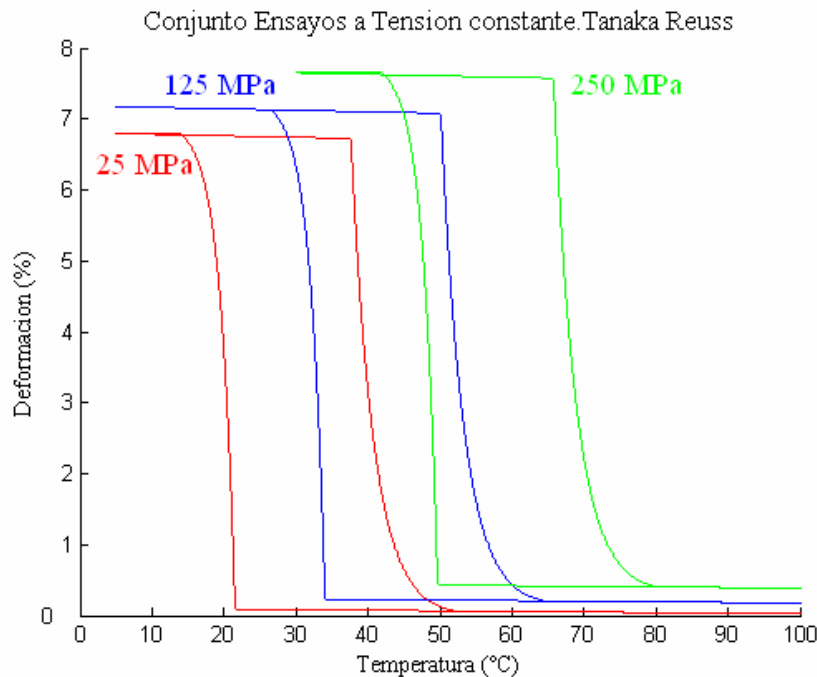


Figura 271: Gráfico deformación-T con comparación de los ensayos a tensión constante para el modelo de Tanaka Reuss y una fracción inicial de 1. (a) deformación-T.

En la figura 2.72 se presenta la comparación entre ambas aproximaciones para el modelo de Tanaka con las tres tensiones analizadas. Como se puede observar, se aprecian ligeras diferencias en las zonas de transformación, causa de la diferente consideración del módulo elástico.

Es interesante remarcar como, a través de estas simulaciones se detectan las temperaturas de transformación para cada tensión. La extrapolación a tensión cero nos dará las temperaturas de transformación base. Esto se comenta en detalle en el Capítulo 4 donde se desarrolla una operativa experimental para realizar este tipo de ensayos. Con ello se puede verificar los modelos y comprobar la bondad de los parámetros y ajustes obtenidos.

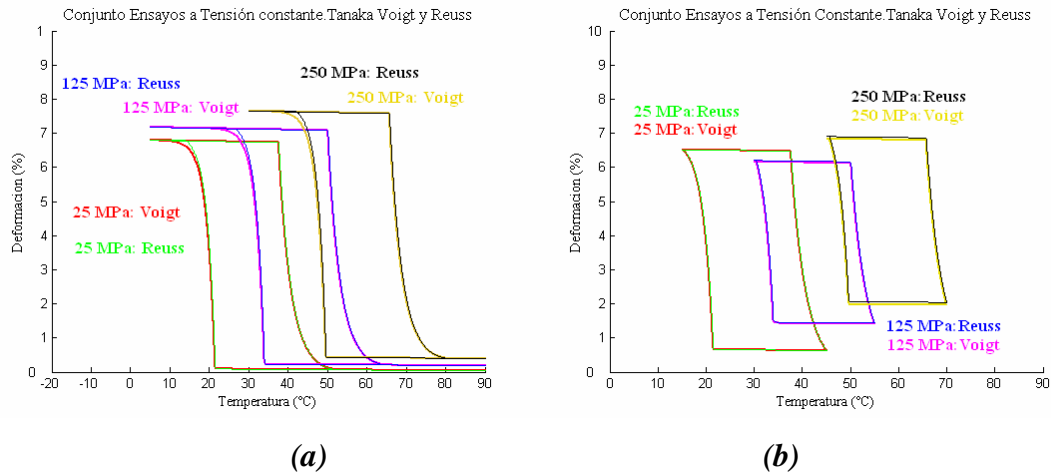


Figura 272: Gráfico deformación- T con comparación de los ensayos a tensión constante para el modelo de Tanaka Voigt y Reuss y una fracción inicial de 1. (a) deformación- T para simulaciones completas y (b) para simulaciones incompletas.

Para el *modelo de Liang y Rogers Voigt* presentamos, en la figura 2.73 las cuatro posibilidades de transformación que se comentaron en base al diagrama σ - T para 125 MPa. En 2.73(a) se realiza una transformación completa desde 5°C hasta 100°C. En 2.73(b) no se termina el proceso de calentamiento. En 2.73(c) se empieza a fracción inferior a 1 y en 2.73(d) se realiza un proceso incompleto total.

En la figura 2.74 se presenta el conjunto de ensayos a tensión constante para las mismas condiciones iniciales, tanto para Liang-Rogers Voigt, 2.74(a), como para *Liang-Rogers Reuss*, 2.74(b). En la figura 2.75 se presentan, solapados, las simulaciones para ambas aproximaciones.

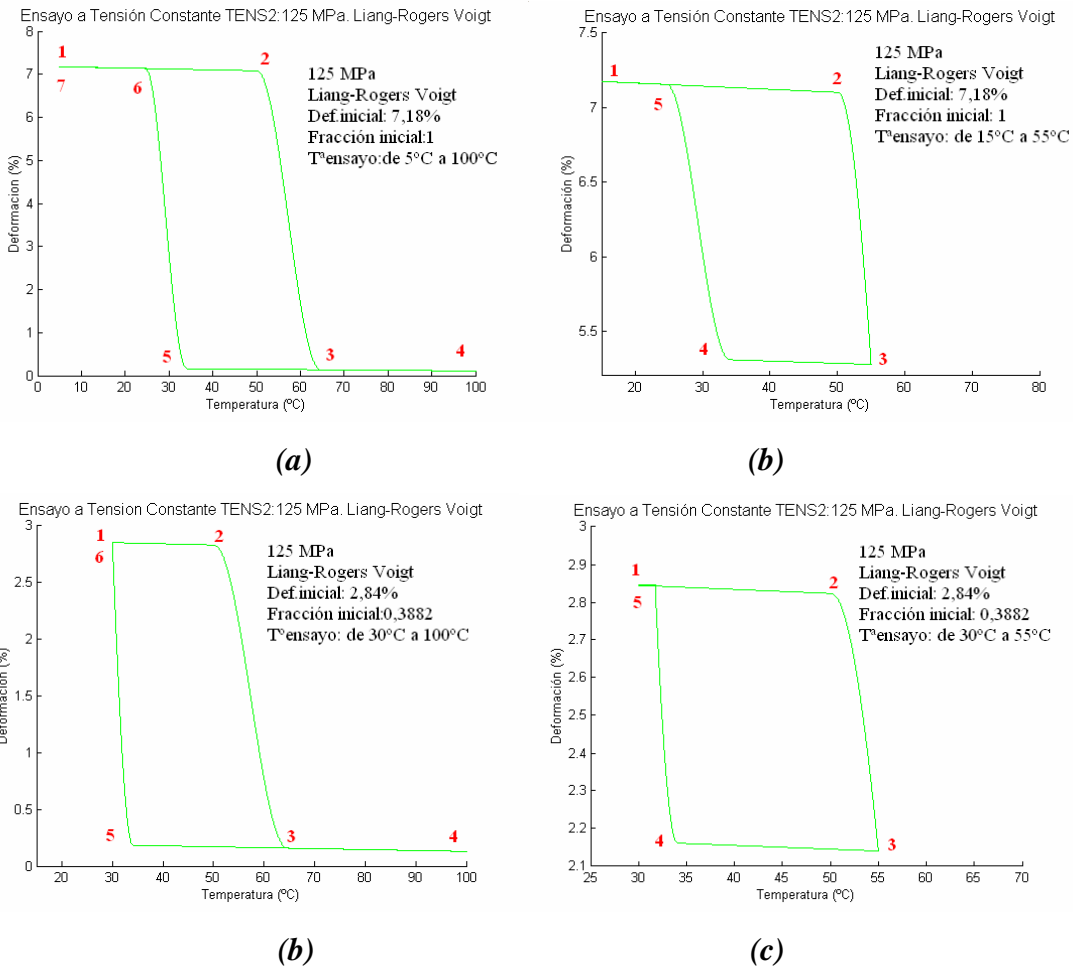


Figura 2.73: Gráfico deformación-T para las simulaciones a tensión constante de 125 MPa para el modelo de Liang-Rogers Voigt con diferentes condiciones iniciales y finales. (a) deformación-T para simulaciones completas (b) para simulaciones incompletas en el calentamiento (c) incompleta en el inicio y (d) en el calentamiento y enfriamiento.

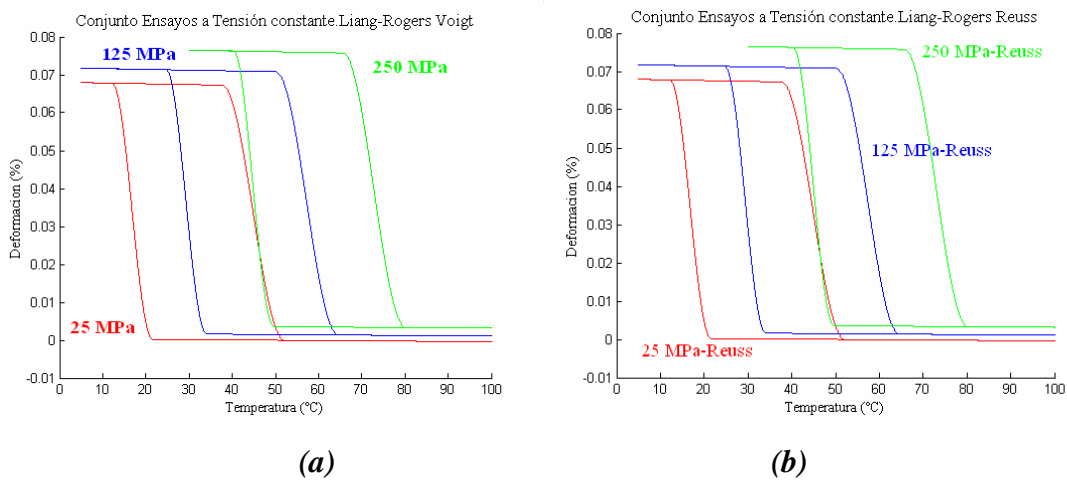


Figura 274: Gráfico conjunto a diferentes tensiones constantes para Liang y Rogers (a) Voigt y (b) Reuss

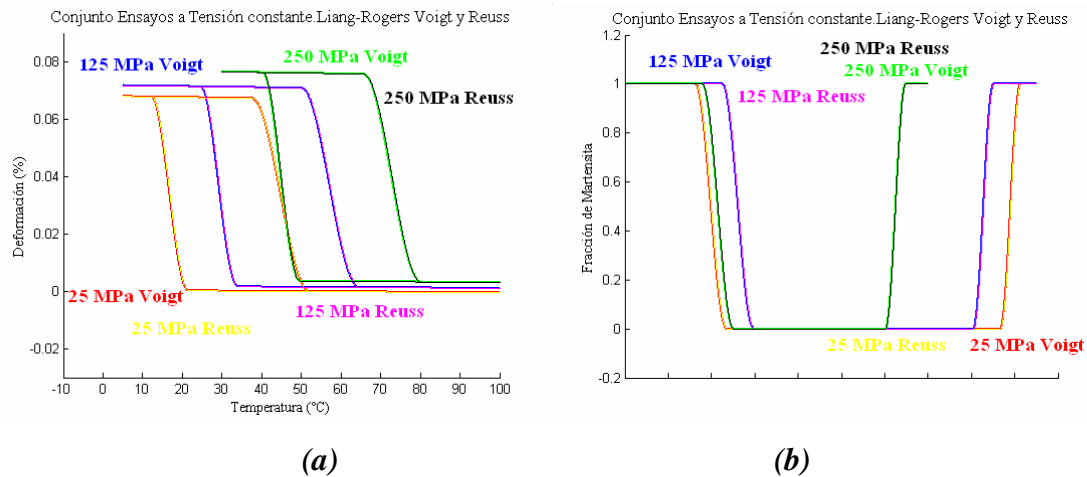


Figura 2.75: Gráfico conjunto para Liang y Rogers Voigt y Reuss. (a) deformación- T y (b) fracción de martensita.

Para *el modelo de Brinson*, tal y como se deduce de la figura 2.68, las posibles variaciones en la simulación a tensión constante son múltiples. Si suponemos la tensión constante de 250 MPa, el inicio de la simulación puede ser en **1**, donde $\xi_S=1$ (ver figura 2.68) o en **2**, donde $\xi_S \neq 1$, mientras que el final de la simulación puede ser en **3** ($\xi_S \neq 0$) o en **4** ($\xi_S=0$). Se presentan en la figura 2.76, como ejemplo, las cuatro posibles simulaciones junto con la evolución de la fracción de martensitas frente a la temperatura. Si la tensión es de 125 MPa, nos encontramos en el mismo caso, pero esta vez partiendo de una fracción de martensita mezcla de monovariante y multivariante y, además, en el proceso de enfriamiento, existe una zona ($T < M_s$) donde la transformación afecta tan solo a la multivariante. Este comportamiento se ve reflejado en la inflexión en la curva de la transformación reversa en la figura 2.77, simulaciones realizadas con el *modelo de Brinson Reuss*. Por último, para 25 MPa (por debajo de la tensión crítica σ_s^{CR}), si comenzamos con $\xi_S=0$ y $\xi_M=1$, el proceso de calentamiento solo provocará un cambio en la fracción multivariante y este cambio sólo afecta al módulo elástico, con lo que la variación en la deformación será menor. Este efecto puede verse comparando las simulaciones de Brinson para las aproximaciones de Reuss y Voigt para el módulo elástico (figura 2.78). En esta figura se comparan tanto las simulaciones de 25 MPa (figura 2.78a) como las de 250 MPa y 125 MPa (figura 2.78b).

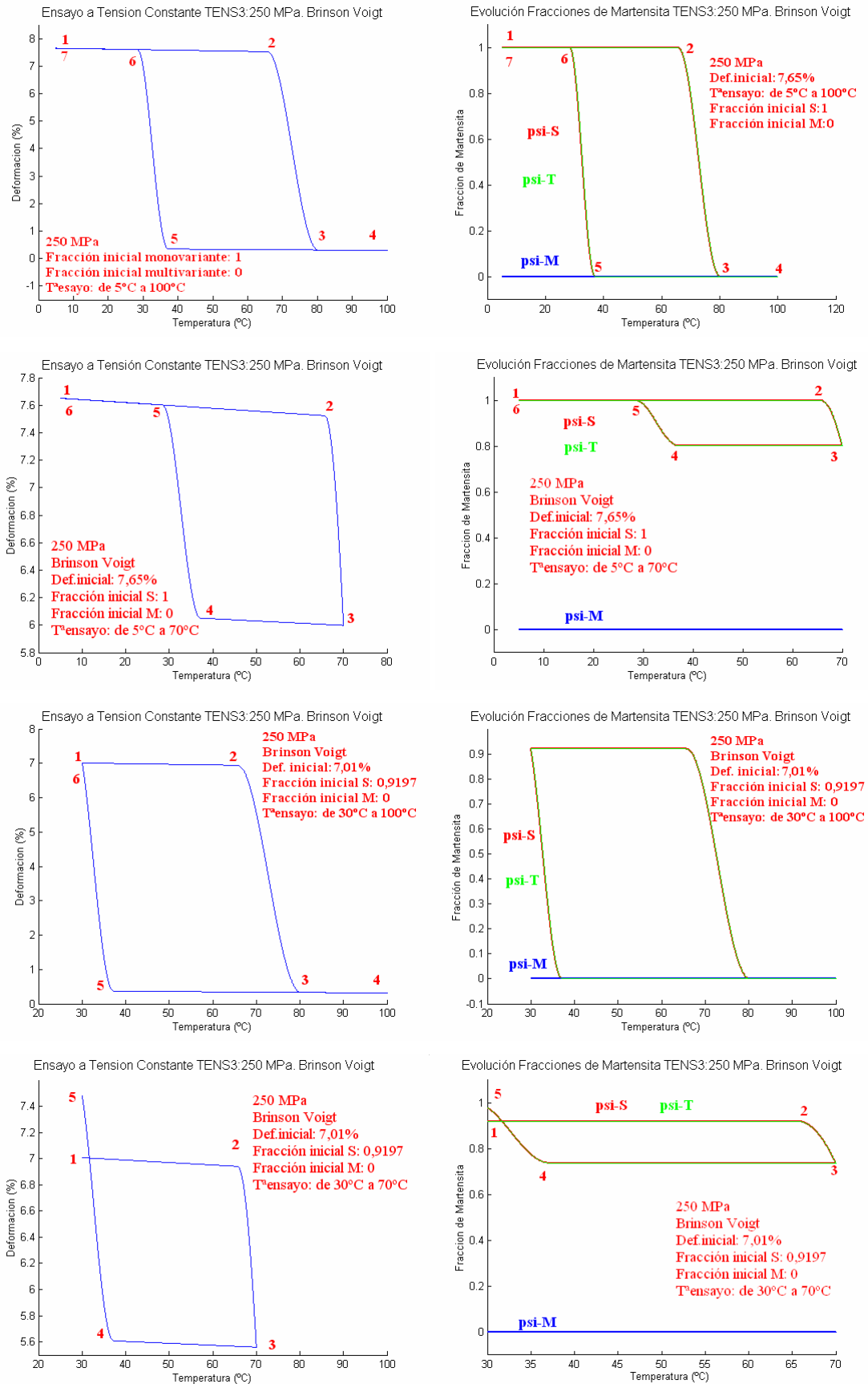


Figura 2.76: Simulaciones Brinson Voigt 250 MPa. (a) e-T.(b) fracción M y S-T.

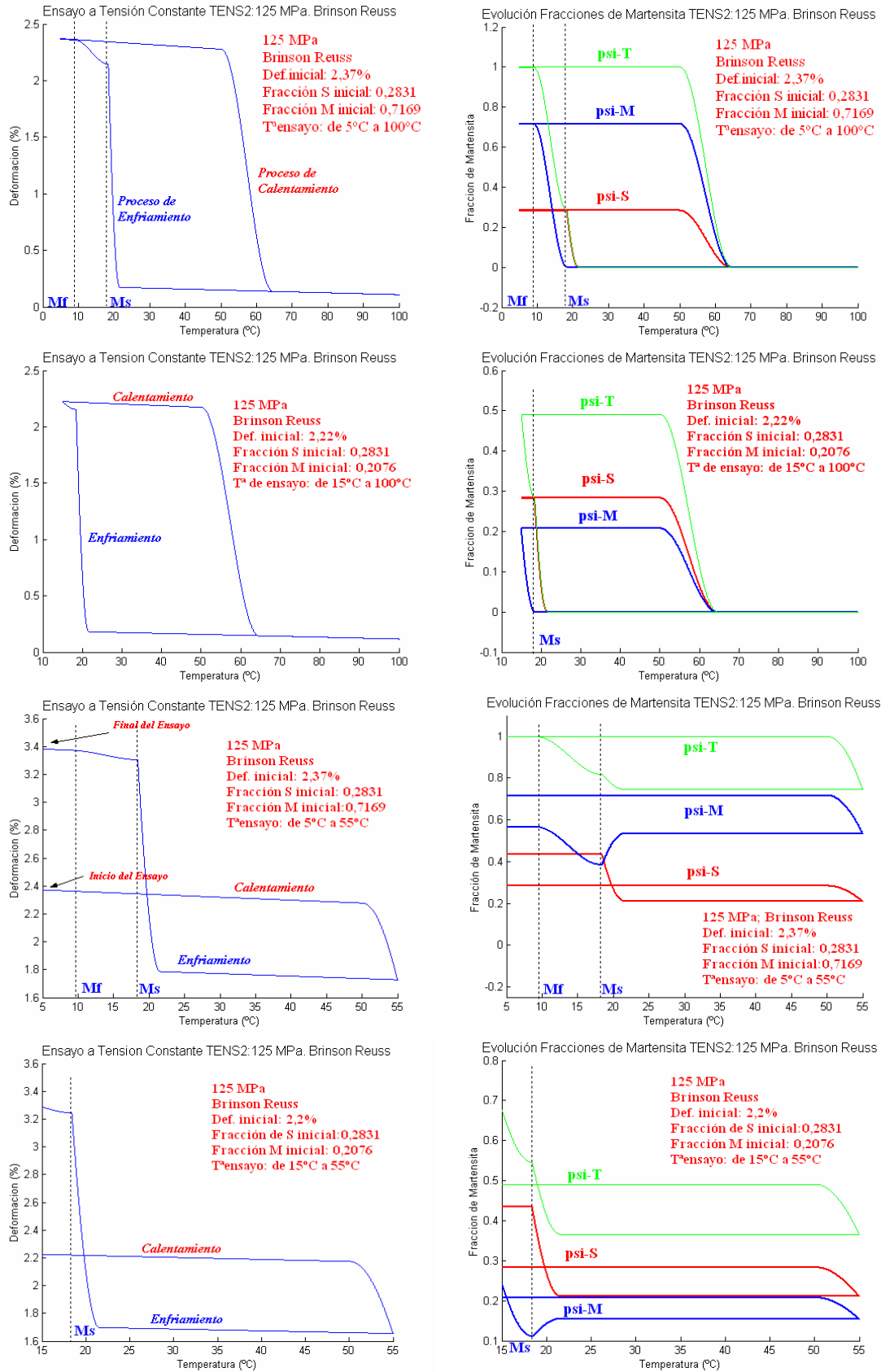


Figura 2.77: Simulaciones Brinson Reuss 125 MPa. (a) e-T. (b) fracción T, M, S.-T.

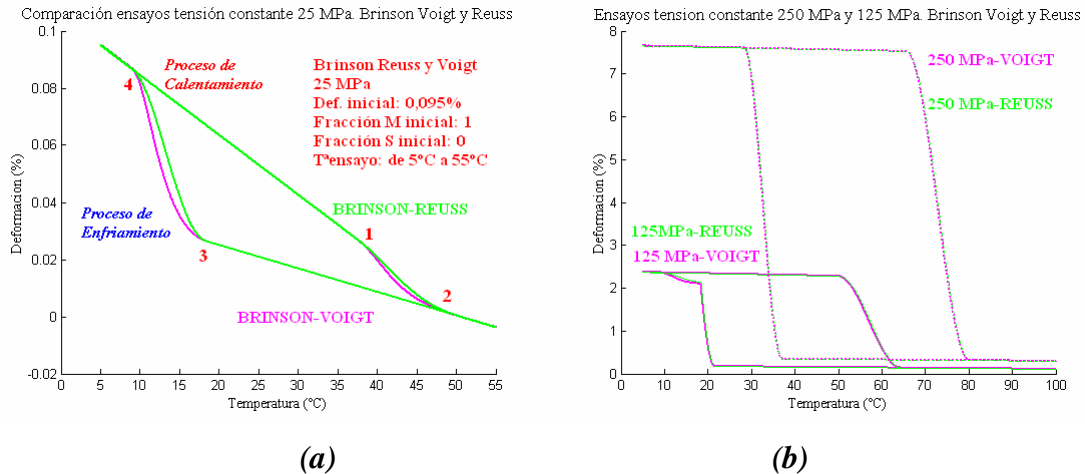
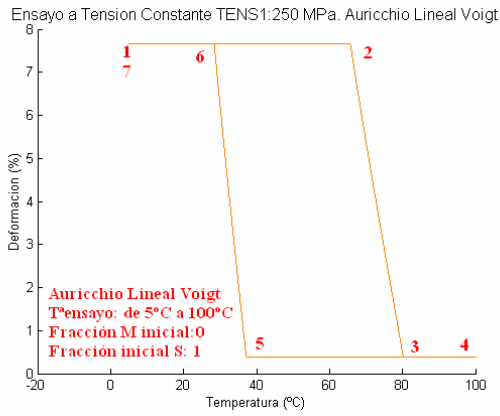


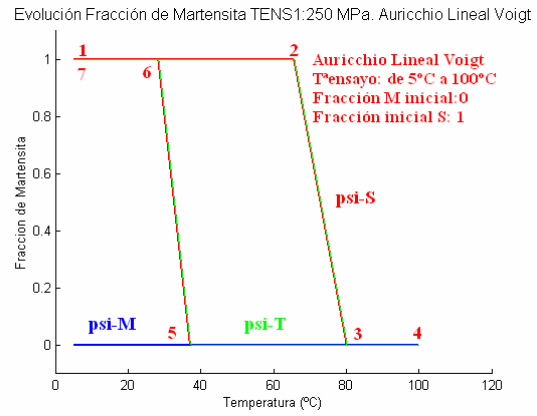
Figura 2.78: Gráfico conjunto Brinson Voigt y Reuss para 25 MPa. (a) deformación-T y (b) para 250 MPa y 125 MPa.

Por último, si realizamos las simulaciones de *Auricchio lineal* para tensión constante, las posibilidades son las mismas que en el modelo de Brinson. En este caso, se presentan las mismas simulaciones que para este último modelo.

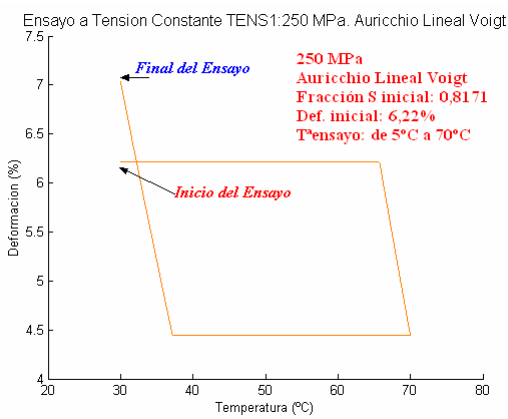
En la figura 2.79 se simula, para 250 MPa un ciclo completo (del punto 1 a 4 de la figura 2.68) y un ciclo incompleto (del punto 2 al 3) con la *aproximación de Voigt*. Para 125 MPa, en la figura 2.80, de nuevo se presenta un ciclo completo (del punto 1 a 4) y uno incompleto (del punto 2 al 3) del modelo de *Auricchio lineal Reuss*. Para 25 MPa se compara en la figura 2.81, como en Brinson, un ciclo completo con la aproximación de Reuss y la de Voigt. Obsérvese la diferencia entre el modelo de Auricchio y el modelo de Brinson en esta última simulación (figuras 2.81 y 2.78a respectivamente), donde, a causa del módulo termoelástico, la parte previa a la transformación es totalmente diferente en ambos modelos. Sin embargo, los puntos de transformación, son semejantes y, en ambos, la diferencia entre Reuss y Voigt provoca cambios en la transformación debido a la diferente aproximación del módulo elástico.



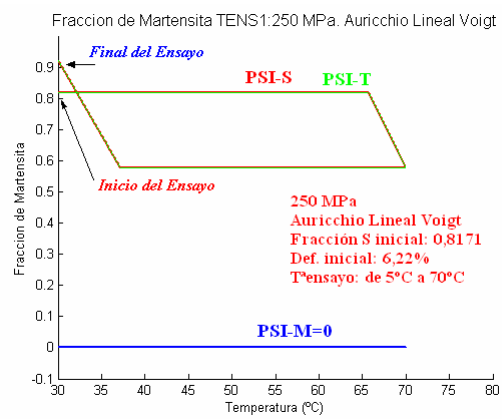
(a)



(b)

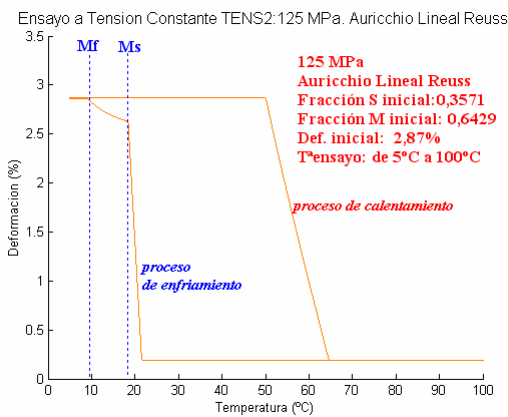


(c)

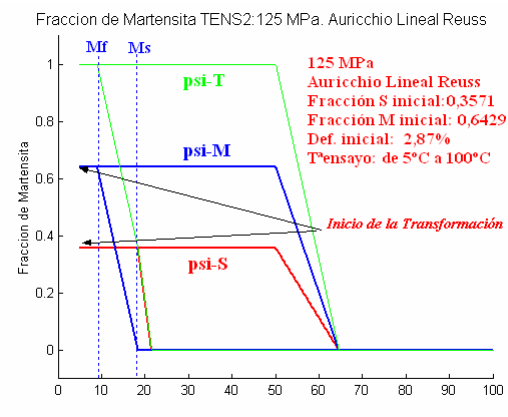


(d)

Figura 2.79: Simulaciones Auricchio lineal Voigt 250 MPa. (a-c) deformación con temperatura.(b-d) fracción de martensita con temperatura.



(a)



(b)

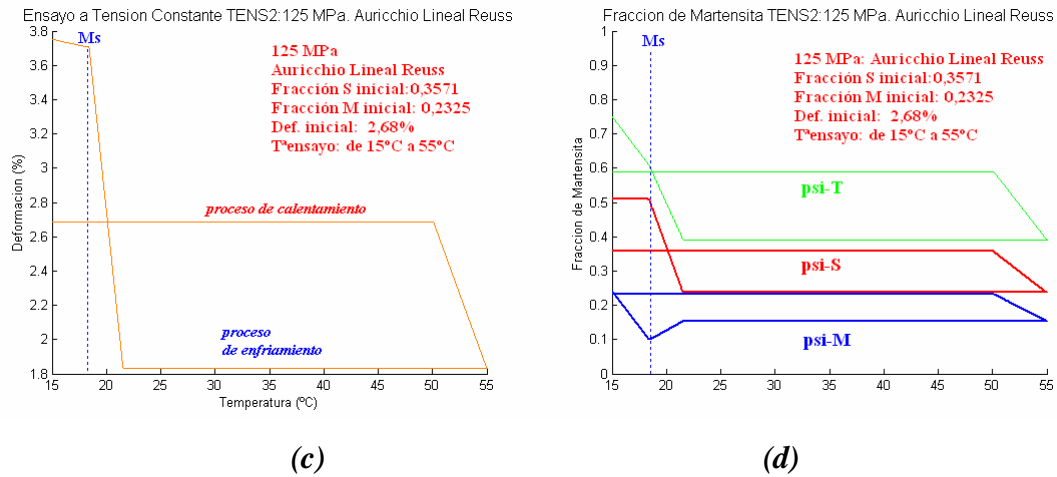


Figura 2.80: Simulaciones Auricchio lineal Reuss 125 MPa. . (a-c) deformación con temperatura.(b-d) fracción de martensita con temperatura.

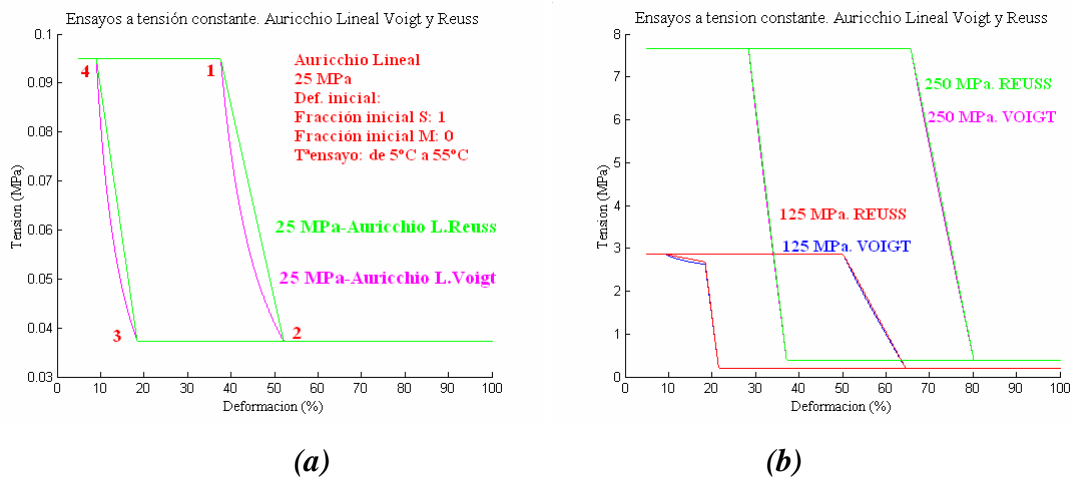


Figura 2.81: Gráfico conjunto Auricchio lineal Voigt y Reuss para 25 MPa. (a) deformación-T y (b) para 250 MPa y 125 MPa.

Por último, para el *modelo de Auricchio exponencial*, compararemos el comportamiento de los gráficos a 250 MPa completos para los tres valores de β , tanto para la aproximación de Reuss como la de Voigt (figura 2.82).

En la figura 2.83 se presenta la comparación, para la misma β , entre los ciclos completos a 25 MPa de las dos aproximaciones, pues, como se ha visto anteriormente, es donde más se nota la diferencia entre ambas.

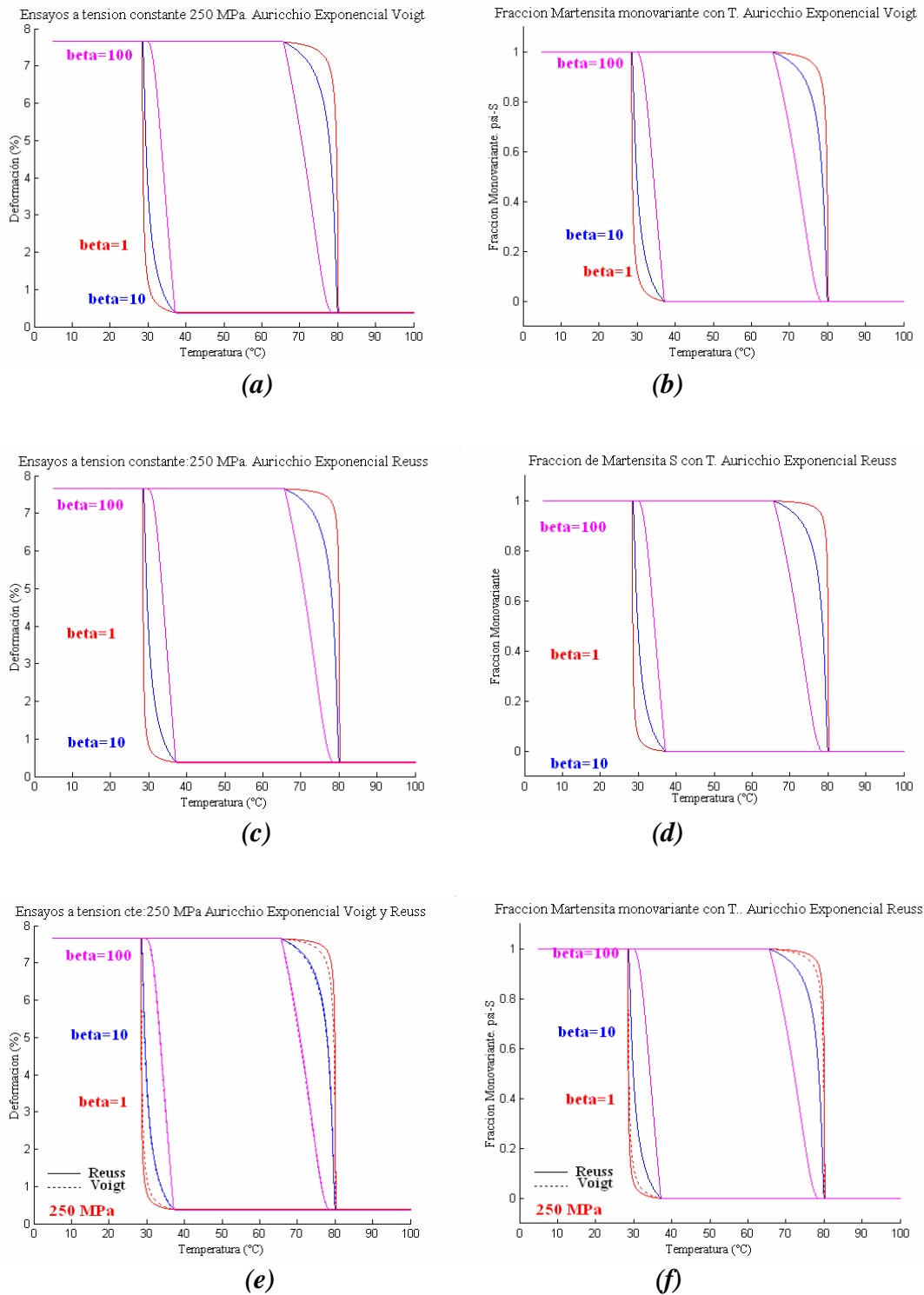


Figura 282 Comparaciones Auricchio lineal Voigt y Reuss para 250 MPa y diferentes β . (a) deformación-T para Auricchio Exponencial Voigt (c) deformación T para Auricchio Exponencial Reuss (e) deformación-T para la comparación de ambos. En (b),(d) y (f) las correspondientes evoluciones de las fracciones de martensita monovariante con la temperatura.

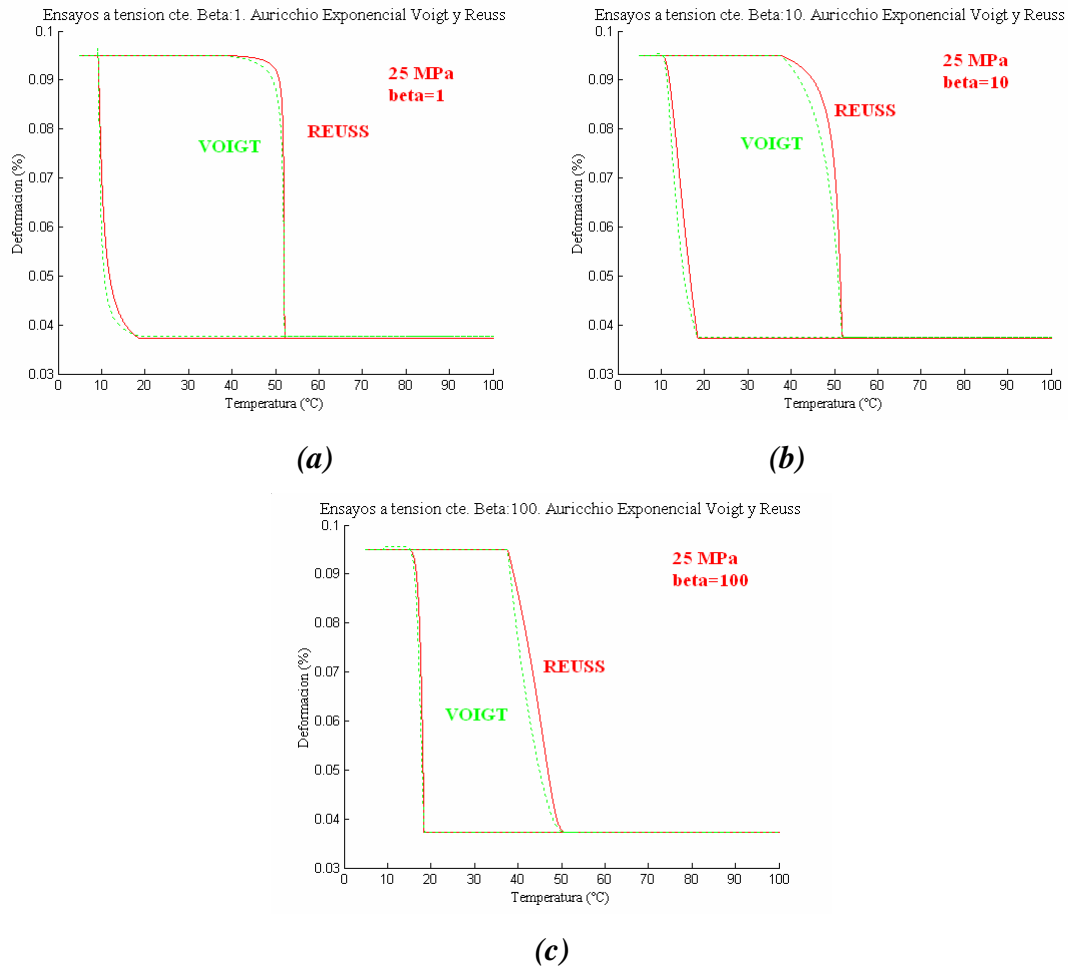


Figura 2.83: Comparación simulaciones tensión constante 25 MPa, ciclos completos, para Auricchio Exponencial Reuss y Voigt. (a) $\beta=1$; (b) $\beta=10$ y (c) $\beta=100$.

Podemos observar, al igual que en las simulaciones anteriores, que el valor de β que más acusa la diferencia entre ambas aproximaciones es $\beta=10$, donde, como se aprecia en la figura 2.83, tanto en el proceso de enfriamiento como de calentamiento, la aproximación de Reuss presenta mayores valores de deformación.

Cerramos este capítulo remarcando que, si bien sólo se han presentado algunos resultados de las simulaciones para cada uno de los modelos, se han realizado todas las posibilidades que se han ido comentando para verificar la bondad, tanto de los modelos, como de las implementaciones numéricas, habiéndose destacado aquí las situaciones más relevantes.