

Capítulo 5

Modelo constitutivo no lineal anisótropo continuo para composites

5.1. Introducción

Los materiales compuestos presentan mucha complejidad cuando se intenta aproximar su comportamiento real. Los composites son materiales heterogéneos de muy diversas tipologías, presentan una alta anisotropía y su comportamiento está gobernado por distintos mecanismos (rotura de fibras, *debonding* agrietamiento de la matriz, deslaminación, pandeo local de la fibra, etc). Por lo tanto resulta muy difícil modelizar su comportamiento no lineal mediante un solo modelo constitutivo único y general.

El modelo constitutivo que se propone utiliza es un *mesomodelo* basado en el uso de una regla de mezclas para determinar la contribución al comportamiento global a partir del modelo constitutivo de cada una de las sustancias constituyentes. Para ello se usa una teoría de mezclas modificada, Oñate *et al.* (1997) Oller *et al.* (1995 y 1996), junto a una formulación general para el tratamiento de la anisotropía, Oller *et al.* (1995, 1996, 2002), y el análisis mediante los elementos finitos conforman una estructura mecánica muy adecuada para modelar el comportamiento de sólidos heterogéneos, y en particular, composites. Las bases de esta teoría están en la interacción a escala local entre los diferentes materiales componentes en un medio continuo. Asimismo, se supone que en cada punto del sólido los materiales componentes participan simultáneamente en la proporción de volumen que lo integra en el composite. Esto permite homogeneizar la distribución de los materiales en cada punto. De este modo el compuesto se trata como una combinación del comportamiento de los constituyentes según su fracción volumétrica y asumiendo compatibilidad de deformaciones.

Para simular el comportamiento no lineal de un compuesto es necesario considerar muchas de sus características relevantes como: la fuerte anisotropía, la existencia de distintas sustancias componentes con su propia ley constitutiva (que definen su comportamiento particular: elástico, daño progresivo, elasto-plástico, etc), deslizamiento fibra-matriz (llevando a la pérdida de compatibilidad cinemática), pandeo local de las fibras, tendencia de las fibras al alineamiento en la dirección de la tensión máxima, grandes deformaciones,

etc. Muchos de estos fenómenos producen pérdida de resistencia y rigidez global y son los principales responsables del comportamiento no lineal de los materiales compuestos. El modelo constitutivo utilizado, implementado en un código de elementos finitos, tiene en cuenta las anteriores características. Su formulación está descrita con detalle por Car *et al.* (1999 y 2000). Este modelo es también un marco adecuado para contemplar el deterioro de las propiedades con el tiempo debido a tensiones cíclicas. En el presente trabajo se incorpora a este modelo la capacidad de simular el deterioro producido por la acción de cargas cíclicas a través de la disminución del umbral de discontinuidad elástica de cada componente según la formulación presentada en el capítulo 4.

5.2. Teoría de mezclas. Regla de homogenización

Existen diversas alternativas que permiten simular el comportamiento constitutivo de los materiales compuestos una de ellas es la teoría de mezclas que con ciertas modificaciones es adecuada para representar el comportamiento de un material compuesto, incluso su comportamiento no lineal.

La teoría de mezclas permite que cada material componente del compuesto pueda tener un comportamiento distinto acorde con su propia ecuación constitutiva (elástica, elasto-plástica, visco-plástica, daño, fractura, etc.). Por decirlo de alguna forma la teoría de mezclas puede entenderse como un gestor de los modelos constitutivos de cada constituyente. Permite el tratamiento simultáneo de los distintos tipos de comportamiento de los constituyentes, combinando la respuesta de cada uno de ellos para obtener el del composite. Por lo tanto, este tipo de modelo constitutivo permite simular el compuesto más allá de su límite de linealidad. La regla de mezclas determina mediante una *ecuación de cierre* las condiciones cinemáticas internas entre componentes. Por el otro lado, se logra obtener el estado tensional global del composite a partir de una *recomposición* de esfuerzos (ver figura 5-1).

La teoría de mezclas en su formulación clásica establece que los materiales componentes que coexisten en un mismo punto del sólido deben tener la misma deformación, es decir, considera que las componentes participan en paralelo. Esto plantea una limitación en la predicción del comportamiento de los materiales compuestos. Para solucionar este problema Oller *et al.* (2002) presenta una generalización de esta teoría donde a partir de una ecuación de compatibilidad más adecuada se adapta al comportamiento del composite, es decir, componentes participando en serie y paralelo.

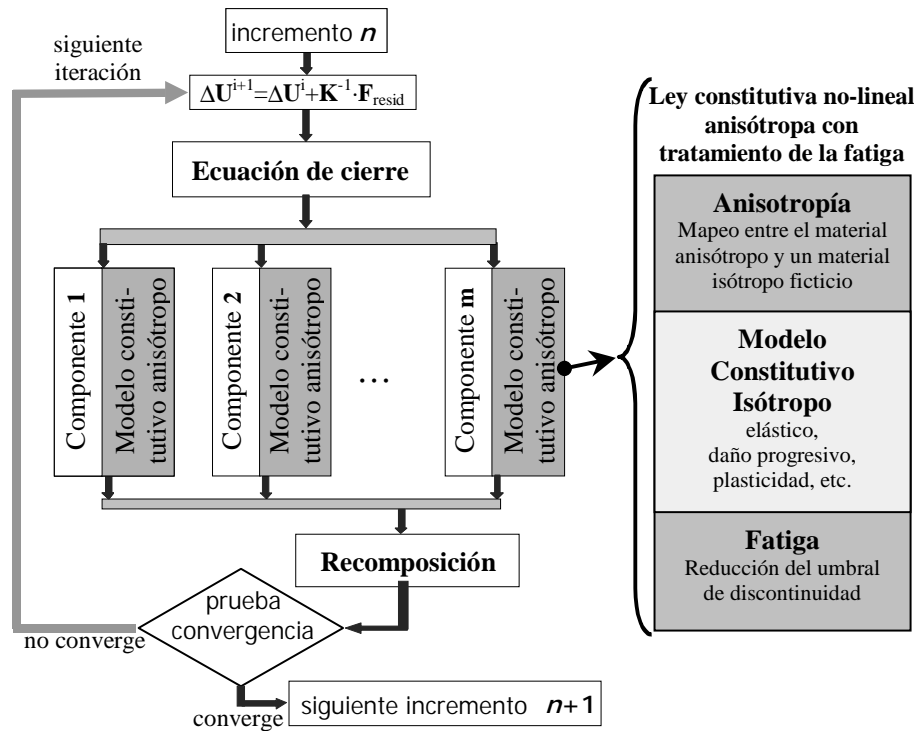


Figura 5-1. Diagrama esquemático para la solución no-lineal para un material multi-componente

5.2.1. Teoría de mezclas clásica

La teoría de mezclas clásica fue planteada por primera vez por Trusdell y Toupin (1960) que formuló la base conceptual para otros trabajos posteriores (Green y Naghli, 1965) (Ortiz y Popov, 1982) (Oller *et al.* 1996). Se basa en el principio de interacción de los componentes que forman parte de un material compuesto según las siguientes hipótesis: *i)* en cada volumen infinitesimal de un compuesto solo un número finito de sustancias componentes participan; *ii)* cada sustancia participa en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que el volumen relativo que ella ocupa; *iii)* todos los componentes observan compatibilidad cinemática; *iv)* el volumen ocupado por cada componente es mucho menor que el volumen total del compuesto.

Así, la teoría de mezclas permite estudiar el comportamiento de un punto de un compuesto a través de la mecánica del medio continuo. En cada punto material todas las sustancias componentes contribuyen al mismo tiempo y con sus propias leyes constitutivas anisótropas no lineales en su *fracción de volumen* o *coeficiente volumétrico de participación* (k_i) definido como

$$k_c = \frac{dV_c}{dV_0} \quad (5-1)$$

donde V_c es el volumen de cada componente y V_0 es el volumen total del composite.

Dado que la teoría de mezclas clásica asume que todas las fases tienen el mismo campo de deformaciones en cada punto. Esta aceptación es equivalente a la hipótesis de que la contribución de esfuerzo de cada componente es en paralelo. Lo que establece que en pequeñas deformaciones la siguiente ecuación de cierre

$$\varepsilon_{ij} \equiv (\varepsilon_{ij})_1 = (\varepsilon_{ij})_2 = \dots = (\varepsilon_{ij})_n \quad (5-2)$$

donde ε_{ij} es la deformación del material compuesto y $(\varepsilon_{ij})_c$ es la deformación de la sustancia componente c -ésima de dicho compuesto.

(a) Expresión de la energía libre

La energía libre de un material compuesto está dada por la adición de la función de energía libre de cada una de sus componentes ponderadas en función de su participación volumétrica. Esto puede ser expresado como

$$m\psi(\varepsilon^e, \theta, \alpha^m) = \sum_{c=1}^n k_c m_c \psi_c [\varepsilon, (\varepsilon^p)_c, \theta, \alpha_c^m] \quad (5-3)$$

$$\psi(\varepsilon^e, \theta, \alpha^m) = \sum_{c=1}^n k_c \frac{m_c}{m} \psi_c \quad (5-4)$$

donde m es la masa; ψ es la energía libre específica; ε , ε^e , ε^p , son los tensores de deformación total, elástico y plástico respectivamente; θ es la temperatura absoluta y α^m es el conjunto de variables internas de plasticidad. El sufijo c indica las variables para cada componente c -ésimo del compuesto.

Los componentes de participación volumétrica satisfacen la condición

$$\sum_{c=1}^n k_c = 1 \quad (5-5)$$

lo cual permite recuperar la expresión de la energía libre para el caso de materiales simples y garantiza la conservación de la masa.

(b) Expresión de la entropía

A partir de la desigualdad de Clausius-Duhem y aplicando el método de Coleman (Malvern, 1969) –con el que se garantiza una disipación positiva- se obtiene la siguiente expresión para la entropía

$$\eta = -m \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e_{ij}, \theta, \boldsymbol{\alpha}^m)}{\partial \theta} = - \sum_{c=1}^n k_c m_c \frac{\partial \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}^e_{ij}, \theta, \boldsymbol{\alpha}^m)_c}{\partial \theta} = \sum_{c=1}^n k_c \eta_c \quad (5-6)$$

donde η_c es la entropía de cada una de las componentes del material

(c) Ecuación constitutiva

La ecuación constitutiva surge también al aplicar con el método de Coleman la desigualdad de Clausius-Duhem

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = m \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e_{ij}, \theta, \boldsymbol{\alpha}^m)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c m_c \frac{\partial \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}^e_{ij}, \theta, \boldsymbol{\alpha}^m)_c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c (\boldsymbol{\sigma}_{ij})_c \quad (5-7)$$

La ecuación constitutiva secante para el material compuesto se escribe como

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl}^S \boldsymbol{\varepsilon}^e_{kl} = \sum_{c=1}^n k_c (\boldsymbol{\sigma}_{ij})_c = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbf{C}_{ijkl}^S)_c (\boldsymbol{\varepsilon}^e_{kl})_c \quad (5-8)$$

Teniendo en cuenta la condición de compatibilidad expresada por la ecuación (5-2) la deformación de cada componente viene dada por

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{kl})_c = \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} = (\boldsymbol{\varepsilon}^e_{kl})_c + (\boldsymbol{\varepsilon}^p_{kl})_c + (\boldsymbol{\varepsilon}^\theta_{kl})_c \quad (5-9)$$

$$(\boldsymbol{\varepsilon}^e_{kl})_c = \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} - (\boldsymbol{\varepsilon}^p_{kl})_c - (\boldsymbol{\varepsilon}^\theta_{kl})_c \quad (5-10)$$

donde $(\boldsymbol{\varepsilon}^e_{kl})_c$, $(\boldsymbol{\varepsilon}^p_{kl})_c$, $(\boldsymbol{\varepsilon}^\theta_{kl})_c$ representan la deformación elástica, plástica y de origen térmico. La deformación plástica del material compuesto se obtiene substituyendo la expresión (5-10) en la ecuación (5-8), esto es

$$\mathbf{C}_{ijkl}^S (\boldsymbol{\varepsilon}_{kl} - \boldsymbol{\varepsilon}^p_{kl} - \boldsymbol{\varepsilon}^\theta_{kl}) = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbf{C}_{ijkl}^S)_c (\boldsymbol{\varepsilon}_{kl} - (\boldsymbol{\varepsilon}^p_{kl})_c - (\boldsymbol{\varepsilon}^\theta_{kl})_c) \quad (5-11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p_{kl} = (\mathbf{C}_{ijkl}^S)^{-1} \left(\sum_{c=1}^n k_c (\mathbf{C}_{ijkl}^S)_c ((\boldsymbol{\varepsilon}^p_{kl})_c - (\boldsymbol{\varepsilon}^\theta_{kl})_c) \right) - \boldsymbol{\varepsilon}^\theta_{kl} \quad (5-12)$$

El tensor constitutivo tangente surge de considerar la variación de la tensión respecto de las deformaciones según la expresión

$$\mathbf{C}_{ijkl}^T = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = m \frac{\partial^2 \psi(\varepsilon_{ij}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbf{C}_{ijkl}^T)_c \quad (5-13)$$

La teoría de mezclas clásica, el la cual se parte de la hipótesis de que el campo de deformaciones es el mismo para todas las sustancias componentes del compuesto, es rigurosamente válida sólo si se aplica a materiales cuyos componentes trabajan en paralelo. Estos materiales se caracterizan por su estado de tensiones resulta de la adición de las tensiones de cada componente ponderadas por la fracción de volumen.

5.2.2. Teoría de mezclas generalizada

La limitación de la teoría de mezclas clásica ha impulsado a diversas modificaciones para tener en cuenta tanto el comportamiento en paralelo como en serie de las sustancias componentes. El comportamiento serie-paralelo invalida la hipótesis de compatibilidad de deformaciones de la teoría clásica. Un posible enfoque es el propuesto por Oller *et al.* (1995), Oñate *et al.* (1997) y Neamtu *et al.* (1997) que establecen una generalización de la teoría clásica incluyendo las configuraciones en serie y en paralelo para pequeñas deformaciones. Esta generalización define una ecuación de cierre alternativa a la ecuación (5-2)

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \chi) \varepsilon_{ij}^{par} + \chi \varepsilon_{ij}^{ser} \quad (5-14)$$

donde ε_{ij}^{par} y ε_{ij}^{ser} son las componentes serie y paralelo de las deformaciones definidas como

$$\varepsilon_{ij}^{par} = \frac{1}{n} \sum_{c=1}^n (\varepsilon_{ij})_c \quad \varepsilon_{ij}^{ser} = \sum_{c=1}^n (\varepsilon_{ij})_c \quad (5-15) \text{ y } (5-16)$$

y χ es un parámetro de acoplamiento serie-paralelo que relaciona de manera ponderada los dos comportamientos, el cual puede ser interpretado como una relajación entre el comportamiento estrictamente en serie o en paralelo (ver figura 5-2). No es fácil obtener este parámetro. Debe ser encontrado experimentalmente o bien a través de modelos micromecánicos (ver Apéndice C), ya que depende de la interacción entre las distintas fases a nivel microestructural.

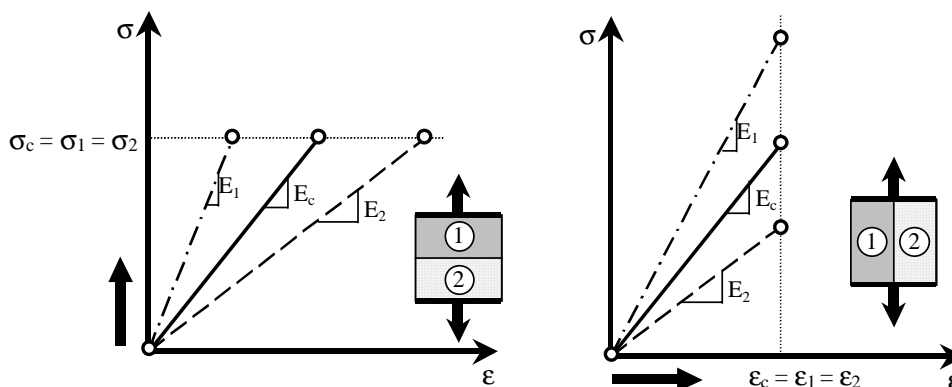


Figura 5-2. Comportamiento estrictamente serie (izquierda) y paralelo (derecha) para un composite de dos componentes.

Otra forma de modificar implícitamente la *ecuación de cierre* de la teoría de mezclas es redefiniendo las propiedades de los materiales componentes para que su contribución en paralelo en el modelo sea equivalente a la configuración real (Mayugo *et. al.* 2000).

Oller *et. al.* (2002) han presentado una formulación mejorada de la relación que se establece entre la deformación en el compuesto y la deformación de cada componente. Permitiendo establecer una ecuación de cierre que vincule el comportamiento en serie con el comportamiento en paralelo. Se establece una expresión donde la deformación del componente *c-esimo* $(\epsilon_{ij})_c$ se descompone en una cuota de participación en paralelo $(\epsilon_{ij}^{par})_c$ y otra en serie $(\epsilon_{ij}^{ser})_c$

$$(\epsilon_{ij})_c = (\epsilon_{ij}^{par})_c + (\epsilon_{ij}^{ser})_c \quad (5-17)$$

Donde la participación en paralelo del componente *c-esimo* resulta de la ecuación de cierre de la teoría de mezclas clásica (ecuación 4-2), donde la deformación es igual para todas las componentes. Se puede calcular según la expresión

$$(\epsilon_{ij}^{par})_c = (1 - \chi_c) \cdot I_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (5-18)$$

donde χ_c es el parámetro de acoplamiento serie-paralelo para cada componente, , $0 \leq |\chi_c = \sin \alpha_\chi| \leq 1$, que depende del ángulo $0 \leq [\alpha_\chi = (x_{Loc}^f, x_1^\sigma)] \leq \pi/2$, que hay el entre la orientación de la tensión principal (x_1^σ) mayor respecto de la orientación de la fibra (x_{Loc}^f) . Éste parámetro vale 0 para un comportamiento en paralelo puro y 1 para un comportamiento en serie puro (ver figura 5-3). Físicamente este parámetro sitúa la posición del refuerzo respecto de la acción. Para el estado de alineación de la fibra de refuerzo en

paralelo ($\chi_c = 0$), se obtiene la deformación $(\epsilon_{ij})_c = (\epsilon_{ij}^{par})_c = (1 - \chi_c) \cdot I_{ijkl} \epsilon_{kl} = \epsilon_{ij}$ para el componente *c-esimo*, que resulta igual a todos los otros componentes, conforme con la ecuación de cierre de la teoría de mezclas clásica.

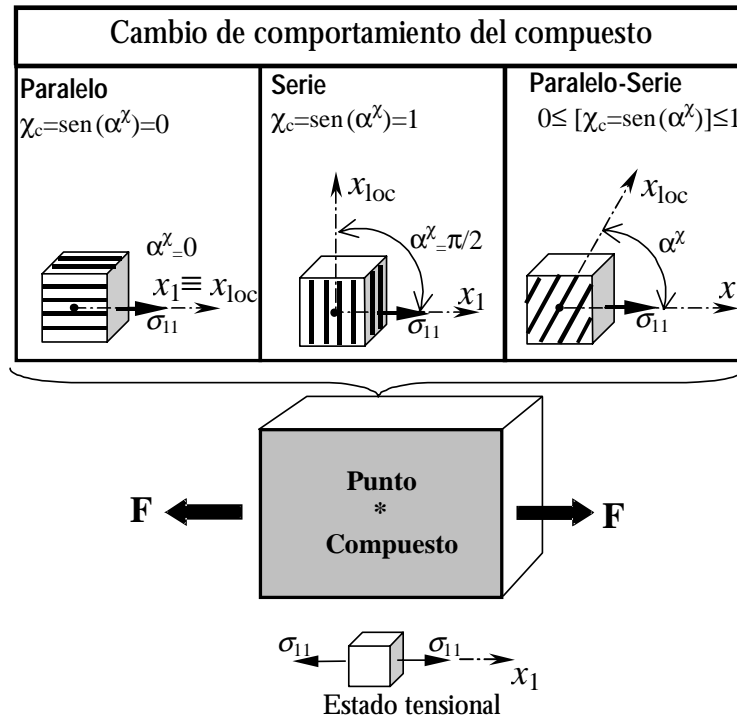


Figura 5-3. Representación esquemática del comportamiento serie-paralelo de un punto de un sólido compuesto.

La participación en serie del componente *c-esimo* resulta a partir de la compatibilidad de la parte elástica de deformaciones de las componentes dispuestas en serie. De este modo la deformación elástica total se puede expresar como

$$\begin{aligned} \epsilon^e &= k_1 \epsilon_1^e + \dots + k_n \epsilon_n^e = \sum_{c=1}^n k_c \epsilon_c^e = \\ &= k_1 ((\mathbf{C}^\sigma)_1^{-1} : \sigma_1) + \dots + k_n ((\mathbf{C}^\sigma)_n^{-1} : \sigma_n) \end{aligned} \tag{5-19}$$

donde $(\mathbf{C}^\sigma)_c$ es el tensor constitutivo del componente *c-esimo*

Dado que en la participación en serie las tensiones son iguales para todas las componentes es posible definir una relación constitutiva entre la deformación elástica en serie y la tensión como la adición de las relaciones constitutivas de cada componente como si trabajaran en serie puro según la expresión

$$(\mathbf{C}^{\text{ser}})^{-1} = k_1 ((\mathbf{C}^\sigma)_1^{-1}) + \dots + k_n ((\mathbf{C}^\sigma)_n^{-1}) \quad (5-20)$$

De este modo se puede describir la ecuación (5-19) como

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = k_1 \underbrace{((\mathbf{C}^\sigma)_1^{-1} : (\mathbf{C}^{\text{ser}}) : \boldsymbol{\varepsilon}^e)}_{\boldsymbol{\phi}_1} + \dots + k_n \underbrace{((\mathbf{C}^\sigma)_n^{-1} : (\mathbf{C}^{\text{ser}}) : \boldsymbol{\varepsilon}^e)}_{\boldsymbol{\phi}_n} \quad (5-21)$$

donde se define la relación de rigidez $(\phi_{ijkl})_c$ para cada componente como

$$(\phi_{ijkl})_c = (\mathbf{C}_{ijrs}^\sigma)^{-1} \mathbf{C}_{rskl}^{\text{ser}} \quad (5-22)$$

La suma ponderada de los tensores que relacionan la rigidez es el tensor identidad

$$k_1 (\boldsymbol{\phi}_1) + \dots + k_n (\boldsymbol{\phi}_n) = \left[\sum_{c=1}^n k_c \boldsymbol{\phi}_c \right] = \mathbf{I} \quad (5-23)$$

En consecuencia, la deformación elástica de cada componente se puede obtener a partir de la relación de rigidez y de la deformación elástica total

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c^e \equiv \boldsymbol{\phi}_c : \boldsymbol{\varepsilon}_c^e \quad (5-24)$$

De este modo, la deformación total de un componente se puede expresar como la suma de la deformación elástica más la plástica y a partir de la ecuación (5-24) se puede expresar como

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij})_c = (\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e)_c + (\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p)_c = (\phi_{ijkl})_c \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_{kl} - \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^p) + (\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^p)_c \quad (5-25)$$

Por lo tanto, la participación en serie del componente c -ésimo en función del parámetro de acoplamiento serie-paralelo χ_c es

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\text{ser}})_c = \chi_c \cdot \left[(\phi_{ijkl})_c \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_{kl} - \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^p) + (\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^p)_c \right] \quad (5-26)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}$ es la deformación total en el compuesto, $\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^p$ es la parte irre recuperable de la deformación del compuesto, $(\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^p)_c$ es la deformación irre recuperable real de cada componente y $(\phi_{ijkl})_c$ es la relación entre los tensores de rigidez de cada componente con la rigidez en serie.

Por lo tanto las deformaciones en cada componente se pueden expresar como la suma de la expresión (5-18) y la expresión (5-26)

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij})_c = \underbrace{(1 - \chi_c) \cdot I_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}}_{(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\text{par}})_c} + \underbrace{\chi_c \cdot \left[(\phi_{ijkl})_c \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_{kl} - \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^p) + (\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^p)_c \right]}_{(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\text{ser}})_c} \quad (5-27)$$

Reagrupando términos se puede expresar como

$$(\varepsilon_{ij})_c = \left[(1 - \chi_c) \cdot I_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \chi_c \cdot (\phi_{ijkl})_c \cdot \varepsilon_{kl} \right] - \chi_c \cdot \underbrace{\left[(\phi_{ijkl})_c \varepsilon_{kl}^p - (\varepsilon_{kl}^p)_c \right]}_{(\varepsilon_{kl}^p)_c} \quad (5-28)$$

siendo $(\hat{\varepsilon}_{kl}^p)_c$ una deformación plástica que se define con fines operativos y sin sentido físico, que resulta de la deformación plástica media del compuesto, distribuida entre sus componentes según sus respectivas relaciones de rigidez $(\phi_{ijkl})_c \varepsilon_{kl}^p$, y de la deformación plástica real del componente $(\varepsilon_{kl}^p)_c$. De este modo la deformación en cada componente y su derivada respecto a la deformación total se puede expresar como

$$(\varepsilon_{ij})_c = \left[(1 - \chi_c) \cdot I_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \chi_c \cdot (\phi_{ijkl})_c \cdot \varepsilon_{kl} \right] - \chi_c \cdot (\varepsilon_{kl}^p) \quad (5-29)$$

$$\frac{\partial (\varepsilon_{ij})_c}{\partial \varepsilon_{kl}} = (1 - \chi_c) \cdot I_{ijkl} + \chi_c \cdot (\phi_{ijkl})_c \quad (5-30)$$

(a) Expresión de la energía libre

La energía libre de un material compuesto está dada por la adición de la función de energía libre de cada una de sus componentes ponderadas y éstas a su vez se definen bajo el principio de elasticidad desacoplada, el la que la parte elástica se escribe como

$$\Psi^e = \sum_{c=1}^n k_c \frac{m_c}{m} \Psi_c^e \quad ; \quad \Psi_c^e = \frac{1}{2m_c} \left[(\varepsilon_{ij})_c - (\varepsilon_{ij}^p)_c \right] (\mathbf{C}_{ijkl}^\sigma)_c \left[(\varepsilon_{kl})_c - (\varepsilon_{kl}^p)_c \right] \quad (5-31)$$

(b) Ecuación constitutiva

La ecuación constitutiva surge también al aplicar con el método de Coleman la desigualdad de Clausius-Duhem. Se obtiene a partir de la ecuación (5-31), la ecuación constitutiva para un simple componente serie-paralelo resulta

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij})_c &= m_c \frac{\partial \Psi_c}{\partial (\varepsilon_{ij})_c} = \\ &= m_c \frac{\partial}{\partial (\varepsilon_{ij})_c} \left[\frac{1}{2m_c} \left((\varepsilon_{rs})_c - (\varepsilon_{rs}^p)_c \right) (\mathbf{C}_{rstu}^\sigma)_c \left((\varepsilon_{tu})_c - (\varepsilon_{tu}^p)_c \right) + \Psi_c^p \right] = \\ &= (\mathbf{C}_{ijtu}^\sigma)_c \left((\varepsilon_{tu})_c - (\varepsilon_{tu}^p)_c \right) \end{aligned} \quad (5-32)$$

Así, teniendo en cuenta la ecuación anterior para un solo componente y la derivada de la deformación de un componente respecto de la total (5-30), resulta la ecuación constitutiva del compuesto

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= m \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = m \sum_{c=1}^n k_c \frac{m_c}{m} \frac{\partial \Psi_c}{\partial (\varepsilon_{kl})_c} \frac{\partial (\varepsilon_{kl})_c}{\partial \varepsilon_{ij}} = \\ &= \sum_{c=1}^n k_c \left\{ (\mathbf{C}_{klrs}^\sigma)_c \left[(1 - \chi_c) \cdot I_{kl ij} + \chi_c \cdot (\phi_{kl ij})_c \right] \left[(\varepsilon_{rs})_c - (\varepsilon_{rs}^p)_c \right] \right\}\end{aligned}\quad (5-33)$$

El tensor constitutivo del material compuesto resulta,

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{tu ij}^\sigma &= m \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{tu} \partial \varepsilon_{ij}} = m \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{tu}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{tu}} (\sigma_{ij}) = \\ &= \sum_{c=1}^n k_c \left\{ (\mathbf{C}_{klrs}^\sigma)_c \left[(1 - \chi_c) \cdot I_{kl ij} + \chi_c \cdot (\phi_{kl ij})_c \right] \right\} \cdot \left\{ \left[(1 - \chi_c) \cdot I_{rstu} + \chi_c \cdot (\phi_{rstu})_c \right] \right\}\end{aligned}\quad (5-34)$$

Las definiciones previas para la tensión y el tensor constitutivo muestran que la definición cinemática realizada mediante la ecuación (5-29) conduce implícitamente a un cambio en las propiedades del material, o dicho de otra manera, la definición cinemática puede reflejarse como una modificación en el tensor constitutivo (ver ecuación (5-34)).

5.3. Anisotropía mecánica

La descripción del comportamiento en régimen elástico de un sólido anisótropo no presenta grandes dificultades. Es posible utilizar para tal fin las formas generales de la teoría de elasticidad. En cambio, la formulación de una ley constitutiva adecuada para simular el comportamiento no lineal de sólidos ortótropos o anisótropos no proporcionales¹⁵ constituye un problema complejo. Los composites reforzados con fibras constituyen materiales con una elevada anisotropía y una fuerte no proporcional. Por ejemplo, una lámina UD constituye una forma simplificada de materiales no proporcionales anisótropos compuesto por dos sustancias.

La formulación directa de la función umbral de discontinuidad para un material anisótropo no proporcional y todos los conceptos que derivan de ella constituye un problema difícil

¹⁵ Se entiende por material no proporcional a aquel en el cual la relación entre los módulos elásticos del material en dos direcciones cualesquiera no es igual a la relación entre las resistencias en las mismas direcciones

donde no se encuentran experiencias generales y satisfactorias. Los primeros intentos para formular las funciones de fluencia para un material ortotrópico no proporcional fue mediante la extensión de la función de fluencia isotrópica de Von Mises -llamada función de fluencia de Hill (1971)- que posteriormente ha sido mejorada (Hill 1979, 1990). La principal limitación de esta formulación se encuentra en la imposibilidad de representar el comportamiento de materiales sensibles a la tensión volumétrica, como por ejemplo es el caso de los composites. Otros muchos autores han propuesto otras funciones de fluencia en el espacio anisótropo. Entre ellos Bassani (1977) y Barlat *et al.* (1989,1991) que utilizan una transformación lineal del estado tensional del material anisótropo multiplicando todos los componentes del tensor de tensiones por diferentes constantes. Otros autores han utilizado operadores tensionales para definir el criterio de fluencia de anisótropo. Dvorak y Bahei-El-Din (1982) utilizan operadores tensoriales junto al criterio de fluencia de von Mises para el análisis de materiales compuestos. Diversos autores han utilizado tensores de cuarto orden en la formulación de criterios de fluencia para materiales anisótropos entre ellos se puede citar a Shih y Lee (1978), Eisenberg y Yen (1984), y Voyiadjis y Foroozesh (1990). En 1995, Voyiadjis y Thiagarajan proponen una superficie general, la cual depende de un tensor de cuarto orden y aplicaron este modelo para el estudio del comportamiento de un compuesto reforzado por fibras dispuestas unidireccionalmente.

Por lo tanto, el procedimiento tradicional para obtener las ecuaciones constitutivas de este tipo de materiales se basa en la descripción de las superficies de discontinuidad plástica o de daño anisótropas mediante propiedades características del material. Sin embargo, la solución adoptada en el modelo, se basa en el concepto de mapeo de tensiones (*mapped stress tensor*) propuesto por Betten (1981, 1988). La idea básica consiste en modelar el comportamiento de un sólido en el *espacio real anisótropo* mediante un sólido ideal en un *espacio isotrópico ficticio* a través de una relación lineal entre los dos espacios (ver figura 4-4). Este enfoque hace posible el uso de formulaciones isotrópicas no lineales conocidas con las ventajas numéricas que ello supone. Por ejemplo, con esta metodología se garantiza la convexidad de la función de fluencia y del potencial plástico (Eggleston, 1969). La convexidad de la función de fluencia asegura el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica y garantiza que luego de aplicar una carga plástica, monótona creciente, cualquier descarga conduce a un estado elástico. De acuerdo con el mapeo de tensiones de Betten, el modelo se basa en realizar una transformación lineal del tensor de tensiones suponiendo que las deformaciones elásticas son idénticas en ambos espacios lo cual introduce una limitación en la teoría anisótropa mapeada. Esta limitación está dada por el hecho de que se debe respetar la proporcionalidad entre el límite de resistencia y el módulo de elasticidad para cada dirección del material. Para evitar este inconveniente Oller *et al.* (1995) proponen que la aplicación lineal se realice tanto sobre el espacio de tensiones como

sobre el de deformaciones. Oller *et. al.* (2002) con este procedimiento han desarrollado una generalización de la teoría de plasticidad isótropa al caso anisótropo.

El modelo constitutivo que se presenta resulta aplicable a materiales que presentan una alta anisotropía, como en el caso de los materiales compuestos reforzados con fibras y permite una generalización de los modelos no lineales para materiales isótropos. La utilización de la teoría de transformación de espacios permite obtener una metodología para la definición de modelos anisótropos de carácter generalizado.

El comportamiento anisótropo del material se formula a través de un espacio ficticio isótropo de tensiones y deformaciones que resulta de una transformación tensorial lineal de los espacios reales de tensiones y deformaciones anisótropas. Los parámetros que intervienen en la definición del tensor de transformación se obtienen a través de ensayos experimentales. La ventaja en la utilización de este tipo de modelos consiste en la posibilidad de utilizar las mismas funciones de fluencia, potenciales plásticos y métodos de integración de la ecuación constitutiva desarrollados para materiales isótropos.

5.3.1. Tensores de transformación de espacios

Toda la información de la anisotropía del material se encuentra en los tensores de cuarto orden de transformación materiales de los espacios de tensiones y deformaciones. La formulación resultante es completamente general y permite junto a la teoría de mezclas realizar análisis de materiales multifase que presentan un grado de anisotropía elevado.

Los parámetros que definen los tensores de transformación de tensiones (A^σ , A^s , $a^{\bar{\nu}}$) se pueden calcular a partir de las propiedades elásticas y de resistencia del material anisótropo. Estas propiedades obtienen mediante experimentación en probetas de laboratorio o mediante las formulaciones de la micromecánica (ver Apéndice C) y los criterios de fallo (ver apéndice D) que proponen distintos autores.

Los tensores de transformación de deformaciones se pueden calcular a partir de los anteriores tal y como muestran los apartados de siguientes.

<i>Tensor de transformación de tensiones</i>	
A^σ	Para pequeñas deformaciones
A^S	en configuración referencial
a^τ	en configuración actualizada
<i>Tensor de transformación de deformaciones</i>	
A^ε	Para pequeñas deformaciones
A^E	en configuración referencial
a^e	en configuración actualizada

Tabla 5-1. Nomenclatura de los distintos tensores de transformación para el tratamiento de la anisotropía.

(a) Anisotropía para pequeñas deformaciones

Como se ha comentado anteriormente toda la información de la anisotropía del material está contenida en los tensores de *transformación de espacio* de cuarto orden que relacionan las tensiones y deformaciones entre el espacio real (anisótropo) y el ficticio (isótropo).

El procedimiento tradicional para obtener las ecuaciones constitutivas para los materiales elasto-plásticos anisótropos está basado en la descripción de la superficie del campo y del potencial plástico en términos de las propiedades características del material. En este caso, es difícil de satisfacer correctamente las condiciones de invariancia de los tensores de tensión.

Alternativamente, si las propiedades del sólido anisótropo real son definidas en términos de un sólido ficticio isótropo a través de una relación lineal entre ambos espacios, las condiciones de invariancia se satisfacen (Oller *et al.*, 2002):

$$\bar{\sigma}_{ij} = A_{ijkl}^\sigma \sigma_{kl} \quad (5-35)$$

σ_{kl} y $\bar{\sigma}_{ij}$ son los tensores de tensión en el espacio real anisótropo y en el espacio isótropo ficticio respectivamente y A_{ijkl}^σ es un tensor de cuarto orden llamado *space transformation tensor*, el cual relaciona la tensión entre los espacios real y ficticio.

$$A_{ijkl}^\sigma = \bar{\sigma}_{ij} (\sigma_{kl})^{-1} \quad (5-36)$$

La relación entre las tensiones elásticas en ambos espacios se define como:

$$\bar{\epsilon}^e_{ij} = A^{\epsilon}_{ijkl} \epsilon^e_{kl} \tag{5-37}$$

Esta asunción implica no unicidad de las deformaciones elásticas cuando el cambio de espacio se produce. El tensor de transformación de cuarto orden, A^{ϵ}_{ijkl} puede ser expresado como (Car *et al.*, 2000):

$$A^{\epsilon}_{rsmn} = \left[\bar{C}_{irks} \right]^{-1} A^{\sigma}_{ijkl} C_{jlmn} \tag{5-38}$$

donde \bar{C}_{ikrs} y C_{jlmn} son los tensores constitutivos en los espacios ficticios y reales respectivamente que relacionen de una forma estándar las tensiones y deformaciones. Se ha de observar que mientras el tensor C_{jlmn} incluye las propiedades reales del material el tensor \bar{C}_{ikrs} es totalmente arbitrario y no representa las propiedades de ningún material real. La figura 5-4 muestra las distintas transformaciones de espacio y cambios en la forma de las funciones de fluencia.

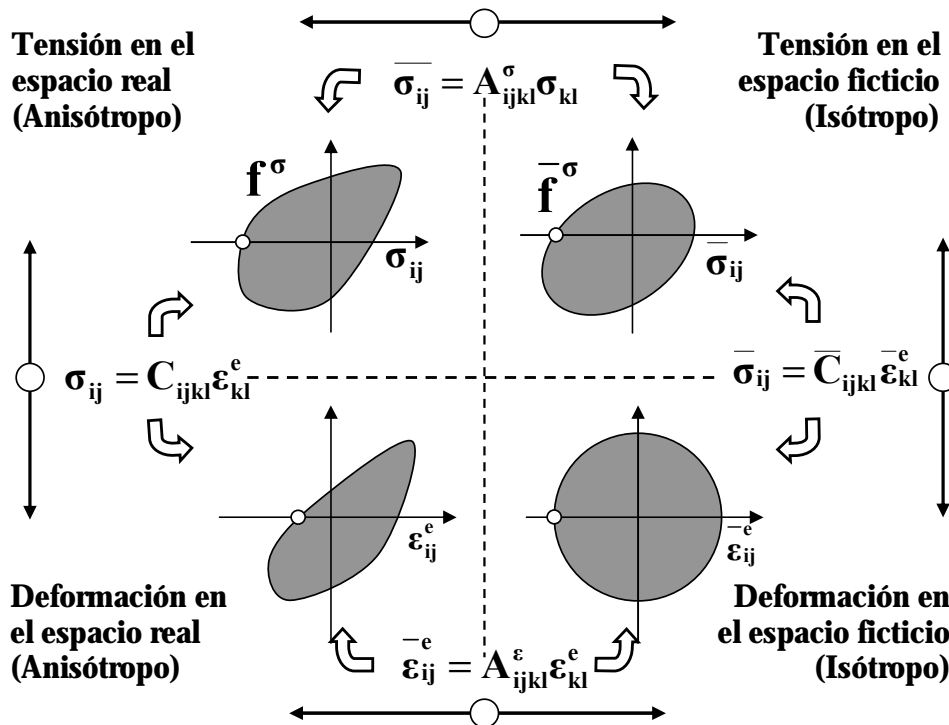


Figura 5-4. Diagrama esquemático para la solución no-lineal para un material multi-componente

(b) Anisotropía en la configuración referencial

En los apartados siguientes se presenta un modelo elasto-plástico que puede formularse indistintamente en la configuración referencial o actualizada utilizando la cinemática lagrangeana total o actualizada (Green Naghdi (1971)), (Lubliner (1990)). Este modelo constitutivo permite simular el comportamiento no-lineal de materiales sometidos a grandes deformaciones plásticas y pequeñas deformaciones elásticas debido a que para la definición de la energía libre elástica se utiliza un potencial cuadrático (García Garino y Oliver, 1992), (Lubliner, 1990).

Esta formulación implícita de la ortotropía, que se conoce como *teoría de mapeo de espacio*, consiste en admitir la existencia de dos espacios de tensiones, uno definido en σ que se denomina *espacio real de tensiones en la configuración referencial* Ω^S , donde reside el *criterio de fluencia ortótropo implícito* $F^S(\mathbf{S}, f^S) = 0$, y otro definido en $\bar{\mathbf{S}}$ denominado *espacio ficticio de tensiones en la configuración referencial* $\bar{\Omega}^S$, donde reside el *criterio de fluencia isótropo explícito* $\bar{F}^S(\bar{\mathbf{S}}, f^{\bar{S}}) = 0$. Además, entre ambos espacios existe un tensor de cuarto orden de transformación de espacio \mathbf{A}^S , simétrico, que permite transformar biunívocamente una imagen del tensor de tensiones definido en un espacio en el otro y viceversa. Este procedimiento garantiza la condición de invariancia (Oller *et al.*, 1995), (Casas *et al.*, 1998) (ver figura 5-4).

La transformación del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff del espacio anisótropo real al espacio isótropo ficticio que garantiza la invariancia del tensor de tensiones se realiza a través de un tensor de cuarto orden

$$\bar{\mathbf{S}}_{IJ} \stackrel{def}{=} A_{IJKL}^S S_{KL} \quad (5-39)$$

donde \mathbf{A}^S es un tensor de cuarto orden definido como operador lineal que establece la relación entre el espacio de los tensores simétricos de tensiones reales y ficticias respectivamente, $\bar{\mathbf{S}}$ es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en el espacio isótropo ficticio y \mathbf{S} lo es en el espacio anisótropo real. El tensor de cuarto orden \mathbf{A}^S se define en la configuración referencial y permanece constante en esta configuración. La condición de fluencia del material anisótropo en el espacio isótropo ficticio se expresa como

$$\bar{F}^S(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{C}, \alpha, f^{\bar{S}}) = 0 \quad (5-40)$$

donde \bar{F}^S es la función de fluencia en la *configuración referencial* y en el *espacio isótropo ficticio* y se diferencia de la función de fluencia en el *espacio anisótropo* F^S en los argumentos que ambas funciones contienen.

La definición del *criterio de fluencia implícito ortótropo*, resulta de admitir que en el espacio ficticio isótropo existe un criterio de fluencia isótropo del tipo $\bar{\mathbf{S}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{S}} - 1 = 0$, equivalente al que se ha definido en la ecuación (5-40), y que es imagen del criterio ortótropo que se está buscando aproximar. Esta afirmación se demostrará a continuación sustituyendo en el criterio de fluencia ortótropo la transformación de espacio de tensiones,

$$\begin{aligned} F^S(\mathbf{S}, \mathbf{f}^S) &= \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{P}^{\text{Ort}} \cdot \mathbf{S} - 1 = 0 \\ F^S(\mathbf{S}, \mathbf{f}^S) &\equiv F^S(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{A}^S, \mathbf{f}^{\bar{S}}) = \left[(\mathbf{A}^S)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{S}} \right]^T \cdot \mathbf{P}^{\text{Ort}} \cdot \left[(\mathbf{A}^S)^{-1} \bar{\mathbf{S}} \right] - 1 = 0 \\ F^S(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{A}^S, \mathbf{f}^{\bar{S}}) &= \bar{\mathbf{S}}^T \cdot \underbrace{\left[(\mathbf{A}^S)^{-T} \cdot \mathbf{P}^{\text{Ort}} \cdot (\mathbf{A}^S)^{-1} \right]}_{\mathbf{P}} \cdot \bar{\mathbf{S}} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (5-41)$$

de donde resulta el *criterio de fluencia ortótropo en el espacio isótropo ficticio*,

$$\bar{F}^S(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{f}^{\bar{S}}) = \bar{\mathbf{S}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{S}} - 1 = 0 \quad (5-42)$$

de donde se deduce el tensor \mathbf{A}^S que permite obtener la relación $\mathbf{P}^{\text{Ort}} = (\mathbf{A}^S)^T \cdot \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A}^S)$ que hay entre las matrices \mathbf{P}^{Ort} (definida por el criterio ortótropo implícito cuya ecuación se quiere aproximar, ecuación (5-40) y \mathbf{P} (definida por el criterio isótropo ficticio adoptado). Elegido entonces el *criterio de fluencia isótropo* $\bar{F}^S(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{f}^{\bar{S}}) = \bar{\mathbf{S}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{S}} - 1 = 0$, que servirá de base para la obtención del *criterio ortótropo implícito* $F^S(\mathbf{S}, \mathbf{f}^S) = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{P}^{\text{Ort}} \cdot \mathbf{S} - 1 = 0$, sólo queda por definir la forma en que se obtiene el *tensor de transformación de espacio* \mathbf{A}^S , como se hace a continuación.

En la definición de la forma y propiedades del operador tensorial \mathbf{A}^S introducido es necesario tener en cuenta la siguiente simetría

$$A_{IJKL}^S = A_{JIKL}^S = A_{IJLK}^S \quad (5-43)$$

Se parte de la hipótesis de que el tensor de cuarto orden de transformación de espacio de tensiones \mathbf{A}^S presenta la simetría

$$A_{IJKL}^S = A_{KLIJ}^S \quad (5-44)$$

Como una primera aproximación puede definirse el operador lineal \mathbf{A}^S en la siguiente forma simplificada (Oller *et al* (1995)) que conduce a un tensor de cuarto orden cuyas simetrías permite su representación en forma de matriz cuadrada diagonal

$$A_{IJKL}^S = f_{IK}^{\bar{S}} \cdot (f_{JL}^S)^{-1} \quad (5-45)$$

donde $f_{IK}^{\bar{S}}$ y f_{JL}^S son los tensores de segundo orden de tensiones que representan la resistencia correspondiente a los espacios isótropo ficticio y anisótropo real. La definición del operador lineal dada en la ecuación (5-45) no es unívoca ya que en general no es posible la obtención de un tensor de cuarto orden (81 componentes) a partir de la información de dos tensores de segundo orden (9 componentes cada uno). Así, la ecuación (5-45) se verifica solo para el caso de tensores diagonales limitando la generalización de esta formulación.

En forma más general, el tensor de transformación de tensiones A_{IJKL}^S puede ajustarse a cualquier comportamiento anisótropo en el espacio de tensiones, a partir las propiedades del material y la forma del criterio de fluencia plástico que se establezca en los espacios isótropo y anisótropo

$$A_{IJKL}^S = (W_{IIRS} w_{RSKL})^{-1} \quad (5-46)$$

donde W_{IIRS} contiene la información de los umbrales de resistencia en cada dirección de ortotropía y w_{RSKL} es un tensor cuyo objetivo es ajustar la función de los criterios ortótropos propuestos; ambos tensores serán definidos más adelante¹⁶.

El umbral de resistencia necesario para hallar el tensor A^S resulta de obtener el valor de este límite de resistencia en la configuración referencial y por lo tanto debe realizarse el *transporte hacia atrás (pull-back)* de la tensión límite obtenida en un ensayo uniaxial, esto es:

$$f^S = \bar{\phi}(f^\tau) \quad (5-47)$$

donde f^S y f^τ son los tensores de resistencias en la configuración referencial y actualizada respectivamente y $\bar{\phi}(\bullet)$ es el operador de transporte entre las dos configuraciones (*pull-back*), función del tensor gradiente de las deformaciones. El cálculo de este tensor se obtiene componente a componente a partir del tensor gradiente de las deformaciones, que para el caso unidimensional resulta

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{l_f}{l_0} \quad (5-48)$$

¹⁶ La determinación del límite elástico, o umbrales de resistencia, se realiza sobre ensayos experimentales reales y por lo tanto con la pieza en estado deformado (configuración actualizada). Por consiguiente, este valor límite obtenido se encuentra en la configuración actualizada.

donde l_0 es la longitud de la probeta ensayada en forma uniaxial y l_f es la longitud de la probeta en la configuración actualizada, correspondiente a la tensión en la que se verifica la pérdida de linealidad en la respuesta. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$ y que $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} : (J \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{F}^{-T}$, el valor de la resistencia del material resulta

$$\mathbf{f}^s = \frac{l_0}{l_f} (\mathbf{f}^\sigma) \quad (5-49)$$

donde f^s y f^σ son las resistencias del material en la configuración referencial y actualizada respectivamente.

La transformación de espacios definida en la ecuación (5-40) sólo puede aplicarse a materiales proporcionales, esto es, materiales cuya relación entre las tensiones de fluencia y el módulo de Young para cada dirección del espacio es constante,

$$f_{11} / C_{11} = f_{22} / C_{22} = \dots = f_{23} / C_{23} \quad (5-50)$$

donde f_{ij} y C_{ij} representan respectivamente la resistencia y el módulo elástico del material en la configuración referencial para la dirección del espacio $i-j$. Esto implica que el tensor de deformación elástica debe ser el mismo en los espacios real y ficticio (Oller *et al.*, 1995). Con el objetivo de generalizar la formulación a diversos materiales Oller *et al.* (1995) proponen también una transformación del espacio de deformaciones reales.

Se define la relación entre las deformaciones de Green-Lagrange elásticas en el *espacio anisótropo real* E_{IJ}^e y las deformaciones de Green-Lagrange elásticas en el *espacio isótropo ficticio* \bar{E}_{IJ}^e (ver figura 5-5) a través de la siguiente relación

$$\bar{E}_{IJ}^e \stackrel{def}{=} A_{IJKL}^E E_{KL}^e \quad (5-51)$$

donde \mathbf{A}^E es un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal $\mathbf{A}^E : \mathbf{S}_2 \rightarrow \mathbf{S}_2$ que establece la relación entre los espacios de deformación de Green-Lagrange real E_{IJ}^e y ficticio \bar{E}_{IJ}^e . Esta hipótesis implica no-unicidad en las deformaciones elásticas que se desarrollan en los dos espacios. El *tensor de transformación de las deformaciones* \mathbf{A}^E puede calcularse teniendo en cuenta la ecuación (5-40) y (5-51) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{C}}_{IJMN}^S \bar{\mathbf{E}}_{MN}^e &= A_{IJKL}^S \mathbf{C}_{KLRS}^S \mathbf{E}_{RS}^e \\
\bar{\mathbf{C}}_{IJMN}^S A_{MNRS}^E \mathbf{E}_{RS}^e &= A_{IJKL}^S \mathbf{C}_{KLRS}^S \mathbf{E}_{RS}^e \\
\bar{\mathbf{C}}_{IJMN}^S A_{MNRS}^E &= A_{IJKL}^S \mathbf{C}_{KLRS}^S \\
A_{MNRS}^E &= (\bar{\mathbf{C}}_{IJMN}^S)^{-1} A_{IJKL}^S \mathbf{C}_{KLRS}^S
\end{aligned} \tag{5-52}$$

donde $\bar{\mathbf{C}}^S$ es un tensor constitutivo arbitrario definido en el *espacio isótropo ficticio* y \mathbf{C}^S es el tensor constitutivo en el *espacio anisótropo real*. La elección de $\bar{\mathbf{C}}^S$ es arbitraria y puede estar representado por las propiedades de cualquier material isótropo conocido, debido a que sólo se utiliza para trabajar en el espacio ficticio y luego se cancela su influencia al regresar al espacio real.

Teniendo en cuenta la ecuación (5-52), es posible establecer la relación entre los tensores constitutivos en el espacio anisótropo real e isótropo ficticio,

$$\mathbf{C}_{KLRS}^S = (A_{IJKL}^S)^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{IJMN}^S A_{MNRS}^E \tag{5-53}$$

El tensor constitutivo anisótropo real \mathbf{C}^S y el tensor de transformación de tensiones \mathbf{A}^S están expresados en coordenadas locales, por lo tanto resulta necesario expresarlos en el sistema de referencia global a través de un tensor de rotación de cuarto orden \mathbf{R} , esto es

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{IJKL}^S &= R_{IJRS} (\mathbf{C}_{RSPQ}^S)_{loc} R_{PQKL} \\
A_{IJKL}^S &= R_{IJRS} (A_{RSPQ}^S)_{loc} R_{PQKL}
\end{aligned} \tag{5-54}$$

donde $(\mathbf{C}^S)_{loc}$ es el tensor constitutivo de cuarto orden, en el espacio anisótropo real, expresado en un sistema de referencia local y $(\mathbf{A}^S)_{loc}$ es el tensor de cambio de espacios en direcciones de ortotropía local. El tensor de rotaciones \mathbf{R} se define como

$$R_{IJKL} = r_{IK} r_{JL} \tag{5-55}$$

donde $r_{IK} = \cos[(\bar{\mathbf{e}}_I)_{glob}, (\bar{\mathbf{e}}_K)_{loc}]$, siendo $(\bar{\mathbf{e}}_I)_{glob}$ y $(\bar{\mathbf{e}}_K)_{loc}$ los versores unitarios correspondientes a las componente *i-ésima* y *j-ésima* de los sistemas de referencias global y local respectivamente. El tensor de rotación \mathbf{R} tiene en cuenta los ángulos entre las direcciones principales del material anisótropo y el sistema de coordenadas globales.

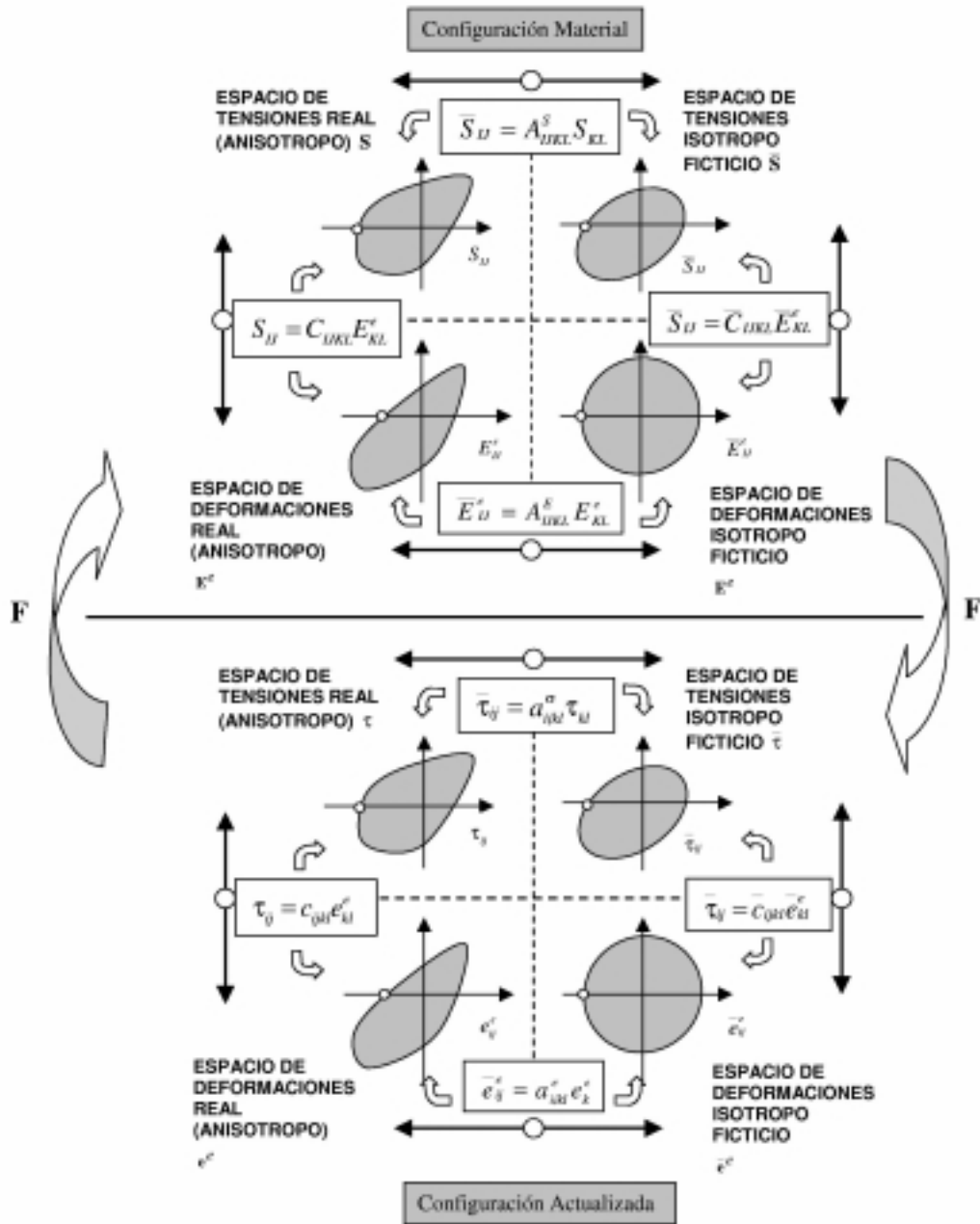


Figura 5-5. Transformación de espacios. Espacios de tensiones y deformaciones reales y ficticios en grandes deformaciones.

(c) Anisotropía en la configuración actualizada

Luego de un detallado estudio de la generalización del modelo elasto-plástico isótropo en la configuración referencial, es posible extender el tratamiento de la anisotropía a la configuración actualizada en forma análoga a lo realizado en la configuración referencial. Se presentan a continuación los tensores de cuarto orden que definen la aplicación lineal que relaciona los espacios anisótropo real e isótropo ficticio de tensiones y deformaciones en la configuración actualizada y se demostrará la veracidad de esta formulación, lo que da una gran generalidad a la teoría desarrollada.

La relación lineal entre los espacios de tensiones de Kirchhoff isótropo ficticio y anisótropo real en la configuración actualizada (ver figura 5-5) se propone a través de la siguiente transformación

$$\tau_{ij} \stackrel{def}{=} a_{ijkl}^{\tau} \tau_{kl} \quad (5-56)$$

siendo a^{τ} un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal $a^{\tau} : \mathbf{S}_2 \rightarrow \mathbf{S}_2$ que establece la relación entre el espacio de los tensores simétricos de tensiones reales y ficticias respectivamente en la configuración actualizada, τ es el tensor de tensiones de Kirchhoff en el espacio ficticio y τ es el tensor de tensiones de Kirchhoff en el espacio anisótropo real. El tensor de cuarto orden $a^{\tau} = \bar{\phi}(\mathbf{A}^S)$ procede de la transformación del tensor de transformación de tensiones en la configuración referencial. La condición de fluencia del material anisótropo en el espacio isótropo ficticio se expresa como

$$\bar{F}^{\tau}(\tau, \mathbf{g}, \alpha, f^{\tau}) = 0 \quad (5-57)$$

donde \bar{F}^{τ} es la función de fluencia en la *configuración actualizada* y en el *espacio isótropo ficticio* y se diferencia de la función de fluencia en el *espacio anisótropo* F^{τ} en los argumentos que ambas funciones contienen.

En el contexto de deformaciones finitas el operador lineal a^{τ} , que relaciona los espacios de tensiones de Kirchhoff ficticio y real, no es constante. Esto se debe al cambio de configuración, al que es sometido el tensor de transformación de tensiones en la configuración referencial $a^{\tau} = \bar{\phi}(\mathbf{A}^S)$ en función de los gradientes de deformaciones F , como se demostrará a continuación.

La transformación que experimenta el tensor de tensiones cuando pasa de la configuración referencial a la actualizada, se expresa como,

$$\tau = \bar{\phi}(\bar{\mathbf{S}}) \Rightarrow \tau_{ij} = F_{iI} \bar{S}_{IJ} (F_{jJ})^T \quad (5-58)$$

Sustituyendo el segundo tensor de Piola-Kirchhoff en el espacio isótropo ficticio por la expresión dada en la ecuación (5-40), se tiene:

$$\tau_{ij} = F_{il} (A_{IJKL}^S S_{KL}) (F_{jj})^T \quad (5-59)$$

y el tensor de tensiones anisótropo real en la configuración referencial se obtiene realizando el *pull-back* del tensor de tensiones anisótropo de Kirchhoff, esto es:

$$\mathbf{S} = \bar{\phi}(\boldsymbol{\tau}) \Rightarrow S_{KL} = (F_{kK})^{-1} \tau_{kl} (F_{lL})^{-T} \quad (5-60)$$

Reemplazando la expresión de la tensión (4-60) en la ecuación (4-59) se obtiene:

$$\tau_{ij} = \underbrace{\left[F_{il} A_{IJKL}^S (F_{kK})^{-1} (F_{lL})^{-T} (F_{jj})^T \right]}_{\alpha_{ijkl}^\tau} \tau_{kl} \quad (5-61)$$

De la ecuación anterior se obtiene que el tensor de transformación de espacios de tensiones en la configuración actualizada es una función del gradiente de las deformaciones, que expresa la cinemática del sistema referencial, y del tensor de transformaciones de espacios de tensiones en la configuración referencial (ver Figura 5-5)

$$\alpha_{ijkl}^\tau = \left[F_{il} (F_{kK})^{-1} (F_{lL})^{-T} (F_{jj})^T \right] A_{IJKL}^S \quad (5-62)$$

donde \mathbf{F} es el tensor gradiente de la deformaciones.

En forma análoga a lo presentado para el espacio referencial, la transformación de espacios definida en la ecuación (5-56) solo puede aplicarse a materiales proporcionales (ecuación 5-50). Al igual que ocurría en la configuración referencial, esto implica que el tensor de deformación elástica debe ser el mismo en los espacios real y ficticio de la configuración actualizada. Nuevamente, con el objetivo de generalizar la formulación a diversos materiales Car (2000) propone también una transformación del espacio de deformaciones reales.

Se define la relación entre las deformaciones elásticas de Almansi en el *espacio anisótropo real* e_{ij}^e y las deformaciones elásticas de Almansi en el *espacio isótropo ficticio* \bar{e}_{ij}^e (ver figura 5-5) a través de la siguiente relación

$$\bar{e}_{ij}^e \stackrel{def}{=} \alpha_{ijkl}^e e_{kl}^e \quad (5-63)$$

Tal que en forma análoga a lo expresado para el espacio referencial α^e es un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal $\alpha^e : \mathbf{S}_2 \rightarrow \mathbf{S}_2$ que establece la relación entre los espacios de deformaciones de Almansi reales y ficticios respectivamente, \bar{e} es el tensor

de deformaciones de Almansi en el espacio isótropo ficticio y \mathbf{e} es el tensor de deformaciones de Almansi en el espacio anisótropo real.

El operador lineal \mathbf{a}^e se encuentra definido en la configuración actualizada y debido al cambio de configuración no permanece constante. En el contexto de deformaciones finitas este operador es función del tensor de cambio de tensiones en la configuración material $\mathbf{a}^e = \bar{\phi}(\mathbf{A}^E)$ y de los gradientes de deformaciones \mathbf{F} , como se demostrará a continuación.

La transformación que experimenta el tensor de deformaciones de Almansi cuando pasa de la configuración referencial a la actualizada, se expresa como,

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{\phi}(\mathbf{E}) \Rightarrow \bar{e}_{ij} = (F_{iI})^{-T} \bar{E}_{IJ} (F_{jJ})^{-1} \quad (5-64)$$

Sustituyendo el tensor de deformaciones de Green-Lagrange en el espacio isótropo ficticio por la expresión análoga a la dada en la ecuación (5-57), se tiene:

$$\bar{e}_{ij} = (F_{iI})^{-T} (A_{IJKL}^E E_{KL}) (F_{jJ})^{-1} \quad (5-65)$$

El tensor de deformaciones de Green-Lagrange anisótropo real en la configuración referencial se obtiene realizando el *pull-back* del tensor de deformaciones anisótropo de Almansi, esto es:

$$\mathbf{E} = \bar{\phi}(\mathbf{e}) \Rightarrow E_{KL} = (F_{Kk})^T e_{kl} (F_{lL}) \quad (5-66)$$

Reemplazando la expresión de la deformación (5-66) en la ecuación (5-65) se obtiene:

$$\bar{e}_{ij} = \underbrace{[(F_{iI})^{-T} A_{IJKL}^E (F_{Kk})^T (F_{lL}) (F_{jJ})^{-1}]}_{a_{ijkl}^e} e_{kl} \quad (5-67)$$

De la ecuación anterior se obtiene que el tensor de transformación de espacios de deformaciones en la configuración actualizada es una función del gradiente de las deformaciones, que expresa la cinemática del sistema referencial, y del tensor de transformaciones de espacios de deformaciones en la configuración referencial (ver figura 5-5)

$$a_{ijkl}^e = [(F_{iI})^{-T} (F_{Kk})^T (F_{lL}) (F_{jJ})^{-1}] A_{IJKL}^E \quad (5-68)$$

donde \mathbf{F} es el tensor gradiente de la deformaciones.

5.3.2. Regla de flujo plástico. Ley de evolución de las variables internas

A continuación se presenta la regla de flujo y la ley de evolución de las variables internas que rigen el comportamiento de un material anisótropo genérico en régimen plástico. En

forma análoga a lo realizado en apartados anteriores la formulación se establece para pequeñas deformaciones y para grandes deformaciones en las configuraciones referencial y actualizada.

(a) Pequeñas deformaciones

La función de fluencia (*yield function*) y la función potencial (*potential function*) son definidas respectivamente de la siguiente manera

$$f(\sigma; \alpha_\sigma^m) = 0 \quad g(\sigma; \alpha_\sigma^m) = K \quad (5-69) \text{ y } (5-70)$$

donde σ es el tensor de tensiones en el espacio anisótropo real y α_σ^m es el conjunto de variables internas elasto-plásticas. Mediante los tensores de transformación de cuarto orden las funciones de fluencia y de potencial para el material anisótropo pueden ser escritas en términos del tensor de tensiones para el espacio del material isótropo ficticio

$$f(\sigma; \alpha_\sigma^m) = \bar{f}(\sigma; A^\sigma; \alpha_\sigma^m) = \bar{f}(\bar{\sigma}; \alpha_\sigma^m) = 0 \quad (5-71)$$

$$g(\sigma; \alpha_\sigma^m) = \bar{g}(\sigma; A^\sigma; \alpha_\sigma^m) = \bar{g}(\bar{\sigma}; \alpha_\sigma^m) = K \quad (5-72)$$

(b) Configuración referencial

En la configuración referencial la ley de evolución de la deformación plástica en el espacio anisótropo está dada por la siguiente regla de normalidad

$$\mathbf{E}^p = \lambda \frac{\partial \mathbf{G}^s}{\partial \mathbf{S}} \quad (5-73)$$

Teniendo en cuenta que toda la información de la anisotropía del material está contenida en el tensor de transformación \mathbf{A}^s , se propone la siguiente función de potencial plástico para el sólido anisótropo

$$\mathbf{G}^s(\mathbf{S}, \mathbf{C}) = \bar{\mathbf{G}}^s(\mathbf{S}, \mathbf{A}^s, \mathbf{C}) = \bar{\mathbf{G}}^s(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{C}) = K \quad (5-74)$$

Reemplazando la ecuación (5-75) en la ecuación (5-74) resulta el siguiente incremento de la cuota plástica de la deformación de Green-Lagrange

$$\mathbf{E}^p = \lambda \frac{\partial \mathbf{G}^s}{\partial \mathbf{S}} = \lambda \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^s}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{S}} = \lambda \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^s}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \mathbf{A}^s = (\mathbf{E}^p)^s : \mathbf{A}^s \quad (5-75)$$

donde $(\dot{\mathbf{E}}^p)^S = \lambda \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}}$ es el flujo plástico normal al potencial isótropo $\bar{\mathbf{G}}^S$. El concepto de aditividad de las deformaciones en la configuración referencial¹⁷ permite extender la regla de transformación de las deformaciones a la cuota plástica de las deformaciones, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^p &= \mathbf{A}^E : \mathbf{E}^p = \lambda \mathbf{A}^E : \frac{\partial \mathbf{G}^S}{\partial \mathbf{S}} = \lambda \mathbf{A}^E : \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{S}} = \\ &= \lambda \underbrace{\mathbf{A}^E : \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}}}_{\mathfrak{R}^S} : \mathbf{A}^S = \mathbf{A}^E : (\dot{\mathbf{E}}^p)^S : \mathbf{A}^S \end{aligned} \quad (5-76)$$

donde $\dot{\mathbf{E}}^p$ es el cambio temporal de la deformación plástica isótropa ficticia en la configuración referencial. Obsérvese que \mathfrak{R}^S es el flujo normal a la superficie potencial en el espacio isótropo. Este flujo afectado por el tensor A_{IJKL}^S permite obtener la regla de flujo asociada al espacio anisótropo de tensiones, $\mathfrak{R}^S = \mathfrak{R}^S : \mathbf{A}^S$. La transformación $\mathfrak{R}^S = \mathbf{A}^S : \mathfrak{R}^S$ introduce la influencia de la anisotropía elástica en el flujo anisótropo. La ley de evolución de las variables internas $\boldsymbol{\alpha} = \{\dots, \alpha_s, \dots\}$ viene dada por la siguiente regla general

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \lambda (\mathbf{H}^m)_s : \frac{\partial \mathbf{G}^S}{\partial \mathbf{S}} = \lambda (\mathbf{H}^m)_s : \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{S}} = \\ &= \lambda (\mathbf{H}^m)_s : \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \mathbf{A}^S = (\mathbf{H}^m)_s : (\dot{\mathbf{E}}^p)^S : \mathbf{A}^S \end{aligned} \quad (5-77)$$

donde $(\mathbf{H}^m)_s$ es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones actualizado y de la variable de endurecimiento plástico también actualizada. En el caso más simple de la teoría de la plasticidad toma la forma del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y en este caso α_s coincide con la densidad de energía plástica o disipación. La ley de evolución de la variable interna resulta:

¹⁷ El concepto de adición de las deformaciones establece que $\mathbf{E}^e = \mathbf{E} - \mathbf{E}^p$ y al ser \mathbf{A}^E una aplicación lineal, la cuota elástica de la deformación de Green-Lagrange resulta $\mathbf{A}^E : \mathbf{E}^e = \mathbf{A}^E : \mathbf{E} - \mathbf{A}^E : \mathbf{E}^p$ con lo cual se obtiene $\dot{\mathbf{E}}^e = \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^p$ donde la ley de evolución de la deformación plástica en el espacio isótropo resulta $\dot{\mathbf{E}}^p = \mathbf{A}^E : \dot{\mathbf{E}}^p$.

$$\bar{\Xi}_{\text{mec}}^p = \bar{\Psi}^p = \alpha_S = \lambda \bar{\mathbf{S}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^s}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \quad (5-78)$$

(c) *Configuración actualizada*

En la configuración actualizada la ley de evolución de la deformación plástica en el espacio anisótropo está dada por la siguiente regla de normalidad

$$L_v(\mathbf{e}^p) = \lambda \frac{\partial \mathbf{G}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \lambda \frac{\partial \mathbf{g}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (5-79)$$

donde $\mathbf{G}^\tau(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}) = \mathbf{g}^\tau(\boldsymbol{\tau}) = k$ y $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\tau})$. Teniendo en cuenta que toda la información de la anisotropía del material está contenida en el tensor de transformación \mathbf{a}^τ , se propone la siguiente función de potencial plástico para el sólido anisótropo

$$\mathbf{G}^\tau(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}) = \bar{\mathbf{G}}^\tau(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}^\tau, \mathbf{g}) = \bar{\mathbf{G}}^\tau(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}) = k \quad (5-80)$$

Reemplazando la ecuación (5-81) en la ecuación (5-80) resulta el siguiente incremento de la cuota plástica de la deformación de Green-Lagrange

$$\mathbf{d}^p = \lambda \frac{\partial \mathbf{G}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \lambda \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \lambda \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{a}^\tau = L_v(\bar{\mathbf{e}}^p)^\tau : \mathbf{a}^\tau \quad (5-81)$$

donde $L_v(\bar{\mathbf{e}}^p)^\tau = \lambda \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}}$ es el flujo plástico normal al potencial isótropo $\bar{\mathbf{G}}^\tau$. El concepto de aditividad de las deformaciones en la configuración actualizada, en forma análoga a la configuración referencial permite extender la regla de transformación de las deformaciones totales a la cuota plástica de las deformaciones, es decir:

$$\bar{\mathbf{d}}^p = \mathbf{a}^e : \mathbf{d}^p = \lambda \mathbf{a}^e : \frac{\partial \mathbf{G}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \lambda \mathbf{a}^e : \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \lambda \mathbf{a}^e : \underbrace{\frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}}}_{\bar{\mathfrak{R}}^\tau} : \mathbf{a}^\tau = \mathbf{a}^e : L_v(\bar{\mathbf{e}}^p)^\tau : \mathbf{a}^\tau \quad (5-82)$$

donde $\bar{\mathbf{d}}^p$ representa el cambio temporal de la deformación plástica isótropa ficticia en la configuración actualizada. Obsérvese que $\bar{\mathfrak{R}}^\tau$ es el flujo normal a la superficie potencial en un espacio isótropo. Este flujo afectado por el tensor a_{ijkl}^τ permite obtener la regla de flujo asociada al espacio anisótropo de tensiones, $\mathfrak{R}^\tau = \bar{\mathfrak{R}}^\tau \boldsymbol{\alpha}^\tau$. La transformación $\bar{\mathfrak{R}}^\tau = \mathbf{a}^e : \mathfrak{R}^\tau$ introduce la influencia de la anisotropía elástica en el flujo anisótropo. La

ley de evolución de las variables internas $\boldsymbol{\alpha} = \{\dots, \alpha_\tau, \dots\}$ viene dada por la siguiente regla general

$$\begin{aligned}\alpha_\tau &= \lambda (\mathbf{h}^m)_\tau : \frac{\partial \mathbf{G}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \lambda (\mathbf{h}^m)_\tau : \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \\ &= \lambda (\mathbf{h}^m)_\tau : \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{a}^\tau = (\mathbf{h}^m)_\tau : L_\nu (\bar{\mathbf{e}}^p)^\tau : \mathbf{a}^\tau\end{aligned}\quad (5-83)$$

donde $(\mathbf{h}^m)_\tau$ es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones actualizado y de la variable de endurecimiento plástico también actualizada. En el caso más simple de la teoría de la plasticidad toma la forma del tensor de Kirchoff y en este caso α_τ coincide con la densidad de energía plástica o disipación. La ley de evolución de la variable interna resulta:

$$\bar{\Xi}_{\text{mec}}^p = \bar{\Psi}^p = \alpha_\tau = \lambda \boldsymbol{\tau} : \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (5-84)$$

La magnitud de la deformación plástica así obtenida, resulta igual a la disipación plástica expresada en la ecuación (5-79). Esta igualdad garantiza la objetividad de la formulación y muestra que se puede trabajar tanto en la configuración referencial como en la actualizada. Esta afirmación puede demostrarse teniendo en cuenta las operaciones de transporte *push-forward* y *pull-back*¹⁸, partiendo de la disipación en la configuración referencial, se verifica su conservación en la configuración actualizada

$$\begin{aligned}\bar{\Xi}_{\text{mec}}^p &= \bar{\Psi}^p = \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{E}}^p = (\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d}^p \cdot \mathbf{F}) = \\ &= (\boldsymbol{\tau}) : \underbrace{(\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^T)}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{d}^p \cdot \underbrace{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1})}_{\mathbf{I}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p = \bar{\Psi}^p\end{aligned}\quad (5-85)$$

En el siguiente apartado se muestra, además, que la disipación también es la misma en un espacio isótropo ficticio que en el espacio anisótropo real.

5.3.3. Unicidad de disipación

Este apartado tiene como objetivo demostrar que la disipación plástica del modelo constitutivo anisótropo desarrollado en los apartados anteriores es igual, independientemente de si se la considera en el espacio anisótropo real o en el espacio

¹⁸ Se considera la validez del siguiente producto tensorial en las operaciones de cambios de configuración: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{C} = \mathbf{B} : (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{A} : (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T)$.

isótropo ficticio. Como se ha mencionado anteriormente la utilización del modelo constitutivo en el espacio ficticio tiene la ventaja de poder utilizar todos los algoritmos desarrollados para materiales isótropos con la consiguiente ventaja en la implementación en un código de elementos finitos.

(a) *Pequeñas deformaciones*

Debe de considerarse a la disipación como un valor invariante entre el espacio isótropo y anisótropo. Como consecuencia de la *unicidad de la disipación* se muestra irrelevante escribir el modelo constitutivo en cualquier de los dos espacios (Car *et al.*, 2000):

$$\Xi_{mec} = \sigma_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij} - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \sigma_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij} - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \geq 0 \quad (5-86)$$

Las ecuaciones previas muestran como es equivalente escribir el modelo constitutivo en el espacio real anisótropo o en el espacio equivalente ficticio isótropo. Obviamente, escribir el modelo constitutivo en el espacio ficticio isótropo permite aprovechar las ventajas y los algoritmos usados para los materiales isótropos.

(b) *Configuración referencial*

La magnitud de la energía libre de Helmholtz, para un proceso isotérmico, resulta igual para el espacio anisótropo e isótropo ficticio,

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m) &= \Psi^e(\mathbf{E}^e, \theta) + \Psi^p(\alpha^m) = \frac{1}{2m^0} [\mathbf{E}^e : \mathbf{C}^S : \mathbf{E}^e] + \Psi^p(\alpha^m) \\ \Rightarrow \mathbf{S} &= m^0 \frac{\partial \Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \mathbf{E}^e} = \mathbf{C}^S : \mathbf{E}^e \\ \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{E}}^e, \theta, \alpha^m) &= \bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e, \theta) + \Psi^p(\alpha^m) = \frac{1}{2m^0} [\bar{\mathbf{E}}^e : \bar{\mathbf{C}}^S : \bar{\mathbf{E}}^e] + \Psi^p(\alpha^m) \\ \Rightarrow \bar{\mathbf{S}} &= m^0 \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{E}}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^e} = \bar{\mathbf{C}}^S : \bar{\mathbf{E}}^e = \\ &= [\mathbf{A}^S : \mathbf{C}^S : (\mathbf{A}^E)^{-1}] : (\mathbf{A}^E : \mathbf{E}^e) = \mathbf{A}^S : \mathbf{S} \end{aligned} \quad (5-87)$$

donde $\Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m) = \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{E}}^e, \theta, \alpha^m)$ es la energía libre total en la *configuración referencial, espacio anisótropo e isótropo respectivamente*, y $\Psi^p(\alpha^m) = \bar{\Psi}^p(\alpha^m)$ es la cuota plástica de dicha energía libre. La ecuación constitutiva en la *configuración referencial, espacio isótropo*, surge de considerar la expresión de Clausius-Duhem y las ecuaciones de transformación de espacios de tensiones (5-31) y deformaciones (5-42). La disipación está dada en forma general por:

$$\Xi_{\text{mec}}^p = \mathbf{S} : \mathbf{E}^p - m^0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha^m} \alpha^m - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (5-88)$$

El primer término de la expresión de la disipación en la configuración referencial es también posible escribirlo en función de los tensores de transformación de espacios de tensiones \mathbf{A}^S y deformaciones \mathbf{A}^E y de los espacios de tensiones y deformaciones ficticias como

$$\mathbf{S} : \mathbf{E}^p = [(\mathbf{A}^S)^{-1} : \bar{\mathbf{S}}] : [(\mathbf{A}^E)^{-1} : \bar{\mathbf{E}}^p] \quad (5-89)$$

Reemplazando en esta última la deformación plástica ficticia $\bar{\mathbf{E}}^p$ por su expresión (ecuación (5-77)), se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \mathbf{E}^p &= \lambda (\mathbf{A}^S)^{-1} : \bar{\mathbf{S}} : (\mathbf{A}^E)^{-1} : \mathbf{A}^E : \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \mathbf{A}^S \\ \mathbf{S} : \mathbf{E}^p &= \lambda \bar{\mathbf{S}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} = \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{E}}^p \end{aligned} \quad (5-90)$$

Considerando la ecuación anterior y la conservación de la energía, la expresión de la disipación para procesos isotérmicos resulta:

$$\Xi_{\text{mec}}^p = \mathbf{S} : \mathbf{E}^p - m^0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha^m} \alpha^m = \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{E}}^p - m^0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha^m} \alpha^m \equiv \bar{\Xi}_{\text{mec}}^p \geq 0 \quad (5-91)$$

La expresión anterior muestra la disipación es única, tanto si el modelo se formula en el espacio anisótropo, como si la formulación se realiza en el espacio isótropo equivalente. La implementación computacional de este modelo para anisotropía presenta grandes ventajas. Al tratarse el material en un espacio isótropo ficticio solo es necesario realizar una transformación de los espacios de tensión y deformación a un espacio isótropo ficticio y luego utilizar los algoritmos desarrollados en la literatura clásica para materiales isótropos.

(c) Configuración actualizada

La expresión de la energía libre de Helmholtz en el espacio anisótropo y espacio isótropo ficticio, en la configuración actualizada, para un proceso isotérmico resulta:

$$\begin{aligned}
 \psi(\mathbf{e}^e, \theta, \alpha^m) &= \psi^e(\mathbf{e}^e, \theta) + \psi^p(\alpha^m) = \frac{1}{2m} [\mathbf{e}^e : \mathbf{c}^\tau : \mathbf{e}^e] + \psi^p(\alpha^m) \\
 \Rightarrow \boldsymbol{\tau} &= m \frac{\partial \psi(\mathbf{e}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \mathbf{e}^e} = \mathbf{c}^\tau : \mathbf{e}^e \\
 \bar{\psi}(\bar{\mathbf{e}}^e, \theta, \alpha^m) &= \psi^e(\bar{\mathbf{e}}^e, \theta) + \bar{\psi}^p(\alpha^m) = \frac{1}{2m} [\bar{\mathbf{e}}^e : \bar{\mathbf{c}}^\tau : \bar{\mathbf{e}}^e] + \bar{\psi}^p(\alpha^m) \quad (5-92) \\
 \Rightarrow \bar{\boldsymbol{\tau}} &= m \frac{\partial \bar{\psi}(\bar{\mathbf{e}}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \bar{\mathbf{e}}^e} = \bar{\mathbf{c}}^\tau : \bar{\mathbf{e}}^e = \\
 &= [\mathbf{a}^\tau : \mathbf{c}^\tau : (\mathbf{a}^e)^{-1}] : (\mathbf{a}^e : \mathbf{e}^e) = \mathbf{a}^\tau : \boldsymbol{\tau}
 \end{aligned}$$

donde $\psi(\mathbf{e}^e, \theta, \alpha^m) = \bar{\psi}(\bar{\mathbf{e}}^e, \theta, \alpha^m)$ es la energía libre total en la *configuración actualizada*, *espacio anisótropo e isótropo respectivamente*, y $\psi^p(\alpha^m) = \bar{\psi}^p(\alpha^m)$ es la cuota plástica de dicha energía libre. La ecuación constitutiva en la *configuración actualizada, espacio isótropo*, surge de considerar la expresión de Clasius-Duhem y las ecuaciones de transformación de espacios de tensiones (5-61) y deformaciones (5-68). La disipación está dada en forma general por:

$$\Xi_{\text{mec}}^p = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha^m} \dot{\alpha}^m - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (5-93)$$

El primer término de la expresión de la disipación en la configuración actualizada es también posible escribirlo en función de los tensores de transformación de espacios de tensiones \mathbf{a}^τ y deformaciones \mathbf{a}^e y de los espacios de tensiones y deformaciones ficticias como

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p = [(\mathbf{a}^\tau)^{-1} : \boldsymbol{\tau}] : [(\mathbf{a}^e)^{-1} : \bar{\mathbf{d}}^p] \quad (5-94)$$

Reemplazando en esta última la deformación plástica ficticia $\bar{\mathbf{d}}^p$ por su expresión (ecuación (5-77)), se obtiene,

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p &= \lambda (\mathbf{a}^\tau)^{-1} : \boldsymbol{\tau} : (\mathbf{a}^e)^{-1} : \mathbf{a}^e : \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{a}^\tau \\
 \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p &= \lambda \boldsymbol{\tau} : \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} : \bar{\mathbf{d}}^p \quad (5-95)
 \end{aligned}$$

Considerando la ecuación anterior y la conservación de la energía, la expresión de la disipación para procesos isotérmicos resulta:

$$\Xi_{\text{mec}}^p = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}^p - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha^m} \dot{\alpha}^m = \boldsymbol{\tau} : \bar{\mathbf{d}}^p - m \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \alpha^m} \dot{\alpha}^m \equiv \bar{\Xi}_{\text{mec}}^p \geq 0 \quad (5-96)$$

La expresión anterior muestra la disipación es única, tanto si el modelo se formula en el espacio anisótropo, como si la formulación se realiza en el espacio isótropo equivalente. Al igual que en la configuración referencial, la implementación computacional de este modelo para anisotropía presenta grandes ventajas. Al tratarse el material en un espacio isótropo ficticio solo es necesario realizar una transformación de los espacios de tensión y deformación a un espacio isótropo ficticio y luego utilizar los algoritmos desarrollados en la literatura clásica para materiales isótropos.

5.3.4. Ecuación constitutiva tangente

El método de Newton-Raphson, que utiliza matrices de rigidez tangente es una de las técnicas más utilizadas en la aproximación numérica de las ecuaciones que rigen el comportamiento de sólidos elastoplásticos. Por lo tanto, es necesaria una relación incremental entre las tensiones y las deformaciones para obtener el operador lineal tangente. A continuación se presentan los operadores lineales elastoplásticos tangentes continuos que establecen la relación entre el incremento de tensiones y el de deformaciones totales en las configuraciones referencial y actualizada.

El caso de materiales con comportamiento inelástico requiere la integración numérica de sistemas acoplados de ecuaciones diferenciales de pasos de tiempo de primer orden (Simo y Taylor (1985)). El resultado del algoritmo de integración es una función de respuesta no-lineal que define el tensor de tensiones como una función de la historia de deformaciones hasta el paso de tiempo actual. Este algoritmo de integración permite tratar el problema elastoplástico fundamentalmente como un problema linealizado equivalente en el paso de tiempo.

El operador tangente que interviene en el problema linealizado se debe obtener mediante una linealización de la función de respuesta consistente con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. La utilización de estos operadores tangentes preserva la convergencia cuadrática de esquemas de solución iterativos basados en métodos de Newton (Simo y Taylor, 1985) (Crisfield, 1991). La precisión con la que se obtiene la matriz de rigidez tangente del sistema influye directamente en la velocidad de convergencia y es de una importancia fundamental en la exactitud general del análisis (Ortiz y Popov, 1985).

El operador elastoplástico que se presenta en este apartado es independiente del proceso de integración de la ecuación constitutiva y por lo tanto no preserva la convergencia cuadrática propia de los esquemas de solución basados en métodos de Newton. En la referencia Car (2000), se presenta la expresión del operador lineal elastoplástico tangente consistente con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. La utilización de este operador

permite obtener convergencia cuadrática en el problema no-lineal con el método Newton-Raphson.

(a) *Configuración referencial*

La ecuación constitutiva tangente en la configuración referencial se obtiene a partir de la variación temporal de la tensión de Piola Kirchhoff, esto es:

$$S_{IJ} = \frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}^e} \dot{E}_{KL}^e \quad (5-97)$$

Teniendo en cuenta que la tensión de Piola Kirchhoff en el espacio anisótropo puede escribirse en función de la tensión en el espacio isótropo ficticio se tiene

$$\begin{aligned} S_{IJ} &= \frac{\partial S_{IJ}}{\partial \bar{S}_{RS}} \frac{\partial \bar{S}_{RS}}{\partial \bar{E}_{MN}^e} \frac{\partial \bar{E}_{MN}^e}{\partial E_{KL}^e} \dot{E}_{KL}^e \\ &= \underbrace{\left(A_{IJRS}^S \right)^{-1}}_{(A_{IJRS}^S)^{-1}} \underbrace{\bar{C}_{RSMN}}_{\bar{C}_{RSMN}} \underbrace{A_{MNKL}^E}_{A_{MNKL}^E} \dot{E}_{KL}^e \\ S_{IJ} &= (A_{IJRS}^S)^{-1} \bar{C}_{RSMN} A_{MNKL}^E \dot{E}_{KL}^e \\ S_{IJ} &= (A_{IJRS}^S)^{-1} \bar{C}_{RSMN} (\dot{E}_{MN} - \dot{E}_{MN}^p) \end{aligned} \quad (5-98)$$

Teniendo en cuenta la condición de consistencia plástica es posible obtener la ecuación constitutiva en el espacio isótropo ficticio, esto es:

$$\dot{\bar{S}}_{IJ} = \bar{C}_{IJKL}^{ep} \dot{\bar{E}}_{KL} \quad \text{o también} \quad \dot{\bar{S}} = \bar{C}^{ep} : \dot{\bar{E}} \quad (5-99)$$

Donde \bar{C}^{ep} representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente en la configuración referencial, espacio isótropo ficticio, y su expresión está dada por la siguiente ecuación

$$\bar{C}_{IJKL}^{ep} = \bar{C}_{IJKL} - \frac{(\bar{C}_{IJRS} \mathfrak{R}_{RS}^S) \otimes \left(\frac{\partial \bar{F}^S}{\partial \bar{S}_{RS}} \bar{C}_{RSKL} \right)}{\frac{\partial \bar{F}^S}{\partial \bar{S}_{PQ}} \bar{C}_{PQLN} \mathfrak{R}_{LN}^S - \underbrace{\sum_m \frac{\partial \bar{F}^S}{\partial \alpha_S^m} (h_{TU}^m)_S \mathfrak{R}_{TU}^S}_A} \quad (5-100)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (5-98), que relaciona el tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en los espacios real y ficticio, es posible obtener la variación de tensión anisótropa real como:

$$S_{IJ} = (A_{IJKL}^S)^{-1} \bar{C}_{KLR S}^{ep} \dot{E}_{RS} \quad (5-101)$$

Combinando esta ecuación con la ecuación (5-42), se obtiene la expresión del tensor constitutivo elastoplástico anisótropo como:

$$\dot{S}_{IJ} = \underbrace{(A_{IJKL}^S)^{-1} \bar{C}_{KLRs}^{ep} A_{RSPQ}^E}_{\mathbf{C}_{IJPQ}^{ep}} \dot{E}_{PQ} \quad \text{o también} \quad \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\mathbf{E}} \quad (5-102)$$

donde $\mathbf{C}_{IJPQ}^{ep} = (A_{IJKL}^S)^{-1} \bar{C}_{KLRs}^{ep} A_{RSPQ}^E$ es el tensor elastoplástico anisótropo, que depende del tensor constitutivo elastoplástico tangente isotropo ficticio.

(b) Configuración espacial

La ecuación constitutiva tangente en la configuración espacial se obtiene considerando la variación temporal de la tensión de Kirchhoff, esto es:

$$L_v(\tau_{ij}) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial e_{kl}^e} L_v(e_{kl}^e) \quad (5-103)$$

Teniendo en cuenta que la tensión de Kirchhoff en el espacio anisótropo puede escribirse a partir de la tensión en el espacio isotropo ficticio se escribe

$$\begin{aligned} L_v(\tau_{ij}) &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \tau_{rs}} \frac{\partial \tau_{rs}}{\partial \bar{e}_{mn}^e} \frac{\partial \bar{e}_{mn}^e}{\partial e_{kl}^e} L_v(e_{kl}^e) \\ &= \underbrace{\left(a_{ijrs}^\tau \right)^{-1}}_{(a_{ijrs}^\tau)^{-1}} \underbrace{\bar{c}_{rsmn}^e}_{\bar{c}_{rsmn}^e} \underbrace{a_{mnkl}^e}_{a_{mnkl}^e} L_v(e_{kl}^e) \\ L_v(\tau_{ij}) &= (a_{ijrs}^\tau)^{-1} \bar{c}_{rsmn}^e a_{mnkl}^e L_v(e_{kl}^e) \\ L_v(\tau_{ij}) &= (a_{ijrs}^\tau)^{-1} \bar{c}_{rsmn}^e \left[L_v(\bar{e}_{mn}^e) - L_v(\bar{e}_{mn}^p) \right] \quad ; \quad \bar{d}_{mn}^p \equiv L_v(\bar{e}_{mn}^p) \end{aligned} \quad (5-104)$$

Teniendo en cuenta la condición de consistencia plástica se obtiene la ecuación constitutiva en el espacio isotropo ficticio,

$$L_v(\tau_{ij}) = \bar{c}_{ijkl}^{ep} L_v(\bar{e}_{kl}^e) \quad \text{o también} \quad L_v(\boldsymbol{\tau}) = \bar{\mathbf{c}}^{ep} : L_v(\bar{\mathbf{e}}^e) \quad (5-105)$$

Donde $\bar{\mathbf{c}}^{ep}$ representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente en la configuración actualizada, espacio isotropo ficticio, y su expresión está dada por la siguiente ecuación

$$\bar{\mathbf{c}}_{ijkl}^{ep} = \bar{\mathbf{c}}_{ijkl} - \frac{(\bar{\mathbf{c}}_{ijrs} \mathfrak{R}_{rs}^\tau) \otimes \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^\tau}{\partial \tau_{rs}} \bar{\mathbf{c}}_{rskl} \right)}{\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^\tau}{\partial \tau_{pq}} \bar{\mathbf{c}}_{pqln} \mathfrak{R}_{ln}^\tau - \underbrace{\sum_m \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}^\tau}{\partial \alpha_\tau^m} (h_{tu}^m)_\tau \mathfrak{R}_{tu}^\tau}_A} \quad (5-106)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (5-104), que relaciona el tensor de tensiones de Kirchhoff en los espacios real y ficticio, es posible obtener la variación de tensión anisótropa real como:

$$L_v(\tau_{ij}) = (a_{ijkl}^\tau)^{-1} \bar{\mathbf{c}}_{klrs}^{ep} L_v(\bar{e}_{rs}) \quad (5-107)$$

Combinando esta ecuación con la ecuación (5-68), se obtiene la expresión del tensor constitutivo elastoplástico anisótropo como:

$$L_v(\tau_{ij}) = \underbrace{(a_{ijkl}^\tau)^{-1} \bar{\mathbf{c}}_{klrs}^{ep} a_{rspq}^e}_{\mathbf{c}_{ijpq}^{ep}} L_v(\bar{e}_{pq}) \quad \text{o también} \quad L_v(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{c}^{ep} : L_v(\mathbf{e}) \quad (5-108)$$

donde $\mathbf{c}_{ijpq}^{ep} = (a_{ijkl}^\tau)^{-1} \bar{\mathbf{c}}_{klrs}^{ep} a_{rspq}^e$ es el tensor elastoplástico anisótropo, que depende del tensor constitutivo elastoplástico tangente isótropo ficticio en la configuración actualizada.

Los tensores constitutivos elastoplásticos tangentes obtenidos anteriormente no permiten obtener convergencias cuadráticas en la solución de problemas incrementales basados en métodos de Newton, debido a que en su deducción no se ha tenido en cuenta el procedimiento de integración de la ecuación constitutiva y por lo tanto no es consistente con el mismo.

Los tensores constitutivos elastoplásticos tangentes ficticios dados por las ecuaciones (5-100) y (5-106) resultan simétricos para el caso de plasticidad asociada, mientras que el tensor elastoplástico tangente anisótropo en las configuraciones referencial o actualizada dado por las ecuaciones (5-100) y (5-108) en general son no simétricos (ver Car, 2000).

5.4. Tratamiento del desplazamiento fibra-matriz

Parte del comportamiento no lineal complejo de los FRP es consecuencia del deslizamiento que se produce al nivel microestructural entre la fibra y la matriz una vez se ha perdido adherencia entre estas dos fases (mecanismo conocido mediante el término inglés de *debonding*). Este mecanismo se manifiesta como una deformación no elástica (o irre recuperable) debido al propio deslizamiento y una pérdida de rigidez del compuesto sin

que lleguen a aparecer roturas de fibras causadas por la inhibición de la colaboración entre fibra y matriz.

En los materiales compuestos reforzados con fibras el agrietamiento o apertura de fisuras en la matriz está muy relacionado con el posterior deslizamiento entre fases. El proceso de apertura de fisuras en la matriz ocurre a los niveles de tensión que resultan significativamente menores que el nivel tensorial necesario para producir la rotura de las fibras, produciendo una disminución de la rigidez e induciendo deformaciones inelásticas y ciclos de histéresis (Beryerley *et al.*, 1992). A los fines de modelar micromecánicamente el fenómeno de deslizamiento fibra matriz en materiales compuestos, diversos modelos han sido propuestos. Una parte de estos estudios se basan en permitir la ausencia de contacto entre fibra y matriz (Owen y Lyness, 1972). Otros estudios introducen una capa representativa de la interfase entre la fibra y la matriz (Agarwall y Bansal, 1979). Otros autores proponen un modelo basado en la micromecánica del fenómeno. Hild, Burr y Leckie (1994) presentan un modelo micromecánico basado en la mecánica de los medios continuos, que permite tener en cuenta los efectos de la rotura de la matriz y el DFM.

Existen pocos antecedentes sobre el tratamiento de este fenómeno mediante la mecánica de los medios continuos. Algunos autores han formulado modelos para compuestos de matriz cerámica (Hild *et al.*, 1994).

5.4.1. Equilibrio de una fibra embebida en una matriz

Existe un mecanismo de transferencia de tensiones entre fibra y matriz mostrada en la figura 5-6 donde se observa que la acción se aplica siempre sobre la matriz y la transferencia a la fibra se produce por la adherencia que existe en ambos materiales. El análisis de la distribución de tensiones a lo largo de una fibra debe tener en cuenta que en los extremos de las fibras se generan estados de tensiones complejos. Dado que las deformaciones en los extremos de las fibras son menores que en la matriz se inducen importantes tensiones cortantes en los extremos alrededor de la fibra en su dirección longitudinal. En consecuencia la fibra se encuentra sometida a un estado de tracción. A medida que la relación en la longitud de la fibra (l) y su diámetro (d) disminuye los fenómenos que se producen en la zona final del refuerzo adquieren más importancia llegando a afectar a la rigidez del conjunto, de ahí que se precise un tratamiento especial de los compuestos de fibra corta. En cambio, cuando se consideran fibras largas la disminución de rigidez del conjunto debido al efecto de los extremos es prácticamente despreciable.

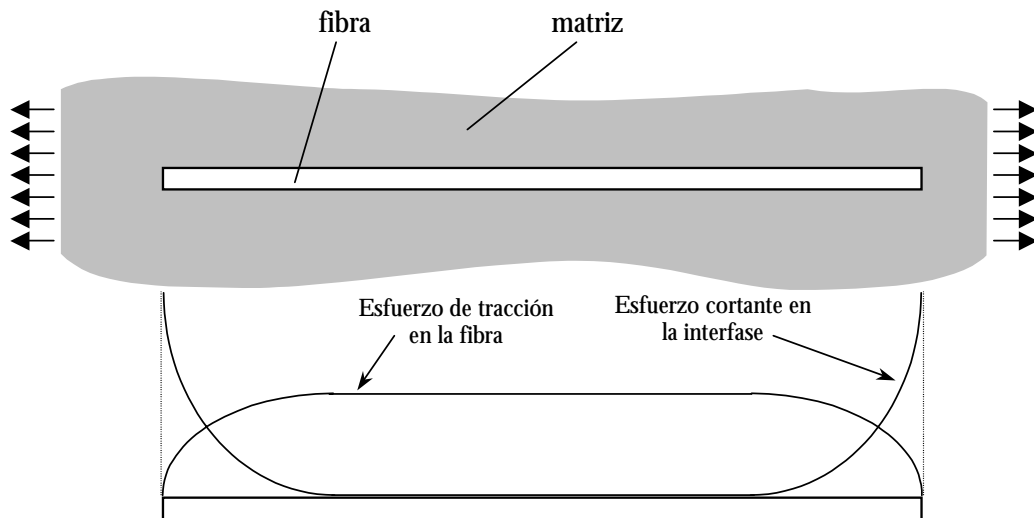


Figura 5-6. Variación de los esfuerzos de tracción y cortante a lo largo de una fibra embebida en una matriz sometida a tracción. Considerando un comportamiento elástico de la fibra y de la matriz la tracción resultante en el extremo de la fibra resulta nula y máxima en la zona central, por el contrario las tensiones cortantes resultan máximas en los extremos y decrecen hasta anularse en la zona central.

En el caso de superarse la resistencia del interfaz fibra-matriz se produce el consiguiente deslizamiento relativo entre la fibra y la matriz. La falla, sin embargo, no implica necesariamente que la matriz sea incapaz de transmitir carga a la fibra ya que pueden aparecer fuerzas de fricción entre la fibra y la interfase. Por lo tanto, el DFM tiene como consecuencia directa la limitación de la matriz de transferir esfuerzos a la fibra.

5.4.2. Propuesta para el tratamiento del DFM

La metodología que aquí se presenta, integrada dentro de la mecánica de los medios continuos, reproduce los fenómenos que se observan debido a la aparición del mecanismo del DFM. Los materiales compuestos sometidos a estados de tensión en los cuales se ha producido el desprendimiento entre la fibra y la matriz produce una limitación de la matriz de transferir esfuerzos a la fibra y, además, debido al deslizamiento entre las fases no cumplen con la ecuación de cierre impuesta por la teoría de mezclas. Por lo tanto, estos mecanismos producen por un lado *i)* la pérdida de rigidez global debido a la disminución de la colaboración de la fibra en la matriz, y por el otro *ii)* deformaciones permanentes debido al deslizamiento irreparable entre fases del compuesto.

Un modelo constitutivo basado en la mecánica de medios continuos permite cuantificar estos fenómenos. Mediante una variable interna asociada a la teoría de daño continuo (ver Oliver *et al.*, 1990, y Oller (1991 y 2001) permite tratar la pérdida de rigidez y el movimiento

relativo entre fibra y matriz puede representarse a través de una deformación irrecuperable mediante la teoría de plasticidad (Oller *et al.*, 1995).

La determinación del inicio de este fenómeno se realiza mediante una condición de resistencia que compara la tensión efectiva de un punto con la resistencia de la fibra teniendo en cuenta el fenómeno del DFM. Conocida la forma en que participa la fibra dentro del compuesto, y el mecanismo de transmisión de tensiones entre fibra y matriz, se puede decir que la fibra participa dentro del compuesto en función de su propia resistencia y de la capacidad de transferencia de esfuerzo de la interfase fibra-matriz, por lo tanto su resistencia está influenciada por el medio que la contiene. Por lo tanto, la determinación de su resistencia real y su capacidad de colaboración depende de su propia resistencia nominal $(f^N)_{fib}$ (o resistencia de la fibra en condiciones aisladas), de la resistencia nominal de la matriz $(f^N)_{mat}$ y de la resistencia nominal de la interfase entre fibra y matriz $(f^N)_{fib-mat}$ (o capacidad de transferencia de tensiones desde la matriz a la fibra). Se puede definir entonces la resistencia de una fibra contenida en una matriz como (Car, 2000)

$$(f^R)_{fib} = \min \left[(f^N)_{fib}, (f^N)_{mat}, \frac{2}{r_f} (f^N)_{fib-mat} \right] \quad (5-109)$$

donde r_f es el radio de la fibra.

De la ecuación anterior se deducen los siguientes estados límites dependiendo de que término de la expresión (5-109) es menor: *i)* si la matriz es más resistente que la fibra y la adherencia fibra-matriz es perfecta, la capacidad de participación de la fibra queda limitada por su propia resistencia nominal, *ii)* si se produce un fallo en la matriz por microfisuración, etc., en tanto que la fibra se mantiene en régimen lineal, la resistencia de la fibra queda limitada por la resistencia de la matriz, pues no podrá transferir más tensión que la que le permite el medio que la contiene y *iii)* si el fallo se produce en la interfase fibra-matriz, la resistencia de la fibra queda limitada por la de la interfase.

En la mayoría de los FPR se verifica que el agrietamiento por cortadura de la interfase se produce antes que la rotura de las fibras y se observa una separación masiva entre fibra y matriz y por lo tanto la resistencia de la fibra queda limitada por la capacidad de la interfase de transmitir esfuerzos. La aparición de fenómenos plásticos en la matriz de un material compuesto sometido a un estado de cargas monótono creciente impide la transferencia de los esfuerzos desde la matriz hacia las fibras dando lugar a la aparición deformaciones irrecuperables por deslizamiento de la fase de refuerzo respecto de la matriz. A partir de aquí las deformaciones irrecuperables debidas al deslizamiento entre ambas fases se tienen en cuenta con un modelo elastoplástico con endurecimiento para la fase de refuerzo debido a la presencia de las fuerzas de rozamiento entre fases. También en este momento la transferencia de cargas de la fibra a la matriz no es nula debido a la presencia de

fenómenos de fricción entre ambas fases del material compuesto. Por lo tanto las fibras aumentan su estado de tensiones según un módulo elástico diferente del inicial.

El modelo que se propone en este trabajo se basa en establecer el estado de tensiones en el que ese encuentra la fibra en el momento de producirse la rotura en la matriz del compuesto. Por lo tanto se trata de un modelo *no local material*, debido a que el estado de uno de los materiales (refuerzo) depende de otro (matriz). Con la intención de tener en cuenta la iteración entre el estado de la matriz y de la fibra es necesario determinar el estado de tensiones de la fase de refuerzo en el momento en que se verifica el DFM. Este nivel de tensiones define el límite de tensión que se transmite entre el refuerzo y la matriz. A partir de este instante los esfuerzos se transmiten por fricción.

Con el objetivo de incluir el DFM en la formulación del modelo constitutivo para materiales compuestos se define la relación

$$r_{red} = \frac{\sigma^n}{(f^R)_{fib}} \quad (5-110)$$

donde $(f^R)_{fib}$ representa la resistencia del refuerzo y σ^n representa la tensión en la dirección longitudinal de la fibra en el momento que se verifica el DFM debido a la aparición de fenómenos plásticos en la matriz.

Con el fin de simular las deformaciones irreversibles que se verifican como consecuencia del DFM se redefine el criterio de fluencia de la fase refuerzo. El factor r_{red} permite establecer el momento a partir del cual la matriz alcanza el límite de transferir carga a la fibra. Por lo tanto, el criterio de fluencia resulta

$$\Phi(\sigma, g, \alpha) = F(\sigma, g) - r_{red} \cdot K(\alpha) \quad (5-111)$$

El producto $r_{red} \cdot K(\alpha)$ permite redefinir el umbral de tensiones a partir del cual aparecen fenómenos plásticos. La modificación en la condición de fluencia hace necesario redefinir el modelo constitutivo elastoplástico de la fase de refuerzo. Si el modelo está formulado en grandes deformaciones esto se debe realizar tanto en la configuración referencial como en la actualizada (Car, 2000)

5.5. Compresión. Pandeo local de la fibra

Este capítulo resume parte del trabajo de investigación publicado por Puig *et al.* (2002), cuya motivación ha sido la solución de este complejo fenómeno dentro del marco teórico que se ha descrito en los apartados previos. La importancia del pandeo local de la fibra es el hecho de que tiene lugar a esfuerzos bajos en comparación con los valores predichos por la teoría de láminas (abolladura), o por la teoría de inestabilidad elástica de vigas.

La presencia en la literatura especializada de artículos que traten el tema de la inestabilidad elástica por compresión de las fibras mediante aproximaciones por el método de los elementos finitos es en realidad muy escasa. De hecho, esto puede deberse a la falta de un modelo adecuado para tratar los complejos fenómenos de interacción entre las fibras y matriz que se desarrollan en estos materiales compuestos. En este capítulo se hace una aproximación a la solución numérica de este fenómeno de inestabilidad local inelástica. Para ello, se presenta un modelo constitutivo de pérdida de rigidez por *pandeo local* de las fibras largas en materiales compuestos reforzados. Dicho modelo se establece a partir de una generalización del de daño isótropo de Kachanov (ver Oliver *et al.*, 1990, y Oller (1991 y 2001)). La formulación resultante se considera dentro del contexto de los materiales compuestos anisótropos y se integra en un código de elementos finitos. Esta formulación así obtenida, permite simular numéricamente el complejo fenómeno de la inestabilidad de las fibras en materiales compuestos de fibras largas y tratar esta inestabilidad local dentro de una inestabilidad global representada mediante una formulación en grandes deformaciones. Esta formulación se basa en la teoría de mezclas de sustancias básicas, anisotropía general, grandes deformaciones y comportamiento no lineal de cada sustancia básica que compone el material compuesto. Dada la amplitud del trabajo que implica el tratamiento de este fenómeno de pandeo, aquí sólo se hace un esfuerzo por presentar la inestabilidad local y su influencia global en la pieza.

5.5.1. Descripción del fenómeno. Estado del conocimiento.

El fenómeno que se estudia se produce en aquellos materiales compuestos reforzados con fibras paralelas entre sí y orientadas en la dirección longitudinal de la pieza estructural. Estas fibras se comportan solidariamente entre sí y trabajan en forma confinada por influencia de la matriz. El refuerzo dispuesto en este tipo de materiales se calcula para que el compuesto ofrezca una respuesta óptima a esfuerzos de tracción, ya que no se espera que estos materiales esbeltos de matriz reforzada con fibra trabajen a compresión. Sin embargo, deben considerarse aquellas situaciones de cargas no esperadas que exigen que el material responda adecuadamente frente a esta imposición.

El punto de partida del estudio es la solución del problema de la inestabilidad por compresión de estructuras esbeltas para materiales elásticos, homogéneos e isótropos. Mediante el planteamiento del problema, tal y como se observa en la figura 5-19, se obtiene la ecuación diferencial no homogénea que gobierna el fenómeno para el caso de piezas ideales

$$EIy''(x) + N \cdot y = F(Y_A, q, x) \quad (5-112)$$

donde E es el módulo elástico del material; I es la inercia de la sección recta de la pieza respecto del eje de flexión; N la carga de compresión aplicada en el eje de la pieza; y la distancia vertical de un punto de la deformada a la posición sin deformar de la pieza; y F una función que depende del estado de cargas particular de la estructura.

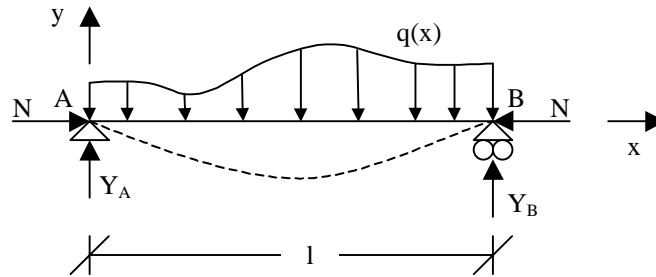


Figura 5-19. Esquema de una pieza ideal comprimida y flectada.

En el caso de que no haya carga transversal u otra acción que produzca flexión, entonces la ecuación (5-112) se reduce a su expresión homogénea

$$EIy''(x) + N \cdot y = 0 \tag{5-113}$$

cuya solución se conoce como la carga crítica de Euler

$$N_E = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \tag{5-114}$$

donde l es la longitud de la pieza.

Para piezas estructurales en general, y en particular para aquellas conformadas por materiales anisótropos, es posible obtener buenas aproximaciones con programas de elementos finitos que tengan implementada una cinemática en grandes deformaciones.

Sin embargo, la inestabilidad por compresión de las fibras largas embebidas en una matriz es un fenómeno de gran complejidad y de difícil estudio y comprensión. La principal dificultad estriba en el hecho de que en el mismo influyen tanto propiedades de la propia fibra como de la matriz (problema no local). La geometría de la fibra, altamente esbelta por naturaleza, y la coacción al movimiento que ejerce la matriz influyen decisivamente en el fenómeno. La anisotropía que caracteriza a la mayoría de las fibras utilizadas en materiales compuestos avanzados condiciona igualmente la respuesta de estos materiales a compresión.

(a) Modelos micro-mecánicos

El primer intento de proponer un modelo analítico para estudiar el fenómeno se debe a Rosen (1965), basándose en la idea de que la rotura a compresión axial estaría asociada al curvado de las fibras cuyo comportamiento es análogo al de pandeo de columnas esbeltas. Basándose en estas evidencias, diferenció dos posibles modos de pandeo según el volumen de fibras del material compuestos: modo *extensional* o desfasado, propio de volúmenes de fibra bajos; y *shear* o en fase, para grandes volúmenes de fibra (figura 5-20

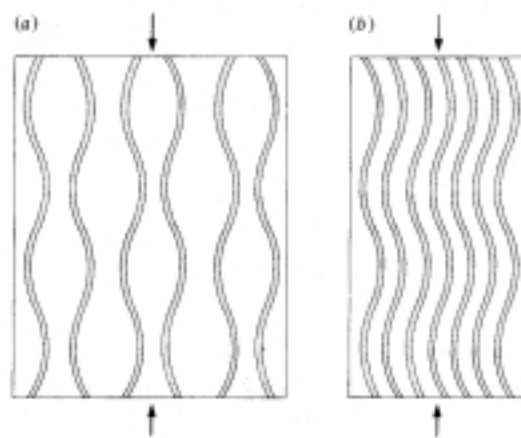


Figura 5-20. Representación esquemática de los modos de curvado (a) en desfase y (b) en fase en láminas unidireccionales a compresión longitudinal. (Hull, (1987))

A pesar de que posteriormente el trabajo de Rosen resultó insuficiente para la predicción fiable de las cargas de rotura, sobrestimando las mismas, la idea básica de su formulación, basada en los modos de micro-dobles, ha supuesto el punto de partida de la mayoría de los trabajos posteriores.

En trabajos posteriores al de Rosen, diversas han sido las líneas de investigación con la finalidad de obtener un modelo que reproduzca el micro-pandeo de las fibras y su cinemática. En esta línea, Balacó de Morais (1996) propone una formulación 2-D y 3-D en elementos finitos, que se basa en la hipótesis de que la inestabilidad local de las fibras gobierna la rotura a compresión longitudinal de las láminas unidireccionales. El modelo original fue simplificado en trabajos posteriores (Balacó de Morais (2000)) hasta conseguir la linealización del mismo. Dado que un modelo multi-fibra es muy costoso computacionalmente, la formulación resultante se usó principalmente para verificar un modelo simplificado de celda básica. Los resultados obtenidos mostraron que la longitud de onda de la ondulación inicial de la fibra no es particularmente relevante. Por contra, se comprobó que el módulo elástico de la matriz y la participación volumétrica de la fibra en

el compuesto afectaban de forma importante la resistencia a compresión de la lámina, siendo ésta mayor para valores elevados de aquellos. En general, sin embargo, los valores predichos usando datos realistas para definir el modelo son muy superiores a los obtenidos mediante ensayos experimentales. En conclusión, los modelos micro-mecánicos, cuya finalidad es la de obtener la carga de rotura a compresión del compuesto mediante aproximaciones a la cinemática real del pandeo de las fibras, resulta ser excesivamente costosa computacionalmente, con lo cual deben deducirse formulaciones simplificadas que permitan obtener dichos valores de forma explícita.

(b) Modelos de daño mecánico

La otra línea principal de investigación que se encuentra en las referencias se basa en la consideración de las imperfecciones como la variable fundamental para formular un modelo válido. En este sentido, Barbero y Tomblin (1996) combinan una distribución estadística de las imperfecciones con el clásico modelo de daño mecánico de Kachanov. De esta manera, la resistencia de la fibra disminuye debido a la presencia de las imperfecciones, siendo tanto mayor esta reducción como mayor sea el volumen de fibra.

El modelo parte de la constatación de que el micro-pandeo de fibras perfectamente alineadas (modelo de Rosen) es un problema sensible a las imperfecciones. Es decir, pequeñas cantidades de imperfecciones (desalineaciones) pueden causar grandes reducciones de la carga de pandeo, y de esta manera reducir la resistencia a compresión respecto la predicción que realiza el modelo de Rosen. La relación entre la tensión de pandeo (resistencia a compresión) y la magnitud de las imperfecciones (desalineaciones) es conocida en la teoría de la estabilidad como la curva de sensibilidad a las imperfecciones. En el trabajo realizado por Barbero y Tomblin (1996), también se comprueba que las predicciones son muy sensibles a la ecuación que modela la respuesta tenso-deformacional a cortante. Debido a esto se hizo necesario el desarrollo de un modelo basado en la teoría de la estabilidad. Para la definición final del modelo de daño, deben tenerse en cuenta algunas consideraciones. En un trabajo anterior de Tomblin (1994), se demostró que una fibra pandeada no tiene resistencia post-pandeo (o post-crítica). Esta afirmación, sin embargo, no implica ni asume que una fibra pandeada esté permanentemente dañada, ni que el proceso sea irreversible. Sólo indica que la capacidad de carga de una fibra pandeada es menor que la carga aplicada. La fibra puede romperse debido a la curvatura cuando la deformación lateral es excesiva. Por lo tanto, el modelo de daño unidimensional no requiere que la fibra esté en un estado de daño permanente. Es suficiente asumir que todas las fibras que hayan pandeado no son capaces de soportar cargas mayores debido a que no disponen de resistencia post-pandeo. En el momento en que una fibra pandea, la carga aplicada se redistribuye entre el resto de las fibras que no han pandeado todavía.

En cualquier instante de carga de la probeta, la carga aplicada (que en el instante inicial la tensión se aplica al área de fibra total) es igual a la tensión efectiva en el instante de carga considerado aplicada en el área de las fibras que permanecen sin pandear. Es decir,

$$\sigma_{app} = \sigma_{CR}(\alpha) \cdot [1 - \omega(\alpha)] \quad (5-115)$$

donde $0 \leq \omega(\alpha) \leq 1$ es el área de las fibras pandeadas por unidad de área de fibra inicial. El área de las fibras pandeadas $\omega(\alpha)$ es proporcional a una función estadística de la distribución de desalineaciones de las fibras. La ecuación (5-115) tiene un máximo que se corresponde con la tensión máxima que puede ser aplicada al compuesto. Este máximo es único y proporciona un valor de la resistencia a compresión del compuesto que considera la curva de sensibilidad a las imperfecciones y la distribución aleatoria de las desalineaciones de las fibras.

La comparación de las predicciones obtenidas con el modelo con los ensayos experimentales demostró que las diferencias eran muy sensibles a la forma de medición de las propiedades a cortante de las probetas ensayadas. Así mismo, se constató la dependencia clara de la resistencia a compresión con la rigidez a cortante inicial. También, se observó que la resistencia a compresión decrece claramente cuando las imperfecciones de las fibras aumentan, y que no aumentan a mayores volúmenes de fibra debido a que también aumenta la probabilidad de que presenten imperfecciones.

5.5.2. Modelo de pandeo de los compuestos con fibras largas

En este apartado se presenta una aproximación al fenómeno a través de la mecánica de los medios continuos que permite generalizar la simulación numérica del fenómeno de inestabilidad en estos materiales compuestos.

La dificultad de este planteamiento es el de considerar un fenómeno esencialmente un problema cinemático a través de un símil constitutivo. Sin embargo, el mismo fenómeno puede observarse desde los dos puntos de vista: *i)* el cinemático que estudia la pérdida de rigidez global y *ii)* el constitutivo que estudia la pérdida de resistencia en un punto como consecuencia de la pérdida de rigidez global. En este planteo se admiten como válidas a ambos puntos de vista.

También debe mencionarse el hecho de que no se ha pensado el modelo para ningún tipo de material en particular. Igualmente, la teoría no supone a priori ningún modo de pandeo determinado. Esto permite al modelo ser válido para cualquier volumen de fibras.

(a) Definición general del modelo de fibras

El modelo que se propone es una modificación del de daño isótropo de Kachanov (Oliver *et al.* (1990)). Dicha modificación consiste en la inclusión de una nueva variable interna escalar, que define el comportamiento por pandeo, como se muestra en la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d_f) \cdot (1 - d_p) \cdot \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5-116)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones; $\boldsymbol{\varepsilon}$ el tensor de deformaciones; \mathbf{C} el tensor constitutivo inicial; d_f la variable de daño mecánico; y d_p la variable de pérdida de rigidez por pandeo. La variable d_p está acotada inferior y superiormente, tomando valores entre cero y uno, $0 < d_p < 1$, para cada extremo. El modelo resultante sigue siendo, por lo tanto, de daño isótropo. La variable de daño mecánico d_f está también acotada, $0 < d_f < 1$, y se obtiene de igual forma que en el modelo original que puede consultarse en la referencia Oliver *et al.* (1990). Su propiedad fundamental es su irreversibilidad, y su función dentro del modelo es la de cuantificar la degradación del material debida a la superación de la capacidad portante del mismo.

La variable de pérdida de rigidez por pandeo d_p , opuestamente a la variable de daño mecánico, se caracteriza principalmente por su reversibilidad. Su finalidad es la de considerar la pérdida de rigidez que acontece en la fibra en el momento de producirse su inestabilidad como una pérdida de capacidad portante a nivel constitutivo, influenciada por la interacción fibra matriz. Sobre esta afirmación es importante recordar, para evitar equívocos, que desde el punto de vista fenomenológico, el pandeo no es un fenómeno constitutivo, pero con este modelo, se hace una similitud entre el problema cinemático del pandeo y el problema constitutivo introducido por esta variable reversible d_p de pérdida de rigidez. Este procedimiento de “simulación macroscópica”, permite estudiar la inestabilidad de un gran número de fibras, sin que importe exactamente el comportamiento de una cualquiera de ellas, sino sólo la influencia que este fenómeno tiene en el conjunto.

(b) Definición de la variable de pérdida de rigidez por pandeo.

La definición de d_p se complementa con la inserción del modelo de daño en la teoría de mezclas generalizada y en la técnica del mapeo de espacios para el tratamiento de la anisotropía general propuestas por Car (2000). También tiene en cuenta la propuesta de Rosen (1965) de asimilar la fibra a un conjunto de columnas esbeltas. A diferencia de éste,

aquí no se supone a priori ningún modo de micro dobleces de fibra del material, sino que el modo de inestabilidad resulta naturalmente de la formulación misma.

La definición más general se muestra en la siguiente ecuación,

$$d_p = f_1(\text{fibra}) \cdot f_2(\text{matriz}) \quad (5-117)$$

donde $f_1(\text{fibra})$ es una función que depende de las propiedades características de la fibra; y $f_2(\text{matriz})$ depende de las propiedades de la matriz. La consideración de la primera de ellas es obligada puesto que un modelo de inestabilidad de las fibras debe tener de alguna forma en consideración las propiedades mecánicas de las mismas. La inclusión de la segunda función tiene como finalidad simular la coacción al movimiento que ejerce la matriz sobre la fibra, estableciendo así una condición de contorno para las fibras, que depende de la propia evolución del proceso mecánico (variable interna).

La idea básica de esta definición es la de aprovechar la situación que crea la teoría de mezclas generalizada para la solución numérica del problema de interacción entre las sustancias componentes. Dicha teoría se basa en la descomposición del material compuesto en sus componentes, la integración de la ecuación constitutiva particular de cada uno de ellos, y la obtención de la respuesta del compuesto como una recomposición de las respuestas obtenidas para los materiales componentes en función de la participación volumétrica de los mismos. La interacción entre los distintos materiales se produce en la etapa de recomposición de la respuesta. En este marco, la idea es considerar la fibra como un sistema de columnas independientes que actúan de forma conjunta, pero sin la matriz que las une y las cohesionan (figura 5-21). Estas columnas son geoméricamente perfectas y sin imperfecciones. Frente a cargas actuantes, las fibras tendrán una tendencia natural a pandear debido a su gran esbeltez. La consideración del efecto de coacción al movimiento y, en general, de confinamiento que ejerce la matriz circundante se tiene en cuenta a dos niveles: a través de la recomposición de la teoría de mezclas y de la variable de pérdida de rigidez por pandeo. Esto supone un mayor factor de interrelación entre los materiales componentes.

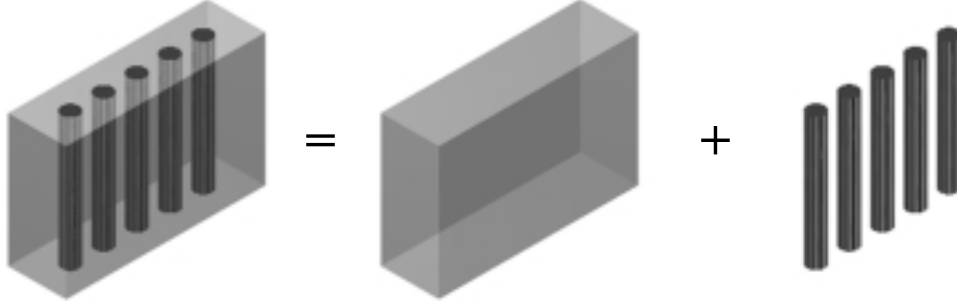


Figura 5-21. Descomposición del material compuesto en sus componentes.

(c) Participación de la fibra.

La participación de la fibra se realiza mediante la definición de una relación entre la tensión aplicada y la tensión de comparación ($f_1(\text{fibra}) = \sigma_{\text{aplic}} / \sigma_{\text{comp}}$). Esta formulación para la fibra se obtiene a partir de la expresión clásica de la tensión crítica de Euler, modificada para tener en cuenta la reducción del módulo elástico debido a la degradación de la propia fibra. Estas tensiones aplicadas y de comparación se definen para la fibra como,

$$\sigma_{\text{aplic}} = (1 - d_f) \cdot (1 - d_p) E_0 \varepsilon \quad (5-118)$$

donde σ_{aplic} es la tensión longitudinal de la fibra; E_0 el módulo longitudinal de la fibra; y ε la deformación elástica longitudinal de la fibra, y

$$\sigma_{\text{comp}} = \frac{n_p^2 \pi^2 I}{A \cdot l^2} (1 - d_f) \cdot (1 - d_p) E_0 \quad (5-119)$$

donde σ_{comp} es la tensión de comparación; n_p el modo de pandeo; $I = \pi d^4 / 64$ la inercia de la sección recta de la fibra respecto del eje de flexión donde d es el diámetro nominal de la fibra; y l la longitud nominal de la fibra. La longitud de pandeo puede definirse en forma general como

$$\bar{l} = \frac{l}{n_p} \quad (5-120)$$

La tensión de comparación definida en la ecuación (5-119) se ha obtenido de sustituir el módulo elástico del material en la expresión de la tensión crítica de Euler (ecuación 5-114) por el módulo dañado correspondiente a cada paso de carga. Este cambio implica que la tensión de comparación difiera de la tensión crítica de Euler en que aquella depende del proceso de carga y por lo tanto no puede definirse a priori, mientras que la expresión

clásica de Euler no depende del proceso de carga. La idea básica, sin embargo, es la misma en ambos casos, que es proporcionar una tensión de referencia que permita decidir si la tensión en el material es suficiente para producir la inestabilidad, y en que modo se producirá ésta.

La longitud de pandeo del modelo, ecuación (5-120) puede interpretarse como una modificación adecuada de una longitud nominal original l . En cada caso particular, el proyectista o analista deberá decidir su valor más adecuado y que mejor represente el problema a estudiar. En particular, para el caso de un material compuesto laminado típico, la longitud l tomaría el valor de la longitud nominal de las fibras. De la misma manera, si el análisis consistiera en el estudio de una viga o columna de hormigón armado, el valor adecuado sería la longitud libre entre cercos. La evolución posterior de la longitud de pandeo estará condicionada por el proceso de carga, pero no serán necesarios ajustes complementarios por parte del analista.

La evolución de los modos de pandeo n_p depende del proceso de carga. Para estados de carga en que la tensión en la fibra aumenta con los desplazamientos (rama creciente del diagrama tensión-deformación), el modo de pandeo debe ser tal que la tensión de comparación sea igual o superior a la tensión alcanzada en el paso anterior del proceso de carga. Es decir,

$$n_p^{t+1} / \sigma_{\text{comp}}^{t+1} \geq \sigma_f^t \quad (5-121)$$

Donde $t+1$ es el paso de carga correspondiente al tiempo actual, t el paso de carga anterior; y σ_f la tensión en la fibra para el estado convergido. En el caso que la fibra no pueda asumir mayores niveles de tensión para nuevos aumentos de deformación (rama decreciente del diagrama tensión-deformación), se supone que la fibra pandea y, por lo tanto, la relación entre las tensiones aplicada σ_{aplic} y de comparación σ_{comp} es idéntica a la unidad. En este supuesto, se obtiene una aproximación al modo de pandeo de la fibra de la siguiente forma,

$$n_{\text{lim}} = \frac{4l}{\pi d} \sqrt{\varepsilon} \quad (5-122)$$

donde n_{lim} es el modo de pandeo límite para la rama descendiente del diagrama tensión-deformación.

En resumen, en este caso la participación de la fibra se define como

$$f_1(\text{fibra}) = \frac{\sigma_{\text{aplic}}}{\sigma_{\text{comp}}} = \left(\frac{4l}{n_p \pi d} \right)^2 \varepsilon \quad (5-123)$$

(d) Participación de la matriz.

La segunda parte de la definición se basa en la idea de que la variable de pérdida de rigidez por pandeo debe considerar en su definición el efecto de coacción al movimiento y de confinamiento que sobre ella ejerce la matriz. Este efecto debe considerarse en la definición debido a que la teoría de mezclas no es una herramienta válida para su representación.

Para tal fin, es necesario que la matriz se modele mediante un modelo de daño isótropo de Kachanov. La variable de daño mecánico correspondiente a la matriz, d_m , como medida de la degradación de dicho material, se utiliza también en el presente modelo como una variable representativa de la evolución de la capacidad de confinamiento de la matriz sobre la fibra. Es decir, y en el caso de que la matriz esté formada por un único material, se define,

$$f_2(\text{matriz}) = d_m \quad (5-124)$$

En el caso de que la matriz estuviese constituida a su vez por más de un material componente, la definición dada en la ecuación (5-124) se generalizaría de la siguiente forma

$$f_2(\text{matriz}) = \sum_{j=1}^{n_m} k_{m,j} d_{m,j} \quad (5-125)$$

donde n_m es el número de materiales componentes de la matriz; $d_{m,j}$ es el daño mecánico del material j -ésimo de la matriz, y $k_{m,j}$ es el coeficiente de participación volumétrica local de la matriz del material j -ésimo de la misma, que se define como

$$k_{m,j} = \frac{V_{m,j}}{V_m} = \frac{V_{m,j}}{V - V_f} \quad (5-126)$$

donde V_m , V_f , $V_{m,j}$ y V son respectivamente los volúmenes de la matriz, de la fibra, del material componente j -ésimo y del compuesto total. Es decir, se aplica la teoría de la mezcla de sustancias al daño mecánico de los materiales componentes de la matriz, estableciéndose así una composición de comportamientos.

Debe considerarse, por último, la conveniencia o no de modificar la definición dada en la ecuación (5-125) de la siguiente manera:

$$f_2(\text{matriz}) = \sum_{j=1}^{n_m} k_{m,j} (d_{m,j})^{q_j} \quad (5-127)$$

donde q_j actuaría como un factor regulador de la influencia de la matriz sobre la fibra. Es decir, si $q_j > 1$, se estaría asumiendo que en los primeros estadios del proceso de degradación del material matriz considerado, éste es capaz de seguir coaccionando el

movimiento de una forma bastante efectiva (figura 5-22). A medida que aumentara el daño, la posibilidad del pandeo aumentaría en mayor medida que al principio. Si, por el contrario, se define una $q_j < 1$, se estaría considerando que el material pierde rápidamente la capacidad de coacción en el momento en que empieza a degradarse.

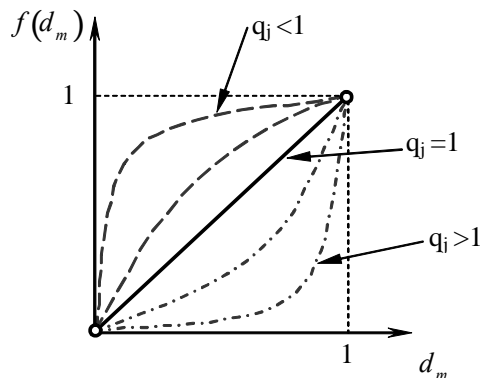


Figura 5-22. Representación de la capacidad de confinamiento de la matriz mediante un exponente q_j

Probablemente, sin embargo, la problemática será mucho más extensa de lo que aquí se da a entender. Es posible que el ajuste exacto de dichos coeficientes dependa en realidad de la combinación de materiales que se realice. Es decir, una misma matriz con dos tipos de fibras diferentes podría tener un diferente comportamiento frente a la inestabilidad de estas últimas debido a que los mecanismos de adherencia son distintos, al propio proceso de fabricación del compuesto, etc. Sin embargo, debe huirse de considerar casos extremos. Es decir, ajustar el valor de un único coeficiente para todos los casos posibles sería tan poco práctico como intentar definir un valor para todas y cada una de las combinaciones de materiales posibles. Definiendo un valor medio para cada material, indistintamente de la combinación que se haga de los mismos y del tipo de fibra con el que formará el compuesto, debería ser suficiente en la mayoría de los casos.

Sin embargo, la inclusión de esta variable q_j en el modelo tiene una clara desventaja, en una primera aproximación, se trataría de un parámetro empírico o semiempírico. Lo ideal sería definir dichos coeficientes como una función de las propiedades de los propios materiales componentes de la matriz. Sin embargo, resultaría más fácil aproximar el valor a partir de ensayos experimentales. Si se actuara de esta última forma, el modelo dependería de una variable ajustada experimentalmente, con lo cual se perdería la generalidad con que se ha tratado el problema hasta el momento. Por lo tanto, antes de intentar definir o ajustar dicho parámetro, debería discutirse acerca de la conveniencia de incluirlo o no en el modelo.

(e) Propuesta de la variable de pérdida de rigidez por pandeo.

Con los elementos presentados hasta el momento, la definición de la variable de pérdida de rigidez por pandeo que se propone en este trabajo resulta escrita del siguiente modo,

$$d_p = \left(\frac{4l}{n_p \pi d} \right)^2 \varepsilon \left[\sum_{j=1}^{n_m} k_{m,j} d_{m,j} \right] \quad (5-128)$$

Es decir, la variable de pérdida de rigidez por pandeo depende de características geométricas propias de la fibra (longitud y diámetro), de la evolución de las características mecánicas de la matriz (suma ponderada del daño mecánico de los materiales componentes de la matriz) y del paso de carga considerado (deformación actuante y condiciones sobre la evolución del modo de pandeo).

5.5.3. Principales características del modelo

De la propia definición de la variable de pérdida de rigidez por pandeo d_p , ecuación (5-128), pueden extraerse conclusiones respecto al comportamiento del modelo definido en la ecuación (5-116). En primer lugar, el pandeo de la fibra no es posible si no existen procesos de degradación en la matriz. Este hecho se refleja con claridad en la ecuación (5-128), pues si no existe degradación de la matriz, el daño mecánico de la misma es nulo y la variable de pérdida de rigidez d_p vale cero. Sólo cuando se supere el primer umbral de daño en la matriz podrá producirse pérdida de rigidez

Como indica la ecuación (5-116), la pérdida total de capacidad portante en la fibra puede darse como consecuencia del daño mecánico d_f en ella misma, de la pérdida de rigidez por pandeo d_p o por una combinación de ambos. Los estudios llevados a cabo al respecto demuestran, en los casos estudiados, que la rotura tiene lugar por una combinación de ambos fenómenos. Al iniciarse el fenómeno, las fibras podrían estar sometidas a desplazamientos y curvaturas excesivas que no serían capaces de soportar, con lo que se iniciarían procesos de rotura física de las mismas.

Una de las principales propiedades de la variable de pérdida de rigidez por pandeo definida en la ecuación (5-128), y que la diferencia fundamentalmente de la variable de daño clásica, es su reversibilidad. En efecto, durante un proceso de carga monótono creciente, la variable de pérdida de rigidez por pandeo también evolucionará de forma creciente. En concreto, en cada paso de carga deberán actualizarse los valores del modo de pandeo n_p , de la deformación ε y del daño de la matriz d_m . Si, llegados a cierto punto, se inicia un proceso de descarga, el daño de la matriz y el modo de pandeo se mantienen constantes: el primero por su naturaleza irreversible, y el segundo por el mantenimiento de las condiciones de contorno que se derivan de la degradación de la matriz. En efecto, el confinamiento que la

matriz ejerce sobre la fibra puede asimilarse, en un esquema estructural, a unas micro-condiciones de contorno inducidas de un material a otro. Al cambiar las propiedades físicas de la matriz por efecto de su propia degradación, las micro condiciones de contorno también varían y, por lo tanto, el modo en qué puede pandear la fibra también debe hacerlo. En el proceso de descarga, la matriz no puede recuperar las propiedades del material original, manteniéndose constante el daño alcanzado y, también, las micro-condiciones de contorno inducidas a la fibra. De esta manera, el modo de pandeo debe mantenerse constante igualmente.

La deformación total para el compuesto, en cada paso de carga, se predice antes de la aplicación del algoritmo de la teoría de mezclas. Luego, mediante una ecuación de compatibilidad entre fibra y matriz (Car, 2000) se obtiene la deformación de cada componente. Este procedimiento es independiente del proceso de carga o de descarga. Por lo tanto, la deformación ε variará desde el último valor alcanzado en el proceso de carga hasta el valor nulo si se realiza una descarga completa. Por lo tanto, la variable de pérdida de rigidez por pandeo d_p , también actuará de la misma manera. Es decir, en un proceso de carga hasta el paso $r = t+i$, se tiene:

$$d_p^{t+1} \in [0, d_p^r]; \forall (t+1) \in [1, r] \quad (5-129)$$

Si en el paso $r+1$ se inicia un proceso de descarga completa hasta el paso $s = r+k$, se tiene

$$d_p^{r+j} \in [d_p^r, 0]; \forall (r+j) \in [r, s] \quad (5-130)$$

Es decir, el valor de la variable de pérdida de rigidez por pandeo es totalmente reversible. Sin embargo, el proceso mismo de carga no lo es.

En efecto, la figura 5-23 muestra un ciclo completo de carga, descarga y recarga para la fibra. El proceso de carga sigue la curva O – A – B – C, el de descarga la parábola C – O, la recarga sigue también la parábola O – C, y en este punto se sigue cargando y el material sigue el proceso de degradación que tenía lugar antes de la descarga.

La *primera conclusión* que resulta de este proceso de carga-descarga-recarga es la evidencia que la descarga sigue un camino elástico no-lineal, y puede demostrarse que toma la forma (Puig, 2002),

$$\sigma_{\text{descarga/recarga}} = \mathbf{C}(\varepsilon) : \varepsilon \quad (5-131)$$

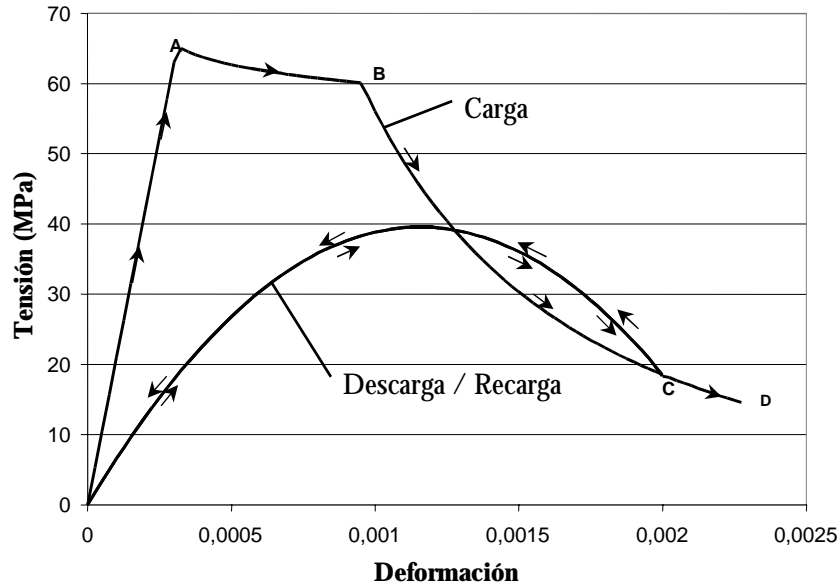


Figura 5-23. Ciclo de carga, descarga y recarga de la fibra.

La *segunda conclusión* hace referencia a que el fenómeno de la inestabilidad de las fibras es no-recuperable en parte, esto se debe a que ésta inestabilidad se produce luego de dañarse la matriz. Es decir, la pérdida de rigidez por inestabilidad es un fenómeno asociado directamente a la carga de compresión actuante. Si disminuye, el material debe recuperar la rigidez perdida (la expresión (5-127) refleja este hecho, indicando que la variable de pérdida de rigidez es totalmente recuperable). Ahora bien, debe tenerse en cuenta que el proceso de carga de la fibra se ha realizado con una matriz, cuya rigidez no es constante durante el proceso mecánico, pues está sujeta a la degradación considerada en la variable de daño mecánico de la misma. En el proceso de descarga, la matriz no puede recuperar sus propiedades originales, por lo que el proceso de descarga de la fibra debe seguir, obligatoriamente, una curva distinta a la de carga.

La *tercera conclusión* es que en un proceso de descarga-recarga, una vez se ha iniciado la pérdida de rigidez por pandeo, la fibra no resiste de la misma forma que el material original, aun en ausencia de daño mecánico en la misma. Fijándose en la figura 5-23, si se inicia un proceso de descarga antes de que se supere el primer umbral de daño mecánico de la fibra, el modelo de daño isótropo de Kachanov predice que la fibra se mantiene en el rango elástico, por lo que debería resistir de la misma manera que el material original, independientemente de que la matriz haya iniciado su proceso de degradación. En cambio, si también se considera la pérdida de rigidez por pandeo, se observa en la figura 5-23 que la fibra no resiste de la misma manera. Y si la descarga se produce cuando el daño mecánico

de la fibra ha superado su primer umbral, el modelo predice que la respuesta de la fibra será siempre menor que la respuesta del modelo de daño isotrópico de Kachanov debido al hecho de que la variable de pérdida de rigidez, a pesar de que disminuye, se mantiene distinta de cero hasta que la descarga es completa.

La *cuarta* y más importante conclusión, que se deduce de la anterior, es que el fenómeno del pandeo de las fibras largas se desarrolla bajo un proceso disipativo, cuyos detalles pueden verse en la referencia de Puig (2002). La Figura 5-23. y, de forma más clara, en la Figura 5-24 puede verse un ciclo completo de carga y descarga para la fibra. La energía de deformación del proceso de carga (área bajo la curva O-A-B) es mayor que la del proceso de descarga (área bajo la curva B-O). La diferencia es la energía disipada. La recarga, como se ha visto anteriormente, se produce por la misma curva que la de. Es decir, los procesos de descarga-recarga son no disipativos.

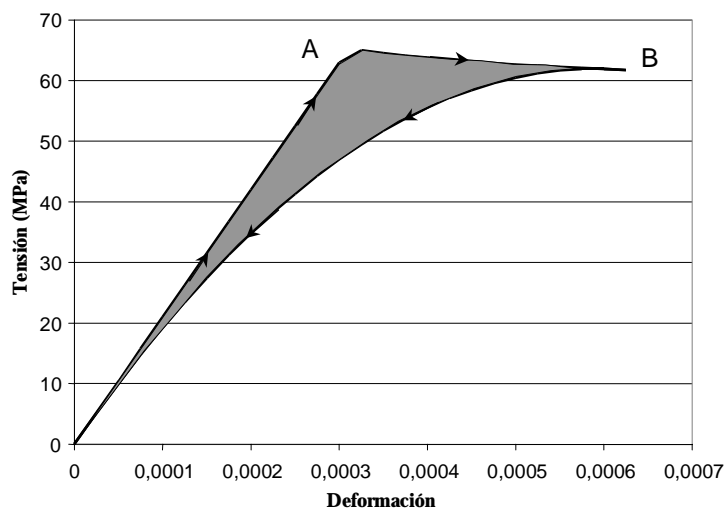


Figura 5-24. Ciclo de carga y descarga de la fibra. Energía disipada.

La energía disipada se justifica físicamente atendiendo al hecho de que las condiciones de contorno de la fibra, son distintas durante el proceso de carga y el de descarga. En efecto, las micro condiciones de contorno inducidas por la matriz a la fibra, debido al confinamiento que la primera ejerce sobre la segunda, evolucionan a lo largo del proceso de carga debido a la degradación de la matriz. Es decir, esta degradación en la matriz impide que ésta ejerza el confinamiento con la misma eficacia que el material no dañado. Al ser las condiciones de contorno distintas, las energías de deformación generadas por ambos procesos también deben serlo.

Por lo tanto, puede afirmarse que el fenómeno de la inestabilidad elástica en materiales compuestos con fibras largas disipa energía del mismo modo que un proceso evolutivo de inestabilidad elástica clásica también disipa. En ambos casos, la disipación es debida a un cambio en las condiciones de contorno del problema. Por lo tanto el calificativo de *elástica* hace referencia a la ausencia de fenómenos plásticos en los materiales componentes del compuesto. Sin embargo, todo el proceso puede cualificarse de *inelástico* en cuanto que disipa energía.

Finalmente, en el proceso de descarga la degradación de la matriz se mantiene constante, ya que no es posible que pueda recuperar sus propiedades iniciales de material no dañado. Por lo tanto, las micro-condiciones de contorno no varían, como tampoco deben hacerlo en el proceso de recarga. Por lo tanto, ambos fenómenos son no-disipativos. Cuando la recarga alcanza de nuevo los valores a los cuales se había iniciado la descarga (punto C, Figura 5-23.), la matriz supera de nuevo su umbral de daño y se reanudan los procesos de degradación de la misma (curva C-D, Figura 5-23.). Consecuentemente, la pérdida de rigidez por pandeo y los fenómenos de degradación mecánica de la fibra también se reanudan.

5.6. Implementación del modelo constitutivo para FRP en el contexto de MEF

En los últimos años el *método de los elementos finitos* (MEF) se ha convertido en el procedimiento numérico más utilizado para la resolución numérica aproximada de un sistema de ecuaciones diferenciales y, es por lo tanto, muy utilizado en el análisis estructural (Bathe, 1982) (Hughes, 1987) (Oñate, 1992) (Zienkiewicz y Taylor, 1994).

La discretización espacial del dominio en elementos finitos reduce el problema a una resolución discreta de unos parámetros que satisfacen la forma integral de la ecuación diferencial complementada con algunas restricciones que representa las condiciones de contorno.

El problema planteado es no-lineal debido a la aparición de fenómenos como las grandes deformaciones, el daño o las deformaciones irreversibles. La resolución de problemas no-lineales en MEF conduce a la resolución de un sistema de ecuaciones no-lineales que se resuelve utilizando una estrategia incremental-iterativa (Bathe, 1982) (Crisfield, 1991) basado en la linealización del sistema no-lineal. El control de este proceso se realiza mediante la definición de variables internas para cada uno de los fenómenos no-lineales que se modelen.

Para la implementación de este modelo presentado en el contexto del método de los elementos finitos se deben adoptar ciertas consideraciones.

(a) Tratamiento de la teoría de mezclas

Para la implementación de la teoría de mezclas en el contexto del MEF es necesario tener en cuenta que el cálculo de la tensión predictora y la integración constitutiva debe realizarse para cada fase que constituye el material compuesto.

Es necesario destacar que para el caso de un material compuesto cuyos componentes son materiales que presenta fenómeno no reversibles (plasticidad, daño, etc.) es necesario la existencia de variables interna que controlan los proceso no lineales para cada una de las fases del material compuesto. La existencia de estas variables internas para cada una de las fases del compuesto supone un elevado costo computacional desde el punto de vista de capacidad de almacenamiento de estas variables que permiten tener en cuenta la historia de carga del cada uno de los componentes.

El tratamiento de la anisotropía también se realiza a nivel de cada componente. Mediante la teoría de mapeo de espacios se consigue reducir siempre el cálculo a modelos constitutivos isótropos.

En Car *et al.* (2000) se puede encontrar una completa descripción de cómo se implementa este modelo dentro del contexto de los elementos finitos en una formulación para grandes deformaciones.

(b) Tratamiento de la fatiga

La implementación en el modelo constitutivo de la degradación por fatiga presentada en el Capítulo 4 debe realizarse a dos niveles.

En primer lugar la formulación de la fatiga afecta a nivel de cada componente. Se deberá definir una variable interna asociada a la fatiga para cada una de las fases componentes donde se considere que haya degradación por carga cíclica. Es decir, existirá una variable interna f_{red} indicadora del nivel de reducción de la resistencia estática que afectará al modelo constitutivo de cada una de las fases. El recálculo del valor de f_{red} también se realizará independientemente a nivel de cada fase a cada nuevo incremento de carga.

El segundo nivel donde afecta el tratamiento de la fatiga es en la linealización de la carga por número de ciclos. Dado que la implementación numérica ya está concebida para trabajar con modelos constitutivos no lineales a cada nuevo incremento se realiza un linealización de la historia de carga. Esta misma linealización para las cargas en función de su incremento se puede aprovechar para realizar una linealización de las cargas en número de ciclos. La implementación de la fatiga obliga a realizar un cambio continuo entre la base de avance en incrementos de cargas propiamente o la base de incremento de carga en número de ciclos.

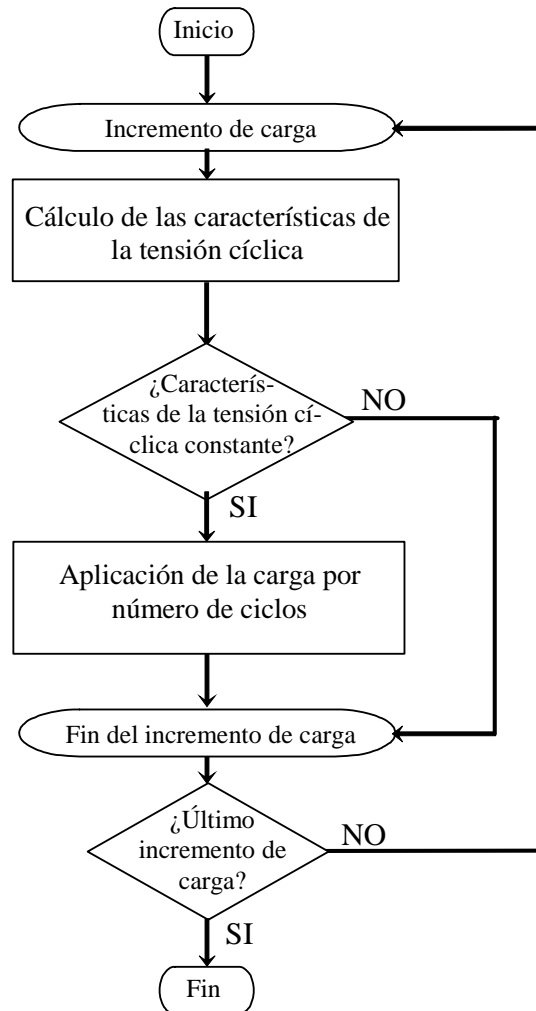


Figura 5-25. Criterio entre avance de los incrementos de carga en base temporal o por linealización por bloques de números de ciclos.

5.7. Referencias

Agarwal, B.D. y R.K. Bansal. (1979). Effect of an interfacial layer on the properties of fibrous composites: a theoretical analysis. *Fibre. Sci. Technol.* **5**, 129-141.

Balacó de Morais, A. (2000). Prediction of the layer longitudinal compression strength. *Journal of Composite Materials* **34**, no. 21: 1808-1820.

Balacó de Morais, A. (1996). Modelling lamina longitudinal compression strength of carbon fibre composite laminates. *Journal of Composite Materials* **30**, no. 10: 1115-1131.

Barbero, E.J. y J.S. Tomblin. (1996). A damage mechanics model for compression strength of composites. *International Journal of Solids Structures* **33**, no. 29: 4379-4393.

- Barlat, F., D.J. Lege y J.C. Brem. (1991). A six-component yield function for anisotropic materials. *Int. Journal of Plasticity* **7**, 693.
- Barlat, F. y J. Lian. (1989). Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheet under plane stress conditions. *Int. Journal of Plasticity* **5**, 51.
- Bassani, J.L. (1977). Yield characterization of metals with transversely isotropic plastic properties. *Int. J. Mech. Sci.* **19**, 651.
- Bathe, Klaus-Jürgen. (1982). *Finite element procedures in engineering analysis*. N.J.: Prentice-Hall.
- Betten, J. (1988). Application of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *Int. J. Plasticity* **4**, 29-46.
- Betten, J. (1981). Creep theory of anisotropic solids. *J. Rheol.* **25**, 565-581.
- Beyerley, D., S.M. Spearing, F.W. Zok y A.G. Evans. (1992). Damage, degradation and failure in a unidirectional ceramic-matrix composite. *J. Am. Ceram. Soc.* **75**, 2719-2725.
- Car, E. (1999). *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya (Dir: Sergio Oller, Eugenio Oñate).
- Car, E., Oller, S. y Oñate, E. (2000). *Tratamiento numérico de los materiales compuestos*. Vol. 57. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.
- Crisfield, M.A. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*; New York: Wiley.
- Dvorak, G.J. y Y.A. Bahei-El-Din. (1982). Plasticity analysis of fibrous composites. *J. App. Mech.* **49**, 327-335.
- Eggleston, Harold G. (1969). *Convexity*. Vol. 47. Cambridge, Eng.: Cambridge University Press.
- Eisenberg, M.A. y C.F. Yen. (1984). The anisotropic deformation of yield surfaces. *J. Engng. Mater. Technol.* **106**, 355.
- Green, A. y P. Naghdi. (1965). A dynamical theory of interacting continua. *Journal Engineering Science* **3**, 3-231.
- Hild, F., A. Burr y A. Leckie. (1994). Fiber breakage and fiber pull out of fiber-reinforced ceramic matrix composites. *Eur. J. Mech. A/Solids* **13**, no. 6: 731-749.
- Hill, R. (1990). Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. *J. Mech. Phys. Solids* **38**, no. 3: 405-417.
- Hill, R. (1979). Theoretical plasticity of textured aggregates. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **85**, no. 1: 179-191.
- Hill, R. (1971). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press.
- Malvern, Lawrence E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Mayugo, J.A., Costa, J., Blanco, N. y Oller, S. (2001). A constitutive model for the fatigue life prediction of composite materials based on continuum damage mechanics. En . Brugge (Belgie): European Society of Composite Materials (ESCM).
- Neamtu, L., Oller, S. y Oñate, E. (1997). A generalized mixing theory Elasto-Damage-Plastic model for finite element analysis of composites. En *Fifth International Conference on Computational Plasticity - COMPLAS V*, editado por D.R. Owen, E. Oñate y E. Hinton. Barcelona: CIMNE.

- Oliver, J., Cervera, M., Oller, S. y Lubliner, J. (1990). Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. En *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures; Proceedings 2nd International Conference*.
- Oller, S. (2001). *Fractura Mecánica - Un enfoque global*. CIMNE-Ediciones UPC., .
- Oller, S. (1991). *Modelización Numérica de Materiales Friccionales*. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, .
- Oller, S., E. Car y J. Lubliner. (2003). Definition of a general implicit orthotropic yield criterion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **192**, no. 7-8: 895-912.
- Oller, S., Neamtu, L. y Oñate, E. (1995). Una Generalización de la teoría de mezclas clásica para el tratamiento en Serie-Paralelo. En *Materiales Compuestos 95*, editado por F. París y J. CañasAEMAC.
- Oller, S. y E. Oñate. (1996). A Hygro-Thermo-Mechanical constitutive model for multiphase composite materials. *Int. J. Solids and Structures* **33**, no. 20-22: 3179-3186.
- Oller, S., E. Oñate, J. Miquel y S. Botello. (1996). A plastic damage constitutive model for composite materials. *Int. J. Solids and Structures* **33**, no. 17: 2501-2518.
- Oñate, E. (1992). *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, .
- Oñate, E., Neamtu, L. y Oller, S. (1997). Generalization of the classical mixing theory for analysis of composite materials. En *International Conference on Advances in Computational Engineering Science (ICES'97)*, editado por N.S. Atluri y G. Yagawa. Georgia-U.S.A.: Tech. Science Press.
- Ortiz, M. y E. Popov. A physical model for the inelasticity of concrete. *Proc. Roy. Soc. London* **A383**, 101-125.
- Owen, D. y J. Lyness. (1972). Investigation of bond failure in fibre-reinforced materials by the finite element method. *Fibre Sci. Technol.* **5**, 129-141.
- Puig, J.M., Car, E. y Oller, S. (2002). Solución numérica para el pandeo inelástico de materiales compuestos reforzados con fibras largas. En *Análisis y Cálculo de estructuras de materiales compuestos*, editado por S. Oller. Barcelona: CIMNE.
- Rosen, B.W. (1965). *Mechanics of composite strengthening* Fibre Composite Materials, .
- Shih, C.F. y D. Lee. (1978). Further developments in anisotropic plasticity. *J. Engng Mater. Technol.* **105**, 242.
- Tomblin, J.S. (1994). *Compressive Strength Models for Pultruded Glass Fiber Reinforced Composites. PhD thesis*. Morgantown, WV, U.S.A.: West Virginia University, .
- Trusdell, C. y Toupin, R. (1960). *The classical Field Theories*. Berlin: Springer Verlag, .
- Voyiadjis, G.Z. y M. Foroozesh. (1990). Anisotropic distortional yield model. *J. Appl. Mech* **57**, 537.
- Voyiadjis, G.Z. y Thiagarajan, G. (1995). *A damage cyclic plasticity model for metal matrix composites*.
- Zienkiewicz, O. y Taylor, R. *El Método de Elementos Finitos*. Vol. 1 y 2. McGraw Hill - Cimne.

