

## Capítulo 4:

# ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARA MODELOS CONSTITUTIVOS DE ELASTO-PLASTICIDAD

En el capítulo precedente, se ha presentado una visión general del problema del análisis de sensibilidad no lineal, sin precisar el tipo de comportamiento constitutivo del material. En el presente capítulo se analizan las problemáticas que aparecen, en un análisis de sensibilidad, cuando el material sigue un comportamiento elastoplástico. El modelo elastoplástico que se utiliza para desarrollar las expresiones se basa en el criterio de plasticidad de Von Mises y una ley de endurecimiento lineal, los detalles de la formulación se encuentran en un anexo al final de este capítulo.

### 4.1 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN ELASTOPLASTICIDAD

#### 4.1.1 ESTADO DEL ARTE DEL PROBLEMA

A continuación, se comentarán los distintos planteamientos que aparecen en la literatura sobre el tema específico que nos ocupa, la sensibilidad en elastoplasticidad. En general, puede decirse que han sido interesantes y numerosas las aportaciones de los distintos autores que han tratado la cuestión.

En el capítulo anterior sobre no linealidad del material en general, aparecían algunas formulaciones con modelos constitutivos de tipo analítico que conducían a expresiones explícitas, mediante las cuales era relativamente fácil calcular la sensibilidad. En la misma línea, pero con un modelo un poco más completo, se encuentra la aportación de Haslinger *et al.* (1992)[H1]. El objetivo del artículo es la optimización estructural y para realizarla se apoyan en el cálculo de las derivadas de las variables de diseño. Citan como modelo de plasticidad la formulación de Washizu<sup>1</sup>. Las hipótesis de comportamiento del material se basan en definir una función explícita según la cual el material cumpliría una ley no lineal de Hooke:

$$\sigma_{ij}(u) = \kappa e_{\parallel} \delta_{ij} + 2\mu(\Gamma)(e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{\parallel}) \quad 4.1.1$$

---

<sup>1</sup> La referencia está en K. Washizu, 1974. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Oxford. Pergamon Press.

siendo en este caso  $\boldsymbol{\sigma}$ , el tensor de tensiones,  $\mathbf{e}$  el tensor de deformaciones,  $\mathbf{K}$ , una constante elástica y  $\mu$ , una función del invariante  $\Gamma$  de deformaciones. En concreto se propone la siguiente expresión:

$$\mu(\Gamma) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } \Gamma < \Gamma_0 \\ \mu_0 \Gamma_0 (\ln \Gamma + 1 - \ln \Gamma_0) / \Gamma & \text{si } \Gamma > \Gamma_0 \end{cases} \quad 4.1.2$$

siendo:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ (\mathbf{e}_{11} - \mathbf{e}_{22})^2 + \mathbf{e}_{11}^2 + \mathbf{e}_{22}^2 + 6\mathbf{e}_{12}^2 \right]^{1/2} \quad 4.1.3$$

El planteamiento general de la formulación se realiza a partir de las ecuaciones discretas de equilibrio del problema y la aplicación de la diferenciación directa (DDM) conduce a unas expresiones explícitas del modelo de plasticidad que simplifican notablemente el problema.

Posteriormente Vidal *et al.* (1993) [V1] centran su investigación en la cuestión pendiente de la derivación de un modelo implícito<sup>2</sup> de plasticidad, de acuerdo con las teorías clásicas aceptadas por la comunidad científica y expuestas en el anexo A4.1. El desarrollo es general, con análisis de formas y con un marcado carácter teórico. De hecho, pretenden que sea aplicable a cualquier modelo elastoplástico y plantean la derivación directa DDM de la ecuación integral de equilibrio. El artículo empieza presentando el problema de plasticidad y, a continuación, aborda el análisis de sensibilidad del modelo a partir de una formulación variacional, llegando a deducir unas expresiones integrales un tanto crípticas. Finalmente, discretiza con elementos finitos y obtiene otra expresión integral para el análisis de sensibilidad. En las últimas páginas del artículo, aparece el ejemplo de una tubería sometida a presión con un modelo de plasticidad de Von Mises sin ninguna ley de endurecimiento. Por desgracia, ni siquiera para este ejemplo sencillo, se muestra, en ningún momento, como se traducirían las expresiones integrales para el cálculo de sensibilidades. Dicha omisión dificulta notablemente la interpretación de los distintos términos de su formulación y su correcta implementación en un código general de elementos finitos. Sin embargo, a pesar de esas inconveniencias el artículo señala varios puntos interesantes:

1. Para los problemas con modelos dependientes de la historia, es decir estados de equilibrio que dependen de los estados anteriores, los autores recomiendan el método de diferenciación directa DDM y no el método adjunto AVM, por dos razones. En primer lugar, porque el AVM sólo se preocupa de la sensibilidad de un funcional y no de la sensibilidad en la respuesta estructural, en consecuencia dificultaría la sensibilidad a lo largo de la historia dependencia. En

<sup>2</sup> 'We formulate analytical sensitivity expressions that are consistent with numerical algorithms for elastoplasticity that use implicit methods to integrate the constitutive equations and return mappings to enforce the consistency conditions' [V1]

segundo lugar, señalan que el problema adjunto no se puede definir hasta haber resuelto el problema de equilibrio con lo cual se complica notablemente el análisis.

2. Consideran adecuado el planteamiento incremental propuesto por Ryu *et al.* (1985) [R1], en concreto opinan que es la forma natural de calcular los problemas con dependencia de la historia. Además, afirman que el cálculo de sensibilidades no añade coste computacional, dado que no se necesitan iteraciones para resolver el análisis. En resumen, el planteamiento consiste en incrementar la carga, llegar a un equilibrio mediante un esquema predictor-corrector y calcular la sensibilidad en el estado equilibrio.
3. La necesidad de usar la matriz consistente de la formulación en el sistema de ecuaciones del análisis de sensibilidad. En el artículo se puede leer *'The consistent sensitivity formulation produces extremely accurate results in all cases tested[...] The inconsistent sensitivity formulation produces significant error'*. Esta consideración viene refrendada por Kleiber en artículos posteriores y será motivo de comentarios en las páginas siguientes.

El mismo grupo de trabajo aparece con un nuevo artículo, Michaleris *et al.* (1994) [M2] reformulando todo el problema e introduciendo una nueva notación, completamente diferente de la clásica de los elementos finitos en ingeniería, para dar mayor generalidad a sus expresiones. En este artículo, sí que aparece un ejemplo de aplicación, un problema unidimensional elastoplástico analítico con dos barras en el que calculan las fórmulas deducidas de la teoría previa. En definitiva, el artículo presenta una estrategia nueva para hallar la sensibilidad en un enfoque bastante alejado de la concepción clásica de los elementos finitos.

Un enfoque distinto es el establecido por Arora *et al.* (1995) [A1]. En su caso también pretenden conseguir unas expresiones de carácter general del problema donde se incluya el diseño de formas. Afortunadamente, en este artículo la notación es mucho más cercana a la habitual del MEF y además se describe con mayor claridad la implementación práctica en un código de elementos finitos. Cabe destacar que el cálculo de la *pseudocarga* se realiza mediante diferencias finitas, por ello es posible afirmar que su formulación es de tipo semianalítico. En el texto se hace un esfuerzo por resaltar los problemas de discontinuidad de la derivada de la ecuación constitutiva y su efecto sobre el cálculo de sensibilidades. Las principales aportaciones que hace son:

1. Dado que la curva constitutiva elastoplástica de comportamiento presenta una discontinuidad en la derivada cuando se llega a la carga última elástica, el cálculo de la sensibilidad presentará una discontinuidad en ese punto. Concretamente demuestran que no se puede derivar una única ecuación de equilibrio en el punto, sino que sólo se pueden obtener derivadas direccionales a ambos lados del punto de plastificación.
2. También confirman que el cálculo de sensibilidades debe hacerse según un esquema incremental histórico-dependiente.

3. Al igual que Vidal *et al.* [V1] consideran el método de diferenciación directa más apropiado que el método adjunto, porque el problema adjunto depende del funcional y no de la ecuación de equilibrio y, por lo tanto, no se podría definir la solución hasta que la respuesta total de la ecuación de equilibrio fuera generada.

Finalmente, cabe citar como aportación más clara sobre el tema los artículos de Kleiber *et al.* (1995)[K1] y (1996)[K2]. Numerosos son los escritos, ya comentados en otros capítulos, donde este grupo de autores plantean unas expresiones integrales de carácter general para problemas no lineales en diferentes tipos de análisis y su posterior discretización. En general, siempre describen un planteamiento acorde con la concepción y notación clásica de los elementos finitos de manera que las expresiones son fáciles de identificar.

Sea la ecuación constitutiva en forma incremental diferencial:

$$\dot{\sigma} = D(\sigma, \kappa) \dot{\varepsilon} + H(\sigma, \kappa) \quad 4.1.4$$

donde  $\varepsilon$  son las deformaciones y  $\kappa$  la variable interna de la formulación.

Planteando la ecuación de equilibrio incremental diferencial y la consabida discretización en elementos finitos, se tiene:

$$\int_V B^t \dot{\sigma} dV = \dot{f} \quad 4.1.5$$

La integración de la ecuación se hace conforme a un esquema discreto que convierte la ecuación diferencial en ecuación incremental:

$$\int_V B^t \Delta \sigma dV = \Delta f \quad 4.1.6$$

La derivación de esta ecuación respecto a un parámetro de diseño  $q$  conduce a:

$$\int_V B^t \frac{d}{dq} \Delta \sigma dV = \frac{d}{dq} \Delta f \quad 4.1.7$$

Donde el término:

$$\frac{d}{dq} \Delta \sigma = \frac{\partial}{\partial q} \Delta \sigma + \frac{\partial}{\partial^t \sigma} \Delta \sigma \frac{d}{dq} {}^t \sigma + \frac{\partial}{\partial^t \kappa} \Delta \sigma \frac{d}{dq} {}^t \kappa + D \frac{d}{dq} (B \Delta u) \quad 4.1.8$$

Por lo tanto, se obtendría substituyendo en 4.1.7:

$$\int_V B^t D B dV \frac{d}{dq} \Delta u = \frac{d}{dq} \Delta f - \int_V B^t \left[ \frac{\partial}{\partial q} \Delta \sigma + \frac{\partial}{\partial^t \sigma} \Delta \sigma \frac{d}{dq} {}^t \sigma + \frac{\partial}{\partial^t \kappa} \Delta \sigma \frac{d}{dq} {}^t \kappa \right] \quad 4.1.9$$

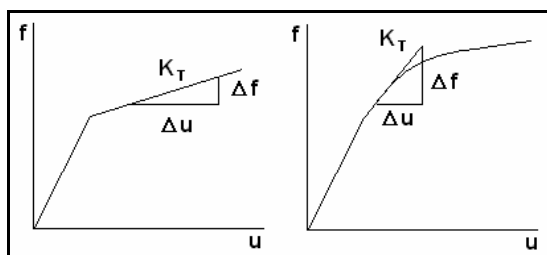
Con un planteamiento parecido al de Vidal *et al.*, tanto en [K1] como en [K2], los autores se preocupan por el problema de la sensibilidad de parámetros en un régimen de plasticidad clásica, de manera que las expresiones para un problema de formas no se contemplan. Los ejemplos que se presentan son un moldeado de metales y una placa con cargas en el plano medio con un modelo de

plasticidad de endurecimiento lineal. En ambos casos la estrategia de resolución es de tipo incremental, calculando las sensibilidades al final de cada etapa de carga utilizando la matriz consistente de la formulación. En un artículo posterior también tratan el problema de elastoplasticidad en tensión plana [K3] intentando resolver las dificultades añadidas que tiene dicha formulación. Las conclusiones son parecidas a las de los autores anteriores.

#### 4.1.2 ALGUNAS INCÓGNITAS POR DESVELAR

De los planteamientos previos se pueden deducir algunos puntos oscuros:

1. Todos los autores proponen una estrategia incremental, de manera que se resuelve la ecuación de equilibrio y a continuación, la ecuación de sensibilidad. Este planteamiento parece adecuado para problemas sin endurecimiento o de tipo lineal. Sin embargo, en el caso de un endurecimiento no lineal, intuitivamente parece que pueden surgir problemas.



**Ilustración 4.1: Posibles problemas para endurecimientos no lineales**

La evaluación de la derivada del residuo contiene el término, derivada de la variable interna  $d^1 \kappa / dq$ , que a su vez depende de la deformación plástica, véase la fórmula A4.1.4 o A4.1.5. Dichas variables se actualizan en cada iteración de la ecuación constitutiva, por lo tanto parece más lógico calcular la derivada también de forma iterativa en lugar de hallarla al final del paso de carga, ya que por el camino se habrá perdido información.

2. Las expresiones en notación clásica de los elementos finitos sobre análisis de sensibilidad de formas no están claramente establecidas ya que las aportaciones de Creto pecan de excesivamente variacionales sin que se vea claramente quién es quién en alguno de los términos, las de Arora son semianalíticas y las de Kleiber se reducen a la sensibilidad de parámetros.

A la vista de todo ello, se procede a desarrollar en esta tesis una nueva formulación basada en una aproximación tangente del problema e intentando mejorar algunos de los puntos negativos descritos anteriormente.

## 4.2 PLANTEAMIENTO INCREMENTAL CON SENSIBILIDAD DE FORMAS

Para la deducción de las expresiones que han de conducir al análisis con sensibilidad de formas en elastoplasticidad, en este trabajo se propone otra estrategia de derivación de la ecuación de equilibrio. En primer lugar, se destaca que no se va a utilizar una notación variacional de tipo matemático, sino que se van a definir las expresiones del análisis de sensibilidad a través de la notación común en ingeniería. En segundo lugar, resaltar que se propone la derivación directa sobre la ecuación incremental discretizada en forma matricial, de manera que se obtendrán con detalle las derivadas de los términos del residuo, matrices tangentes y conceptos asociados al cálculo constitutivo elastoplástico. Finalmente, señalar que se propone una nueva forma de calcular la derivada de la deformación plástica a través de un proceso iterativo.

### 4.2.1 GENERALIDADES

Supuesto el equilibrio en un incremento de carga dada, se puede escribir la ecuación discretizada con elementos finitos de la forma:

$$\sum_{\text{elem}} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} dV \Delta \mathbf{u} = \sum_{\text{elem}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{P} - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad 4.2.1$$

Esta expresión da lugar a la forma matricial del problema:

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{P} - {}^t \mathbf{R} \quad 4.2.2$$

La derivación de esta ecuación 4.2.2 con respecto a una variable de diseño  $q$  da lugar a la expresión siguiente:

$$\frac{d\mathbf{K}_T}{dq} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{K}_T \frac{d(\Delta \mathbf{u})}{dq} = \frac{d\mathbf{P}}{dq} - \frac{d\mathbf{R}}{dq} \quad 4.2.3$$

Esta ecuación es similar a la 2.3.8 definida en el capítulo 2, con la diferencia que en este caso el cálculo es incremental.

Aceptando que :

$$\frac{d\Delta \mathbf{u}}{dq} = \Delta \left( \frac{d\mathbf{u}}{dq} \right) \quad 4.2.4$$

se podrá definir la actualización de la sensibilidad a través del incremento, según:

$${}^{t+\Delta t} \frac{d\mathbf{u}}{dq} = {}^t \frac{d\mathbf{u}}{dq} + \Delta \left( \frac{d\mathbf{u}}{dq} \right) \quad 4.2.5$$

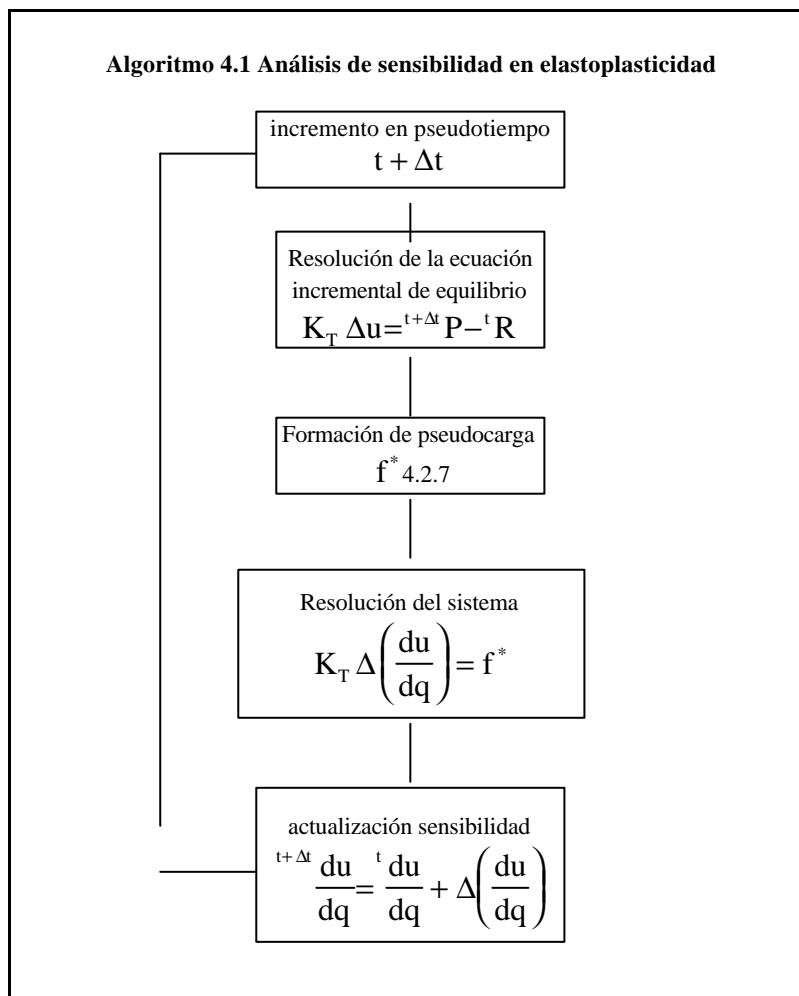
Reagrupando convenientemente la expresión 4.2.3 y usando 4.2.4 se definiría:

$$\mathbf{K}_T \Delta \frac{du}{dq} = \frac{dP}{dq} - \frac{dR}{dq} - \frac{d\mathbf{K}_T}{dq} \Delta u \quad 4.2.6$$

Nótese que la estructura de la ecuación anterior es parecida a la 2.3.9 que se definió en el capítulo 2. Pero ahora el término de pseudocargas tiene una nueva expresión; compárese con 2.3.10 del capítulo 2:

$$f^* = \frac{dP}{dq} - \frac{dR}{dq} - \frac{d\mathbf{K}_T}{dq} \Delta u \quad 4.2.7$$

El algoritmo 4.1 describe el funcionamiento general del cálculo de la sensibilidad en el caso de elastoplasticidad:



Por lo tanto, la característica diferencial con respecto al planteamiento del capítulo 2 radica en la naturaleza incremental de los cálculos y en la formación de una nueva pseudocarga. Asimismo, la matriz de rigidez que se utiliza en el sistema corresponde a la matriz consistente de la formulación, tal y como proponían los autores anteriormente reseñados.

La forma alternativa intuitiva de calcular la sensibilidad, consistiría en la derivación de la ecuación de equilibrio iterativa, tal y como proponía Gopalakrishna en el capítulo anterior para un problema no lineal en general. Pero esto va a aumentar de forma desorbitada el coste computacional de la sensibilidad.

#### 4.2.2 LA PSEUDOCARGA

A continuación se presentan cada uno de los términos de la pseudocarga 4.2.7 en el caso de elastoplasticidad. El primero de ellos,  $dP/dq$ , ya se definió en el capítulo 2 como la derivada explícita de las fuerzas externas con respecto a la variable de diseño.

##### La derivación del residuo

El segundo término de 4.2.7 contiene la derivada del residuo del paso anterior. Suponiendo una integración sobre elementos isoparamétricos, la derivada se expresaría según:

$$\frac{dR}{dq} = \frac{d}{dq} \sum_{\text{elem}} \int_V B^t \sigma dV = \sum_{\text{elem}} \frac{d}{dq} \int_{V_0} B^t \sigma J dV_0 \quad 4.2.8$$

y entonces:

$$\frac{dR}{dq} = \sum_{\text{elem}} \left[ \int_{V_0} \frac{dB}{dq} B^t \sigma J dV_0 + \int_{V_0} B^t \frac{d\sigma}{dq} J dV_0 + \int_{V_0} B^t \sigma \frac{dJ}{dq} dV_0 \right] \quad 4.2.9$$

De la fórmula 4.2.9 todos los términos son conocidos, excepto la derivada de la tensión en el paso anterior de carga. A partir de la ecuación constitutiva de elastoplasticidad en términos totales, se tiene que:

$${}^t \sigma = D \left( {}^t \varepsilon - {}^t \varepsilon_p \right) \quad 4.2.10$$

y por lo tanto:

$${}^t \sigma = D \left( B^t u - {}^t \varepsilon_p \right) \quad 4.2.11$$

entonces aplicando la derivada:

$$\frac{d\sigma}{dq} = \frac{dD}{dq} \left( B^t u - {}^t \varepsilon_p \right) + D \left( \frac{dB}{dq} B^t u - {}^t \varepsilon_p \right) + D \left( B^t \frac{du}{dq} - {}^t \varepsilon_p \right) + D \left( B^t u - \frac{d\varepsilon_p}{dq} \right) \quad 4.2.12$$

En general, los coeficientes que contienen las propiedades elásticas del material no van a cambiar bajo una modificación en el diseño de la forma y, por consiguiente, el primer término es despreciable. Como término nuevo aparece la sensibilidad en el paso  $t$  (el anterior al actual de equilibrio y en consecuencia supuestamente conocido) y la derivada de la deformación plástica.



### La derivación de la deformación plástica

La resolución del problema se realiza a través de iteraciones sucesivas, por lo tanto, la deformación plástica se crea como adición de pequeños incrementos. Algunos de los autores mencionados anteriormente, Vidal [V1], comentan dicha realidad y en concreto describen la siguiente fórmula para su obtención:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}_p^{k,0} + \dot{\lambda}^{k+1} f\left({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{k+1}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\kappa}^{k+1}\right) \quad 4.2.13$$

Sin embargo, cuando deben calcular dicho término, en su formulación, proponen la siguiente simplificación:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_k^{\text{niter}} \dot{\lambda}^k \dot{f}^k \approx \Delta t \dot{\lambda}^n \dot{f}^n \quad 4.2.14$$

En consecuencia, toman el valor real por lo siguiente:

$${}^t\boldsymbol{\varepsilon}_p = {}^{t-\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}_p + \sum_k^{\text{niter}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^k \approx {}^{t-\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}_p + \Delta t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^k \quad 4.2.15$$

de manera que sólo aprovechan la información de la última iteración de la ecuación constitutiva para calcular la sensibilidad:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_p}{dq} \approx \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_p}{dq} + \Delta t \frac{d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^n}{dq} \quad 4.2.16$$

De hecho definen un método de *Euler-backward* aplicado al incremento total de carga y no a las iteraciones constitutivas. Esta idea de calcular todo en la última posición la recalcan especialmente con comentarios del tipo: *the sensitivity computations are relatively inexpensive, since no iterations are required in the sensitivity analysis.*

Sin embargo, dicho método puede incluir errores porque se desprecian los cálculos de las iteraciones intermedias. Solamente en el caso de problemas bien puestos, con plasticidades sencillas o con pasos muy cortos de tiempo parece que intuitivamente puede dar siempre buenos resultados.

En vista de todo ello, en este trabajo se propone una alternativa iterativa para evaluar el término de la derivada de la deformación plástica. De esta manera, la sensibilidad de la deformación plástica se actualizaría en cada ciclo iterativo de la integración de *Euler-backward*, mientras que el cálculo de la sensibilidad de la estructura se seguiría realizando al final del paso de carga. Dicha aproximación incrementa, lógicamente, el coste computacional pero no excesivamente, dado que sólo se actualiza un vector de deformaciones plásticas y no es necesario resolver ningún sistema de ecuaciones ni formar costosas matrices.

Por consiguiente, la ecuación 4.2.16 no se utilizaría y en su lugar se calcularía:

$$\frac{d\epsilon_p}{dq} = \frac{d\epsilon_p}{dq} + \sum_{iter=1}^n \frac{d\epsilon_p^{iter}}{dq} \quad 4.2.17$$

De la ecuación 4.2.17 se observa que el primer término es ya conocido del paso anterior de carga y, por lo tanto, sólo interesa encontrar la derivada de la deformación plástica en cada ciclo iterativo del esquema de integración de la ecuación constitutiva y sumarla.

Se define para la iteración n-ésima la derivación de la regla de flujo, es decir:

$$\frac{d\dot{\epsilon}_p^n}{dq} = \frac{d}{dq} [\dot{\lambda}^n f^n] \quad 4.2.18$$

y por consiguiente:

$$\frac{d\dot{\epsilon}_p^n}{dq} = \frac{d\dot{\lambda}^n}{dq} f^n + \dot{\lambda}^n \frac{df^n}{dq} \quad 4.2.19$$

Nótese que en la fórmula 4.2.19 aparecen las derivadas del vector de flujo y del multiplicador plástico.

A continuación se desarrollan las expresiones para obtener la derivada de la deformación plástica prescindiendo del subíndice, pero dando por entendido que el cálculo es a nivel de iteraciones.

### La derivada del flujo plástico

Haciendo uso de las expresiones constitutivas de la plasticidad del apartado 4.1 se obtiene el vector de flujo para Von Mises según A4.1.10.

Por lo tanto, si se deriva de dicha expresión la componente i-ésima del vector de flujo, se obtiene:

$$\frac{df_i}{dq} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d}{dq} \left[ \frac{\sigma'_i}{\sqrt{J'_2}} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J'_2}} \left[ \frac{d\sigma'_i}{dq} - \frac{\sigma'_i}{2J'_2} \frac{dJ'_2}{dq} \right] \quad \text{para } i = x, y, z \quad 4.2.20$$

$$\frac{df_i}{dq} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d}{dq} \left[ \frac{2\tau_i}{\sqrt{J'_2}} \right] = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{J'_2}} \left[ \frac{d\tau_i}{dq} - \frac{\tau_i}{2J'_2} \frac{dJ'_2}{dq} \right] \quad \text{para } i = xy, xz, yz \quad 4.2.20bis$$

De las expresiones superiores sólo se necesitan las derivadas de las tensiones desviadoras normales porque las tangenciales serían las mismas, con lo que se define:

$$\frac{d\sigma'_i}{dq} = \frac{d\sigma_i}{dq} - \frac{1}{3} \left( \frac{d\sigma_x}{dq} + \frac{d\sigma_y}{dq} + \frac{d\sigma_z}{dq} \right) \quad \text{para } i = x, y, z \quad 4.2.21$$

Finalmente, se necesita conocer la derivada del segundo invariante del tensor desviador de tensiones, siendo éste el que aparece en A4.1.7, y derivando dicha expresión se obtiene:

$$\frac{dJ'_2}{dq} = \frac{1}{3} \left[ \sum_{i \neq j} (\sigma_i - \sigma_j) \left( \frac{d\sigma_i}{dq} - \frac{d\sigma_j}{dq} \right) \right] + 2 \sum_i \tau_i \frac{d\tau_i}{dq} \quad 4.2.22$$

Por consiguiente, se puede definir la derivada del vector de flujo en función de las derivadas de los estados tensionales previos, que son lógicamente conocidos.

### Derivada del multiplicador plástico

Recuérdese que también es necesaria la derivada del escalar plástico. Su expresión se deduce de la ecuación de consistencia y se obtiene la expresión A4.1.16 para el caso de flujo asociado. Por lo tanto, si se derivase se tendría:

$$\frac{d\dot{\lambda}}{dq} = \frac{dg/dq - dh/dq}{H + f:D:f} - \frac{g-h}{(H + f:D:f)^2} \left[ \frac{df}{dq} : D : f + f : \frac{dD}{dq} : f + f : D : \frac{df}{dq} + \frac{dH}{dq} \right] \quad 4.2.23$$

En el caso de plasticidad de Von Mises con endurecimiento lineal se particularizaría el numerador de 4.2.23 con las siguientes ecuaciones derivadas de las A4.1.6 y A4.1.13:

$$\frac{dg}{dq} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J'_2}} \frac{dJ'_2}{dq} \quad 4.2.24$$

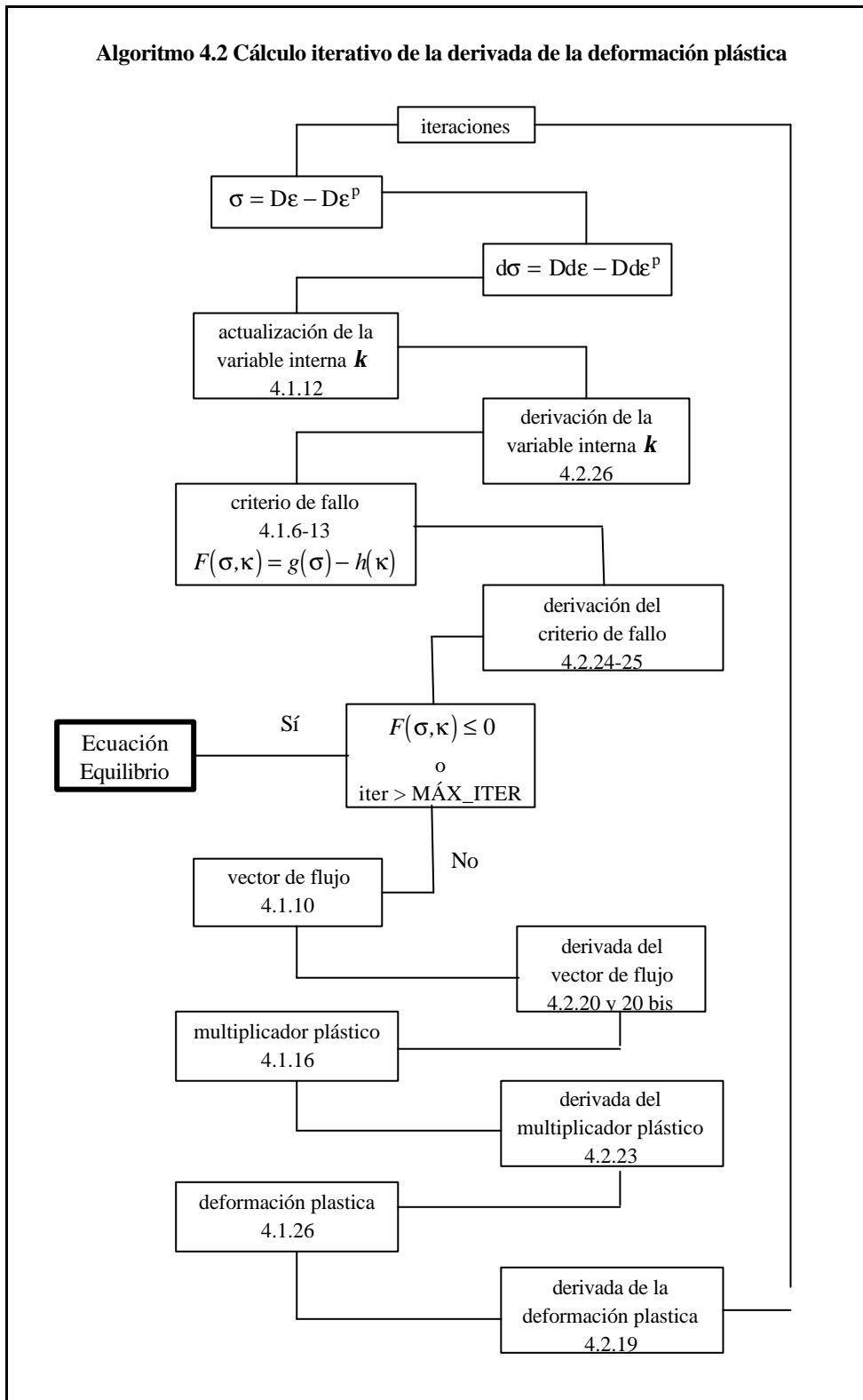
$$\frac{dh}{dq} = H \frac{d\kappa}{dq} \quad 4.2.25$$

y en virtud de la definición de la variable interna A4.1.12 se tiene que:

$$\frac{d\kappa}{dq} = \frac{H}{g} \sum \left[ -\frac{1}{g} \frac{dg}{dq} \sigma \dot{\epsilon}^p + \frac{d\sigma}{dq} \dot{\epsilon}^p + \sigma \frac{d\dot{\epsilon}^p}{dq} \right] \quad 4.2.26$$

Donde todas las tensiones y derivadas de tensiones son conocidas de la iteración anterior.

El algoritmo 4.2 aclara el procedimiento que se debe seguir para calcular según un esquema iterativo la derivada de la deformación plástica.



### Derivada de la matriz tangente

Los últimos términos de la pseudocarga corresponden a la derivada de la matriz de rigidez tangente que se expresa según:

$$\frac{dK_t}{dq} = \frac{d}{dq} \sum_{ielem} \int_V B D_T B dV \quad 4.2.27$$

Suponiendo una integración sobre elementos isoparamétricos

$$\frac{dK_t}{dq} = \sum_{ielem} \frac{d}{dq} \int_{V_o} B D_T B J dV_o \quad 4.2.28$$

En consecuencia:

$$\frac{dK_t}{dq} = \sum_{ielem} \left[ \int_{V_o} \frac{dB}{dq} D_T B J dV_o + \int_{V_o} B \frac{dD_T}{dq} B J dV_o + \int_{V_o} B D_T \frac{dB}{dq} J dV_o + \int_{V_o} B D_T B \frac{dJ}{dq} dV_o \right] \quad 4.2.29$$

En el apartado A4.1.3 se ha comentado que existen dos matrices tangentes en la formulación. La clásica se deduce de la condición de consistencia teórica de la elastoplasticidad, pero no es consistente con el esquema de integración utilizado. En cambio, la segunda [S2] sí que es consistente con la integración y genera una matriz tangente de mayor calidad, de manera que son necesarias menos iteraciones de Newton-Raphson para converger. Sin embargo, ambas matrices son de naturaleza tangente, esto quiere decir que la aproximación de calcular la sensibilidad en el último paso de carga será correcta si:

- Se han hecho pocas iteraciones.
- El problema está formulado con un modelo sencillo de plasticidad.

Por lo tanto, debe asumirse que la calidad de la sensibilidad tangente siempre será menor que el cálculo a través de una matriz de naturaleza secante, tal y como se muestra en la ilustración 3.4 del capítulo 3.

A continuación se calcularán las sensibilidades de ambas matrices tangentes, la consistente y la no consistente para obtener dos posibles formulaciones del cálculo de sensibilidades.

### Matriz no consistente

La matriz se definía en plasticidad asociada según la expresión A4.1.30, entonces la expresión derivada conduce a:

$$\frac{dD_T}{dq} = \frac{dD}{dq} - \frac{1}{(H + f:D:f)^2} \left[ \left( D f \otimes 2D \frac{df}{dq} \right) (H + f:D:f) - \left( \frac{dH}{dq} + \frac{df}{dq} : D : f + f : \frac{dD}{dq} : f + f : D : \frac{df}{dq} \right) (D f \otimes D f) \right] \quad 4.2.29$$

Donde todos los términos de la expresión 4.2.29 son conocidos de las expresiones desarrolladas anteriormente.

### Matriz consistente con la integración

De derivar la ecuación A4.1.31 se deduce:

$$\frac{dD_T}{dq} = \frac{dR}{dq} - \frac{1}{(H + f:R:f)^2} \left[ \left( R f \otimes 2R \frac{df}{dq} \right) (H + f:R:f) - \left( \frac{dH}{dq} + \frac{df}{dq} : R : f + f : \frac{dR}{dq} : f + f : R : \frac{df}{dq} \right) (R f \otimes R f) \right] \quad 4.2.30$$

La ecuación A4.1.32 no se puede derivar directamente, pero si se multiplica por la izquierda con la matriz  $Q$ , se puede reexpresar la relación del modo siguiente:

$$QR = D \quad 4.2.31$$

y realizando la diferenciación del producto:

$$\frac{dQ}{dq} R + Q \frac{dR}{dq} = \frac{dD}{dq} \quad 4.2.32$$

A continuación se aísla fácilmente el término que interesa, obteniendo:

$$\frac{dR}{dq} = Q^{-1} \frac{dD}{dq} - Q^{-1} \frac{dQ}{dq} R \quad 4.2.33$$

El último término contiene matrices desconocidas, por ello es necesario derivar la expresión A4.1.33 para obtener:

$$\frac{dQ}{dq} = \frac{dI}{dq} + \frac{d\lambda}{dq} D \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \dot{\lambda} \frac{dD}{dq} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \dot{\lambda} D \frac{d}{dq} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \quad 4.2.34$$

En la expresión anterior, el primer término es nulo porque la matriz identidad es constante. El último es desconocido, por lo tanto sólo falta derivar la expresión A4.1.34. Se obtiene:

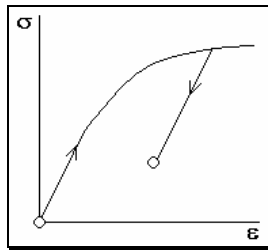
$$\frac{d}{dq} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) = \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{J_2}} \left[ -\frac{1}{2J_2'} \frac{dJ_2'}{dq} A + \frac{1}{J_2'} \frac{dJ_2'}{dq} f f^t - 2 \frac{df}{dq} f^t - 2 f \frac{df^t}{dq} \right] \quad 4.2.35$$

En conclusión el cálculo de la pseudocarga se realiza en dos etapas:

- En cada iteración de la ecuación constitutiva se calcula la derivada de la deformación plástica según el algoritmo 4.2.
- Al final del equilibrio se calculan el resto de términos de la pseudocarga y se utiliza la matriz consistente para resolver el sistema de ecuaciones de sensibilidad.

## **ANEXO 4.1: EL MODELO CONSTITUTIVO DE ELASTOPLASTICIDAD**

El comportamiento plástico de un material viene, caracterizado fundamentalmente por la aparición de unas deformaciones irreversibles que se producen a partir de un cierto nivel de tensión. Es decir, durante el proceso de carga la estructura se deforma y, posteriormente, si existe un proceso de descarga, el esqueleto resistente no será capaz de recuperar la forma original. Lógicamente, la aproximación lineal elástica no puede reproducir correctamente un comportamiento de este tipo.



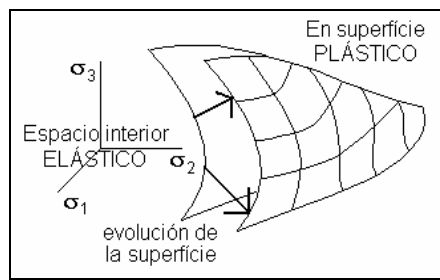
**Ilustración 4.2: Comportamiento elasto-plástico**

Hay diferentes enfoques teóricos que pretenden reproducir dicho fenómeno, desde teorías donde se plantea una relación constitutiva no lineal explícita como en los modelos de plasticidad de Ramberg-Osgood, hasta los modelos endocrónicos de plasticidad sin superficie de fluencia de Valanis, pasando por las distintas formulaciones de la plasticidad clásica. El problema de la elastoplasticidad ha sido ampliamente estudiado y puede encontrarse abundante literatura sobre los planteamientos anteriormente citados en: Malvern (1969) [M1], Owen *et al.* (1980)[O1], Simo *et al.* (1988) [S1], Lubliner (1990) [L1], Chen *et al.* (1991) [C1] y Crisfield (1991) [C2].

### **A4.1.1 LA RELACIÓN CONSTITUTIVA**

La relación constitutiva que pretende reproducir el efecto de deformaciones irreversibles en el material está basada en el concepto de superficie de fluencia o de plastificación. Según esta teoría, mientras el estado tensional se encuentre en el interior de la superficie límite el punto se comportará en régimen elástico; en cambio, cuando esté sobre dicha superficie se encontrará en régimen plástico. Por lo tanto, la idea básica es que el estado tensional se pueda mover sobre la superficie y en su interior pero nunca salir de ella.

A partir del concepto de superficie límite, se han desarrollado aproximaciones que pretenden reproducir, de forma lo más fidedigna posible, los diferentes comportamientos constitutivos que existen en la realidad. Así, por ejemplo, en el planteamiento más sencillo la superficie de fluencia permanece constante y las deformaciones pueden crecer indefinidamente, esto da lugar a la teoría de plasticidad perfecta. Por el contrario, en los comportamientos constitutivos más complejos la superficie límite evoluciona a medida que la deformación va aumentando y en consecuencia, el estado tensional puede arrastrar consigo a la superficie de fluencia y seguir manteniéndose sobre ella, lo que se denomina ley de endurecimiento. De igual modo y, con los parámetros convenientes, dicha ley puede simular el fenómeno de ablandamiento del material.



**Ilustración 4.3: Superficie de fluencia**

A continuación se describen las principales características del modelo de plasticidad que se ha considerado en este trabajo.

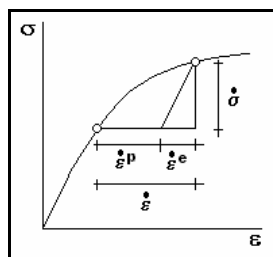
**Hipótesis 1:**

En la teoría más usual de plasticidad, no es posible establecer una correspondencia biunívoca entre las deformaciones y las tensiones totales basada exclusivamente en una relación analítica. Sin embargo, sí que es posible escribir la evolución de la ecuación constitutiva en forma incremental. En concreto, la plasticidad considera que la deformación infinitesimal total consiste en la suma de una parte elástica y una parte plástica, de manera que:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \tag{A4.1.1}$$

Por lo tanto, la relación constitutiva incremental infinitesimal puede escribirse de la siguiente manera:

$$\dot{\sigma} = D(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \tag{A4.1.2}$$



**Ilustración 4.4: Relación constitutiva incremental**

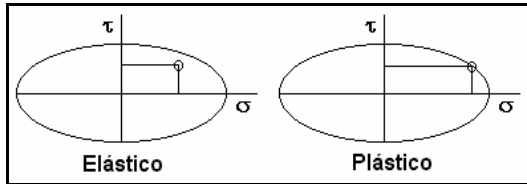


**Hipótesis 2:**

Los modelos de plasticidad se caracterizan por la existencia de un criterio de fluencia o criterio de fallo, el cual indica en qué estado se encuentra el material.

$$F(\sigma, \kappa) = g(\sigma) - h(\kappa) \leq 0 \tag{A4.1.3}$$

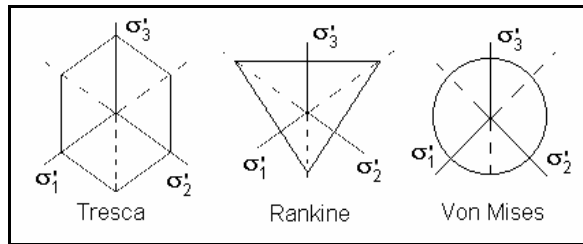
Matemáticamente, el criterio define la superficie límite y, como se ha comentado, el estado tensional del material siempre tiene que estar en su interior, verificando el régimen elástico, o en el contorno, verificando el régimen plástico.



**Ilustración 4.5: Visualización del criterio de fallo**

El término  $g(\sigma)$  representa una norma del estado tensional que está soportando el material y su expresión depende de la teoría con la que se trabaje: Tresca, Von Mises, Rankine, Mohr-Coulomb o Drucker-Prager. Las distintas

formulaciones posibles se deben escoger en función del tipo de material. En general, los dos primeros están relacionados con materiales metálicos, mientras que los dos últimos se utilizan en geomateriales.



**Ilustración 4.6: Aspecto de las superficies de fluencia en el plano p para diferentes criterios de fallo.**

Por su parte, el término  $h(\kappa)$  es un estado tensional máximo teórico admisible por el material, ese estado depende de unas variables internas  $\kappa$  relacionadas con la deformación plástica que ha absorbido el material. Por ejemplo se pueden establecer relaciones con respecto a:

- deformación plástica equivalente:  $\kappa \approx \int_0^t \|\dot{\epsilon}_p\| dt \tag{A4.1.4}$

- trabajo plástico:  $\kappa \approx \int_0^t \sigma \dot{\epsilon}_p dt \tag{A4.1.5}$

Se observa que las variables internas dependen de la historia de cargas, entonces  $h(\kappa)$  puede evolucionar a través de la ley de endurecimiento, o de ablandamiento, en los modelos más complejos.

En el presente trabajo, las expresiones generales de sensibilidad se han deducido con carácter general, pero numéricamente sólo se han desarrollado para la plasticidad de Von Mises. Por ello, parece interesante detallar las ecuaciones a las que conduce dicha teoría.

Se define la la norma del estado tensional según:

$$g(\sigma) = \sqrt{3}\sqrt{J'_2} \tag{A4.1.6}$$

siendo  $J'_2$  el segundo invariante del tensor desviador, que se expresa en las componentes normales del tensor de tensiones según:

$$J'_2 = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2 \tag{A4.1.7}$$

El término de  $h(\kappa)$  se explicitará en la hipótesis 4.

**Hipótesis 3:**

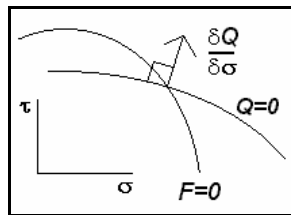
Supóngase un incremento de carga de la estructura. En estas circunstancias, se puede hacer la hipótesis de comportamiento lineal y predecir un estado tensional a partir de la teoría de la elasticidad. Si las tensiones en un determinado punto no verifican el criterio de fallo, significa que se está fuera de la superficie de fluencia, y que se debe modificar convenientemente el nivel de deformaciones plásticas para retornar el estado tensional a la superficie. Dicha modificación, de las deformaciones, se hace efectiva mediante la regla de flujo:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} r \tag{A4.1.8}$$

siendo  $Q$  un potencial plástico que depende del tipo de material y  $\dot{\lambda}$  un multiplicador plástico que cumple con la condición de consistencia plástica que se comentará en la hipótesis 5. Asimismo, la derivada del potencial recibe el nombre de vector de flujo  $r$ . En la plasticidad para materiales metálicos el potencial  $Q$  se identifica con la propia superficie de fluencia  $F$ , dando lugar a la llamada plasticidad asociada, en cuyo caso:

$$r = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = f \tag{A4.1.9}$$

**Ilustración 4.7: Regla de flujo**



Matemáticamente el criterio de fallo y el multiplicador plástico cumplen las llamadas condiciones de Kuhn-Tucker que tienen el siguiente sentido físico:

- Verificación del criterio de fallo,  $F(\sigma, \kappa) \leq 0$
- Exigencia del crecimiento del multiplicador plástico para evitar que la deformación plástica pueda disminuir,  $\dot{\lambda} \geq 0$
- Finalmente la condición de pertenecer a la superficie del potencial,  $\dot{\lambda} F = 0$

En la plasticidad de Von Mises la expresión A4.1.9 combinada con la A4.1.6, conducen a la siguiente regla de flujo:

$$f^t = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} \{ \sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{xz}, 2\tau_{yz} \} \quad A4.1.10$$

donde  $\sigma'_i$  son las componentes del tensor desviador de tensiones y, por lo tanto, se calcularían según la siguiente expresión:

$$\sigma'_i = \sigma_i - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad \text{para } i = x, y, z \quad A4.1.11$$

**Hipótesis 4:**

A medida que aumenta la deformación plástica según la regla de flujo y el estado tensional retorna a la superficie de fluencia, la estructura disipa toda la energía de deformación acumulada por el exceso en el incremento lineal de tensión. En este proceso, la deformación irreversible modifica a la propia superficie de fluencia, ya que las variables internas dependen de la deformación plástica, de manera que el modelo debe acompañarse de una ley de evolución de la superficie. Básicamente existen cuatro tipos:

- Sin endurecimiento: es el caso de la plasticidad perfecta donde la superficie límite de fluencia siempre permanece constante.
- Endurecimiento isotrópico: supone que la superficie se expande uniformemente para todo estado tensional.
- Endurecimiento cinemático: supone que la superficie de plastificación se traslada en el espacio de tensiones.
- Endurecimiento mixto: vendrá definido por la mezcla de los dos anteriores.

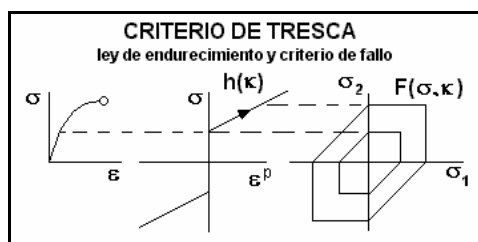


Ilustración 4.9: Endurecimiento isotrópico

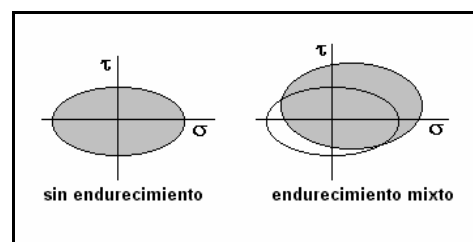


Ilustración 4.8: Otros endurecimientos

En el desarrollo numérico de la tesis se ha utilizado la siguiente ley de endurecimiento isotrópico, donde la variable interna se ha definido en función del trabajo plástico de deformación:

$$\kappa = \int_0^t \frac{1}{g(\sigma)} \sigma \dot{\epsilon}_p dt \quad A4.1.12$$

y como ley de endurecimiento:

$$h(\kappa) = \sigma_o + H\kappa \quad A4.1.13$$

donde  $\sigma_o$  es la tensión máxima elástica admisible unidimensional y  $H$  una constante que tendría el sentido del módulo de plasticidad, en un espacio unidimensional de tensiones-deformaciones.

### Hipótesis 5:

Finalmente, sólo resta exigir la condición de consistencia plástica, según la cual, el estado tensional nunca podrá salir de la superficie de fluencia y, por lo tanto, se deberá cumplir que:

$$\dot{F} = 0 \quad A4.1.14$$

o bien desarrollando la expresión:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = f \dot{\sigma} = 0 \quad A4.1.15$$

y en caso de endurecimiento:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad A4.1.16$$

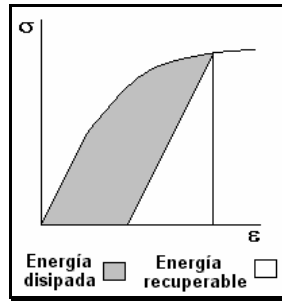
Combinando A4.1.15 con las ecuaciones de las hipótesis anteriores A4.1.8 y A4.1.2, y con la ley de endurecimiento A4.1.13, se deduce la expresión incremental del multiplicador plástico. En concreto para el problema definido:

$$\dot{\lambda} = \frac{g(\sigma) - h(\kappa)}{H + f:D:f} \quad A4.1.16$$

Por último, cabe señalar que el modelo elastoplástico disipa una energía de deformación a través de la deformación plástica que se convierte en irrecuperable:

$$\dot{\gamma} = \sigma \dot{\epsilon}^p \quad A4.1.17$$

Gráficamente se representaría según la ilustración 4.10:



**Ilustración 4.10: Energías de la curva elasto-plástica**

#### A4.1.2 EL MODELO NUMÉRICO

Supuesto un problema estructural, se puede formular el Principio de los Trabajos Virtuales como ecuación de balance energético y obtener una ecuación de equilibrio del sistema:

$$\int_V \delta \epsilon^t \sigma dV = \int_V \delta u^t b dV + \int_S \delta u^t t ds \quad A4.1.18$$

con condiciones de contorno en desplazamientos en una parte del dominio:

$$u|_{\Gamma} = u_o \quad A4.1.18bis$$

En este caso, la discretización en elementos finitos conduce a un sistema no lineal para el paso de carga  $t + \Delta t$  :

$$\sum_{nelem} \int_V B^{t+\Delta t} \sigma dV = \sum_{nelem} \int_V N^{t+\Delta t} b dV + \sum_{nelem} \int_S N^{t+\Delta t} t ds \quad A4.1.19$$

El sistema es no lineal, porque la integral de las tensiones que aparece en el término de la izquierda de A4.1.19 no puede calcularse directamente. Recuérdese, que existe una deformación plástica que va cambiando continuamente y, por lo tanto, debido a la naturaleza incremental diferencial de la ecuación constitutiva se tiene que:

$${}^{t+\Delta t} \sigma = {}^t \sigma + D \left( \int_t^{t+\Delta t} \dot{\epsilon} dt - \int_t^{t+\Delta t} \dot{\epsilon}^p dt \right) \quad A4.1.20$$

Con lo cual, es imposible definir una ecuación secante de equilibrio de fuerzas que nos conduzca a un sistema del tipo:

$$K_s u = f \quad A4.1.21$$

Sin embargo, sí que se puede aproximar la relación incremental diferencial A4.1.2 mediante una relación incremental finita, obteniéndose:

$$\Delta \sigma = D(\Delta \epsilon - \Delta \epsilon^p) \quad A4.1.22$$

Por consiguiente, la resolución numérica del problema se inicia definiendo una relación incremental finita entre las tensiones y las deformaciones.

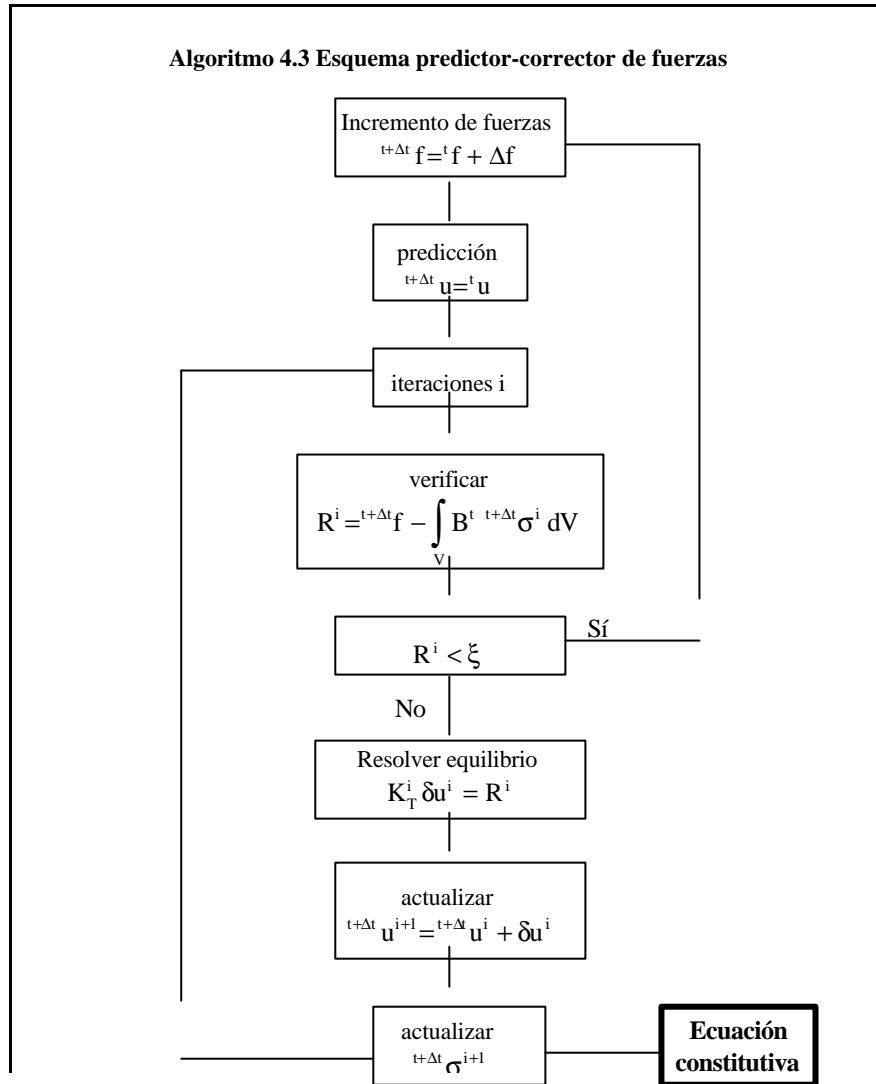
Asimismo, la ecuación de equilibrio A4.1.19 se puede derivar y obtener una ecuación de equilibrio en forma incremental del tipo:

$$\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{f} \quad \text{A4.1.23}$$

Por lo tanto, en el planteamiento general de la resolución del problema no lineal, se formulan ecuaciones y metodologías de tipo incremental, tanto a nivel de equilibrio de fuerzas como de tensiones.

La implementación numérica de la elastoplasticidad generalmente se realiza mediante esquemas de predicción-corrección. En realidad, en todo programa de elementos finitos no lineal, suelen existir dos algoritmos de este tipo: el primero funciona globalmente a nivel de equilibrio de fuerzas, iterando sucesivamente para disipar las solicitaciones externas impuestas. El segundo, a nivel de fuerzas internas, iterando para situar el estado tensional sobre la superficie de fluencia en el caso de existencia de plastificación para cada punto de integración.

La resolución del equilibrio de fuerzas externas suele hacerse en base a esquemas de tipo Newton-Raphson, con todas sus variantes posibles y siguen, de forma general, las líneas directrices del algoritmo 4.3. En este caso, supuesto un incremento de carga en el problema, se puede resolver el sistema incremental de ecuaciones A4.1.23 con la adecuada matriz de rigidez tangente. Hay varias opciones posibles, pero el uso de una matriz consistente con la integración de las ecuaciones constitutivas acelera la convergencia del método y reduce el coste computacional, tal y como postulan Simo *et al.* (1985) [S2]. En el apartado A4.1.3 se comentarán aspectos sobre el cálculo de la matriz tangente consistente y no consistente que afectan al análisis de sensibilidad.



En la evaluación del residuo de fuerzas, se realiza una actualización de las tensiones del material en cada punto. Por tanto, es necesario otro esquema de predicción-corrección que permita devolver el estado tensional a la superficie de fluencia en el caso de que se haya producido plastificación. En consecuencia, supuesto un incremento del estado de deformaciones, se actualizaría el estado tensional según la siguiente relación :

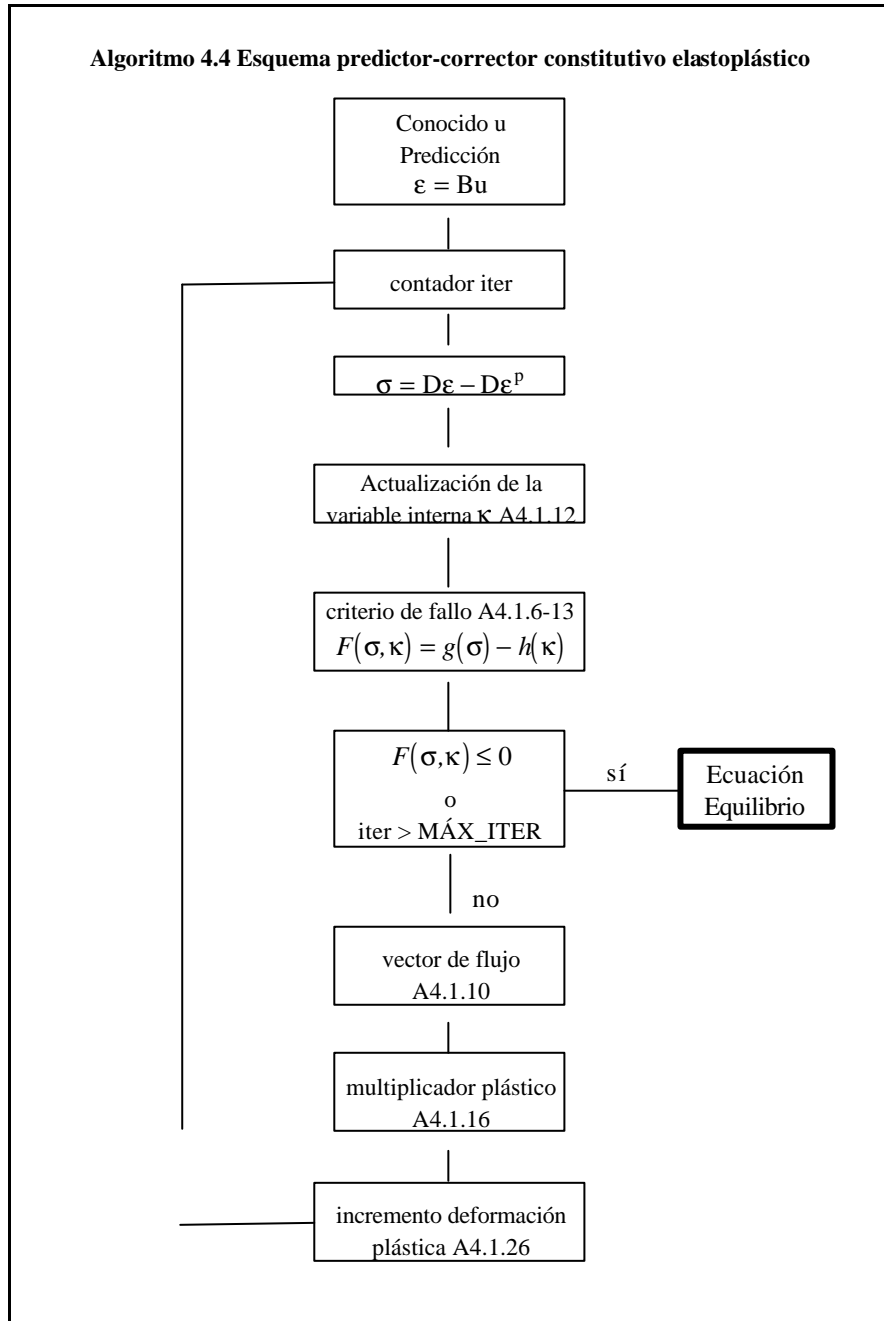
$${}^{t+\Delta t} \sigma = {}^t \sigma + D \Delta \epsilon - D \int_t^{t+\Delta t} \dot{\epsilon}^p dt \tag{A4.1.24}$$

Diversas estrategias son posibles para calcular dicha integral de forma discreta, pero es bastante usual aproximarla mediante la regla trapezoidal, según la cual se tendría:

$$\int_t^{t+\Delta t} \dot{\epsilon}^p dt \approx \Delta \epsilon^p = \Delta t \left[ (1-\alpha) {}^t \dot{\epsilon}^p + \alpha {}^{t+\Delta t} \dot{\epsilon}^p \right] \tag{A4.1.25}$$

Si se considera  $\alpha = 0$ , se obtiene el método de *Euler-forward*; aunque dicho esquema conduce de forma sencilla a una solución de naturaleza explícita, no es recomendable porque, en general, los

errores se acumulan rápidamente. En cambio,  $\alpha = 1/2$  es de uso bastante corriente y da lugar al método de *Crank-Nicholson*. Finalmente, si se toma  $\alpha = 1$ , el método recibe el nombre de *Euler-backward*, esta última opción tiene la ventaja de generar buenos resultados, incluso con grandes incrementos de carga.

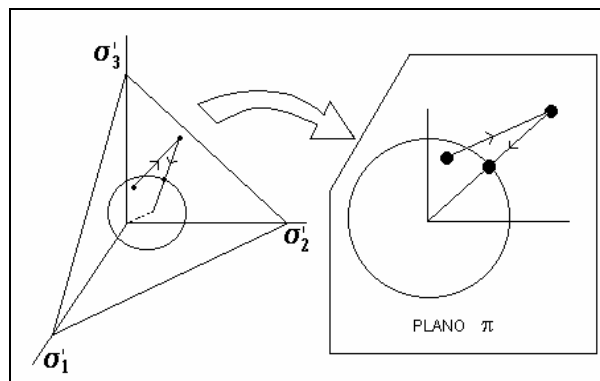


Nótese que el método de *Euler-backward* conduce a evaluar el incremento de la deformación plástica en función del último punto de equilibrio conseguido. Por lo tanto, expresando A4.1.8 en forma incremental y particularizándola para la plasticidad asociada, se tendría:



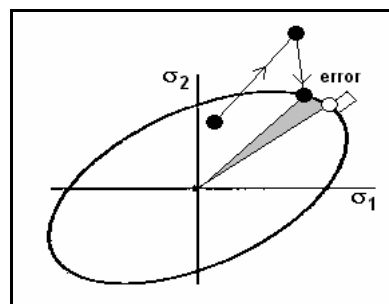
$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \lambda \mathbf{t}^{t+\Delta t} \mathbf{f} \quad \text{A4.1.26}$$

En el caso de la plasticidad de Von Mises, el método de *Euler-backward* presenta la particularidad de situar el nuevo estado tensional sobre la superficie de fluencia en una única iteración. Además, debido a que el modelo de Von Mises tiene una superficie de fluencia cilíndrica, el vector de flujo siempre será radial y perpendicular a dicha superficie en los casos de deformación plana y tres dimensiones. En consecuencia, el cálculo del incremento del multiplicador plástico conduce directamente a una posición correcta de equilibrio según la ilustración 4.10:



**Ilustración 4.11: Estado tensional y retorno a la superficie de fluencia**

En cambio, dicha propiedad no se cumple en el estado de tensión plana, porque en este último caso la superficie de fluencia se ve como la intersección esviada de un cilindro y un plano. Por lo tanto, se genera una elipse que no permite asegurar que el flujo en el punto de partida conducirá a un punto en el cual el flujo también será perpendicular en la llegada.



**Ilustración 4.12: Error en el retorno para tensión plana**

El no cumplimiento de la perpendicularidad de la dirección del flujo con el que se determina el estado tensional, determina una violación en las hipótesis de la teoría de elastoplasticidad. Para

garantizar dicha condición, Crisfield [C2], propone realizar varias iteraciones en el interior del esquema de predicción-corrección del estado tensional. La idea básica es calcular un residuo con la hipótesis de que el verdadero flujo sí es perpendicular y realizar unas iteraciones hasta eliminarlo. Dado que esta tesis está orientada al análisis de sensibilidad no se consideró necesario introducir dicha sugerencia, entre otras razones porque básicamente no alteraría de forma notable la deducción de las ecuaciones principales de sensibilidad.

#### A4.1.3 ACERCA DE LA MATRIZ TANGENTE

En el algoritmo 4.3 se ha comentado que el sistema de equilibrio de fuerzas se calcula con una matriz de rigidez tangente, esto es:

$$K_t = \int_V B^t D_t B dV \quad A4.1.27$$

Por ello, es necesario el cálculo del tensor constitutivo tangente. En una aproximación diferencial ideal y teórica, se tendría que:

$$\dot{\sigma} = D(t)\dot{\epsilon} \quad A4.1.28$$

Dicha expresión correspondería a la pendiente en el punto de la curva de equilibrio tensión-deformación para el nivel  $t$  de cargas.

A partir de la formulación incremental presentada anteriormente, se tiene que:

$$\Delta\sigma = D\Delta\epsilon - D\Delta\lambda f \quad A4.1.29$$

si se substituye en la ecuación anterior la expresión del multiplicador plástico A4.1.16 se obtiene el módulo tangencial consistente con la formulación pero no con el esquema de integración utilizado:

$$D_T^{\text{no-consist}} = D - \frac{Df \otimes Df}{H + f:D:f} \quad A4.1.30$$

Dicha expresión conduce a una matriz tangente de rigidez que se puede utilizar en el método iterativo de Newton-Raphson.

No obstante, Simo *et al.* (1985)[S2] demostraron que dicha matriz no es consistente con el esquema de integración de *Euler-backward* y, por consiguiente, el uso de esta expresión destruye la convergencia cuadrática del método de Newton Raphson. En consecuencia, dedujeron un nuevo tensor tangente que, esta vez, sí que actúa como una auténtica aproximación al tensor ideal diferencial. La definición de dicha matriz constitutiva tangente se escribirá siguiendo la notación de Crisfield [C2].

Una vez se ha llegado al equilibrio de la ecuación constitutiva, se define:

$$D_T^{\text{consist}} = R - \frac{Rf \otimes Rf}{H + f:R:f} \quad A4.1.31$$

Siendo:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{D} \quad \text{A4.1.32}$$

y

$$\mathbf{Q} = \left[ \mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \quad \text{A4.1.33}$$

La expresión de la derivada del vector de flujo tiene la siguiente expresión en un estado tridimensional de tensiones:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2g(\boldsymbol{\sigma})} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ & & & 6 & & \\ & & & & 6 & \\ & & & & & 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{g(\boldsymbol{\sigma})} f f^t \quad \text{A4.1.34}$$

Concluyendo se puede decir que existe más de una matriz tangente, pero que la consistente con el esquema de integración de *Euler-backward* acelera el proceso de convergencia de Newton Raphson.

**BIBLIOGRAFÍA ESPECÍFICA DEL CAPÍTULO**

- [A1] Arora, J. S. y Lee T. H. "A computational method for design sensitivity analysis of elastoplastic structures". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 122, 27-50, 1995.
- [C1] Chen, W. F. y Zang, H. *Structural plasticity: Theory, problems and CAE software*. Ed. Springer-Verlag. 1991.
- [C2] Crisfield, M.A. *Non-linear Finite Elements Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & sons. 1991.
- [H1] Haslinger, J. y Mäkinen, R. "Shape optimization of elasto-plastic bodies under plane strains: sensitivity analysis and numerical implementation". *Structural Optimization* 4, 133-141, 1992.
- [K1] Kleiber, M., Hien, T.D., Antúnez, H. y Kowalczyk, P. "Parameter sensitivity of elastoplastic response". *Engineering Computations* 12, 263-280, 1995.
- [K2] Kleiber, M. y Hien, T.D. "Parameter sensitivity in nonlinear dynamics, structural stability and plasticity". *Proceedings del III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*. Editores M. Doblaré, J.M. Correas, E. Alarcón, L. Gavete y M. Pastor. SEMNI. 1996.
- [K3] Kleiber, M. y Kowalczyk, P. "Sensitivity analysis in plane stress elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity". En preparación.
- [L1] Lubliner, J. *Plasticity theory*. Mc Millan Publishing Company. 1990.
- [M1] Malvern, L.E.. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Ed. Prentice-Hall. 1969.
- [M2] Michaleris, P., Tortorelli, D. A. y Vidal, C. A. "Tangent operators and design sensitivity formulations for transient non-linear coupled problems with applications to elastoplasticity". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 2471-2499, 1994.
- [O1] Owen, D.R.J. y Hinton, E. *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Ed. Pineridge Press Limited. 1980.
- [R1] Ryu, Y.S., Haririan, M., Wu, C.C. y Arora, J.S. "Structural design sensitivity analysis of nonlinear response". *Computers and Structures* 21, 245-255 (1985).
- [S1] Simo, J.C. y Hughes, T.J.R. *Elastoplasticity and viscoplasticity. Computational aspects*. 1988.
- [S2] Simo, J.C. y Taylor, R.J. "Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity". *Computational Methods Applied Mechanics and Engineering*. 48, 101-118, 1985.
- [V1] Vidal, C.A. y Haber, R. B. "Design sensitivity analysis for rate-independent elastoplasticity". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 107, 393-431, 1993.