

Capítulo 4

Modelo continuo a fatiga de predicción de vida

4.1. Introducción

El fenómeno de la degradación por la acción de tensiones cíclicas en un material compuesto se puede caracterizar desde diversos enfoques. Tal y como se muestra en el capítulo precedente existe un amplio abanico de enfoques desde los más fenomenológicos o empíricos, hasta las aproximaciones más mecanicistas. Pudiéndose formular aproximaciones a través de la mecánica de la fractura, en el contexto de la mecánica de daño continuo (CDM), etc.

En este capítulo se presenta una metodología para el tratamiento de la degradación a fatiga causada por la aplicación de cargas cíclicas en un laminado de material compuesto. Esta metodología permitirá, como se muestra en el capítulo 5, integrar en la *mecánica de medios continuos* la fatiga junto a cualquier otro fenómeno que pueda afectar al comportamiento mecánico del composite como la plasticidad, el daño, los fenómenos viscosos, las grandes deformaciones, etc. Además, la solución presentada permite tratar el fenómeno de acumulación *no lineal* de la degradación a fatiga, aspecto importante cuando se quiere obtener la predicción de vida de una pieza en servicio sujeta a distintos niveles de amplitud de carga. La metodología propuesta se basa en las investigaciones previas de Oller *et al.* (2001), Suero *et al.* (1998) y Mayugo *et al.* (2001,2002).

Para desarrollar correctamente su función a lo largo de su vida en servicio, un elemento estructural debe conservar dos características primordiales. Primero debe mantener su capacidad de admitir carga sin que se produzca la rotura, es decir que en todo momento y en cualquier zona de la pieza los estados de tensiones no deben superar a la *resistencia* del material. En segundo lugar, debe conservar dentro de unos límites su *rigidez* para evitar que se produzcan deformaciones excesivas.

Dado que un material compuesto sometido a cargas cíclicas sufre una degradación que provoca simultáneamente pérdidas en su resistencia efectiva y en su rigidez efectiva, una teoría de degradación a fatiga que se proponga determinar la vida realmente útil de un elemento estructural debe permitir estimar la evolución de su resistencia y de su rigidez en

cada uno de sus puntos materiales a lo largo de toda su vida (ver figura 4-1). Ésta no es una tarea sencilla. Los composites son materiales heterogéneos y anisótropos. Además, el fenómeno de pérdida de resistencia y rigidez en el conjunto de un laminado, como se ha visto en el capítulo 2, es causado por complejos mecanismos de sucesión de eventos a nivel microestructural, como la rotura de fibras, la aparición de grietas en la matriz, el deslizamiento fibra-matriz o cualquier otro incidente. Por lo tanto, la aparición de cada uno de estos sucesos provoca un cambio de la rigidez efectiva, de la resistencia efectiva e incluso de las dos características simultáneamente. Lo ideal, es pues, obtener un modelo que permita conocer el comportamiento a fatiga del composite a lo largo del tiempo, tanto la evolución de la resistencia residual como de la rigidez residual, sin olvidar que se trata de un material heterogéneo y altamente anisótropo.

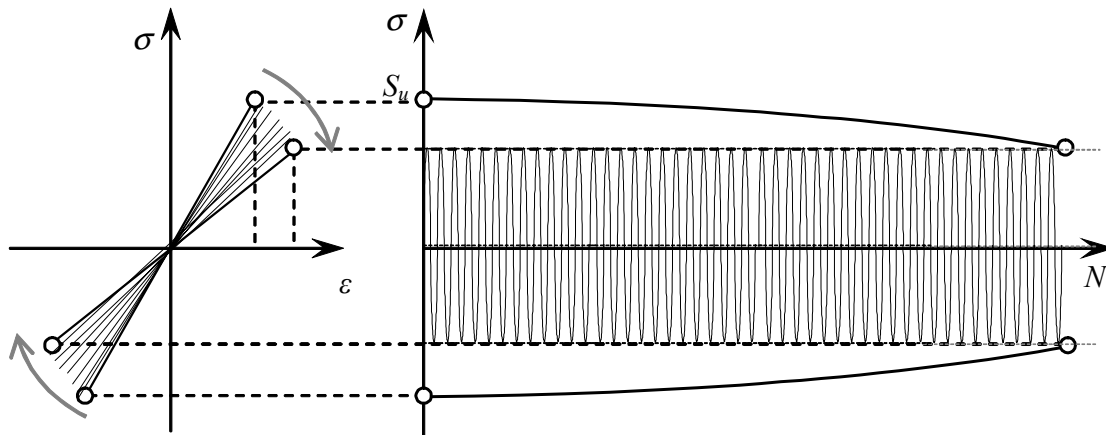


Figura 4-1. Degradación estructural de un material sometido a fatiga. A la izquierda se observa el efecto de degradación de la rigidez como una disminución del módulo elástico a cada nuevo ciclo de carga. A la derecha se observa una degradación del umbral de resistencia ciclo a ciclo hasta la rotura.

4.2. Propuesta de modelo de degradación a fatiga en MMC

La metodología presentada a continuación intenta obtener la evolución de estas características durante la aplicación de sucesivas cargas cíclicas, incluso con cargas cíclicas de características cambiantes. El modelo de degradación se ha formulado dentro de la *mecánica del medio continuo* (MMC) respetando los principios termodinámicos de conservación de la energía en el comportamiento elástico y de disipación positiva durante los fenómenos de degradación. El modelo trata de forma desacoplada la evolución de la resistencia residual y la degradación de la rigidez. A cada una de estas evoluciones se le asocia una variable interna de seguimiento distinta. Tan solo existe un acoplamiento indirecto entre la evolución de las dos variables internas a través de las ecuaciones de compatibilidad cinéticas, a este tipo de relación se la denomina *acoplamiento cinético*.

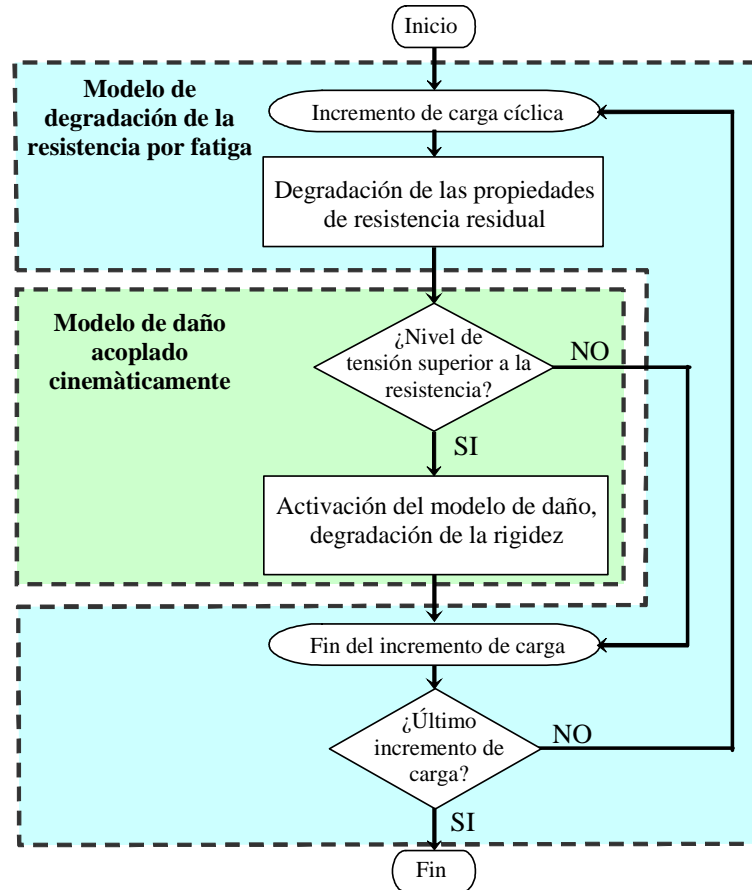


Figura 4-2. Modelo de degradación por la fatiga para los incrementos de carga que produzcan tensiones cíclicas. Degradación de la resistencia directamente y de la rigidez mediante un modelo de daño acoplado.

La principal hipótesis de este modelo es que el material no degrada sus propiedades de rigidez hasta que el nivel de tensiones no supera un determinado umbral de daño, valor que se considera que evoluciona de una forma semejante a la resistencia residual del material. Es decir, en este modelo sólo es necesario formular la evolución monótonicamente decreciente de dicho umbral de daño en función de la sucesión de las tensiones cíclicas. De este modo, la degradación debido a la fatiga de las propiedades elásticas no se obtiene directamente sino que se consigue a través de un modelo de daño acoplado cinemáticamente a la disminución del umbral de discontinuidad elástica. Es la continua disminución de dicho umbral a lo largo de la vida del material hasta niveles inferiores a las tensiones aplicadas lo que provoca que el material entre en un proceso de daño y lo que provoca una disminución de su rigidez. Como puede observarse en la figura 4-2 el modelo de daño (degradación de la rigidez) queda anidado dentro del modelo de degradación de la resistencia por fatiga. El modelo de degradación de la resistencia por fatiga gestiona

básicamente dos conceptos: (i) la degradación de las propiedades de resistencia y (ii) el control en el incremento de la carga cíclica.

Por lo tanto, se acepta que durante la vida a fatiga de los composites se degrada simultáneamente la resistencia y la rigidez, aunque, en el modelo la degradación de la rigidez se obtiene indirectamente mediante un modelo de daño acoplado cinéticamente. Esta metodología simplifica la formulación del modelo de fatiga ya que sólo es necesario realizar el seguimiento de la evolución del umbral de discontinuidad elástica (o resistencia) y se obtiene de forma indirecta la degradación de la rigidez.

Este enfoque permite que para caracterizar la fatiga tan solo sea necesario, en función de los datos obtenidos experimentalmente⁹, parametrizar la evolución de este umbral de daño (o de su resistencia como se formula en este mismo capítulo). La formulación de este modelo permite tratar los composites sea cual sea su grado de modelización (es decir, a cualquier escala de observación: laminado, lámina o constituyentes) y sea cual sea el modelo constitutivo de comportamiento real que se persiga modelizar (con o sin plasticidad, con efectos viscoplásticos, en grandes deformaciones, etc.).

(a) *Interpretación mecánica de la variable interna de degradación a fatiga*

Como se ha comentado el modelo propuesto realiza un seguimiento directo de la degradación de la resistencia mediante una *variable interna* asociada a la fatiga que permite cuantificar la degradación debida a las tensiones cíclicas. Esta nueva variable interna permite medir la evolución de la degradación del umbral de daño o de discontinuidad elástica por el efecto de la fatiga. Con ella se cuantifica el valor del umbral del comportamiento elástico en un determinado ciclo de carga respecto a su valor inicial (primer ciclo de carga, $N=1$). A esta variable interna se la ha llamado *factor de reducción del umbral de discontinuidad elástica* (f_{red}). Para un problema de degradación unidimensional esta variable se puede expresar mediante una función escalar tal que

$$f_{red} \equiv \frac{K_R^d}{K^d} \quad (4-1)$$

donde K^d es el umbral inicial de daño sin el efecto de la degradación a fatiga (es decir, para $N=1$) y donde K_R^d es el umbral de daño *residual* para un cierto instante en la vida del material dependiente de N .

⁹ Prácticamente la totalidad de la información sobre la degradación a fatiga se obtiene experimentalmente mediante ensayos en probetas sometidas a cargas uniaxiales.

Por lo tanto la degradación a fatiga se formula directamente a través de una función que modifica el umbral de discontinuidad del modelo no lineal del material –puede modificar tanto el límite de fluencia plástica como el umbral de daño, dependiendo del modelo material que gobierne al material–. Dada la hipótesis de que sólo cuando se rebasa dicho umbral empieza el comportamiento no lineal del material, a partir de este instante es cuando aparece la degradación de las propiedades elásticas por la aparición de daño, la aparición de deformaciones plásticas o el fallo de la interfase por desplazamiento entre la fibra y la matriz (DFM o *debonding*).

De este modo el límite de discontinuidad se ve modificado tanto por el modelo de daño y/o de plasticidad como por el efecto de fatiga de las cargas cíclicas. Este límite de discontinuidad elástica puede definirse mediante la condición

$$f(\sigma_{ij}) - K_R(\sigma_{ij}, N, \sigma_{max}, R, d, \alpha^p) = 0 \quad (4-2)$$

donde $f(\sigma_{ij})$ es una norma del estado de tensiones (σ_{ij}), las variables N , σ_{max} , R son tres variables libres que definen la evolución de la degradación a fatiga: el número de ciclos de carga (N), la tensión máxima (σ_{max}) y del tipo de carga cíclica (R). La función umbral residual $K_R(\sigma_{ij}, N, \sigma_{max}, R, d, \alpha^p)$ define el límite de discontinuidad elástica del material. La d representa el conjunto de variables internas que definen el modelo de daño y α^p representa el conjunto de variables internas que definen el modelo de plasticidad.

En el modelo propuesto, el límite del comportamiento lineal se formula como un acoplamiento indirecto entre el efecto de la fatiga y el resto de comportamiento no lineal. De este modo es posible definir una nueva función de discontinuidad K que no incluye el fenómeno de la fatiga:

$$K_R(\sigma_{ij}, N, \sigma_{max}, R, d, \alpha^p) = K(\sigma_{ij}, d, \alpha^p) \cdot f_{red}(N, \sigma_{max}, R) \quad (4-3)$$

donde f_{red} es el *factor de reducción* que depende del número de ciclos de carga (N), de la tensión máxima (σ_{max}) y del tipo de carga cíclica (R). Entonteces el límite del dominio elástico queda definido por la condición

$$f(\sigma_{ij}) - K(\sigma_{ij}, d, \alpha^p) \cdot f_{red}(N, \sigma_{max}, R) = 0 \quad (4-4)$$

donde se observa que existe un desacoplamiento entre el modelo de degradación del umbral de discontinuidad debido a la fatiga y el resto de fenómenos no lineales.

Así, el valor del umbral de discontinuidad de un punto del material puede ser alterado no sólo por una carga que sobrepase el dominio elástico, sino también por el factor de reducción debido al fenómeno acumulativo de la degradación del umbral de discontinuidad por fatiga. Esta doble posibilidad de variación se representa esquemáticamente en la figura

4-3 mediante una superficie del umbral de discontinuidad sobre el plano definido por la *disipación normalizada de energía* (k) y el número de ciclos (N). Cuando las tensiones se mantienen dentro del dominio elástico el umbral evoluciona según la función representada en el plano vertical K_R-N . Evoluciones de K_R en planos verticales paralelos a N representan degradación (o disipación) debido a la fatiga. Cada uno de estos planos representa la evolución del umbral de discontinuidad para cada estado de daño o plasticidad. Las evoluciones en los planos verticales paralelos a K_R-k representan disipación debido a fenómenos distintos a la fatiga (N se mantiene constante) como, por ejemplo, la aparición de plasticidad o de daño. En esta representación también se observa que la aparición de daño y plasticidad producen por un lado disipación y por el otro un cambio en la evolución del umbral de discontinuidad.

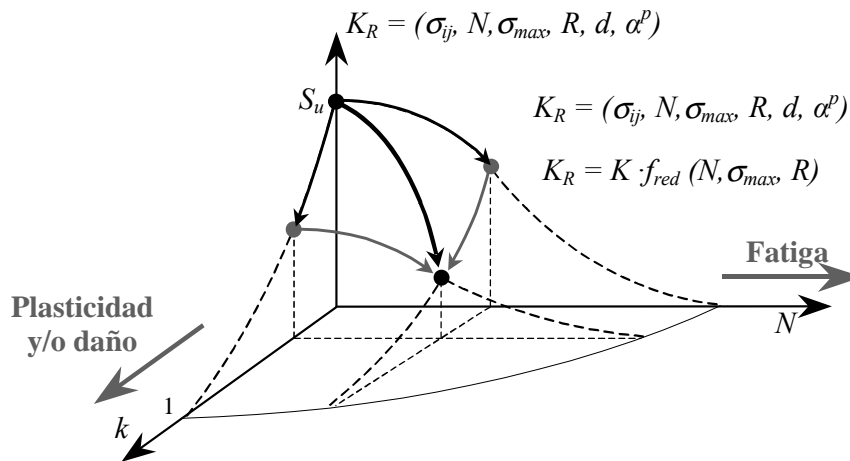


Figura 4-3. Superficie del umbral de discontinuidad de un punto del material en función de la disipación normalizada (k) y del número de ciclos (N).

De los datos experimentales difícilmente se puede obtener de directamente la evolución del umbral de discontinuidad o de daño. Por esta razón tanto la evolución como el sistema de acumulación de la degradación del material debido a la fatiga se ha fundamentado en el seguimiento de las curvas de resistencia vida S-N junto a la evolución de la resistencia residual del material hasta su rotura¹⁰. En el modelo se ha tomado la hipótesis de considerar igual deterioro en la resistencia, que se puede obtener experimentalmente, que en el límite de elasticidad del material. Es decir, el factor de reducción del umbral de discontinuidad se considera igual a la reducción que se mide de la resistencia inicial a la rotura

¹⁰ Lo común es tener datos experimentales de las curvas S-N y de la resistencia residual en función del valor de rotura del material en pruebas unidimensionales.

$$\frac{K_R^d}{K^d} = \frac{S_R}{S_u} \quad (4-5)$$

donde S_R es la evolución de la resistencia a la rotura (*resistencia residual*) y S_U es la resistencia última a carga cuasiestática. Por lo tanto, el factor de reducción a fatiga f_{red} se puede entender como una normalización de la resistencia residual respecto a su valor inicial

$$f_{red} = \frac{S_R}{S_u} \quad (4-6)$$

Una vez obtenido el valor de f_{red} a partir de la resistencia residual, la expresión (4-5) permite calcular la evolución debida a la fatiga del umbral de discontinuidad en cualquier ciclo

$$K_R^d = f_{red} K^d \quad (4-7)$$

De una forma gráfica esta hipótesis de evolución del umbral de daño se presenta en la figura 4-4, donde se observa la evolución del umbral de daño obtenida a partir de la curva de la resistencia residual, que puede ser obtenida de forma experimental¹¹.

La degradación del umbral de daño (o de la resistencia residual) debe también manifestarse como una disipación de la energía interna del material ya que se trata de una degradación del material. Para ello se ha tomado una segunda hipótesis: la pérdida de energía debido a la fatiga es proporcional al factor de reducción f_{red} . Por lo tanto, la variación de la energía debida a la fatiga se obtiene mediante la expresión

$$g_R = f_{red} g \quad (4-8)$$

donde g representa la energía interna del material y g_R la energía reducida por el efecto de la degradación a fatiga.

¹¹ Tomando esta hipótesis, para calibrar el modelo de degradación se debe de conocer la curva tensión-deformación obtenida en un prueba cuasi-estática y la curva de resistencia residual para cada nivel de carga cíclica.

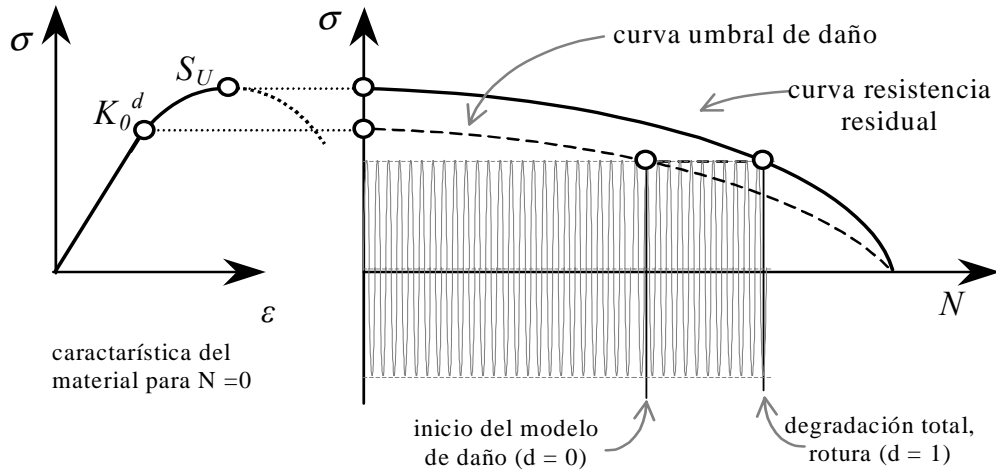


Figura 4-4. Evolución de la resistencia residual y del umbral de daño considerando el mismo factor de reducción para ambos valores. Cuando el nivel de tensiones se iguala con el valor de umbral de daño se activa un modelo de daño para obtener indirectamente la degradación de la rigidez hasta la rotura.

En la figura 4-5 se muestra de forma esquemática el efecto producido por la ecuación (4-8) sobre la curva de ablandamiento del material. Si se representa la evolución de la curva de endurecimiento-ablandamiento del modelo de daño (o plasticidad) en función de la deformación no elástica ($\varepsilon-\varepsilon^e$) la degradación por fatiga provoca una reducción del área debajo de la curva proporcional a f_{red} . Por otro lado, si la evolución se representa en función de la *disipación normalizada de energía* (k) la degradación por fatiga provoca un reescalado de la curva ya que tanto el eje vertical (umbral de discontinuidad) como el eje horizontal (disipación normalizada) se ven afectados por el mismo factor f_{red} .

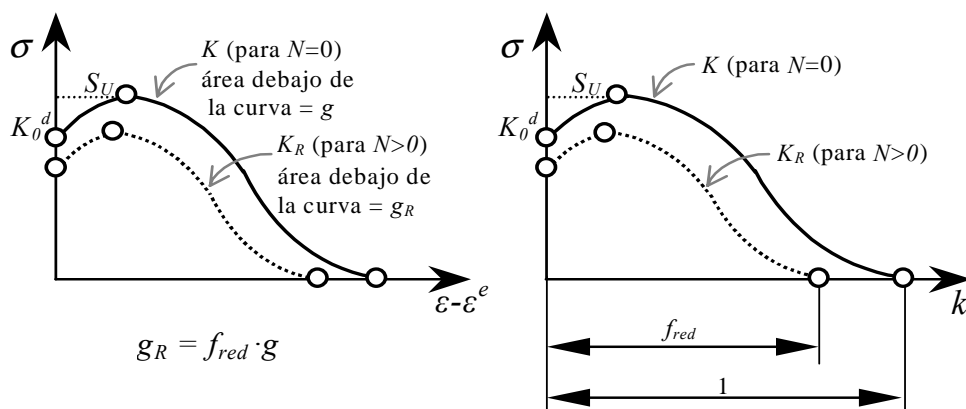


Figura 4-5. Efecto de la degradación por fatiga. En una curva tensión-def. no elástica ($\varepsilon-\varepsilon^e$) la fatiga produce una reducción del área contenida debajo de la curva proporcional a f_{red} (izqda.). En la evolución de la curva en función de la *disipación normalizada de energía* (k) provoca un reescalado de la curva proporcional a f_{red} (derecha).

En resumen, el modelo en cada punto material cuantifica el efecto mecánico que produce la fatiga como una pérdida de su umbral de discontinuidad elástica y de su energía interna en función de la tensión cíclica y del número de ciclos a que está sometido dicho punto. Para ello se ha incorporado *una variable interna* asociada a la degradación de la resistencia por fatiga a la que se ha llamado factor de reducción f_{red} . Tal como se ha presentado el modelo, para parametrizar la degradación a fatiga tan solo es necesario obtener la evolución de la resistencia residual. Con la resistencia residual se obtiene el factor de reducción que por si solo permite conocer la evolución del umbral de discontinuidad (K_R) y la disipación ($g - g_R$) debida a la degradación a fatiga.

(b) Tratamiento de historias de carga con niveles de tensión cíclica cambiantes

Conocer la evolución de la resistencia residual o del factor de reducción f_{red} es la función más importante del modelo de degradación a fatiga. En la figura 4-6 se esquematizan los cuatro rasgos más importantes que permiten obtener esta evolución

Dado que las evoluciones de la resistencia residual¹² dependen del nivel de tensión y del tipo de tensión cíclica, como primer paso se debe identificar completamente la tensión cíclica (punto *(i)* de la figura 4-6). En el apartado 4.3 se definen los parámetros que se utilizan para identificar completamente la tensión cíclica sobre un punto del material.

Una de las mejores formas de discernir la evolución de la resistencia residual es hacerlo a partir de las curvas de vida S-N que proporcionan los ensayos experimentales (punto *(ii)* de la figura 4-6). En el apartado 4.4 se presenta una formulación generalizada de las curvas de vida S-N, para toda posible tensión cíclica uniaxial de características estacionarias. Las curvas en el plano S-N permiten luego definir de una forma coherente las funciones de resistencia residual asociadas a cada tensión cíclica.

El modelo necesita formular la ley de disminución de resistencia residual (punto *(iii)* de la figura 4-6), cuyas características deben satisfacer las condiciones que se indican en el apartado 4.5. Para ello se puede utilizar la sencilla regla lineal de degradación de resistencia por número de ciclos (regla de Miner-Palmgren, 1945) o cualquier otra que presente una mejor coherencia con la fenomenología observada experimentalmente.

De esta forma el análisis puede llegar a ser, por ejemplo, sensible a la secuencia de distintos niveles de cargas cíclicas o permitir la acumulación no lineal de la degradación cuando una pieza o componente está sujeto a cargas variables de distintas amplitudes (punto *(iv)* de la figura 4-6). Por lo tanto, la metodología presentada permite tratar tensiones cíclicas

¹² La evolución de la resistencia residual se obtiene a partir: de pruebas experimentales, de los datos que proporcionan las curvas de vida S-N y de ciertas hipótesis de interpolación entre estos datos experimentales, ya que en la práctica es inviable generar un programa de ensayos a fatiga completo.

cambiantes. Esto lo hace sin la necesidad de formular una regla constitutiva de acumulación complementaria, tal como se muestra en el apartado 4.6.

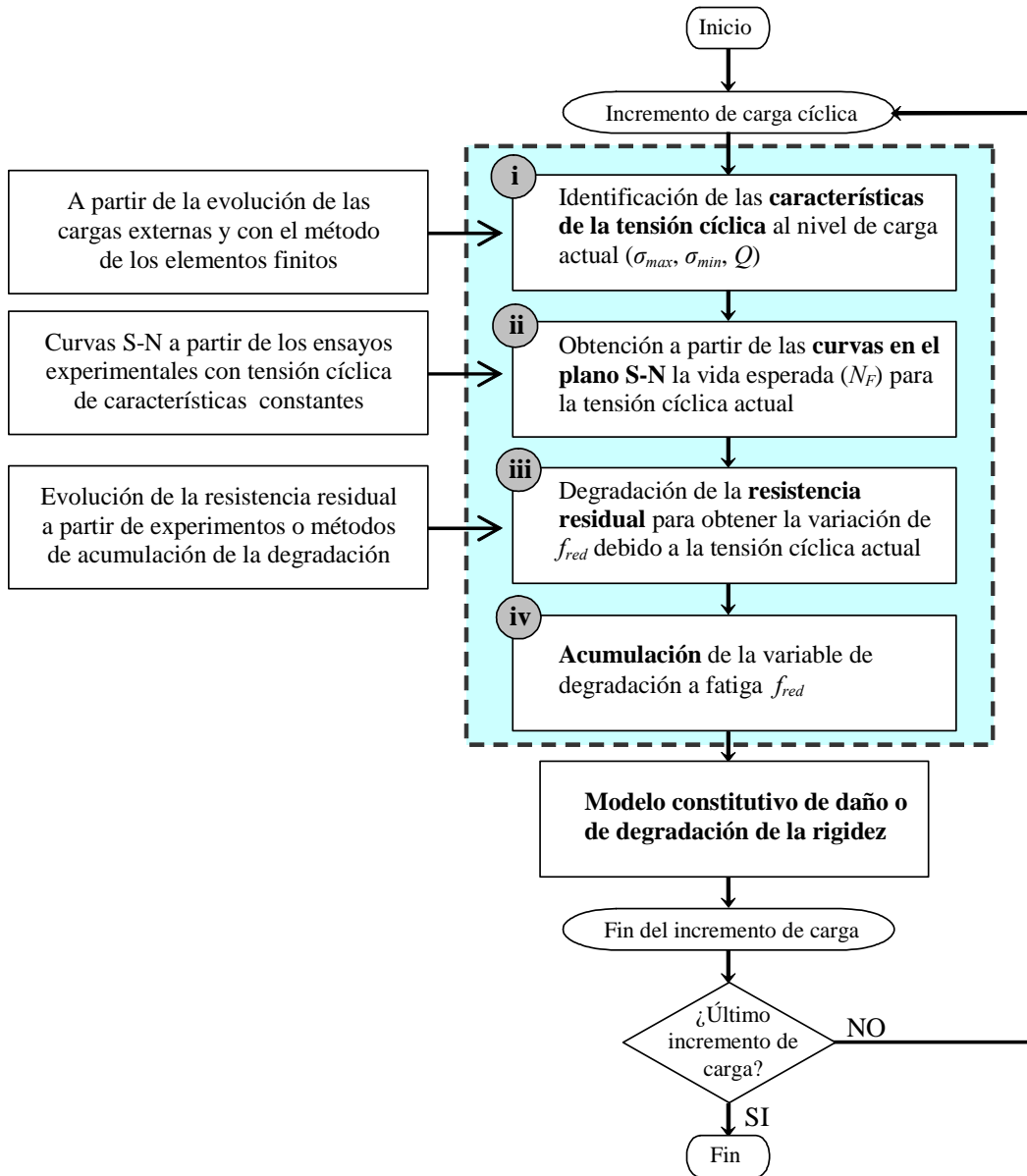


Figura 4-6. Esquema de la obtención de la evolución de la variable interna de la degradación por fatiga y del umbral de comportamiento lineal. Cuatro etapas: *i*) caracterización de la tensión cíclica, *ii*) obtención de la vida esperada al nivel de tensión cíclica actual, *iii*) obtención del factor f_{red} para el nivel de carga actual y *iv*) evolución de la variable interna f_{red} de seguimiento de la degradación a fatiga para toda la historia de carga.

(c) Linealización de la historia de cargas

El tratamiento de la fatiga que se propone está concebido para tratar historias de carga con alto número de ciclos. Para ello se ha hecho necesario diseñar una estrategia de avance temporal que permita por una parte obtener un rápido avance de la aplicación de la carga y que a su vez sea aplicable al tratamiento de tensiones cíclicas en un punto de características cambiantes y a la aparición de fenómenos no lineales según el modelo constitutivo del material (hiperelasticidad, degradación progresiva y localizada, plasticidad, etc). El avance en el tiempo de vida del material se consigue a través de incrementos en el número de ciclos, es decir en la aplicación de ciclos de carga por *bloques*. Cada uno de estos incrementos de ciclos es aplicado mediante dos etapas. Durante la primera se realiza un seguimiento temporal de la carga para calcular las características de las tensiones cíclicas y las evoluciones de las variables internas asociadas al modelo constitutivo del composite. Durante la segunda, denominada etapa de linealización del problema en el número de ciclos, se degrada las propiedades de resistencia debido a la fatiga considerando un incremento en el número de ciclos con las características constantes. En el apartado 4.7 en este mismo capítulo, se presenta la implementación del modelo de degradación de la fatiga en un sistema de cálculo numérico donde se muestra la metodología que permite una linealización en el avance temporal para un modelo no lineal. También se presentan, en ese apartado, las simplificaciones que se pueden realizar en la aplicación de la historia de cargas si se utiliza un modelo material lineal simplificado como herramienta de diseño.

(d) Nivel de modelización del composite. Tratamiento de la heterogeneidad

El tratamiento de la fatiga que se presenta es aplicable sea cual sea el grado de modelización que se persiga. Por ejemplo, para enfocar el problema desde un punto claramente macromecánico este método es aplicable sobre las características efectivas del material, previamente homogenizadas, al nivel de cada lámina, o incluso de todo el laminado. De hecho, tal como se muestra en este mismo trabajo y en algunos de los ejemplos de aplicación mostrados en el capítulo 6, realizando ciertas hipótesis que permiten simplificar la formulación, con esta misma metodología se consigue una sencilla herramienta de estimación de vida de una pieza en servicio, muy útil como ayuda al proceso de diseño.

Aun así el método aprovecha toda su potencia cuando se quiere obtener el comportamiento efectivo del composite a partir del comportamiento de cada uno de sus constituyentes y de la interacción que aparece entre ellos. En el capítulo 5 se presenta un *mesomodelo* que permite incorporar la degradación a fatiga. Se trata de obtener un modelo constitutivo para materiales compuestos que mediante una regla de mezclas se relacionan de una forma termodinámicamente consistente las ecuaciones constitutivas propias de cada constituyente para obtener el comportamiento efectivo del composite. Los ciclos de carga

degradan continuamente el umbral de daño de cada componente y el modelo permite que aparezcan fenómenos no lineales de daño en ellos.

Otra de las ventajas del tipo de aproximación propuesta es que también es aplicable a todo tipo de métodos de homogeneización, como por ejemplo los que se basan en la teoría de homogeneización a doble escala.

(e) Tratamiento de la anisotropía inicial y de la degradación anisótropa

Una de las principales características que tienen los composites es su comportamiento anisótropo. La disposición ordenada de las fases de refuerzo, decidida por el diseñador, da lugar a una anisotropía inicial, es decir, una anisotropía efectiva del material compuesto no degradado. Por otro lado, dado que los esfuerzos y deformaciones sobre el composite son claramente disecionados, se produce una degradación dependiente de la dirección (degradación anisótropa) que provoca una anisotropía adicional inducida. El tratamiento de la anisotropía y de la degradación direccionada es una tarea compleja y los modelos de este tipo son de muy difícil ajuste experimental (Voyiadjis et al. 2000) (Armero y Oller, 2000) (Luccioni y Oller, 2003). Por lo tanto, en este modelo se intenta representar la degradación a fatiga mediante una sola variable interna de naturaleza escalar, lo que permite calibrar al modelo mediante los típicos ensayos existentes en fatiga a partir de probetas y cargas unidimensionales.

Tanto la anisotropía inicial como la degradación direccionada, en el enfoque a través de un mesomodelo presentado en el capítulo 5, puede ser tratada a partir de la regla de mezclas. Es posible obtener un composite anisótropo a partir de una determinada disposición geométrica de distintos materiales constituyentes isótropos. De la misma forma, una degradación isótropa de cada constituyente, medida mediante una variable escalar independiente para cada uno de ellos, produce una degradación efectiva anisótropa. Dicho de otro modo, al compatibilizar cinemáticamente, a través de la regla de mezclas, los distintos modelos de degradación no direccionada asociados a cada constituyente se puede obtener fácilmente una degradación anisótropa de las propiedades efectivas del composite.

También es posible tratar la anisotropía y la degradación condicionada en un modelo macroscópico. Dado que la dirección del refuerzo es la dirección que tiene una mayor contribución sobre las propiedades efectivas del composite, se puede tratar la degradación de un laminado estudiando la degradación separada de cada una de las láminas unidireccionales que lo forman. Se consigue una aceptable aproximación al comportamiento real analizando sólo la degradación del material en la dirección del refuerzo en cada lámina UD. De esta forma es posible tratar la estimación de vida a fatiga de una forma sencilla, tal como se muestra en el capítulo 6. Con un modelo formulado a

nivel macroscópico se dispone de una buena herramienta para la estimación de la esperanza de vida en la fase de diseño de un elemento estructural.

4.3. Definición de la tensión cíclica

La degradación por fatiga y todas sus medidas (las curvas S-N, la evolución de la variable resistencia residual, etc.) son dependientes del tipo de tensión cíclica, por lo tanto, se precisa una correcta descripción de los parámetros que la definen.

Cada punto de un elemento estructural, o de una probeta, sometido a cargas cíclicas a lo largo de un periodo de tiempo estará sujeto a una tensión también variable. Para definir esta tensión cíclica se necesitan varios parámetros: valor de tensión máxima, tensión mínima, período, forma de la evolución temporal, etc. (ver figura 4-7). Mientras que algunos de ellos afectan mucho al comportamiento a fatiga del material, otros influyen de manera inapreciable. Así, comúnmente se admite que los valores de tensión máxima y mínima son parámetros importantes y, en cambio, la frecuencia o la forma de la evolución temporal tienen una influencia más bien escasa.

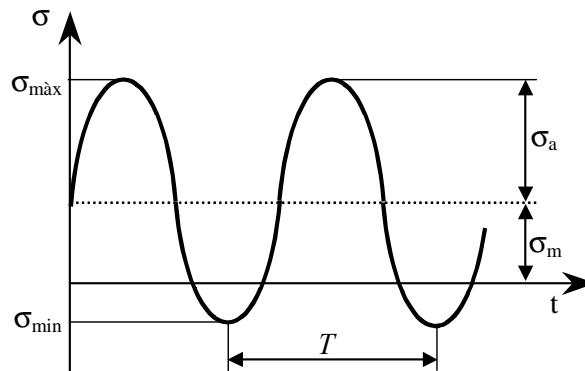


Figura 4-7. Carga cíclica típica de periodo T

A partir de los valores máximos y mínimos de la evolución temporal del nivel de tensiones (σ_{\max} y σ_{\min}) es posible calcular los parámetros característicos del tipo de carga cíclica en el modelo propuesto: tensión media, relación de amplitud e índice de reversión (ver tabla 4-1).

Dado que los parámetros expresados en la tabla 4-1 son dependientes, tan solo con dos de ellos se caracteriza completamente la tensión cíclica. En este trabajo se prefiere utilizar como valores de identificación la tensión máxima (σ_{\max}) o la tensión mínima (σ_{\min}) y el índice de reversión Q .

Tensión media	$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$	(4-9)
Tensión alterna (o relación de amplitud)	$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$	(4-10)
Índice de reversión (R)	$R \equiv \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$	(4-11)
Índice de reversión (Q) o de componente media	$Q \equiv \frac{\sigma_m}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}$	(4-12)

Tabla 4-1. Parámetros y expresiones para la identificación y modelización de la carga cíclica

En el modelo propuesto se usa para las formulaciones el índice de reversión Q , aunque comúnmente, en la mayoría de investigaciones, para la definición de la tensión cíclica es más usado el índice R . El índice Q presenta las ventajas matemáticas, tal como muestra la figura 4-8, de mostrar simetría y de no tener discontinuidades respecto a las variaciones de la tensión media (σ_m) lo que simplifica su manipulación numérica. En cambio, el tradicional índice R presenta valores muy dispares cuando σ_m es positiva o negativa (tracción o compresión), además presenta una discontinuidad importante en la zona de compresión. Esto no lo hace muy recomendable para ser implementado numéricamente ya que hace necesario el uso de condicionantes y genera imprecisiones en valores cercanos a las asíntotas.

Las relaciones biunívocas entre ambos índices de reversión son simples:

$$R = \frac{Q-1}{Q+1} \qquad Q = \frac{1+R}{1-R} \qquad (4-13) \text{ y } (4-14)$$

Los distintos valores que pueden tomar R y Q permiten identificar la naturaleza de la tensión variable, es decir, si se trata de una tensión de sólo tracción, de tracción-compresión o de sólo compresión, tal como se observa en la tabla 4-2.

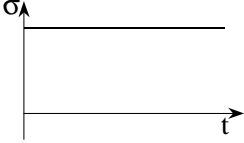
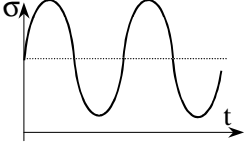
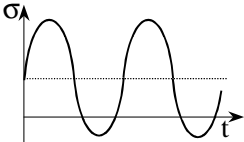
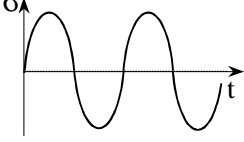
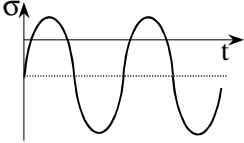
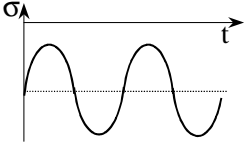
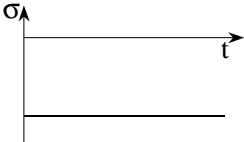
	Tracción Constante	$R = +1$	$Q \rightarrow +\infty$	
Para $\sigma_m > 0$	Tracción-Tracción	$+1 > R > 0$	$+\infty > Q > +1$	
	Tracción-Compresión	desde pulsante $R = 0$	$0 > R > -1$	
		hasta oscilante $R = -1$	$+1 > Q > 0$	
Para $\sigma_m = 0$	Tracción-Compresión oscilante	$R = -1$	$Q = 0$	
	Tracción-Compresión	desde oscilante $R = -1$	$-1 > R > -\infty$	
		hasta pulsante $R = -\infty$	$0 > Q > -1$	
Para $\sigma_m < 0$	Compresión-Compresión	$+\infty > R > +1$	$-1 > Q > -\infty$	
	Compresión Constante	$R = +1$	$Q \rightarrow -\infty$	

Tabla 4-2. Tipo de la tensión cíclica en función de la tensión media y de los índices de reversión R y Q

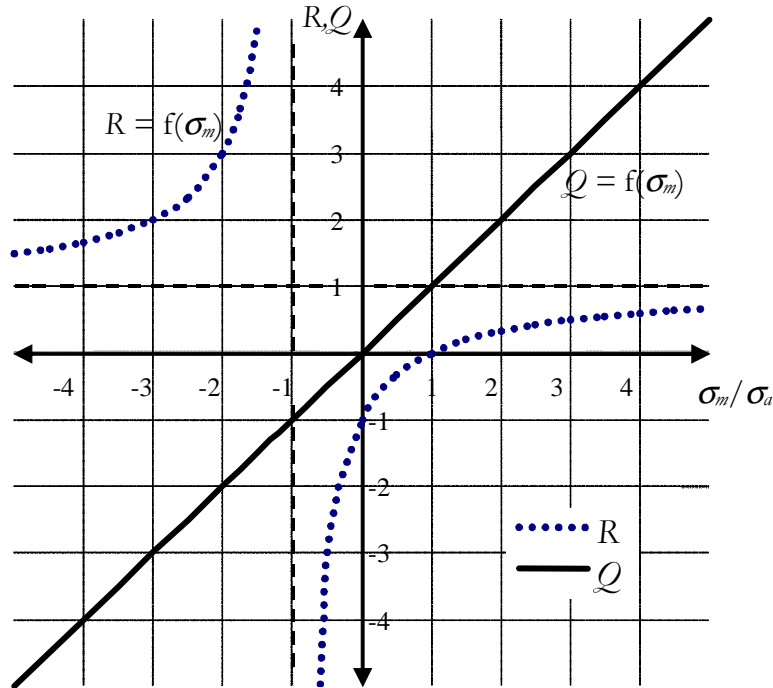


Figura 4-8. Índices de reversión R y Q en función de la tensión media

4.4. Generalización de las curvas en el plano S-N.

Tal como ya se ha mostrado en el capítulo 2, las curvas en el plano S-N, o curvas de Wöhler¹³, permiten caracterizar el comportamiento a fatiga del material sometido a tensión cíclica de características invariables. De hecho las curvas S-N permiten conocer el número de ciclos necesarios para que una carga que induzca una tensión de amplitud constante rompa una probeta. Dicho de otro modo, las curvas S-N relacionan la resistencia (S) a la rotura del material, normalmente expresada en función de la tensión máxima del ciclo (σ_{max}), con la vida esperada (N) a este nivel constante de tensión cíclica.

Par algunos materiales, las curvas S-N muestran gráficamente el concepto de *límite de fatiga* (*endurance limit*), punto (S_e, N_e) de la gráfica mostrada en la figura 4-9. Las cargas cíclicas que producen tensiones máximas inferiores a S_e no provocan reducciones de la resistencia del

¹³ A las curvas de vida para tensiones cíclicas estacionarias también se las conoce como curvas de Wöhler debido a que éste fue el primer autor que las dedujo para metales (Wöhler 1871). Estas curvas se pueden obtener experimentalmente sometiendo diferentes muestras a distintos niveles de tensión cíclica de amplitud constante.

material. En consecuencia, si un material está sujeto únicamente a tensiones cíclicas inferiores a este valor límite nunca rompe por fatiga.

Por lo tanto, las curvas S-N muestran la disminución del límite de resistencia (S) desde su valor cuasi-estático (S_U) hasta el límite de fatiga (S_e). De este modo, tal como se observa en la figura 4-9, un punto de la curva S-N queda definido en el número de ciclos en el cual la resistencia residual del material ha disminuido lo suficiente para igualarse a la tensión máxima de una tensión cíclica de amplitud constante.

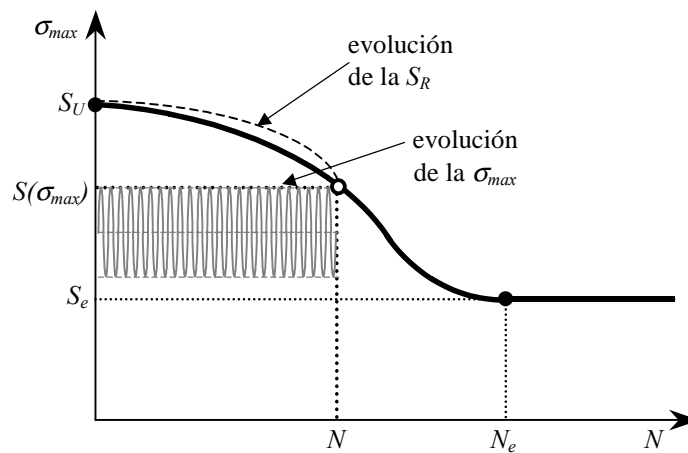


Figura 4-9. Las curvas S-N muestran la disminución del límite de resistencia (S), desde su valor estático (S_U) hasta el límite de fatiga (S_e). Cada punto que define la curva S-N representa donde la resistencia residual para una determinada tensión cíclica de amplitud constante toma el mismo valor que la tensión máxima

Las curvas S-N normalmente están definidas para la tensión máxima y toman como valor inicial la resistencia cuasi-estática S_U . Son curvas decrecientes hasta llegar al valor S_e en materiales que tienen límite de fatiga o hasta llegar a valor nulo para los que no lo tienen. La particularidad de que todas las curvas S-N empiecen en el límite de resistencia estática permite definir unas curvas S-N normalizadas respecto S_U . De este modo se definen las relaciones

$$s = \frac{\sigma_{max}}{S_U} \qquad s_e = \frac{S_e}{S_U} \qquad (4-15) \text{ y } (4-16)$$

donde s es el valor de la tensión máxima normalizado y s_e el límite de fatiga también normalizado. Las curvas normalizadas S-N siempre tomarán el valor unidad en el primer número de ciclo ($N = 0$ ó $N = 1$ en una escala semi-logarítmica) tal como muestra la figura 4-10.

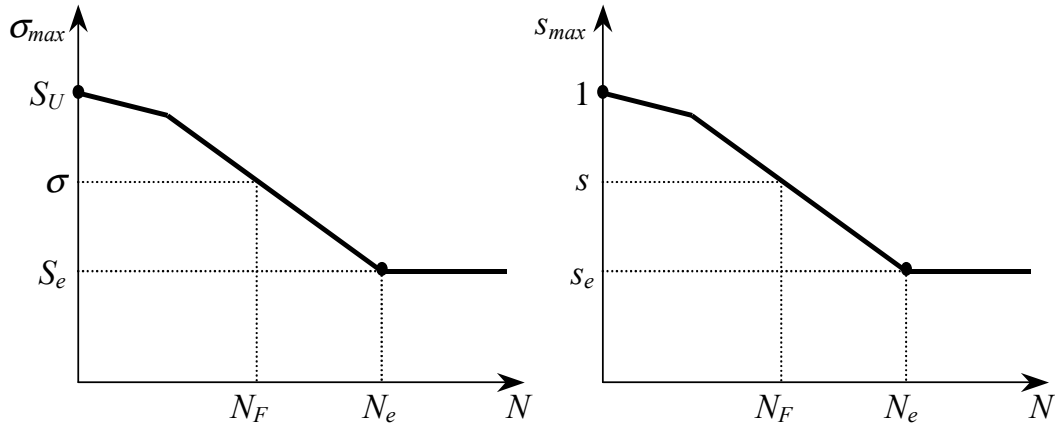


Figura 4-10. Curva S-N (izquierda) donde para el primer ciclo de carga $N=1 \rightarrow S=S_U$ y curva normalizada (derecha) por la tensión límite donde para $N=1 \rightarrow s=1$

Las curvas S-N no dejan de ser aproximaciones o interpolaciones de los valores experimentales, que en general siempre presentan bastante dispersión estadística (Harris, 2001). Existen infinidad de funciones de regresión que pueden ser utilizadas para interpolar estos resultados. En el Apéndice A se presentan algunas de las formulaciones que han sido implementadas en el modelo final: a) curva lineal en representación semi-logarítmica [$S-\log(N)$], b) curva bi-lineal en representación semi-logarítmica [$S-\log(N)$], c) curva lineal en representación logarítmica [$\log(S)-\log(N)$], d) curva exponencial, y e) curva exponencial formulada por Oller-Salomon (Oller *et al.*, 2000)

Algunas de las expresiones para las curvas de vida S-N implementadas en el modelo se muestran, en su forma normalizada, en la tabla 4-3.

Lineal en representación semi-logarítmica	$s = 1 - (1 - s_e) \frac{\log N}{\log N_e}$	(4-17)
Lineal en representación logarítmica ($\beta=1$) o exponencial ($\beta \neq 1$)	$s = [s_e] \left(\frac{\log N}{\log N_e} \right)^\beta$	(4-18)
Exponencial formulada por Oller-Salomon	$s = s_e + (1 - s_e) \cdot [A] \left(\frac{\log N}{\log N_e} \right)^\beta$	(4-19)

Tabla 4-3. Funciones S-N normalizadas. Donde s y s_e son las tensiones actual y límite de fatiga normalizadas siendo A y β parámetros experimentales de ajuste.

Para la implementación numérica del modelo de degradación es necesario obtener el número de ciclos asociado a cada nivel de tensiones. Es decir, el valor de la vida estimada para un nivel de tensiones cíclicas de características constantes (N o N_f).

Las expresiones donde N es la variable a calcular se muestran en la tabla 4-4. En todas estas expresiones si el material no muestra un límite de fatiga claro, punto (S_e, N_e) , pueden substituirse los valores s_e y N_e por un punto cualquiera conocido de la curva S-N (ver Apéndice A)

Lineal en representación semi-logarítmica	$N = [N_e] \left(\frac{1-s}{1-s_e} \right)$	(4-20)
---	--	--------

Lineal en representación logarítmica ($\beta=1$) o exponencial ($\beta \neq 1$)	$N = [N_e] \left(\frac{\log s}{\log s_e} \right)^{\frac{1}{\beta}}$	(4-21)
---	--	--------

Exponencial formulada por Oller-Salomon	$N = [N_e] \left(\frac{\log \left(\frac{s-s_e}{1-s_e} \right)}{\log A} \right)^{\frac{1}{\beta}}$	(4-22)
---	---	--------

Tabla 4-4. Funciones S-N normalizadas. Donde s y s_e son las tensiones actual y límite de fatiga normalizadas siendo A y β parámetros experimentales de ajuste.

Como se comenta en el apartado 2.5, el comportamiento a fatiga se ve altamente afectado por las características de la tensión cíclica. En el modelo se tienen en cuenta los parámetros más importantes: el nivel de tensión y el número de ciclos, pero, además, la formulación debe permitir ser sensible (i) al efecto de la tensión media y (ii) al efecto del distinto comportamiento que se da según las tensiones sean a tracción y/o a compresión. A continuación se comentan cómo estos dos efectos influyen en gran medida en la evolución de la curva S-N¹⁴.

(a) Efecto de la tensión media en la vida a fatiga

Las curvas S-N representan la disminución de S desde el valor inicial S_U para un determinado tipo de tensión cíclica, es decir para un cierto valor de σ_{max} , σ_{min} , R o Q . Se

¹⁴ Dada su influencia en el comportamiento a fatiga es muy importante tener en cuenta estos aspectos cuando se vaya a diseñar un programa de ensayos para la obtención del comportamiento a fatiga del material.

puede comprobar experimentalmente que para dos cargas que provoquen igual tensión máxima y distinta tensión mínima la degradación por el fenómeno de la fatiga es menos acusada en el caso en que la componente media es más importante y, en consecuencia, donde la componente alterna tiene menor peso.

En la figura 4-11 se puede observar como cuando la tensión cíclica es prácticamente oscilante con solo componente alterna (R tiende a -1 y Q a 0) el efecto de la degradación por fatiga del límite de resistencia a tracción S_{UT} es mucho más acusado que cuando para la misma tensión máxima la tensión cíclica tiene una componente media importante. De hecho, cuando la componente de la tensión cíclica alterna es muy pequeña (R tiende a $+1$ y Q a $+\infty$), la degradación por fatiga debido a tensiones cíclicas es prácticamente inexistente y la disminución del límite de resistencia es nula.

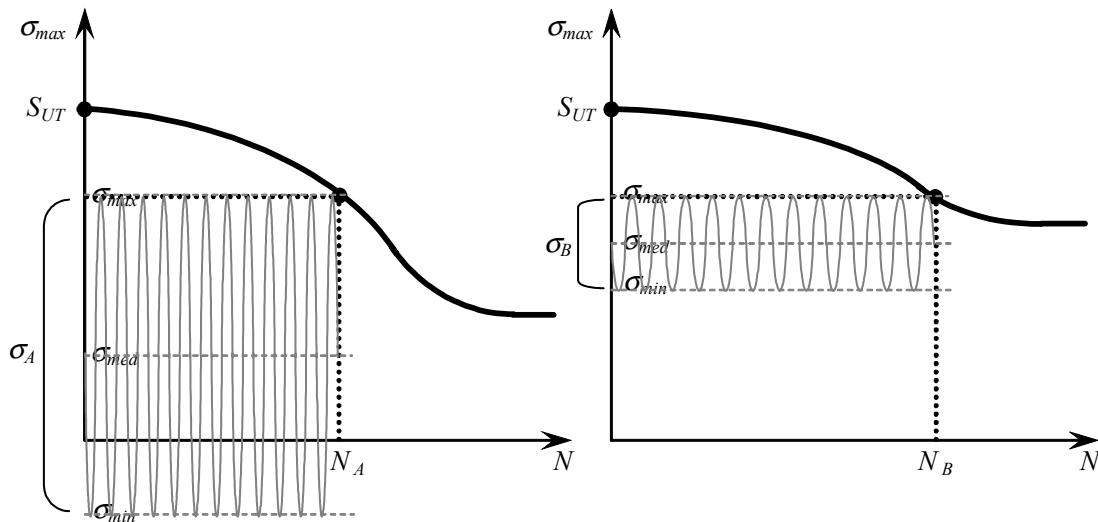


Figura 4-11. La vida a fatiga de un material para tensiones cíclicas con la misma tensión máxima y diferente tensión media. A la derecha, σ_A con una componente media pequeña toda la tensión es prácticamente alterna, lo que produce una rápida degradación de la resistencia del material. A la izquierda, para σ_B con una tensión cíclica con una componente media mayor, la degradación es más lenta ($N_A < N_B$).

Dado que el valor de la resistencia varía dependiendo del valor medio de la tensión cíclica se hace necesario que las curvas S-N presenten distinta forma para el mismo material. Por lo tanto, para representar el comportamiento global del material se necesitan toda una familia de curvas S-N en función de la componente media que tenga cada tensión cíclica. Como se ha visto en el apartado 4.3, mediante el índice de reversión (R o Q) se puede especificar la importancia de la componente media en la tensión cíclica. Tal como se muestra en la figura 4-12, para tensiones medias positivas ($\sigma_m > 0$), la vida de un material

sometido a tensiones cíclicas de características constantes se puede mostrar dependiente de su nivel de tensiones máximas y de su índice de reversión con una familia de curvas S-N.

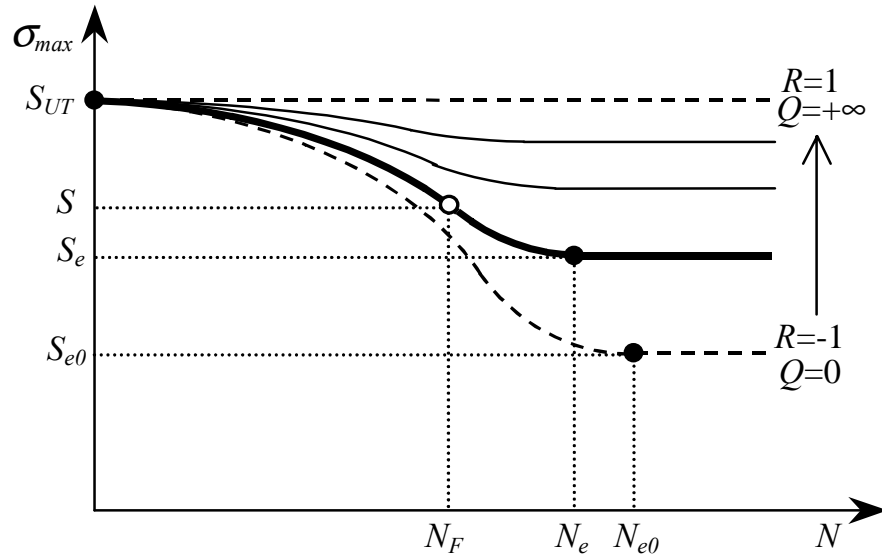


Figura 4-12. Familia de curvas S-N. Relacionan la carga de amplitud constante con el nº de ciclos desde la resistencia a tracción (S_{UT}) hasta el límite de fatiga (S_e) para un determinado índice de reversión.

(b) Efecto del límite de resistencia a compresión

En el apartado anterior solo se ha tratado el efecto de la degradación por fatiga sobre el límite de resistencia a tracción (representado por S_T) y, por lo tanto, las curvas S-N formuladas anteriormente sólo comprueban que no se supere la resistencia máxima y que no se produzca la rotura a tracción. Esto no permite un tratamiento integral de todas las cargas cíclicas ya que, como muestra la tabla 4-2, éstas pueden generar esfuerzos que provoquen tensiones a compresión y, en consecuencia, que provoquen la rotura por superación de la resistencia a compresión. En concreto, aparece compresión en todas las tensiones cíclicas con índice Q inferior a +1, o bien, cuando el índice R toma un valor negativo (tracción-compresión) o un valor superior a +1 (compresión-compresión). En estos casos es necesario también comprobar que el material no supere el límite de resistencia a compresión (al que llamaremos S_c) y conocer qué tipo de degradación supone este tipo de tensiones.

Considerando que un material tiene un límite de resistencia a tracción y uno a compresión se observa que la rotura (y en consecuencia el comportamiento no lineal) puede sobrevenir en dos casos: *i*) cuando el nivel de tensión máxima se iguala al límite de resistencia a tracción ($S_T = \sigma_{max}$), o bien, *ii*) cuando el nivel de tensión mínima se iguala al límite de

resistencia a compresión ($S_C = \sigma_{min}$). Tal como se puede observar en la figura 4-13, para una tensión cíclica tracción-compresión, esto sucederá de un modo u otro dependiendo de la evolución de los límites de resistencia en función del índice de reversión de la tensión aplicada.

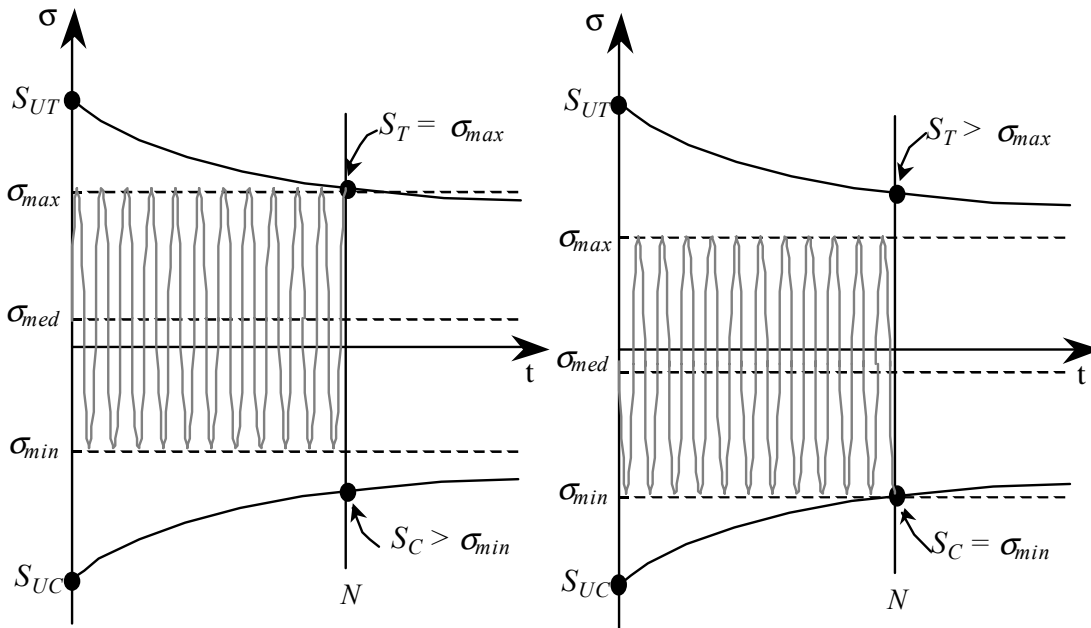


Figura 4-13. Tensión de amplitud constante que falla al superar el límite de resistencia a tracción (izquierda) y tensión de amplitud constante que falla al superar el límite de resistencia por compresión (derecha).

Un esfuerzo cíclico tracción-tracción superará el límite por tracción. Una tensión compresión-compresión lo hará por compresión. En cuanto a las tensiones cíclicas tracción-compresión lo pueden hacer de las dos formas dependiendo de las características de la tensión cíclica (índice R o Q) y del comportamiento del material.

Si una tensión cíclica tiene una componente media positiva tenderá a superar el límite de resistencia por tracción, en cambio, una con una componente media negativa tenderá a superar el límite de resistencia por compresión. Por lo tanto, es lógico suponer que existen unos niveles de tensión media críticos que dividen los dos comportamientos.

Los niveles de tensión media se pueden medir con el índice de reversión, por lo tanto es posible definir un *índice de reversión crítico* (Q^*) donde los límites de resistencia a tracción y a compresión se igualan en el mismo momento a la tensión máxima y mínima del ciclo de cargas respectivamente. El valor del índice de reversión crítico Q^* siempre tomará valores que definen tensiones cíclicas de tracción-compresión. En consecuencia es un valor

acotado entre $-1 > Q^* > +1$. Tendrá valores comprendidos entre -1 y 0 cuando el límite a tracción sea superior al límite a compresión y valores entre 0 y $+1$ cuando el límite a tracción sea inferior al de compresión.

Para un hipotético material ideal con comportamiento totalmente simétrico la tensión cíclica en la que se igualan en el mismo momento la tensión máxima y mínima a los límites de resistencia respectivos es la tensión totalmente alterna, tensión sin componente media, lo que supone un valor de índice de reversión crítico $Q^* = 0$ para cualquier tensión. En este caso particular el índice de reversión crítico es totalmente independiente del nivel de tensiones y del número de ciclos. Gráficamente, como muestra la figura 4-14, cuando el comportamiento es simétrico se puede observar que para todos los niveles de tensiones las únicas curvas S-N en las cuales coincide simultáneamente los límites a tracción y compresión con las tensiones máximas y mínimas son las que muestran la evolución de los límites para $Q = 0$.

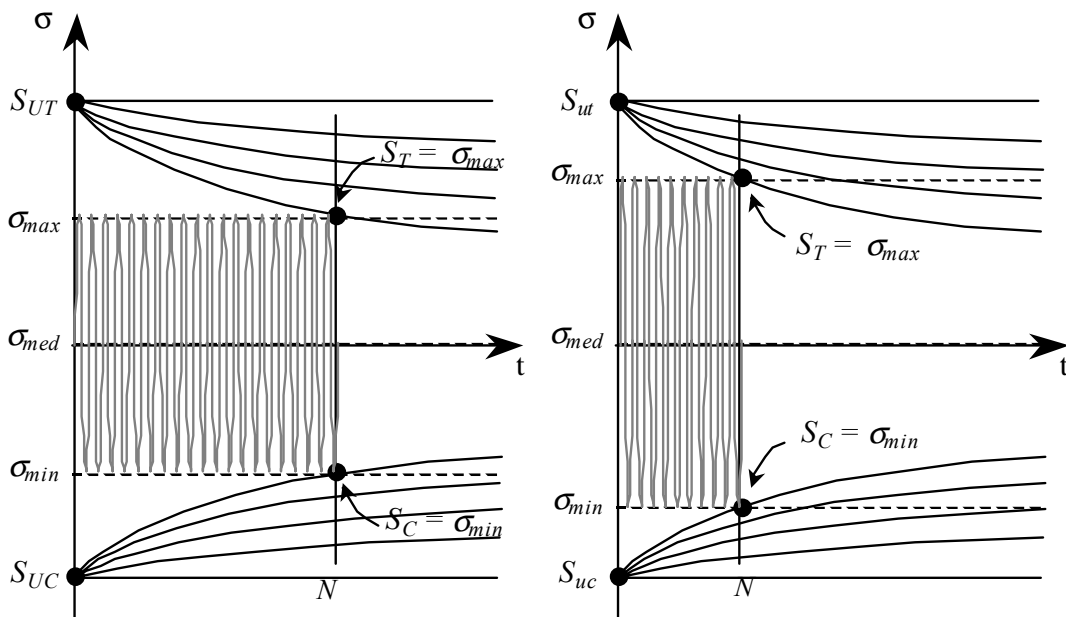


Figura 4-14. Comportamiento simétrico en la reducción de los límites de resistencia donde $Q^*=0$ para cualquier nivel de tensiones.

Sin embargo, en la mayoría de materiales reales el comportamiento a tracción y a compresión no es idéntico. Pueden existir distintos límites iniciales de resistencia ($S_{UT} \neq S_{UC}$) y estos límites pueden tener distinta evolución en función del número de ciclos ($S_T \neq S_C$). En consecuencia, generalmente el valor de reversión Q^* no es un valor constante y

depende del nivel de tensión de la carga cíclica, como se puede observar de forma esquemática en las curvas S-N mostradas en la figura 4-15.

Además, experimentalmente es muy difícil de obtener el valor de Q^* de forma directa. Como se indica en los próximos apartados es necesario un análisis específico del conjunto de los datos experimentales para caracterizar este valor.

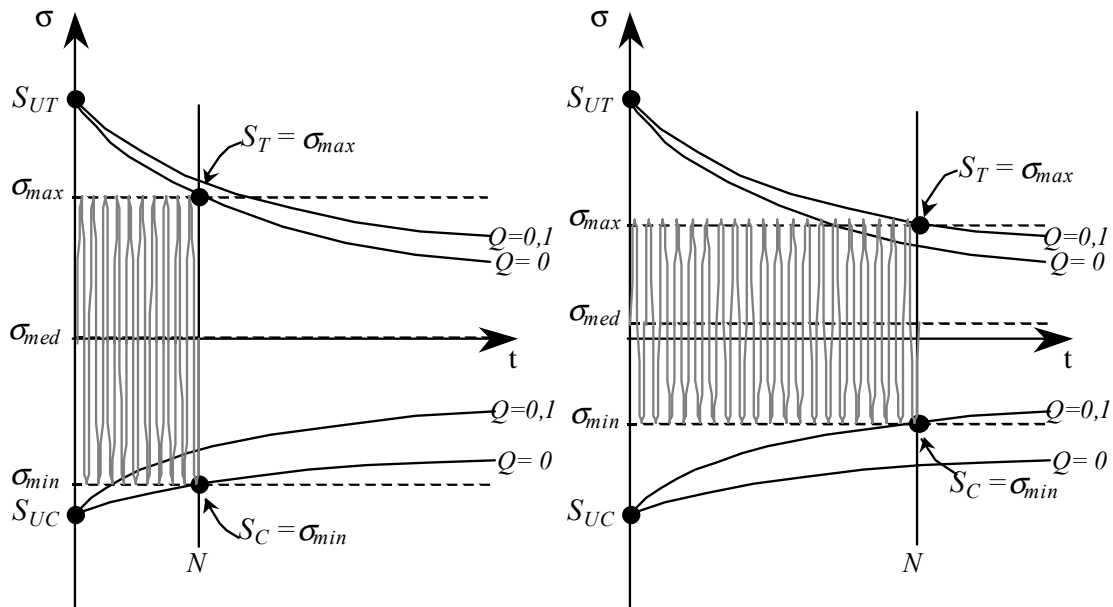


Figura 4-15. Comportamiento no simétrico en la reducción de los límites de discontinuidad donde Q^* toma un valor distinto para distintas tensiones máximas ($Q^*=0$ derecha, y $Q^*=0,1$ izquierda)

La dependencia de la degradación a fatiga de los efectos mencionados con anterioridad hace que no sea suficiente definir una sola curva para caracterizar el comportamiento del material. Por lo tanto, a continuación se presenta una formulación generalizada de las curvas S-N. Esta formulación, que incluye el efecto de la tensión media y la discriminación de la rotura por tracción de la rotura por compresión, permitirá determinar el comportamiento del material en el modelo de degradación a fatiga.

Conjuntamente también se muestran distintas formas de representación y formulación de la información que se incluye en esta generalización de las curvas S-N. Unas de estas formulaciones es la que se implementa directamente en el modelo (apartados 4.4.2 y 4.4.3). Las otras sirven para lograr una correcta interpretación de los resultados experimentales (ver apartado 4.4.4)

4.4.2. Generalización de las curvas S-N para componentes medias positivas

Para englobar el efecto de la tensión media en la evolución de las curvas S-N existen distintas alternativas de formulación y representación. Una de ellas es la mostrada en la figura 4.12 donde la información se representa mediante distintas curvas de vida S-N en el plano σ_{\max} -N. Cada curva representada está asociada a un cierto valor del índice de reversión (ya sea el índice R o el índice Q). Otras de las formas de representar esta misma información es a través de las curvas de vida constante en el plano σ_a - σ_m . A continuación se muestran cómo están relacionadas estas dos formulaciones o representaciones.

(a) Curvas S-N para tensiones medias positivas generalizadas en Q - σ_{\max}

Esta formulación permite una generalización de la representación de las curvas de esperanza de vida S-N para distintos niveles de componente media y, por lo tanto, distintos índices de reversión Q. Para tensiones medias positivas la envolvente inferior del conjunto de curvas es la curva que representa la carga totalmente oscilante ($\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, cuando $R=-1$ o $Q=0$). El límite superior de las curvas para tensiones medias positivas es la recta que define la resistencia inicial estática a tracción (S_{UT}) en el caso de que no exista fatiga estática ($\sigma_m \gg \sigma_a$, con $R=1$ o $Q \rightarrow \infty$).

La familia de curvas S-N se puede representar mediante una superficie en una representación tridimensional cuyos ejes son: la tensión máxima (σ_{\max}) que permite definir los límites de resistencia S, el número de ciclos N cuyo valor es representativo de la vida del material y el índice de reversión Q que identifica la relación entre las componentes media y alterna de la tensión.

De este modo, tal como se muestra en la figura 4-16, la superficie define la vida del material –el número de ciclos (N)– para cada tensión cíclica identificada por su tensión máxima y su índice de reversión Q, que queda definida como un punto en el plano σ_{\max} -Q.

Las intersecciones de la superficie con los planos verticales perpendiculares al eje Q definen las distintas curvas S-N para los distintos índices de reversión Q que se muestran en la figura 4-12. De este modo, para $Q=0$ se obtiene la curva S-N para las tensiones totalmente alternas. Para valores de Q grandes las tensiones cíclicas tienen una componente alterna inapreciable, lo que conlleva un comportamiento cuasi-estático, la superficie tiende asintóticamente al valor de resistencia estático S_{UT} .

Cada intersección de la superficie con los planos verticales perpendiculares al eje N define una *curva de vida constante* S-Q. Con este tipo de curvas se puede observar como evoluciona el límite de resistencia para distintos índices de reversión Q. Esta curva para $N=0$ (o en una escala logarítmica para $N=1$) siempre es una recta horizontal de valor S_a , ya que cualquier

tipo de tensión cíclica provocará la superación del límite de resistencia en su valor estático. Para los materiales que tienen un límite de fatiga para N grandes se obtiene la *curva de vida infinita* que proporciona la evolución de los valores del límite de fatiga S_e (ver figura 4-17).

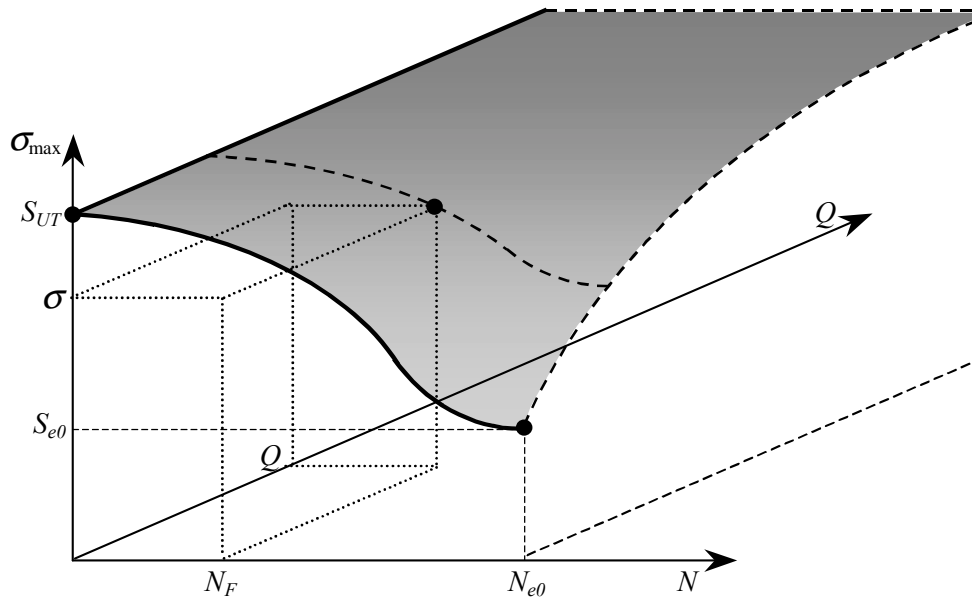


Figura 4-16. Curvas generalizadas S-N, representada como una superficie de resistencia a tracción, para cualquier índice de reversión Q que indique componente media positiva de la tensión cíclica.

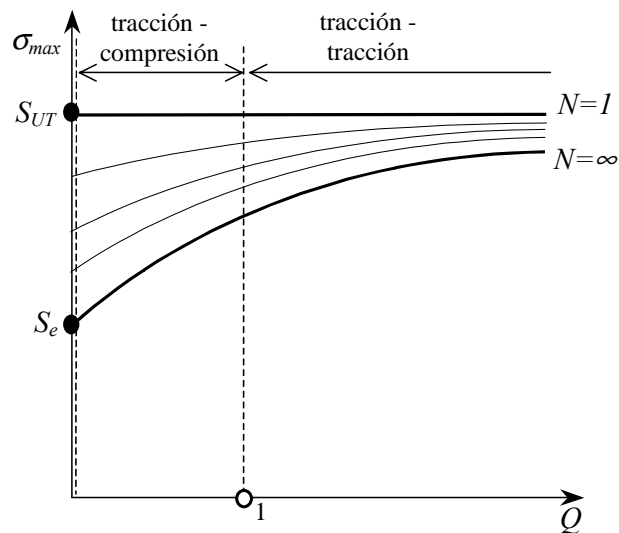


Figura 4-17. Curvas de vida constante en el plano $S(\sigma_{max})$ - Q , desde la curva de resistencia estática ($N=1$) hasta la curva de resistencia de vida infinita ($N=\infty$).

(b) *Curvas S-N para tensiones medias positivas generalizadas en $Q-\sigma_a$*

Existen alternativas a representar las curvas S-N en función de la tensión máxima como se ha mostrado en las figuras anteriores. En su lugar es posible hacerlo en función de la tensión alterna. De este modo el eje vertical expresa la componente de tensión alterna y no la tensión máxima. Dado que la tensión máxima es la suma de la componente media y alterna se puede expresar el límite de resistencia para la componente alterna $S_T(\sigma_a, N, Q)$ como el límite de resistencia para la tensión máxima $S_T(\sigma_{max}, N, Q)$ menos la componente media de la tensión

$$S_T(\sigma_a, N, Q) = S_T(\sigma_{max}, N, Q) - \sigma_m \tag{4-23}$$

Como $\sigma_m = \sigma_a Q$ se puede obtener una relación, a través del índice Q , entre la resistencia en función de la componente alterna y la resistencia en función de la componente máxima mediante la expresión

$$S_T(\sigma_a, N, Q) = \left(\frac{1}{Q+1} \right) \cdot S_T(\sigma_{max}, N, Q) \tag{4-24}$$

Por consiguiente la ecuación 4-24 permite obtener la superficie representativa de las curvas S-N generalizadas, anteriormente representada en el espacio $\{\sigma_{max} - Q - N\}$, en un espacio $\{\sigma_a - Q - N\}$.

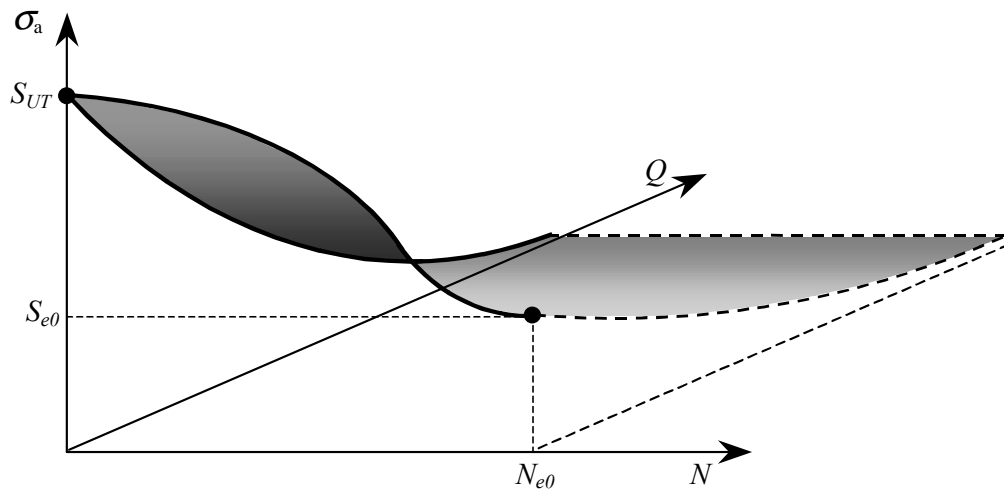


Figura 4-18. Curvas generalizadas S-N de la resistencia a tracción para cualquier índice de reversión Q que indique componente media positiva de la tensión cíclica.

Para esta nueva representación, tal como se puede observar en la figura 4-18, el plano vertical $\sigma_{max}-N$ para $Q=0$ en la figura 4-16 coincide con el plano vertical σ_a-N ya que para $Q=0$ tiene $\sigma_m=0$ y por lo tanto $\sigma_{max}=\sigma_a$. La recta horizontal en el valor S_{UT} para $N=0$ en la anterior representación se convierte aquí en una curva decreciente que cruza el eje en S_{UT} para $Q=0$ y que es asíntota a cero para valores grandes de Q . A la vez, la superficie que en la representación anterior es asíntota a S_{UT} para valores grandes de Q ahora lo es a valores nulos.

Por lo tanto todas las curvas que aparecen al cortar verticalmente por el plano σ_a-Q , que en la representación $\sigma_{max}-Q$ pasan a ser curvas crecientes asíntotas al valor de S_{UT} , son curvas decrecientes asíntotas a $\sigma_a=0$, tal como se representa esquemáticamente en la figura 4-19.

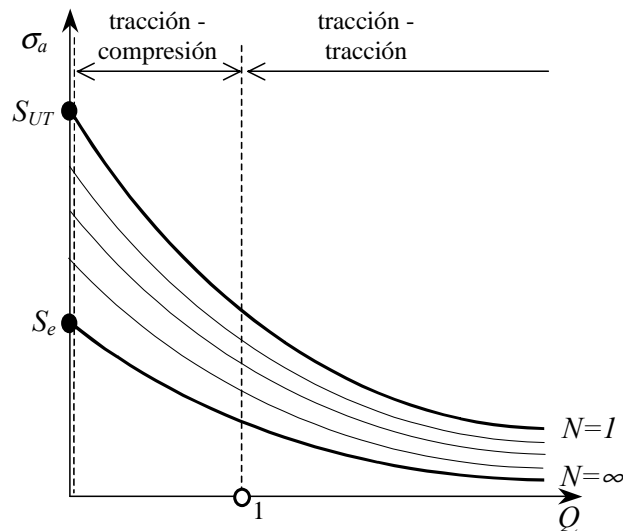


Figura 4-19. Curvas de vida constante en el plano $S(\sigma_a)-Q$, desde la curva de resistencia estática ($N=1$) hasta la curva de resistencia de vida infinita ($N=\infty$).

(c) *Curvas S-N para tensiones medias positivas generalizadas en $\sigma_a-\sigma_m$*

Una tercera forma de mostrar el efecto de la componente media, utilizada por muchos autores, es la representación de la superficie generalizada S-N en el espacio $\{\sigma_a-\sigma_m-N\}$. En este espacio de representación la superficie de S corta tanto el plano vertical σ_a-N , mediante la curva S-N para tensión media nula ($Q=0$), como el plano horizontal σ_m-N , mediante una recta de valor $\sigma_m=S_{UT}$, tal como se puede observar en la figura 4-20.

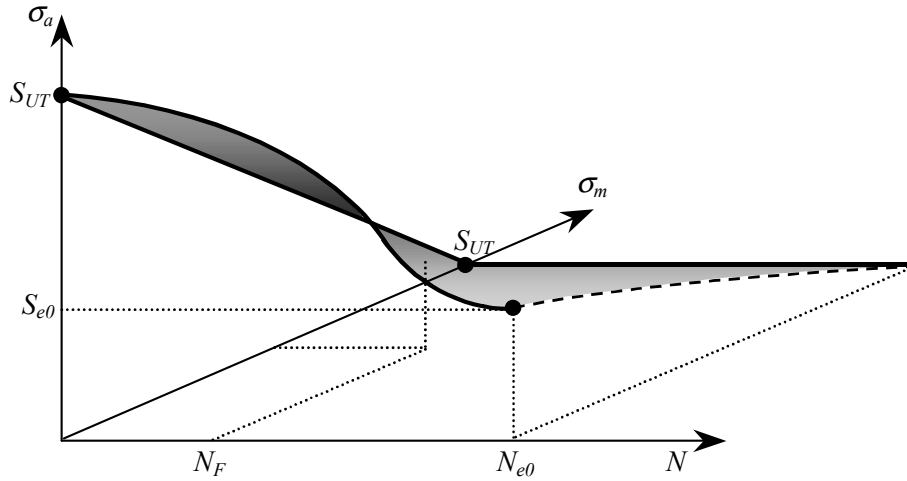


Figura 4-20. Curvas generalizadas S-N para la resistencia a tracción con cualquier componente media positiva de la tensión cíclica representadas en el plano $\sigma_m - \sigma_a$

A partir de esta representación se pueden obtener *curvas de vida constante* que muestran el efecto de la tensión media representadas en un espacio donde el eje de las abscisas es la tensión media y el eje de las ordenadas representa la tensión alterna (plano $\sigma_m - \sigma_a$).

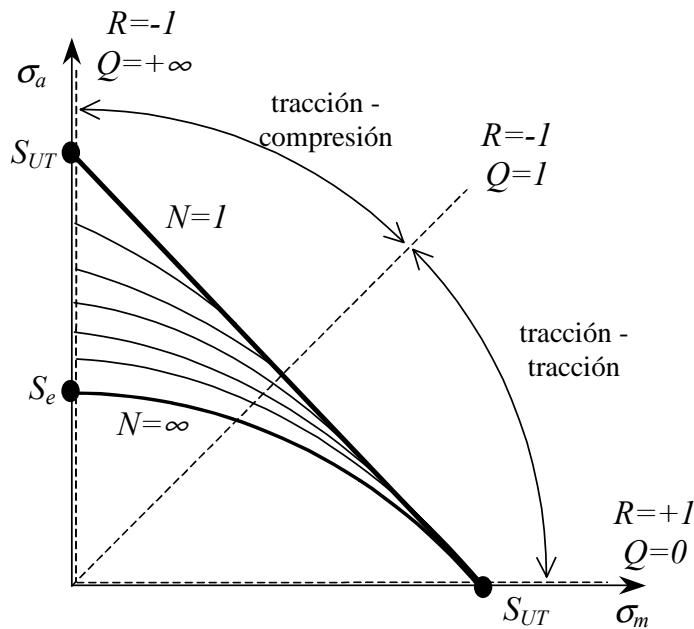


Figura 4-21. Curvas de vida constante en el plano $\sigma_m - \sigma_a$, desde la curva de resistencia estática ($N=1$) hasta la curva de resistencia de vida infinita ($N=\infty$).

Una representación esquemática en los planos de vida constante $\sigma_m - \sigma_a$ de las evoluciones de las resistencias para las tensiones medias positivas se muestra en la figura 4-21.

En este diagrama se representan los límites de resistencia mediante curvas de vida constante que permiten observar su evolución para tensiones cíclicas con distintas tensiones medias. En esta representación el límite de resistencia estática (para $N=1$) viene representado por la curva a 45° y la evolución del límite de fatiga S_c por la curva a vida infinita ($N=\infty$).

4.4.3. Generalización de las curvas S-N para rotura a tracción y a compresión

Todas las formulaciones y representaciones que se han definido en el anterior apartado para los valores de resistencia a tracción (S_T) en tensiones cíclicas con componentes medias positivas se pueden repetir sistemáticamente para obtener la evolución de los valores de resistencia a compresión (S_C) en tensiones cíclicas con componentes medias negativas.

La única problemática que aparece es conocer en tensiones cíclicas tracción-compresión cuáles producen rotura por tracción (debiéndose aplicar las curvas S-N para los valores de resistencia a tracción) y cuáles producen rotura por compresión (y, en consecuencia, debe aplicarse las curvas S-N para los valores de resistencia a compresión). Por lo tanto, es importante conocer cuándo se produce el comportamiento al que anteriormente hemos definido como *crítico*, que permite separar los dos tipos de tensiones cíclicas.

Como se ha comentado con anterioridad, el *comportamiento crítico* se da cuando para una determinada tensión cíclica el valor de tensión máxima y el de tensión mínima coinciden respectivamente con el límite a tracción (S_T) y el límite a compresión (S_C) en el mismo número de ciclos (N^*). Matemáticamente, y de forma general, el valor crítico de superación del límite de discontinuidad elástica por tracción o por compresión viene definido por el conjunto de puntos Q^*, N^* donde el índice de reversión coincide con el cociente entre la componente media (semisuma) y la componente alterna (semidiferencia) de los límites de tracción y compresión según la expresión

$$Q^* = \frac{\frac{1}{2}[S_T(Q^*, N^*) + S_C(Q^*, N^*)]}{\frac{1}{2}[S_T(Q^*, N^*) - S_C(Q^*, N^*)]} \quad (4-25)$$

Lo cual define la función que cumplen todos los valores críticos como

$$[S_T(Q^*, N^*) + S_C(Q^*, N^*)] - Q^* \cdot [S_T(Q^*, N^*) - S_C(Q^*, N^*)] = 0 \quad (4-26)$$

Esta ecuación no permite obtener una formulación explícita del valor de Q^* debido a la dependencia de S_T y S_C tanto de Q como de N . Dado que el valor de S_T es siempre positivo

y el valor de S_C siempre negativo, en la expresión (4-25) el valor absoluto del denominador es mayor que el valor absoluto del numerador. Por lo tanto, el índice de reversión Q^* siempre toma valores en el intervalo $(-1,+1)$, valores que definen tensiones cíclicas de tracción-compresión o compresión-tracción.

Por consiguiente, todas las tensiones cíclicas con índice Q superior a $+1$ (tensiones tracción-tracción) superaran el límite de resistencia por tracción y todas las que tengan un índice Q inferior a -1 (tensiones compresión-compresión) lo superarán por compresión. Desafortunadamente, no existe una expresión que permita conocer a priori si se supera el límite a tracción o a compresión en una tensión cíclica con un índice Q perteneciente al intervalo $(-1,+1)$. Este mismo problema aparece en la fase de obtención experimental de las curvas S-N. De hecho, al construir estas curvas se conoce el valor de vida en número de ciclos de tensión cíclica asociado a un determinado nivel de tensión máxima y de tensión mínima. Pero, con certeza, no se esclarece directamente si se ha llegado a este valor límite por superación del valor de discontinuidad a tracción o a compresión.

Para detectar si en una tensión cíclica de tracción-compresión el material llega al límite de resistencia a tracción o a compresión es necesario definir una curva S-N más generalizada que la definida en el apartado anterior. Hasta este momento, sólo se consideraba la curva S-N para las tensiones máximas, que permite definir perfectamente la superación del límite de resistencia a tracción, útil para tensiones cíclicas con componente máxima positiva y con un índice Q superior al valor de Q^* . Sin embargo, también existe la posibilidad de superar el límite por compresión mediante la tensión mínima, suceso que aparece en tensiones cíclicas de componente mínima negativa con un índice de reversión inferior a Q^* . Esta problemática exige definir una segunda familia de curvas S-N para detectar la rotura por tensión mínima a compresión.

(a) *Curvas S-N para tracción y compresión generalizadas en $Q-\sigma_{max}$ y en $Q-\sigma_{min}$*

Las dos familias de curvas S-N pueden representarse como dos superficies en el espacio $\{\sigma_{max}-Q-N\}$. Una superficie es representativa de la evolución de S_T definida en el dominio donde aparezcan tensiones máximas positivas (desde $Q=-1$ hasta $Q=+\infty$) y otra representativa de S_C definida en el dominio de tensiones con componentes mínimas negativas (desde $Q=+1$ hasta $Q=-\infty$). Las dos superficies mostradas en la figura 4-22 representan el límite de discontinuidad a tracción para tensiones máximas $S_T(\sigma_{max},Q,N)$ y el límite de discontinuidad a compresión para tensiones mínimas $S_C(\sigma_{min},Q,N)$.

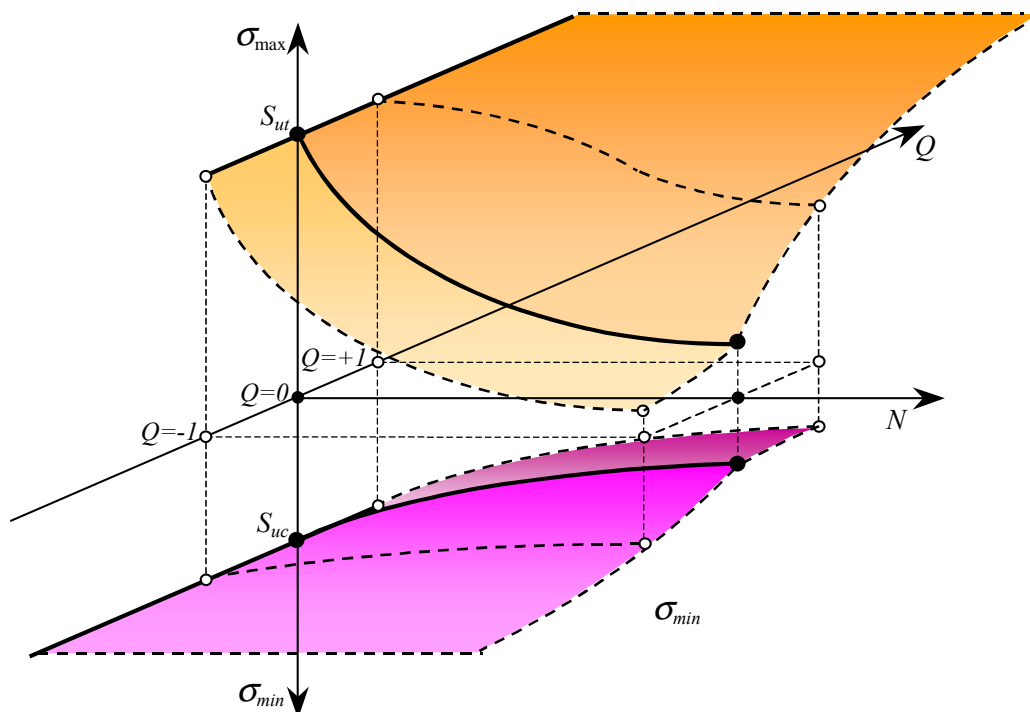


Figura 4-22. Superficie $S_T(\sigma_{max}, Q, N)$ del límite de resistencia a tracción para tensiones máximas y superficie $S_C(\sigma_{min}, Q, N)$ del límite de resistencia a compresión para tensiones mínimas.

Dado que la tensión máxima (σ_{max}) y la tensión mínima (σ_{min}) no son independientes del índice de reversión se puede obtener una relación entre las tensiones máximas y mínimas en función del índice Q o del índice R con las expresiones

$$\sigma_{min} = \frac{Q-1}{Q+1} \sigma_{max} = R \cdot \sigma_{max} \quad (4-27)$$

$$\sigma_{max} = \frac{Q+1}{Q-1} \sigma_{min} = \frac{1}{R} \cdot \sigma_{min} \quad (4-28)$$

Con las relaciones (4-27) y (4-28) entre las tensiones máximas y mínimas puede obtenerse para la superficie de resistencia a tracción y la superficie de resistencia a compresión una superficie equivalente en tensiones mínimas y en tensiones máximas respectivamente mediante las expresiones

$$S_T(\sigma_{min}, Q, N) = \frac{Q-1}{Q+1} S_T(\sigma_{max}, Q, N) = R \cdot S_T(\sigma_{max}, Q, N) \quad (4-29)$$

$$S_C(\sigma_{\max}, Q, N) = \frac{Q+1}{Q-1} S_C(\sigma_{\min}, Q, N) = \frac{1}{R} \cdot S_C(\sigma_{\min}, Q, N) \quad (4-30)$$

Expresando las dos evoluciones respecto a la misma variable (ya sea la tensión máxima o la tensión mínima) es posible comparar el límite de resistencia a tracción y a compresión. De este modo se pueden conocer en el caso de tensiones cíclicas tracción-compresión si estas alcanzan el límite de resistencia por tensión máxima o tensión mínima. En consecuencia, es posible encontrar el límite de resistencia global (S) efectivo mediante cualquiera de las siguientes funciones, que son totalmente equivalentes:

$$S(\sigma_{\max}, Q, N) = \min[S_T(\sigma_{\max}, Q, N), S_C(\sigma_{\max}, Q, N)] \quad (4-31)$$

$$S(\sigma_{\min}, Q, N) = \max[S_T(\sigma_{\min}, Q, N), S_C(\sigma_{\min}, Q, N)] \quad (4-32)$$

(b) *Curvas S-N para tracción y compresión generalizadas en Q - σ_a*

Como ya se ha mostrado anteriormente, otra forma para expresar el límite de resistencia es hacerlo en función de la tensión alterna. Dado que la tensión máxima es la suma de la componente media y alterna y la mínima es la diferencia entre la media y la alterna, las distintas componentes de las tensiones están relacionadas mediante las expresiones

$$\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_m \quad \sigma_a = \sigma_{\min} + \sigma_m \quad (4-33) \text{ y } (4-34)$$

Por lo tanto, se puede expresar el límite de resistencia a tracción para la componente alterna $S_T(\sigma_a, Q, N)$ como el límite de resistencia a tracción en función de la tensión máxima $S_T(\sigma_{\max}, Q, N)$ menos la componente media de la tensión.

$$S_T(\sigma_a, Q) = S_T(\sigma_{\max}, Q, N) - \sigma_m \quad (4-35)$$

Análogamente la resistencia a compresión para la componente alterna será el límite de resistencia en función de la tensión mínima $S_C(\sigma_{\min}, Q, N)$ más la componente media de la tensión.

$$S_C(\sigma_a, Q, N) = S_C(\sigma_{\min}, Q, N) + \sigma_m \quad (4-36)$$

Substituyendo en las expresiones anteriores $\sigma_m = \sigma_a / Q$ se puede expresar la resistencia a tracción en función de Q y $S_T(\sigma_{\max}, Q, N)$ como

$$S_T(\sigma_a, Q, N) = \left(\frac{1}{Q+1} \right) \cdot S_T(\sigma_{\max}, Q, N) \quad (4-37)$$

o bien en función de Q y $S_C(\sigma_{\min}, Q, N)$ como

$$S_C(\sigma_a, Q, N) = \left(\frac{1}{Q-1} \right) \cdot S_C(\sigma_{\min}, Q, N) \quad (4-38)$$

Estas dos expresiones definen dos superficies siempre positivas en el espacio $\{\sigma_a\text{-}Q\text{-}N\}$. La superficie $S_C(\sigma_a, Q, N)$ tiende asintóticamente a cero para valores Q negativos elevados y crece continuamente hasta valores de $Q=+1$. La superficie $S_T(\sigma_a, Q, N)$ decrece continuamente desde valores de $Q=-1$ y tiende asintóticamente a cero para valores Q positivos elevados. Las dos superficies se cortan en una curva que define el valor crítico Q^* en función de σ_a siempre dentro del intervalo de valores $Q = [-1, +1]$. Consecuentemente, el valor mínimo de las dos curvas marca el valor de la resistencia global $S(\sigma_a, Q, N)$

$$S(\sigma_a, Q, N) = \min[S_T(\sigma_a, Q, N), S_C(\sigma_a, Q, N)] \quad (4-39)$$

(c) *Curvas S-N para tracción y compresión generalizadas en $\sigma_m - \sigma_a$*

La formulación de los límites de resistencia estáticos en función de la tensión media y de la tensión alterna para cualquier N se obtiene a partir de las expresiones (4-37) y (4-38), tomando en consideración que $Q = \sigma_m / \sigma_a$. De este modo se obtiene la expresión para el límite de tracción

$$S_T(\sigma_a, \sigma_m, N) = \left(\frac{1}{\frac{\sigma_m}{S_T(\sigma_a, Q, N)} + 1} \right) \cdot S_T(\sigma_{\max}, Q, N) \quad (4-40)$$

que, aislando el límite de resistencia a tracción $S_T(\sigma_a, \sigma_m, N)$, se puede expresar como

$$S_T(\sigma_a, \sigma_m, N) = -\sigma_m + S_T(\sigma_{\max}, Q, N) \quad (4-41)$$

Para el límite de compresión se obtiene

$$S_C(\sigma_a, \sigma_m, N) = \left(\frac{1}{\frac{\sigma_m}{S_C(\sigma_a, Q, N)} - 1} \right) \cdot S_C(\sigma_{\min}, Q, N) \quad (4-42)$$

que, aislando el límite de resistencia a compresión $S_C(\sigma_a, \sigma_m, N)$, se puede expresar como

$$S_C(\sigma_a, \sigma_m, N) = +\sigma_m - S_C(\sigma_{\min}, Q, N) \quad (4-43)$$

La función de resistencia a tracción $S_T(\sigma_m, \sigma_a, N)$ es siempre positiva decreciente y la función $S_C(\sigma_m, \sigma_a, N)$ es siempre positiva creciente. Como en la representación anterior las dos superficies se cortan en una curva. Por lo tanto, el valor mínimo de las dos superficies define el valor de resistencia global $S(\sigma_a, \sigma_m, N)$

$$S(\sigma_a, \sigma_m, N) = \min[S_T(\sigma_a, \sigma_m, N), S_C(\sigma_a, \sigma_m, N)] \quad (4-44)$$

La curva de intersección define el valor del índice de reversión crítico Q^* en función de σ_a y σ_m . Además su evolución se puede percibir gráficamente como el punto de intersección de las dos superficies representativas de las funciones $S_T(\sigma_m, \sigma_a, N)$ y $S_C(\sigma_m, \sigma_a, N)$, tal como se observa en la figura 4-23. La intersección de las dos superficies coincide con el máximo de la función (4-44).

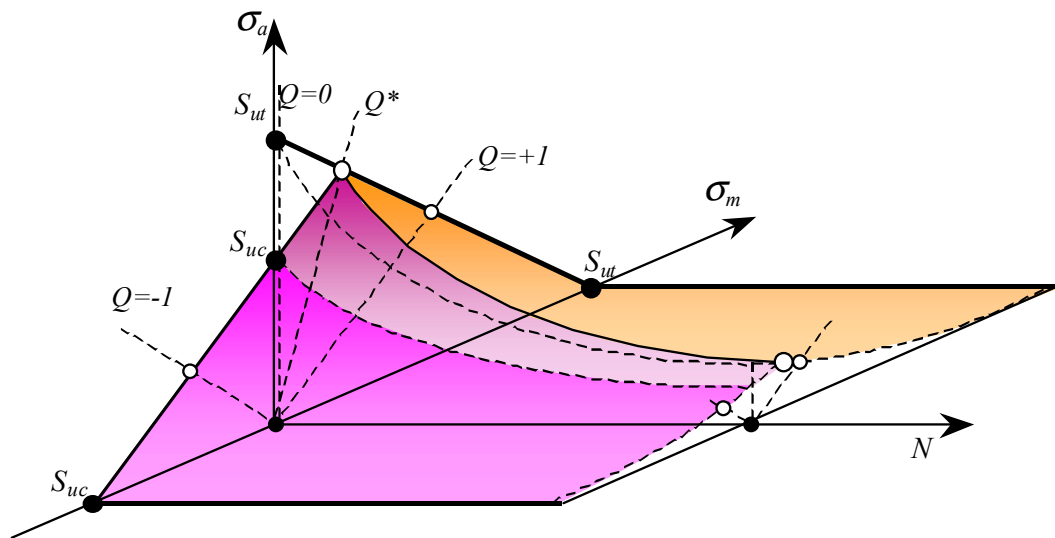


Figura 4-23. Superficie $S_T(\sigma_a, \sigma_m, N)$ del límite de resistencia a tracción y superficie $S_C(\sigma_a, \sigma_m, N)$ del límite de resistencia a compresión para tensiones alternas en función de la componente media y del número de ciclos.

Por lo tanto, el valor de Q^* para cada número de ciclos coincide con el cociente entre la tensión media (σ_m^*) y la tensión alterna (σ_a^*) donde se cortan las dos funciones $S_T(\sigma_m, \sigma_a, N)$ y $S_C(\sigma_m, \sigma_a, N)$

$$Q^*(N) = \frac{\sigma_m^*(N)}{\sigma_a^*(N)} \quad (4-45)$$

La expresión para calcular los valores σ_m^* y σ_a^* para un cierto valor de N no tiene forma explícita. Los valores deben de satisfacer la siguiente ecuación:

$$S_T(\sigma_a^*, \sigma_m^*, N^*) - S_C(\sigma_a^*, \sigma_m^*, N^*) = 0 \quad (4-46)$$

Aun así, el valor de (σ_m^*, σ_a^*) , el punto de intersección obtenido en la expresión (4-44) para un determinado N , coincide con el valor máximo que toma σ_a en esta función, que se representa como *curvas de vida constante* en el plano σ_m - σ_a . En la figura 4-24 se observa de forma esquemática una representación de este tipo, que incluye tanto valores de tensión media positiva como de tensión media negativa.

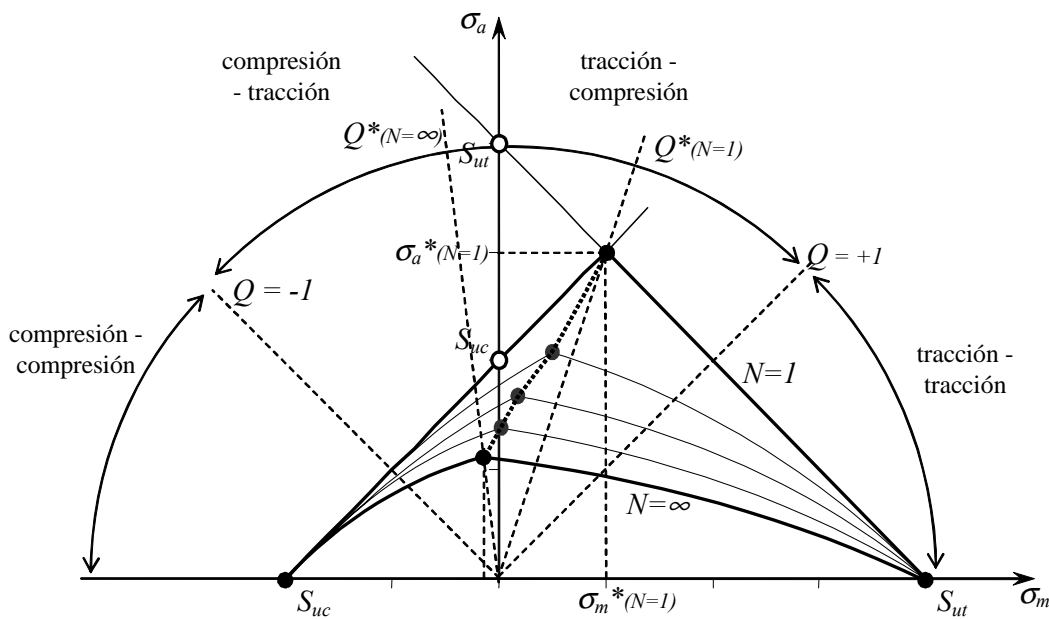


Figura 4-24. Curvas de vida constante $S(\sigma_m, \sigma_a)$ de los límites resistencia para cualquier tensión cíclica.

(d) *Formulación de la resistencia a tracción y compresión en el primer ciclo de tensión*

Para exponer de una forma más clara esta problemática se puede analizar el problema para el caso particular de los valores de carga estática, es decir, cuando se produce una superación del límite de resistencia en el transcurso del primer ciclo ($N=1$), ya que este caso particular tiene solución explícita. Los valores de resistencia iniciales son independientes del índice de reversión de la tensión y, por lo tanto, se puede obtener el valor de Q^* para $N=1$ como el coeficiente entre el valor límite medio y alterno de los valores límite iniciales S_{UT} y S_{UC} . De este modo queda definido como

$$Q^* = \frac{(S_{UT}) + (S_{UC})}{(S_{UT}) - (S_{UC})} \quad (4-47)$$

Dado que el límite S_{UT} está en función de la tensión máxima y el límite S_{UC} en función de la tensión mínima se puede encontrar su expresión equivalente mediante las funciones

$$S_{UT}(\sigma_{\min}, Q) = \frac{Q-1}{Q+1} S_{UT}(\sigma_{\max}) = R \cdot S_{UT}(\sigma_{\max}) \quad (4-48)$$

$$S_{UC}(\sigma_{\max}, Q) = \frac{Q+1}{Q-1} S_{UC}(\sigma_{\min}) = \frac{1}{R} \cdot S_{UC}(\sigma_{\min}) \quad (4-49)$$

De este modo es posible comparar los límites a tracción y compresión. El límite de resistencia cuasi-estático global (S_U) responde a las expresiones

$$S_U(\sigma_{\max}, Q) = \min[S_{UT}(\sigma_{\max}), S_{UC}(\sigma_{\max}, Q)] \quad (4-50)$$

$$S_U(\sigma_{\min}, Q) = \max[S_{UT}(\sigma_{\min}, Q), S_{UC}(\sigma_{\min})] \quad (4-51)$$

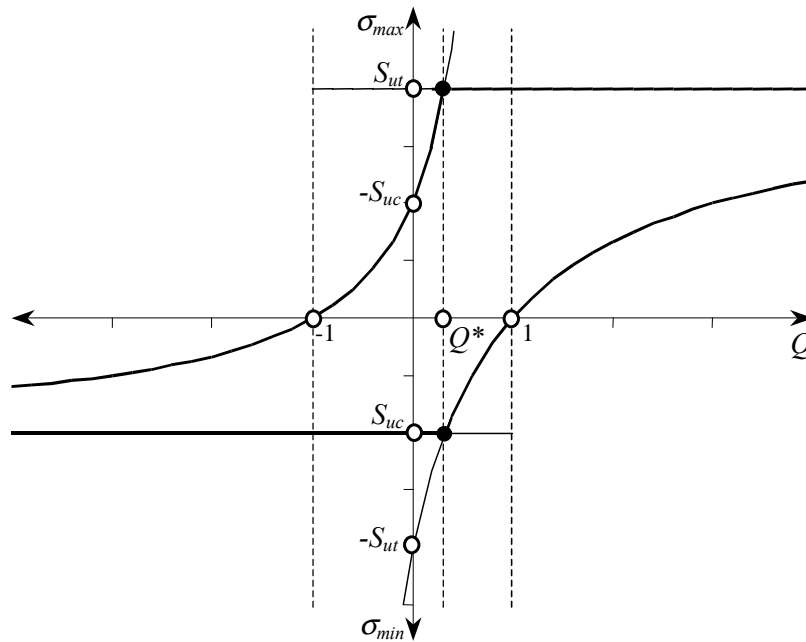


Figura 4-25. Curva $S_U(\sigma_{\max}, Q)$ del límite de resistencia a tracción y compresión para tensiones máximas y curva $S_U(\sigma_{\min}, Q)$ del límite de resistencia a tracción y compresión para tensiones mínimas ($N=1$).

Se pueden representar gráficamente las funciones de resistencia y sus funciones equivalentes en el plano $\sigma_{\max}-Q$ y en plano $\sigma_{\min}-Q$ y se observa, en la figura 4-25, que en su intersección se obtiene el valor del índice crítico Q^* .

Para expresar la resistencia estática a tracción en función de la componente alterna $S_{UT}(\sigma_a, Q)$ sólo es necesario restarle a la resistencia estática a tracción $S_{UT}(\sigma_{max}, Q)$ la componente media de la tensión.

$$S_{UT}(\sigma_a, Q) = S_{UT}(\sigma_{max}, Q) - \sigma_m \quad (4-52)$$

La resistencia a compresión para la componente alterna es la resistencia para la tensión mínima $S_{UC}(\sigma_{min}, Q)$ más la componente media de la tensión.

$$S_{UC}(\sigma_a, Q) = S_{UC}(\sigma_{min}, Q) + \sigma_m \quad (4-53)$$

Como que $\sigma_m = \sigma_a Q$ se puede expresar la resistencia en función de Q y $S_{UT}(\sigma_{max}, Q)$ con la expresión

$$S_{UT}(\sigma_a, Q) = \left(\frac{1}{Q+1} \right) \cdot S_{UT}(\sigma_{max}, Q) \quad (4-54)$$

o bien en función de Q y $S_{UC}(\sigma_{min}, Q)$, mediante la expresión

$$S_{UC}(\sigma_a, Q) = \left(\frac{1}{Q-1} \right) \cdot S_{UC}(\sigma_{min}, Q) \quad (4-55)$$

Para esta formulación de la curva de resistencia estática, mostrada en la figura 4-26, el valor de resistencia a tracción que se mantiene constante para la tensión máxima $S_{UT}(\sigma_{max})$ se convierte en una curva que cruza el eje $Q=0$ en S_{UT} y decrece asintóticamente hasta cero cuando Q tiende a $+\infty$ para la componente alterna. Por otro lado, el valor negativo constante de $S_{UC}(\sigma_{min})$ se convierte en una curva positiva creciente asintóticamente desde cero para valores de Q que tienden a $-\infty$ y que cruza el eje $Q=0$ en S_{UC} . Las dos curvas se cortan en el valor crítico Q^* . En consecuencia, el valor mínimo de las dos curvas marca el valor de la resistencia $S(\sigma_a)$ para cualquier Q

$$S(\sigma_a, Q) = \min[S_{UT}(\sigma_a, Q), S_{UC}(\sigma_a, Q)] \quad (4-56)$$

Para la formulación en función de la componente media y alterna se pueden particularizar las ecuaciones (4-41) y (4-43) para los valores de resistencia estática. Para la ecuación (4-41) la resistencia S_T toma el valor constante S_{UT} y se obtiene la ecuación de la recta representativa del límite a tracción

$$S_{UT}(\sigma_a, \sigma_m) = (-1 \cdot \sigma_m) + S_{UT} \quad (4-57)$$

De forma paralela, a partir de la ecuación (4-43) donde S_C toma el valor S_{UC} constante se obtiene la ecuación de la recta del límite a compresión

$$S_{UC}(\sigma_a, \sigma_m) = (+1 \cdot \sigma_m) - S_{UC} \quad (4-58)$$

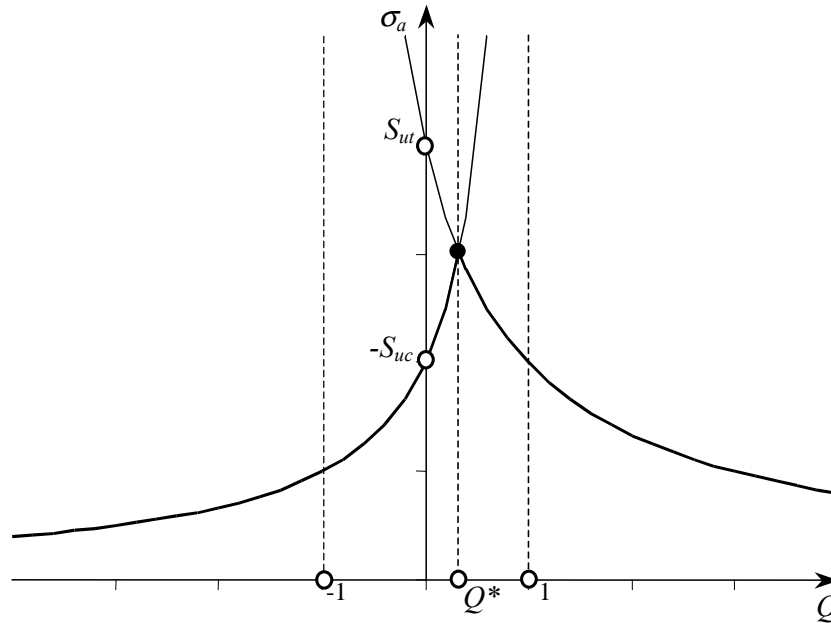


Figura 4-26. Curva $S_U(\sigma_a, Q)$ para $N=0$ de los límites de resistencia a tracción y a compresión representadas en función de la componente de la tensión alterna.

Una representación en el plano σ_m - σ_a de las evoluciones de estos límites para todo tipo de tensiones medias se muestra en la figura 4-27. Las curvas que definen las resistencias estáticas en el plano σ_m - σ_a pasan a ser dos rectas. Una recta de pendiente -1 que representa el límite S_{UT} y otra de pendiente $+1$ que representa el límite S_{UC} . En consecuencia, el valor mínimo de las dos curvas marca el valor de $S_U(\sigma_a)$ para cualquier σ_m

$$S_U(\sigma_a, \sigma_m) = \min[S_{UT}(\sigma_a, \sigma_m), S_{UC}(\sigma_a, \sigma_m)] \quad (4-59)$$

Para este caso particular los valores σ_m^* y σ_a^* , que definen la tensión crítica entre rotura a tracción o a compresión para $N=1$, se pueden obtener con las expresiones

$$\sigma_m^* = \frac{1}{2}(S_{UT} + S_{UC}) \quad (4-60)$$

$$\sigma_a^* = \frac{1}{2}(S_{UT} - S_{UC}) \quad (4-61)$$

Por lo tanto, el índice de reversión crítico Q^* se calcula como

$$Q^* = \frac{\sigma_m^*}{\sigma_a^*} = \frac{S_{UT} + S_{UC}}{S_{UT} - S_{UC}} \quad (4-62)$$

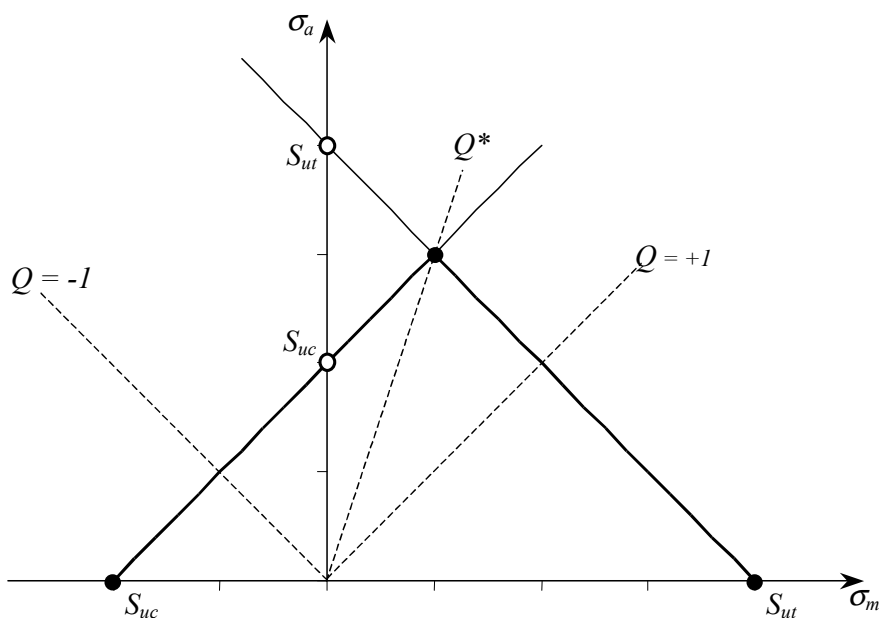


Figura 4-27. Curva $S_U(\sigma_m, \sigma_a)$ de los límites resistencia a tracción y a compresión estáticos para $N=1$.

De todas estas formulaciones generalizadas de la información de estimación de vida a tensión cíclica se utilizan, concretamente en este trabajo, dos formas.

La primera es la que incorpora el modelo de degradación en su formulación. La función para los valores de resistencia a tracción debe formularse a partir de la tensión máxima, del índice de reversión Q y del número de ciclos; $S_T(\sigma_{max}, Q, N)$, definida para valores de Q donde aparezcan tensiones máximas a tracción, $Q \in (-1, +\infty)$. La otra función para los valores de resistencia a compresión se formula a partir de la tensión mínima, del índice de reversión Q y del número de ciclos; $S_C(\sigma_{min}, Q, N)$, definida para valores de Q donde aparezcan tensiones mínimas a compresión, $Q \in (-\infty, 1)$.

Para la determinación experimental de estas curvas se necesita utilizar también las curvas de vida constante en el plano $\sigma_m - \sigma_a$. De esta forma es posible estimar, tal como se muestra en el siguiente apartado, cuando un punto experimental sufre la rotura a tracción o a compresión.

4.4.4. Obtención experimental de las curvas S-N generalizadas

Para caracterizar correctamente el modelo de predicción de vida es importante conocer tanto la evolución de la resistencia a tracción (S_T) como la evolución de la resistencia a compresión (S_C), sea cual sea el tipo de carga cíclica. De este modo, ante cada nuevo ciclo, es posible distinguir si aparece degradación del material debido a la tensión máxima (a tracción) o bien debido a la tensión mínima (a compresión). Por lo tanto, los resultados experimentales deben permitir definir unas curvas en el plano S-N generalizadas para obtener la resistencia a fatiga del material para todo tipo de tensión cíclica.

Durante la experimentación a fatiga, en alto número de ciclos, es prácticamente imposible registrar durante el ensayo si en una probeta, sometida a tensión cíclica de tracción-compresión, se origina la rotura final por tracción o compresión. Para discernir fácilmente cómo se ha producido esta rotura es posible hacerlo analizando las resistencias representadas mediante curvas de vida en el plano $\sigma_m-\sigma_a$. En esta representación el máximo de cada curva de vida define el valor crítico de tensión que separa el fallo por compresión del fallo por tracción para un determinado número de ciclos. Como se ha visto en el apartado anterior, una curva de vida representada en el plano $\sigma_m-\sigma_a$ representa de hecho los dos límites de resistencia: *i*) la zona con pendiente positiva de resistencia por tensión mínima a compresión, a la izquierda del punto crítico en el diagrama, y *ii*) la zona con pendiente negativa de resistencia por tensión máxima a tracción, a la derecha del punto crítico.

Algunos autores (Harris, 2001) (Curtis, 1991) realizan una sola regresión experimental de las resistencias para todo el dominio de tensiones cíclicas, desde solo compresión con tensiones medias negativas a tensiones solo tracción con tensiones medias positivas pasando por todo el abanico de tensiones cíclicas tensión-compresión. En cambio, según la interpretación que se ha expuesto en el anterior apartado, en la obtención de las curvas generalizadas cada una de las curvas de vida representa en un mismo plano $\sigma_m-\sigma_a$ dos funciones. Una función de pendiente positiva representativa de la resistencia a compresión y otra de pendiente negativa representativa de la resistencia a tracción. En este trabajo se propone dividir la curva de vida en dos partes y realizar la regresión de los valores experimentales independientemente para obtener la resistencia a tracción y la resistencia a compresión. Este procedimiento es más adecuado dada la fenomenología que representa este tipo de curvas.

La metodología propuesta para obtener las curvas S-N generalizadas consta de los siguientes pasos:

i) Representar los valores experimentales de resistencia-vida mediante curvas de vida constante en el plano $\sigma_m-\sigma_a$, o bien en una representación en el espacio $\{\sigma_m-\sigma_a-N\}$.

- ii) A partir de esta representación identificar los valores de tensión cíclica crítica que separa la resistencia a tracción de la resistencia a compresión. Son los valores máximos para cada valor de N .
- iii) Separar los puntos experimentales en dos grupos. Uno característico de las resistencias a tracción y otro característico de las resistencias a compresión (ver figura 4-28).
- iv) Realizar una regresión separadamente de los dos grupos de datos experimentales para obtener dos funciones de resistencia S-N generalizadas.

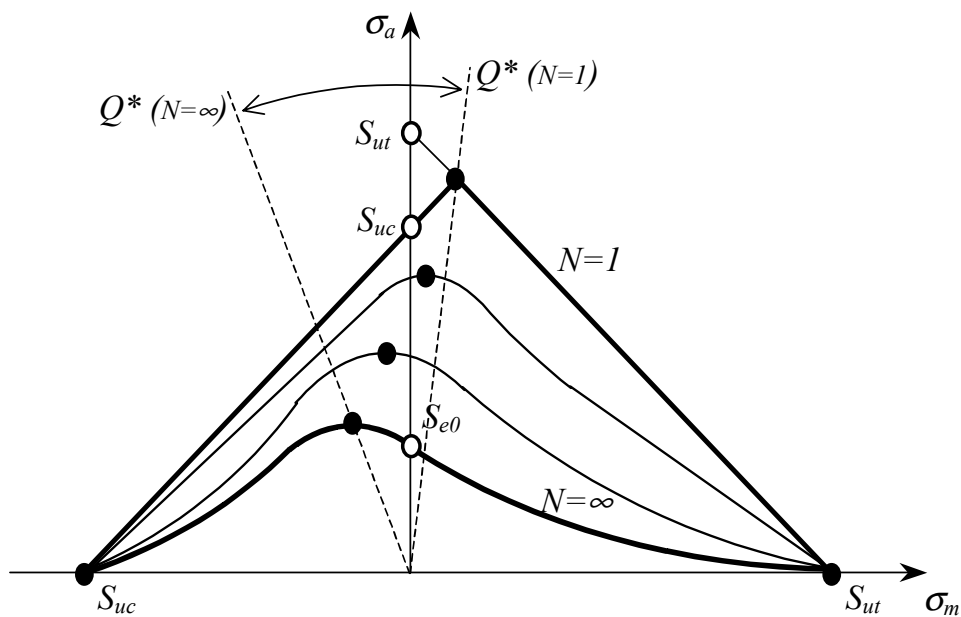


Figura 4-28. Curvas de vida constante en el plano $\sigma_m - \sigma_a$ donde se observa la evolución de Q^* en función del número de ciclos. En este caso pasa de un valor positivo a un valor negativo. Los puntos a la izquierda de Q^* se utilizan para obtener la regresión para la resistencia a compresión. Los puntos a la derecha de Q^* se usan para obtener la regresión de la resistencia a tracción.

Para realizar la regresión de estos datos experimentales, y obtener las evoluciones S-N para la resistencia a tracción y la resistencia a compresión, existen distintas alternativas. Entre éstas, la posibilidad de utilizar familias de regresiones unidimensionales en el plano S-N lineales o no-lineales. Cada regresión S-N estará asociada a un cierto valor del índice de reversión Q . Otra posibilidad es usar directamente regresiones bidimensionales lineales en el espacio S-Q-N. También es interesante la posibilidad de formular funcionales donde se obtengan las regresiones de las curvas S-N asociándoles sus valores estadísticos de esperanza y variancia (Fernández-Cantelli *et al.*, 1990).

(a) Familias de regresiones unidimensionales en el plano S-N

Una de las opciones que se proponen en este trabajo, como regresión de las curvas S-N generalizadas, es utilizar una interpolación unidimensional separada para cada una de las variables que definen las evoluciones de la resistencia.

Se toman regresiones de la función de S-N para cada índice de reversión constante (Q). De este modo se obtiene una familia de curvas S-N clásicas, pudiéndose realizar las regresiones según la formulación deseada, por ejemplo las presentadas en la tabla 4-5 (ver Apéndice A). Los parámetros de ajuste experimental que definen estas regresiones (A , β , S^* y N^*) se parametrizan convenientemente, utilizando el método de los mínimos cuadrados para funciones no lineales univariantes, mediante un algoritmo de estimación iterativo, por ejemplo el desarrollado por Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963).

Lineal en representación semi-logarítmica	$S = S_U - (S_U - S^*) \frac{\log N}{\log N^*}$	(4-63)
Lineal en representación logarítmica ($\beta=1$) o exponencial ($\beta \neq 1$)	$S = S_U \left[\frac{S^*}{S_U} \right]^{\left(\frac{\log N}{\log N^*} \right)^\beta}$	(4-64)
Exponencial formulada por Oller-Salomon (Oller <i>et al.</i> , 2001)	$S = S^* + (S_U - S^*) \cdot [A] \left(\frac{\log N}{\log N^*} \right)^\beta$	(4-65)

Donde: S resistencia a fatiga, S^* , A y β son parámetros experimentales de ajuste. (S^*, N^*) es un punto cualquiera conocido de la curva S-N que puede, si existe límite de fatiga, substituirse por (S_e, N_e).

Tabla 4-5. Algunas funciones de regresión propuestas para las curvas en el plano S-N

Tal como se observa en la tabla 4-5, si se utiliza una curva S-N lineal sólo es necesario definir en función del índice de reversión Q el valor de resistencia para N^* , o sea el valor de S^* . Mayugo *et al.* (2002) proponen una evolución de los valores de S^* para la curva S-N de resistencia a tracción según la expresión

$$S_T^*(Q) = S_0^* + (S_{UT} - S_0^*) \cdot \frac{Q}{|Q|} \cdot \left(\frac{|Q|}{|Q|+1} \right)^{\theta_T} \tag{4-66}$$

donde S_0^* es el valor que toma S^* en la regresión para $Q=0$ y θ_T es un parámetro de ajuste experimental. Una expresión análoga para la curva S-N de resistencia a compresión es

$$S_T^*(Q) = -S_0^* + (S_{UC} + S_0^*) \cdot \frac{Q}{|Q|} \cdot \left(\frac{|Q|}{|Q|+1} \right)^{\theta_c} \quad (4-67)$$

donde S_0^* es el valor que toma S^* en la regresión para $Q=0$ y θ_c es un parámetro que también se obtendrá por ajuste experimental.

(b) Regresión bidimensionales en el espacio S-Q-N

Se ajustan los puntos determinados experimentalmente mediante una regresión multivariable, las variables independientes son Q y N , y el valor ajustado es S . La regresión utilizada es del tipo lineal o bien linealizable para obtener los mejores parámetros de ajuste de forma sencilla aplicando el método de mínimos cuadrados (Mongomery, 1997). Por ejemplo, una ecuación linealizable podría ser del tipo

$$S = \beta_0 + \beta_1 \cdot \log(N) + \beta_2 \cdot f(Q) + \beta_3 \cdot g(Q, \log N) \quad (4-68)$$

$$S = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \beta_3 \cdot X_3 \quad (4-69)$$

Donde β_0 , β_1 y β_2 son los parámetros de ajuste y X_1 , X_2 , X_3 son las variables dependientes del número de ciclos (N) y del índice de reversión (Q) que permiten linealizar la función de regresión (4-68).

4.4.5. Hipótesis de evolución de las curvas S-N generalizadas

La generalización de las curvas en el plano S-N para valores distintos de reversión Q (o R) se debe obtener a partir de los resultados de un completo y amplio programa de ensayos.

Para evitar el extenso número de ensayos que supone obtener los parámetros que necesitan los ajustes experimentales se pueden usar ciertas hipótesis de distribución de las curvas S-N en función del índice de reversibilidad. Predefinir la evolución de las relaciones S-N, para distintos valores de Q , es útil sobretodo durante el proceso de diseño, ya que permite reducir sustancialmente el tiempo y el coste de la caracterización del comportamiento del material.

A continuación se presentan algunas de estas hipótesis de evolución que permiten construir curvas S-N generalizadas cuando no se tiene disponible un programa de ensayos del material suficientemente extenso.

(a) Curvas S-N generalizadas para tensiones medias positivas según la ley de Goodman

Es comúnmente aceptado como regla válida utilizar para tensiones cíclicas de tensión media positiva la ley de Goodman modificada (Goodman, 1899), aunque se ha

comprobado experimentalmente que proporciona valores más bien conservadores. La ley de Goodman propone curvas de vida constante lineales en el plano $\sigma_m - \sigma_a$ tal como se ve en la figura 4-29.

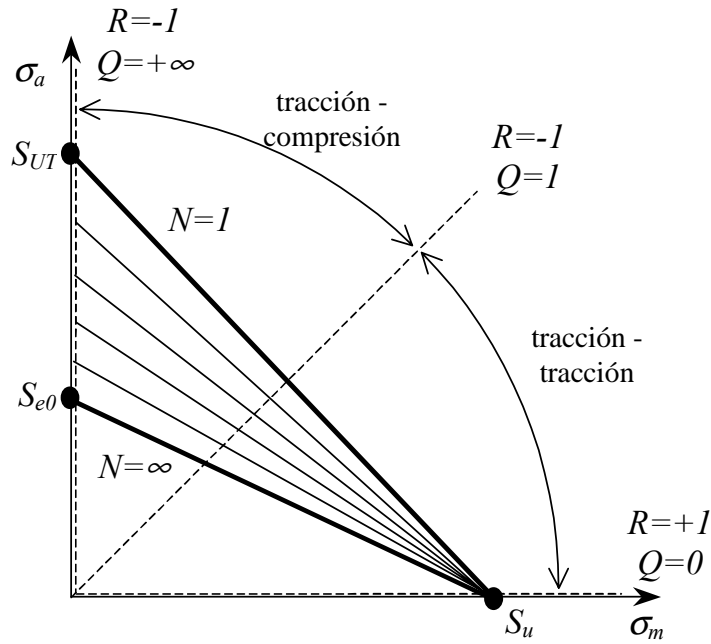


Figura 4-29. Curvas de vida constante en el plano $\sigma_m - \sigma_a$ según la regla de Goodman modificada

Para la curva de vida constante infinita las componentes media (σ_m) y alterna (σ_a) de la tensión cíclica se relacionan según la ley de Goodman modificada mediante la ecuación

$$\frac{\sigma_a}{S_{e0}} + \frac{\sigma_m}{S_{UT}} = 1 \tag{4-70}$$

donde S_{e0} es el valor de la tensión límite a fatiga para $Q=0$

De esta expresión puede obtenerse la distribución de los límites de fatiga (S_e) en función del índice de reversión Q para estados de tensiones con tensión media positiva usando cualquiera de las siguientes expresiones

$$S_e(Q) = S_{UT} \frac{Q+1}{Q + (S_{UT}/S_{e0})} \tag{4-71}$$

$$S_e(Q) = S_{e0} \frac{Q+1}{Q(S_{e0}/S_{UT}) + 1} \tag{4-72}$$

(b) Material con comportamiento simétrico que cumple con la ley de Goodman a tracción y compresión

Para un hipotético material que tenga un comportamiento simétrico y siga la regla de Goodman se obtendría el diagrama de vida constante en el plano $\sigma_m - \sigma_a$ de la figura 4-30. En él se puede observar como el valor de reversión crítico Q^* es siempre cero.

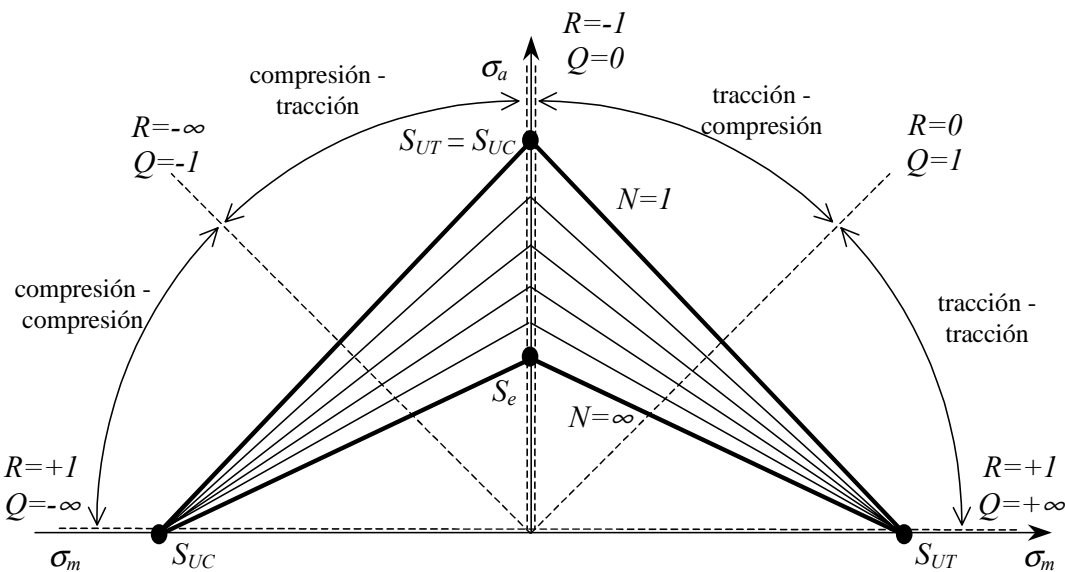


Figura 4-30. Curvas de vida constante en el plano $\sigma_m - \sigma_a$ según la regla de Goodman modificada para un material de comportamiento simétrico

(c) Material con el mismo S_{UT} y S_{UC} sin degradación por fatiga del límite de compresión

Dado un material que tenga un comportamiento simétrico para tensiones estáticas ($S_{UT} = S_{UC}$), en el que las curvas de vida constante para resistencias a tracción siga la regla de Goodman y, en cambio, para resistencias a compresión no se vea alterada por el comportamiento a fatiga (hipótesis válida para algunos materiales como por ejemplo los metales). En la figura 4-31 se puede observar el diagrama de vida constante en el plano $\sigma_m - \sigma_a$ que se obtendría. En él se observa como el valor de Q^* es 0 inicialmente, que este va adquiriendo valores cada vez más negativos a medida que avanza la vida del material.

Para este material las curvas S-N que definirían el límite de tracción para las tensiones máximas y el límite de compresión para las tensiones mínimas serían

$$S(\sigma_{\max}, Q, N) = \min[S_T(\sigma_{\max}, Q, N), S_{UC}(\sigma_{\max}, Q, N)] \quad (4-73)$$

$$S_C(\sigma_{\min}, Q, N) = [S_{UC}] \quad (4-74)$$

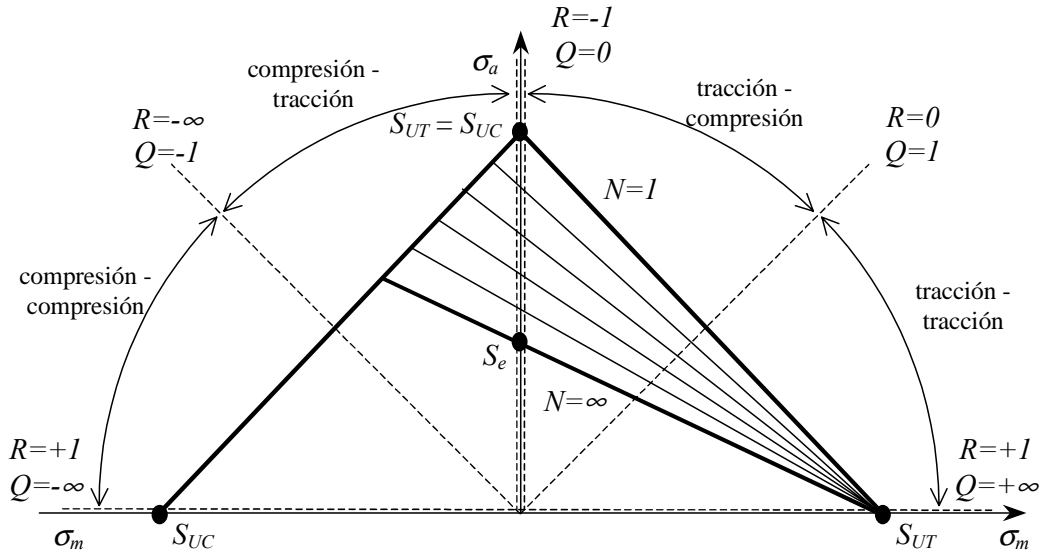


Figura 4-31. Curvas de vida constante en el plano $\sigma_m - \sigma_a$ según la regla de Goodman modificada

(d) Material con distinto valor S_{UT} y S_{UC} sin degradación por fatiga del límite de compresión

Para un material que se comporte del mismo modo, pero en el que las resistencias estáticas no sean simétricas ($S_{UT} \neq S_{UC}$), el índice de reversión crítico también variaría en función del número de ciclos tal como se muestra en la figura 4-32 para un material con un $S_{UT} < S_{UC}$.

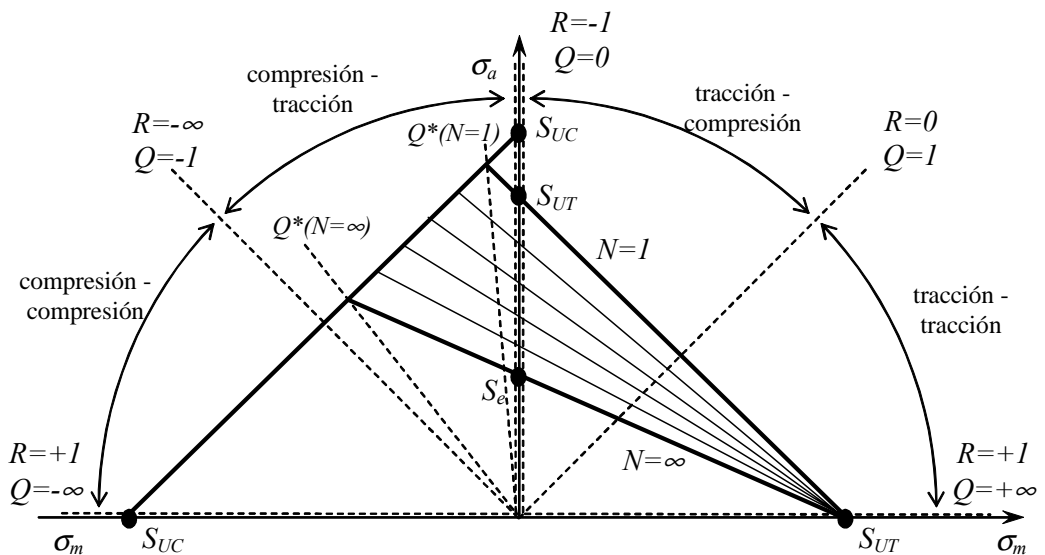


Figura 4-32. Curvas de vida constante en el plano $\sigma_m - \sigma_a$ según la regla de Goodman modificada

(e) Simplificación conservadora durante el diseño de un material que no se degrada a compresión

Aunque en muchos materiales, sobretodo los homogéneos, se ha comprobado experimentalmente que la adición de una componente de tensión media a compresión incrementa la capacidad de resistencia que puede soportarse. Dado que es difícil llevar a cabo experimentos que permitan cualificar esta mejora del comportamiento a fatiga, se admite como solución conservadora realizar en la representación en el plano σ_m - σ_a (ver figura 4-33) una interpolación lineal entre los valores de resistencia definidos por Goodman en $Q=0$ y $S_{UC}/2$ en $Q=-1$. De este modo la evolución del límite de fatiga (S_e) para la tensión media negativa en función de Q sigue la expresión

$$S_e(Q) = S_{UC} \frac{1-Q}{Q[(S_{UC}/S_{e0})-2] + (S_{UC}/S_{e0})} \quad \text{para } Q < 0 \text{ y } Q > -1 \quad (4-75)$$

Mientras que para $Q < -1$ el límite de fatiga se mantiene igual que la resistencia a compresión y para valores de $Q > 0$ su valor sigue la ley de Goodman modificada

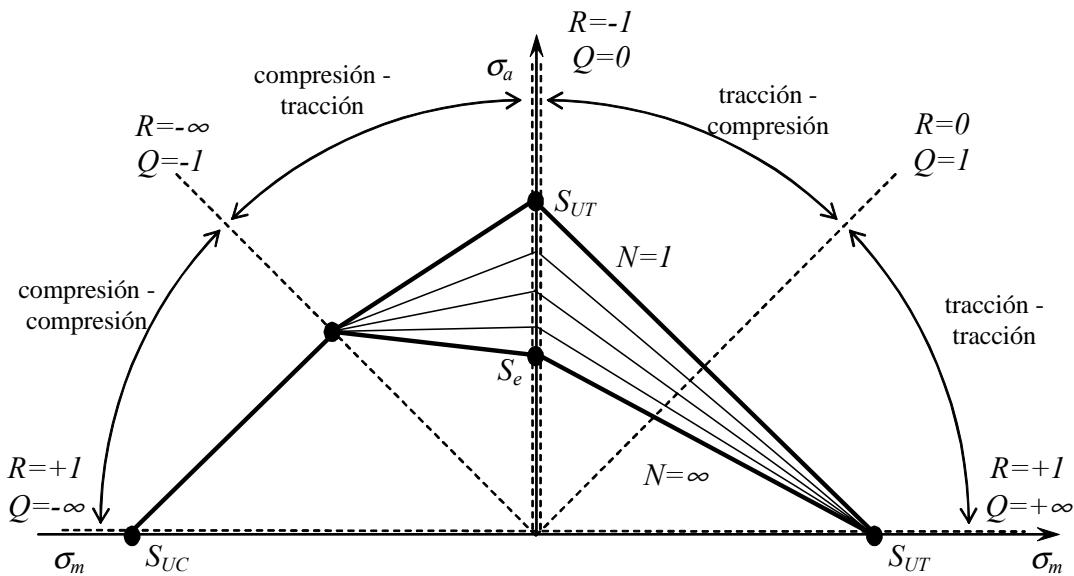


Figura 4-33. Representación en el plano σ_m - σ_a de la interpolación lineal de los valores de S_e entre la ley de Goodman modificada y la ley de ausencia de degradación por fatiga para tensiones máximas negativas.

En esta hipótesis no se define un valor crítico Q^* . En la práctica se sabe que éste se encuentra en la región entre $Q=-1$ a $Q=0$, que es la zona donde los valores de resistencia se interpolan linealmente en la representación en el plano σ_m - σ_a .

4.5. Curvas de resistencia residual. Función del factor de reducción

La degradación a fatiga en el modelo propuesto depende de la evolución del *factor de reducción* (f_{red}), el cual es utilizado como variable interna asociada de la degradación por fatiga del material. Este factor permite conocer como evolucionan tanto el umbral de discontinuidad elástica como la disipación de energía interna debido al fenómeno de la fatiga con

$$K_R^d = f_{red} K^d \quad (4-76)$$

y con

$$g_R = f_{red} g \quad (4-77)$$

donde K^d representa el umbral de discontinuidad, K_R^d el umbral de discontinuidad reducido por el efecto de la fatiga, g la energía interna del material y g_R la energía reducida por el efecto de la fatiga.

El factor de reducción se obtiene a partir de una normalización de la evolución de la curva de resistencia residual (S_R) respecto a su valor inicial estático

$$f_{red} \equiv \frac{S_R}{S_U} \quad (4-78)$$

Por lo tanto, el problema de la degradación a fatiga se limita a conocer cómo va evolucionando la resistencia residual, o su valor normalizado el factor f_{red} , para cada nuevo ciclo de carga. La evolución del factor de reducción depende del tipo de tensión cíclica

4.5.1. Resistencia residual para tensiones de características estacionarias

A partir de las curvas S-N es posible obtener algunas de las características de la función de disminución de la *resistencia residual* (S_R) que provoca una carga cíclica de características estacionarias (tensiones máximas y mínimas constantes). Para un punto cualquiera de un material sometido a fatiga, en el primer ciclo ($N=1$) la resistencia residual es igual a la resistencia estática (punto A en el esquema de la figura 4-34), la curva de vida S-N también toma para $N=1$ el valor de la resistencia estática. Durante el proceso de degradación a fatiga la resistencia residual va disminuyendo hasta el instante de rotura del material, cuando la resistencia residual alcanza el nivel de tensión de la carga cíclica (punto B en la figura 4-34).

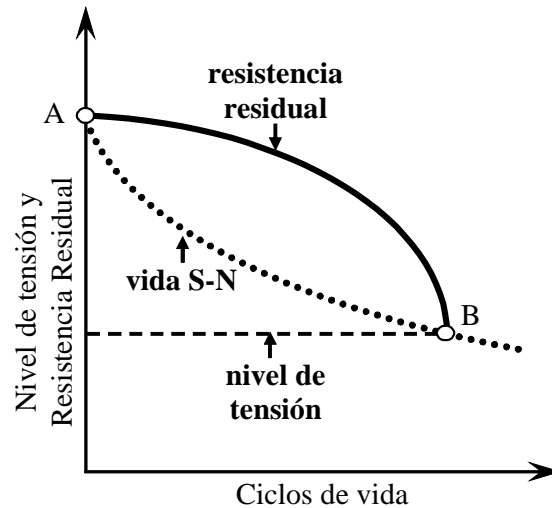


Figura 4-34. Previsión de vida a fatiga para una tensión cíclica de tensiones de características constantes. La curva de resistencia residual cruza a la curva de vida S-N en el punto de rotura esperado del material (B).

Si la tensión cíclica ha mantenido unas características constantes este punto coincide con la vida esperada del material de la curva S-N. Por lo tanto, la curva de resistencia residual coincide en su inicio y en el punto de rotura con el valor de la curva de vida S-N asociada a la tensión cíclica aplicada con características invariables. Además la evolución de esta curva de resistencia residual se mantiene siempre superior a la curva de vida S-N desde el punto A hasta el punto B de la figura 4-34.

Por lo tanto, cada curva de evolución de la resistencia residual relacionada con un determinado nivel de tensiones cíclicas de características constantes tiene siempre las siguientes características básicas (ver figura 4-35): *i*) evoluciona siempre decreciente y continua, *ii*) se mantiene siempre superior a la curva de vida S-N, *iii*) depende del estado actual de tensiones, *iv*) el punto de inicio es el valor de resistencia estática ($N=1$), *v*) siempre cruza a la curva de vida S-N en el punto (S, N_F) y *vi*) una curva de resistencia residual de una tensión menor siempre es superior a la curva de resistencia de una tensión mayor.

Algunas de las formulaciones que satisfacen estas condiciones se desarrollan en el Apéndice B y son mostradas a modo de resumen en la tabla 4-6.

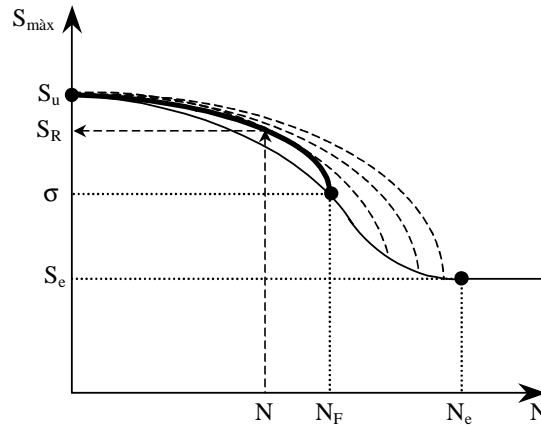


Figura 4-35. Evolución de la resistencia residual para diversos estados de tensión cíclica constante.

Regla de Miner	$f_{red} = 1 - \frac{N}{N_F} (1 - s)$	(4-79)
Regla de Miner modificada	$f_{red} = 1 - \left(\frac{N}{N_F} \right)^\beta (1 - s)$	(4-80)
Exponencial formulada por Oller-Salomon (2000)	$f_{red} = [s]^{\left(\frac{\log N}{\log N_F} \right)^\beta}$	(4-81)

Tabla 4-6. Funciones de reducción de la resistencia o de resistencia residual normalizada. Donde s es la tensión normalizada, N los ciclos actuales, N_F ciclos de vida a tensión actual y β es un parámetro de ajuste.

Esta interpretación de la resistencia residual, y de su valor normalizado f_{red} , es generalizable tanto a tensiones cíclicas que provoquen una rotura a tracción por tensión máxima como para tensiones cíclicas cuyas características lleven a una rotura del material por compresión a la tensión mínima. El análisis del tipo de tensión cíclica a través de las curvas de vida S-N generalizadas permite conocer a priori qué tipo de rotura provocaría el nivel de tensión cíclica si ésta se mantuviera constante. Por lo tanto, en ambos casos, normalizando la función de resistencia residual se obtiene la evolución del *factor de reducción* (f_{red}) de la resistencia estática del material. En las figuras 4-36 y 4-37 se muestran las funciones de resistencia residual y de factor de reducción en el plano S-N para tensiones que producen rotura a tracción y tensiones que la provoquen a compresión.

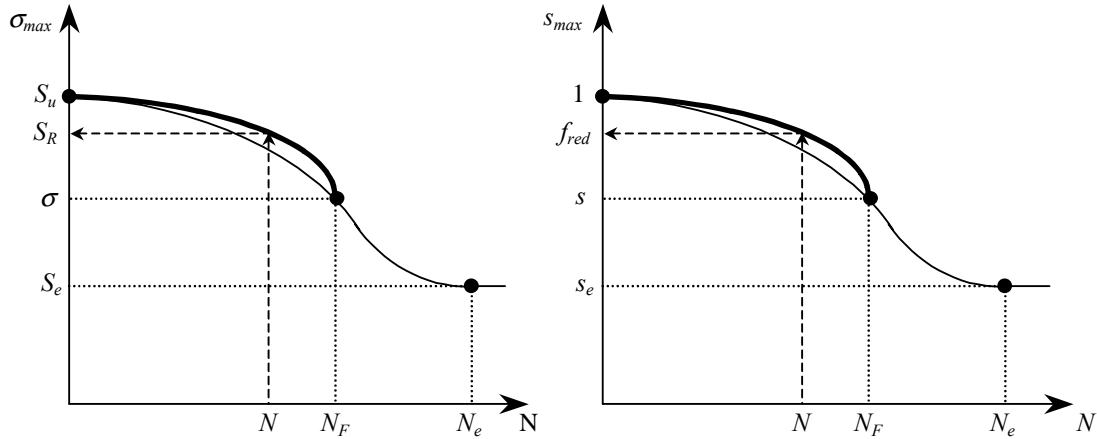


Figura 4-36. Resistencia residual y función de reducción para un estado de tensión cíclica constante que produzca rotura a tracción por la tensión máxima.

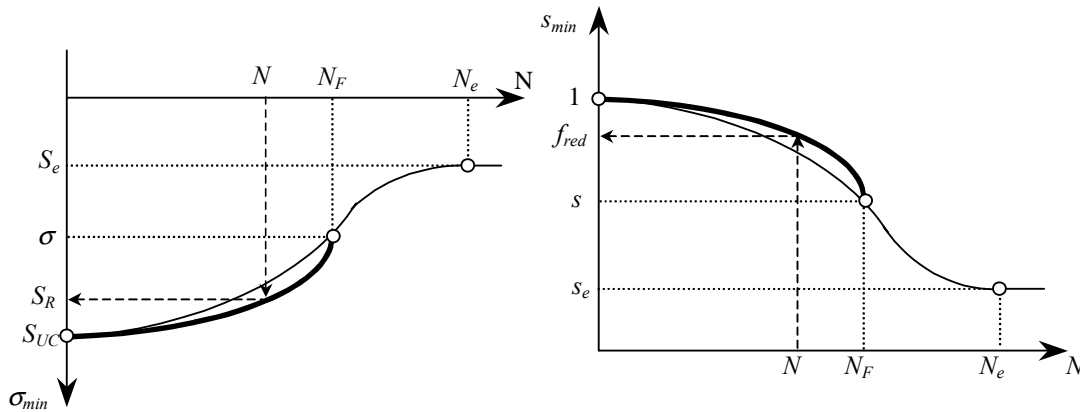


Figura 4-37. Resistencia residual y función de reducción para un estado de tensión cíclica constante que produzca rotura a compresión por la tensión mínima.

Si se trata de una tensión cíclica que produzca la rotura por tracción los valores normalizados de la resistencia residual y de la tensión máxima son

$$(f_{red})_T = \frac{S_R}{S_{UT}} \quad \text{y} \quad s_{max} = \frac{\sigma_{max}}{S_{UT}} \quad (4-82) \text{ y } (4-83)$$

En cambio si se trata de una tensión cíclica que produzca la rotura por compresión los valores de f_{red} y de la tensión mínima normalizada son

$$(f_{red})_C = \frac{S_R}{S_{UC}} \quad \text{y} \quad s_{min} = \frac{\sigma_{min}}{S_{UC}} \quad (4-84) \text{ y } (4-85)$$

4.5.2. Índice de degradación de la resistencia residual

Una alternativa a f_{red} como indicador de la pérdida de resistencia es el índice de degradación de la resistencia residual (D), algunos autores lo denominan índice de daño a fatiga. Se define matemáticamente como el cociente entre la diferencia de la resistencia estática y la resistencia residual, la resistencia estática y la tensión actual

$$D \equiv \frac{S_u - S_R}{S_u - S} \qquad D \equiv \frac{1 - f_{red}}{1 - s} \qquad (4-86) \text{ y } (4-87)$$

D es un índice acotado entre 0 y 1. Toma el valor cero con $N=1$ y $S_R = S_u$ y valor unidad cuando $N=N_F$ y $S_R = S$ para un determinado nivel de tensiones. Así, la resistencia residual en función del índice de degradación es

$$S_R = S_u - D (S_u - S) \qquad (4-88)$$

En función de sus valores normalizados

$$f_{red} = 1 - D (1 - s) \qquad (4-89)$$

Mientras que D depende del estado de tensiones actual, f_{red} es independiente (sólo su evolución depende de la tensión). Por lo tanto, con cargas cíclicas de amplitud variable es mejor utilizar la variable f_{red} en lugar de D , indicador que puede presentar discontinuidades en su evolución. Para un determinado nivel de tensiones, D siempre es monótonicamente creciente en función del número de ciclos. Si aparecen cambios en el nivel de tensiones aparecen discontinuidades en el parámetro D .

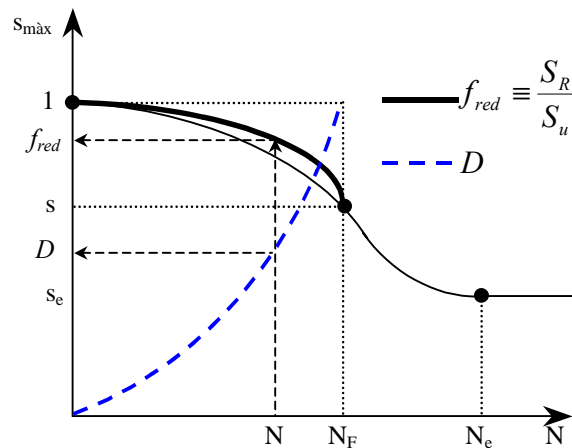


Figura 4-38. Posibles funciones D y f_{red} para una determinada tensión σ

4.6. Acumulación de la resistencia residual

Las curvas de resistencia residual están definidas para un determinado nivel de carga cíclica de características constantes: mismo valor máximo y mínimo, misma amplitud y mismo índice de reversión. Si las características que definen cada incremento de carga varían, la evolución de la resistencia residual a tracción y compresión, y sus valores normalizados $(f_{red})_T$ y $(f_{red})_C$, han de ser sensibles a estas variaciones y a sus secuencias de aplicación.

(a) Evolución de la resistencia residual con distintos niveles de tensión

Las curvas de resistencia residual formuladas anteriormente están definidas para un determinado nivel de tensión cíclica de características constantes. Si alguna de las características que definen la tensión cíclica son cambiantes (su valor máximo o su índice de reversión) las curvas de resistencia residual se modifican. Su evolución no sólo depende del nivel de cada una de las cargas sino que también lo hace su secuencia de aplicación.

En la figura 4-39 se puede observar esquemáticamente cómo evolucionan las resistencias residuales para un único nivel de tensiones (izquierda) y cómo lo hacen si el valor del nivel de cargas es cambiante (derecha). Se observa que si se aplica un nivel de tensión cíclica constante la rotura se produce siempre en el punto de la curva S-N característico de esta tensión, en cambio si el nivel de tensión cíclica va cambiando la rotura sucede fuera de la curva S-N. Si las tensiones van siendo decrecientes el punto de rotura se encuentra antes de cruzar la curva S-N. En cambio, con tensiones crecientes el punto de rotura se encuentra más allá de la vida que indica la curva S-N.

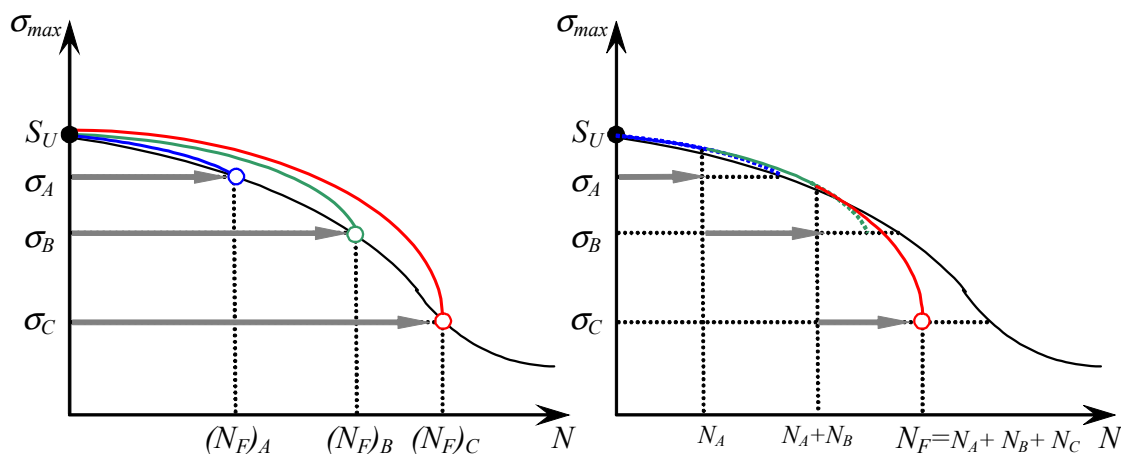


Figura 4-39. Curvas de resistencia residual para distintos niveles de tensión. A la izquierda si la carga es constante hasta la rotura. A la derecha si va cambiando el nivel de tensión.

Se puede ilustrar este fenómeno con un caso ampliamente estudiado: el comportamiento de un elemento sometido a dos niveles de tensión máxima distintos (σ_A y σ_B donde $\sigma_A > \sigma_B$). Estas tensiones cíclicas se aplican en secuencias diferentes: *i*) secuencia H-L (*high-low*) donde primero se aplica el nivel de tensión elevado σ_A durante N_A ciclos y posteriormente la tensión σ_B hasta que se produzca la rotura, y *ii*) secuencia L-H (*low-high*) donde primero se aplica la tensión cíclica baja σ_B durante N_B ciclos y posteriormente la tensión elevada σ_A hasta la rotura (ver figura 4-40)

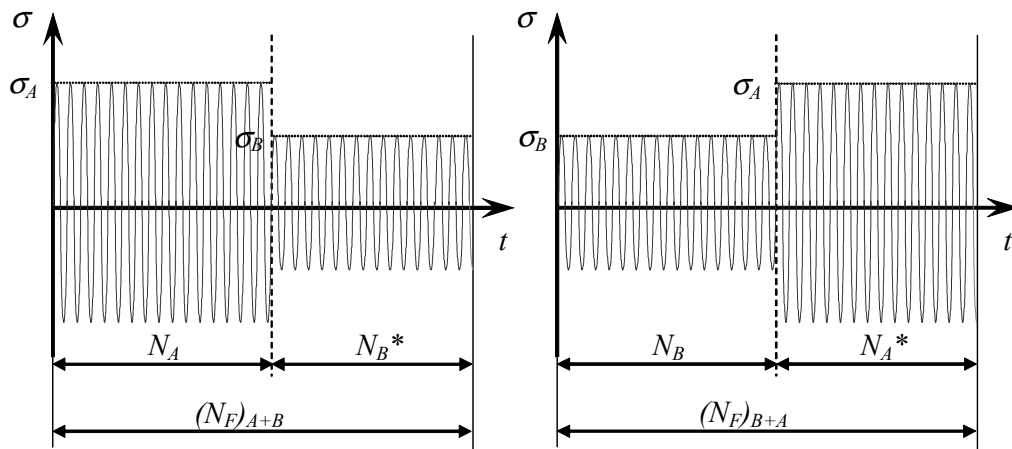


Figura 4-40. A la izquierda secuencia H-L de cargas (primero carga mayor y a continuación la menor hasta la rotura). A la derecha secuencia L-H de cargas (primero carga menor y después la mayor hasta la rotura).

Experimentalmente se observa como el número de ciclos antes de producirse la rotura del elemento (N_F) no es el mismo en una secuencia de cargas que en la otra

$$(N_F)_{A+B} \neq (N_F)_{B+A} \tag{4-90}$$

Es obvio que si se combinan los dos casos el número de ciclos hasta su rotura estará situado entre $(N_F)_A$ y $(N_F)_B$. Por lo tanto $(N_F)_{A+B}$ y $(N_F)_{B+A}$ están acotados superiormente por la vida al nivel de tensión bajo $(N_F)_B$ y acotados inferiormente con la vida al nivel de tensión alto $(N_F)_A$.

$$(N_F)_{A+B} \in ((N_F)_A, (N_F)_B) \quad (N_F)_{B+A} \in ((N_F)_A, (N_F)_B) \tag{4-91}$$

Si estas dos cargas mantienen el mismo índice de reversibilidad (Q o R) los números de ciclos N_F que definen el punto donde la curva de resistencia residual se cruza con la curva de esperanza de vida se encuentran en la misma curva S-N (ver figura 4-41).

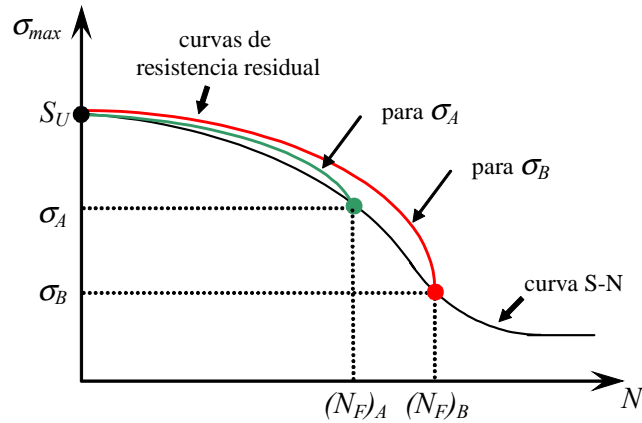


Figura 4-41. Evolución de la resistencia residual para los dos niveles de tensión con el mismo índice de reversión.

En la secuencia H-L, inicialmente la curva de resistencia residual sigue la curva de resistencia residual que se obtiene para el nivel de tensión alto σ_A hasta llegar al número de ciclos igual a N_A . A partir del cambio de la característica de la tensión la resistencia residual sigue la curva definida por la tensión baja σ_B hasta el punto de rotura N_F .

En la secuencia L-H la evolución de la resistencia residual también es una combinación de las curvas de resistencia de σ_A y σ_B pero esta vez en orden inverso (ver figura 4-42).

El segundo tramo de curva de resistencia residual no debe de tener discontinuidad respecto al primero. La forma correcta de componer los dos tramos para obtener una teoría de acumulación válida se explica en el próximo apartado.

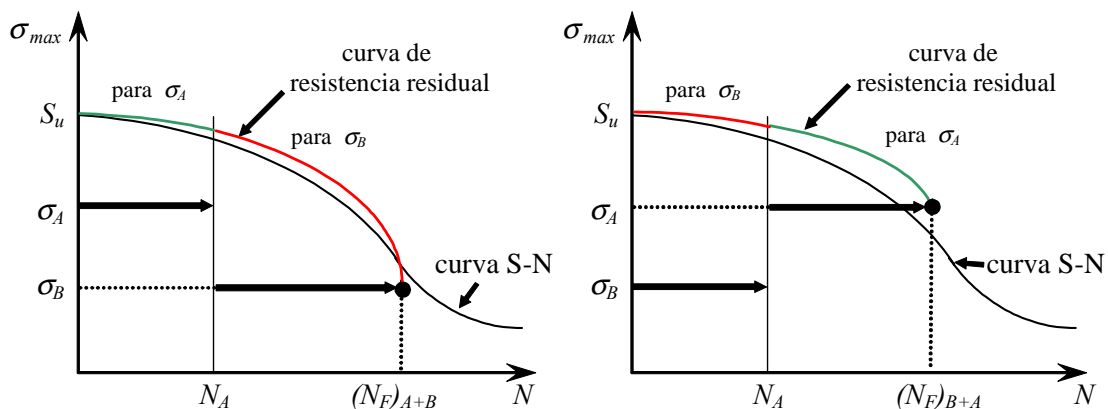


Figura 4-42. Evolución de la resistencia para la secuencia H-L (izquierda) donde el elemento rompe antes de la curva S-N y para la secuencia L-H (derecha) donde el elemento rompe después de la curva S-N.

(b) Método de acumulación sensitivo a cambios en la tensión cíclica

El método de acumulación de resistencia residual (o su valor normalizado f_{red}) propuesto debe de ser sensitivo a los cambios en las características de la tensión cíclica. Para ello se divide (como se verá en el siguiente apartado) la historia de tensión cíclica en incrementos de tensión cíclica. Cada incremento de tensión cíclica representa un *bloque* de número de ciclos de carga para los cuales las características de la tensión se mantienen invariables.

En cada nuevo incremento de carga se toma la hipótesis de que la resistencia residual inicial, de este nuevo incremento, es la resistencia residual final del incremento de carga anterior. La disminución que sufre el valor de la resistencia residual se calcula según la evolución que marcan las características de la tensión cíclica en el incremento actual de carga. Se realiza este proceso para cada incremento de carga hasta el final de la historia de carga.

Dado que existe un valor de resistencia residual para la tracción y otro para la compresión debe llevarse simultáneamente la degradación de los dos valores.

Es importante que las variaciones en las resistencias residuales se calculen a partir de los valores de resistencia del paso anterior, dado que las curvas de evolución no suelen ser lineales. Para ello se ha ideado el proceso, que se esquematiza en la figura 4-43, para obtener la acumulación de la resistencia residual dado un incremento de carga.

En primer lugar es necesario analizar el nivel de carga actual y observar, si la tensión se mantuviera con características constantes a lo largo del tiempo, si la rotura se produciría a tracción (por la tensión máxima) o a compresión (por la tensión mínima). Una vez se ha localizado el tipo de rotura a que conllevaría el nivel de carga actual se degrada la resistencia residual asociada a este tipo de rotura. Es decir si la rotura es a tracción se degrada la resistencia residual a tracción y si esta es a compresión la resistencia residual asociada a la compresión. Los pasos para calcular la nueva resistencia residual (o el factor de reducción) al final de un nuevo incremento de carga son:

- (1) calcular el valor de N_F , a través de la curva de vida S-N, para definir la curva de resistencia residual correspondiente al nivel de carga actual;
- (2) a partir de la resistencia residual del incremento de carga anterior (S_R^i o f_{red}^i) obtener el número de ciclos ficticios (ciclos equivalentes, N^*) para el nivel de carga actual correspondientes al incremento de carga anterior;
- (3) calcular el número de ciclos equivalentes del incremento de carga actual (N^{i+1}) y
- (4) obtener el valor de resistencia para el incremento de carga actual (S_R^{i+1} o f_{red}^{i+1}).

Con la otra resistencia residual, la que no esta asociada a la rotura que produciría el nivel de carga actual, se degrada siguiendo los mismos pasos mostrados en la figura 4-43 pero

utilizando el mismo valor de N_F . Es decir, el valor de vida esperada obtenido para el nivel de tensión que conduciría a la rotura del material.

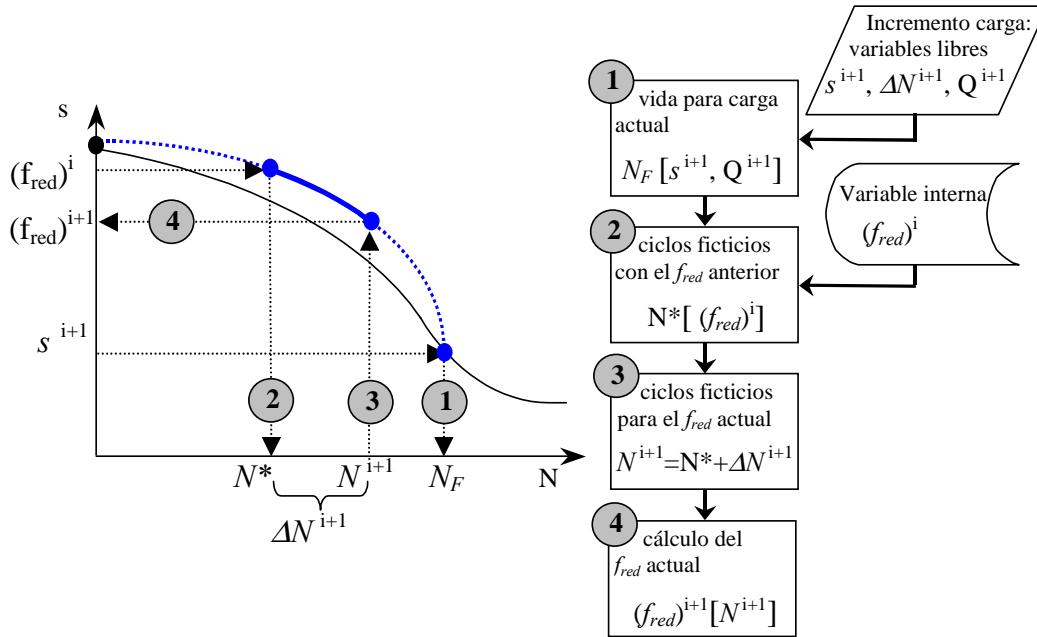


Figura 4-43. Acumulación de resistencia residual para un incremento de carga: $s^{i+1}, \Delta N^{i+1}, Q^{i+1}$

4.7. Aspectos para la implementación del modelo de degradación a fatiga

El modelo para el tratamiento de la fatiga unidimensional propuesto en los apartados anteriores puede implementarse dentro de un método numérico que permita una discretización espacial y temporal del dominio.

En primer lugar, mediante ciertas consideraciones que se presentan a continuación, es posible el tratamiento de la fatiga en estados de tensiones multiaxiales que aparecen en geometrías complejas mediante el tratamiento uniaxial propuesto. Para ello, también es necesario obtener, durante el transcurso de la aplicación de los distintos ciclos de carga, las características de la tensión cíclica en todo el dominio analizado. En geometrías complejas, para relacionar el estado de carga con el nivel de tensiones en cada punto se deben realizar análisis mediante métodos numéricos, por ejemplo utilizando el método de los elementos finitos.

Por otra parte, es necesario estudiar la fatiga a alto número de ciclos donde se deben analizar muchas veces historias superiores a los 10^6 ciclos. Para afrontar este tipo de problemas no es viable realizar un seguimiento de toda la historia temporal de la carga ciclo

a ciclo ya que representaría un costo computacional inabordable. Es necesario plantear un método que permita avanzar rápidamente en la vida del material mediante la aplicación de sucesivos incrementos en el número de ciclos que produzcan tensiones cíclicas de características constantes.

4.7.1. Relación entre carga cíclica y tensión cíclica

Son pocos los casos en los cuales la forma de la carga cíclica externa coincide con la forma de las tensiones cíclicas que aparecen en cada punto del elemento estructural. Por lo tanto, no es posible aplicar la hipótesis de que las características de forma de las tensiones (representada por el índice de reversión R o Q) son idénticas a las características de forma de las cargas aplicadas. En la figura 4-44 se muestra una pieza sometida a tracción-compresión donde se cumpliría esta hipótesis y otra sometida a una flexión alterna donde claramente no se cumpliría. En esta segunda pieza se puede observar que los puntos no tienen el mismo índice de reversión y, además, los distintos puntos alcanzan los valores de tensión máxima y tensión mínima en distintos instantes del ciclo de carga.

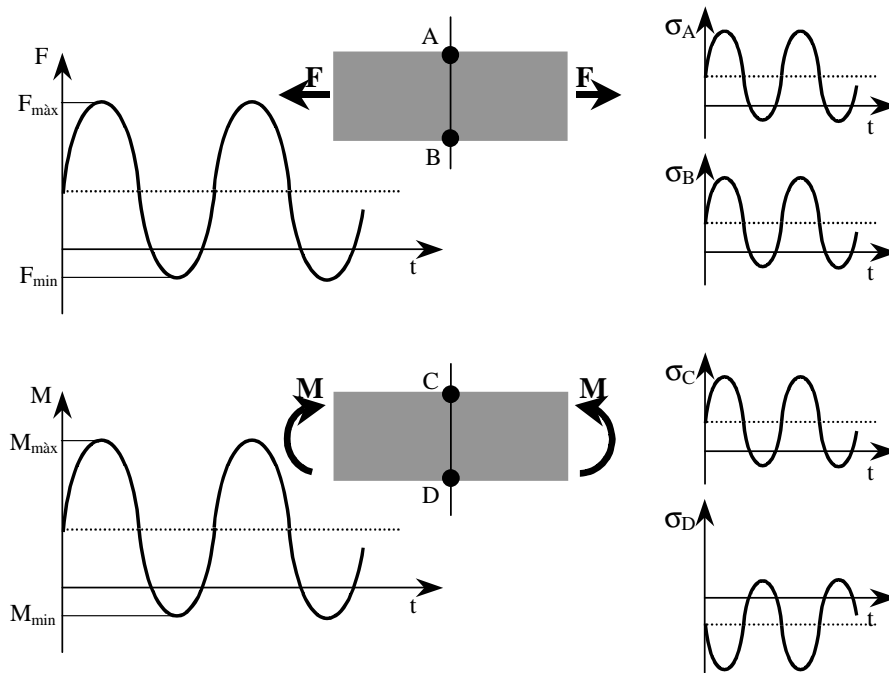


Figura 4-44. (a) Pieza sometida a una carga cíclica de tracción-compresión donde la forma de todas las tensiones coinciden. (b) Pieza sometida a una flexión alterna donde aparecen distintas formas de tensiones en cada punto.

Como se ha mostrado en los apartados anteriores, cuando se quiere conocer la degradación por fatiga que provoca una carga cíclica es necesario conocer las características de la tensión en cada punto. Por lo tanto, en general, y más aun si se trabaja con no-linealidades, para obtener estas características de la tensión en cada punto es necesario realizar una serie de análisis que permitan conocer la evolución de la tensión durante un ciclo de carga entero. Una vez se haya obtenido para cada punto y cada ciclo un valor de tensión máxima asociado a un índice de reversión se podrá tratar la degradación por fatiga del material con el modelo propuesto.

Como se ha mostrado al principio de este capítulo el tratamiento de la fatiga propuesto modifica el límite de discontinuidad elástica mediante el *factor de reducción* (f_{red}). Este límite de discontinuidad puede definirse mediante las condiciones

$$f(\sigma_{ij}) - K_R(\sigma_{ij}, N, \sigma_{ciclica}, d, \alpha^p) = 0 \quad (4-92)$$

$$f(\sigma_{ij}) - K(\sigma_{ij}, d, \alpha^p) \cdot f_{red}(N, \sigma_{ciclica}) = 0 \quad (4-93)$$

donde $f(\sigma_{ij})$ es una norma del estado de tensiones (σ_{ij}), las variables N y $\sigma_{ciclica}$ son el conjunto de variables libres que definen la evolución de la tensión cíclica. La función umbral residual K_R y la función residual K definen el límite de discontinuidad elástica del material con y sin el efecto de la degradación a fatiga, respectivamente. La d representa el conjunto de variables internas que definen el modelo de daño y α^p representa el conjunto de variables internas que definen el modelo de plasticidad. De este modo en el modelo propuesto el límite del comportamiento lineal se formula como un acoplamiento indirecto entre el efecto de la fatiga y el del resto de fenómenos no lineales. Se observa que la degradación a fatiga depende de las características de la carga cíclica.

Como se vio en el apartado 4.3 para identificar la tensión cíclica en un estado de tensiones unidimensional tan solo es necesario identificar la tensión máxima y la tensión mínima. Los signos asociados a cada una de estas tensiones indicarán si se trata de tensiones a tracción o a compresión. Por lo tanto, a partir de estos valores es posible calcular otras características como el índice de reversibilidad y cuantificar la degradación que produce (f_{red}).

En cambio, en un estado de tensiones multiaxial la identificación de las tensiones a tracción o a compresión no es tan clara, dado que el valor del factor de reducción del umbral de discontinuidad elástico a fatiga (f_{red}) depende de si la tensión es a tracción o a compresión. Tal como se indicó al principio de este capítulo, para hacer un mejor seguimiento de la degradación a fatiga en materiales que se degradan anisótricamente sería conveniente tener un modelo que permitiera obtener una degradación direccionada. Dado que el tratamiento de la fatiga que se propone es del tipo escalar, esto no es posible. Por lo tanto, la identificación de las tensiones cíclicas sobre un punto material sometido a tensiones

multidireccionales se limitará a obtener cuáles son las tensiones máxima y mínima a que está sometido dicho punto material, sin tener en cuenta en qué dirección se producen estas tensiones.

Para ello se proponen a continuación distintos métodos para valorar la tensión máxima y la tensión mínima que definen la tensión cíclica de un punto sometido a tensiones multiaxiales.

(a) Determinación directa a través de las tensiones principales

La forma más directa de determinar el valor máximo y mínimo que toma la tensión durante un ciclo de carga es a partir de las tensiones principales. Para ello, se debe calcular para cada instante a lo largo de un ciclo de carga cuál es el valor de las tensiones principales que aparecen en el punto analizado. De este modo se define como valor máximo de la carga cíclica el mayor valor calculado para las tensiones principales como

$$\sigma_{\max} = \max[\sigma_1^i] \quad (4-94)$$

para todo incremento i -ésimo de la evolución temporal de los ciclos de carga, siendo σ_1 la tensión principal mayor. Por otro lado se define como valor mínimo el menor valor de los que aparecen como tensiones principales a lo largo del ciclo como

$$\sigma_{\min} = \min[\sigma_3^i] \quad (4-95)$$

para todo incremento i -ésimo de la evolución temporal de los ciclos de carga, siendo σ_3 la tensión principal menor.

Esta metodología no tiene en cuenta ni en qué dirección se están dando estas tensiones ni en qué instante. Su formulación es de extremada sencillez y es especialmente recomendable su uso cuando se utilice el modelo de degradación por fatiga para determinar la vida en un material de comportamiento multiaxial poco conocido, ya que los valores que obtiene de tensión máxima y mínima están claramente por el lado de la seguridad.

(b) Determinación a través de una norma escalar de tensiones

Otra forma de valorar la tensión cíclica en un estado de tensiones multiaxial es obtener el nivel de tensiones y un signo asociado a él en cada instante.

Para obtener el nivel de tensiones de forma escalar pueden utilizarse funciones de fluencia conocidas (Tresca, Von Mises, Mohr–Coulomb, Drucker–Prager, etc.) o cualquier otro criterio que se adecúe al comportamiento del material. Dado que el escalar obtenido como una norma de la función de fluencia carece de signo únicamente con este valor no es

posible identificar si se trata de una tensión a tracción o a compresión. Para la determinación de este signo se proponen dos alternativas.

Una forma de determinar el signo es calcular el signo de la tensión volumétrica en cada instante del ciclo estudiado. Si la tensión volumétrica es positiva se considerará que en este instante la norma de tensiones calculada es a tracción. Si la tensión volumétrica es menor que cero esto indica que en este punto la tensión es a compresión. De este modo el cálculo del signo se consigue con la siguiente expresión

$$r = \frac{\left\langle \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} \right\rangle}{\sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}} \quad (4-96)$$

donde σ_{ii} son las tensiones normales del estado de tensiones y $\langle x \rangle$ es la función de Mac Laury, que asigna el valor $\langle x \rangle = x$ si $x > 0$ y el valor $\langle x \rangle = 0$ si $x < 0$. Se calcula como

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + |x|) \quad (4-97)$$

De esta forma el parámetro r toma un valor discreto de +1 ó de 0. Un valor de r igual a 1 indica que el estado de tensiones es a tracción, y el valor 0 indica que el punto está comprimido.

La otra manera que se propone para determinar el signo es hacerlo mediante una variable que pondere qué parte del tensor de tensiones está a tracción y qué parte del tensor de tensiones se encuentra a compresión. Para ello se ha utilizado la función utilizada por Oliver *et al.* (1990) que identifica si el estado de tensiones es a tracción o a compresión según la expresión

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_{ii} \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_{ii}|} \quad (4-98)$$

donde σ_{ii} son las tensiones normales del estado de tensiones y $\langle \sigma_{ii} \rangle$ es la función de Mac Laury de cada una de estas tensiones normales, que se calcula como

$$\langle \sigma_{ii} \rangle = \frac{1}{2}(\sigma_{ii} + |\sigma_{ii}|) \quad (4-99)$$

De esta forma el parámetro r toma un valor en el intervalo de 0 a +1. Un valor de r igual a 1 indica que el estado de tensiones es totalmente a tracción y el valor 0 indica que el punto está totalmente comprimido. Un valor intermedio pondera los niveles de esfuerzos según su signo. De esta forma se obtiene una definición del signo de la tensión más *suavizada*.

A partir del valor de r es posible determinar el signo de la norma escalar de tensiones. De este modo si $\tau(\sigma_{ij})$ es la norma de tensiones que indica el nivel de tensiones y r es un valor entre 1 (tracción) y 0 (compresión), se pueden calcular los valores de la tensión máxima y la tensión mínima que caracterizan una tensión cíclica con las siguientes expresiones

$$\sigma_{\max} = \max\left[(2(r)^i - 1) \cdot \tau(\sigma_{ij})^i\right] \quad (4-100)$$

$$\sigma_{\min} = \min\left[(2(r)^i - 1) \cdot \tau(\sigma_{ij})^i\right] \quad (4-101)$$

para todo incremento i -ésimo de la evolución temporal de los ciclos de carga, siendo $\tau(\sigma_{ij})$ la norma de tensiones y r el valor representativo de tracción o compresión para cada incremento de carga.

(c) Determinación de la tensión en la dirección del refuerzo

La degradación por fatiga multidireccional de las propiedades cuando tenemos un composite se puede simplificar modelizando únicamente la degradación de sus propiedades en la dirección del refuerzo. Esta simplificación se puede argumentar debido a que el refuerzo define prácticamente el comportamiento estructural del compuesto. Por lo tanto, para identificar la tensión cíclica sobre un punto material sometido a tensiones multidireccionales se obtendrá cuáles son las tensiones máxima y mínima a que está sujeto este punto en la dirección de la fase de refuerzo (identificada por la dirección 11). Para ello, se debe calcular para cada instante a lo largo de un ciclo de carga cuál es el valor de las tensiones en la dirección 11 que aparecen en el punto analizado. De este modo se definen los valores máximo y mínimo de la carga cíclica como

$$\sigma_{\max} = \max\left[\sigma_{11}^i\right] \quad (4-102)$$

$$\sigma_{\min} = \min\left[\sigma_{11}^i\right] \quad (4-103)$$

donde σ_{11}^i es el valor de la tensión en la dirección de la fibra para cada instante de la evolución temporal de la tensión en el punto.

4.7.2. Estrategia de avance temporal

Para afrontar este tipo de problemas no es viable realizar un seguimiento de toda la historia temporal de la carga ciclo a ciclo, por su gran coste computacional. En consecuencia se ha

diseñado una estrategia de avance temporal que permite obtener un rápido avance de la aplicación de la carga y que a su vez sea aplicable al tratamiento de tensiones cíclicas en un punto de características cambiantes.

El avance en el tiempo de vida del material se consigue a través de incrementos en el número de ciclos. Cada uno de estos incrementos de ciclos es aplicado mediante dos etapas; durante la primera se calculan las características de las tensiones cíclicas y durante la segunda, denominada etapa de linealización del problema en el número de ciclos, se degrada las propiedades de resistencia debido a la fatiga.

De este modo la estrategia de avance temporal que se ha diseñado combina estas dos etapas de forma bien diferenciada: (i) avance por seguimiento de la carga cíclica que permite conocer las características de la tensión cíclica en cada punto y (ii) avance por incrementos en el número de ciclos que permite una rápida aplicación de la carga cuando las características de tensión cíclica se mantienen constantes.

Dependiendo de si el modelo constitutivo del material compuesto es lineal o no lineal y de la complejidad en las cargas aplicadas, la estrategia de avance temporal se puede simplificar en mayor o menor medida.

(a) Aplicación de la carga cíclica a un modelo con fenómenos no lineales

Cuando el modelo tiene un comportamiento no lineal es necesario, durante la primera etapa de aplicación de una carga cíclica, realizar un seguimiento temporal de todo el ciclo de carga hasta que se compruebe que en todo el material las características de las tensiones cíclicas permanecen invariables.

Tal como se muestra en la figura 4-45, se aplica en una primera fase la carga siguiendo su evolución cíclica hasta observar que las características que definen la tensión (σ_{max} , σ_{min} y Q) tienden a un valor constante, es decir, no varían de un ciclo al siguiente. Esto ocurre cuando se satisfacen las siguientes normas

$$\eta = \sum_{GP} \left| \frac{(\sigma_{max})_{GP}^{i+1} - (\sigma_{max})_{GP}^i}{(\sigma_{max})_{GP}^{i+1}} \right| \rightarrow 0 \quad (4-104)$$

$$\zeta = \sum_{GP} \left| \frac{(\sigma_{min})_{GP}^{i+1} - (\sigma_{min})_{GP}^i}{(\sigma_{min})_{GP}^{i+1}} \right| \rightarrow 0 \quad (4-105)$$

donde $(\sigma_{max})_{GP}^i$ es la tensión máxima, $(\sigma_{min})_{GP}^i$ es la tensión mínima y Q_{GP}^i es el índice de reversión computados para cada punto de interpolación de Gauss (GP) en cada incremento i -ésimo de la evolución temporal del ciclo. Cuando se cumplen las normas (4-104) y (4-

105) se puede proceder a la linealización de la historia de aplicación de cargas durante un número determinado de ciclos al que llamaremos *incremento de carga por número de ciclos*. Esta etapa permite un rápido avance en la degradación de las propiedades por fatiga. Después de cada aplicación de un incremento de número de ciclos se debe seguir de nuevo la evolución cíclica de la carga al menos durante un ciclo completo para valorar si las características de la tensión han variado en algún punto. Si existen variaciones en las características de la tensión cíclica se continuará con el seguimiento de la evolución temporal de la carga hasta que se satisfagan de nuevo las condiciones (4-104) y (4-105). Una vez éstas se vuelvan a cumplir se puede pasar a aplicar el siguiente incremento de número de ciclos. Todo este proceso se muestra esquemáticamente en la figura 4-46.

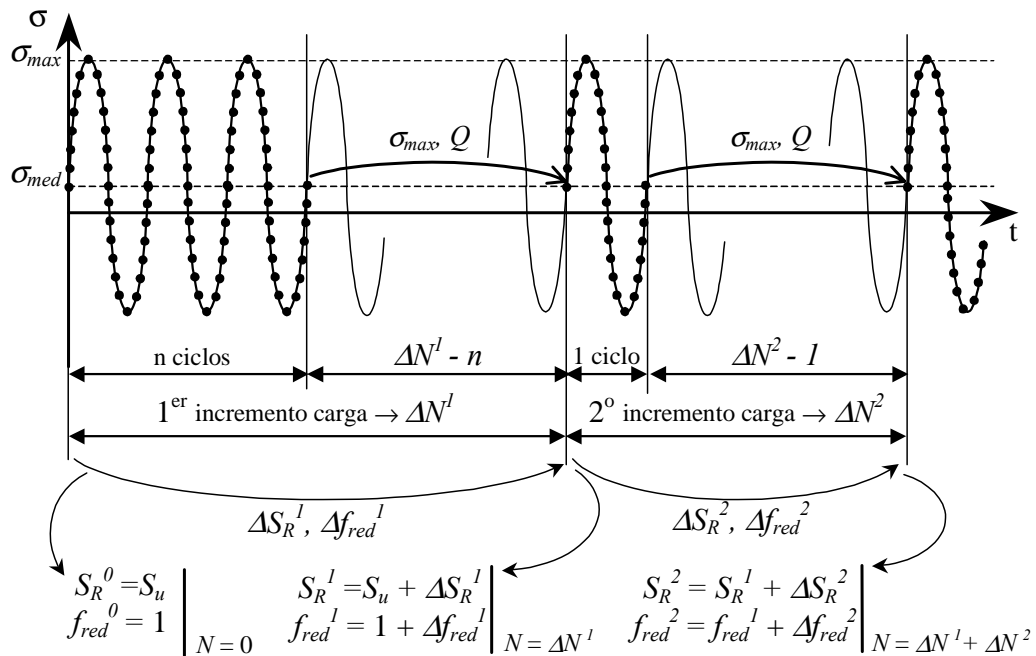


Figura 4-45. Representación esquemática de la aplicación de dos incrementos de carga mediante la combinación del seguimiento temporal de la carga y del incremento en el número de ciclos de características constantes.

La estrategia de avance temporal presentada se adapta automáticamente a la variación de las características de las tensiones (ver figura 4-47). Estas características pueden variar por distintos factores: (i) cambios en las características de la carga externa aplicada, (ii) plasticidad o daño en partes de la pieza que produzcan redistribución de tensiones y (iii) otras no linealidades que aparezcan en el dominio.

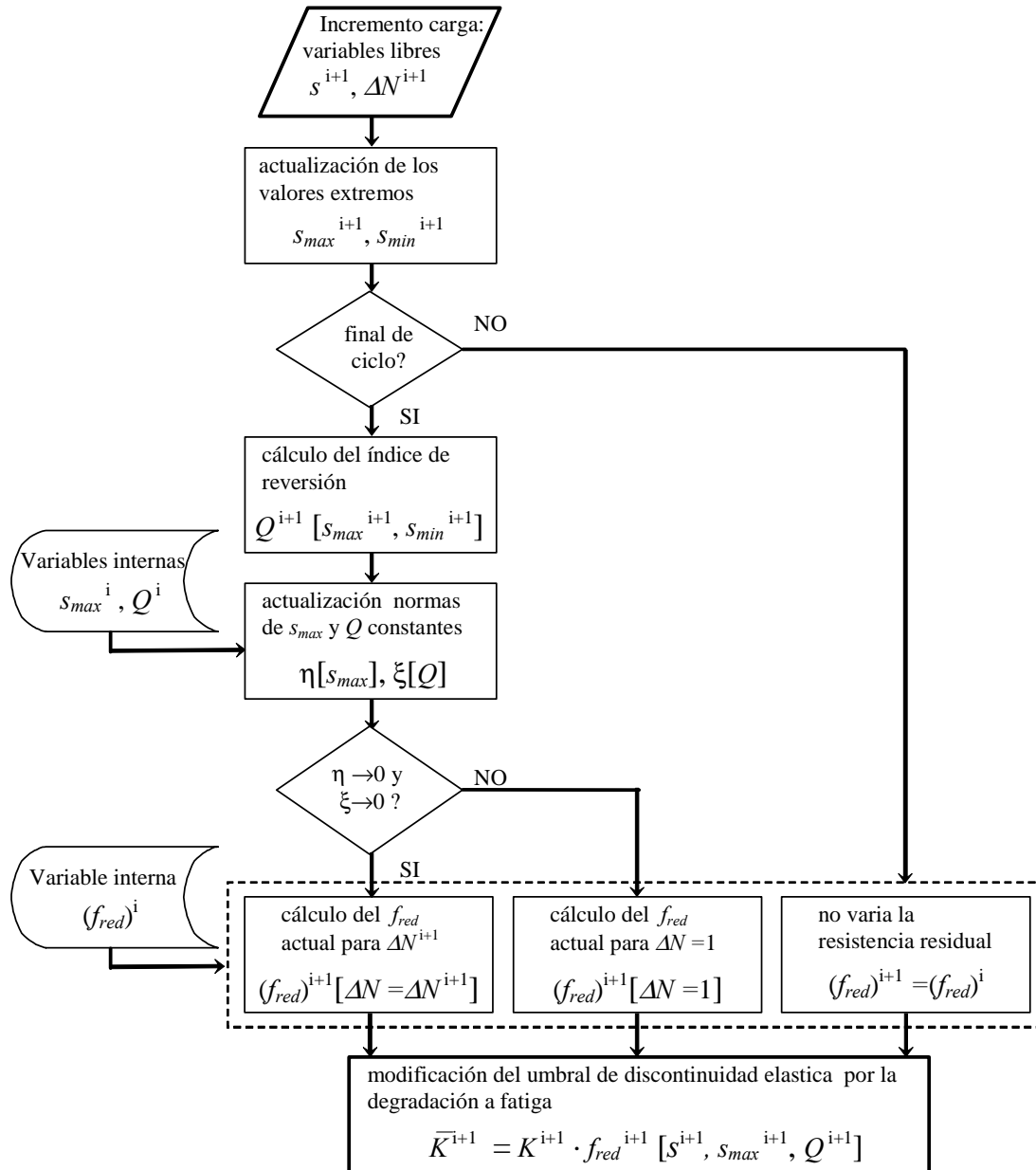


Figura 4-46. Diagrama de flujo representativo de la implementación dentro de un modelo constitutivo no lineal del tratamiento de la fatiga en cada punto de integración de Gauss.

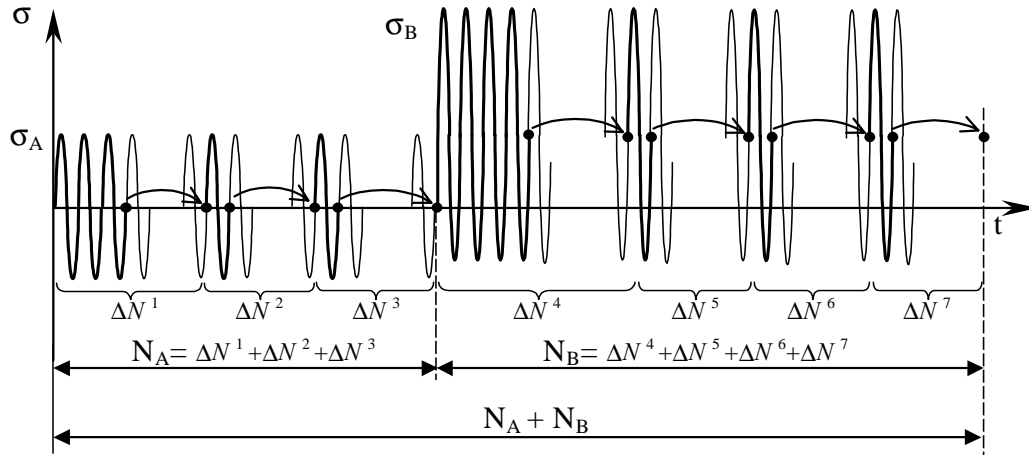


Figura 4-47. Representación esquemática de la aplicación de tensiones cambiantes. Entre σ_A y σ_B hay un cambio de características de la tensión (cambio de carga externa, daño, plasticidad, pandeo, etc)

Como en todo proceso de discretización temporal, los incrementos de número de ciclos se deberán reducir en tamaño si las características de las tensiones son muy cambiantes o bien si se requiere más precisión en los resultados o existen problemas de convergencia en el modelo. En este punto se podría implementar un sistema automático de obtención del incremento de número de ciclos óptimo.

(b) Aplicación de la carga cíclica en un modelo simplificado con comportamiento lineal

Cuando el modelo es lineal también es necesario aplicar los distintos ciclos de carga en dos etapas ya que antes de la linealización es necesario obtener las características de la tensión cíclica en todo el dominio analizado.

Tomando la hipótesis de que el comportamiento del modelo es lineal, se puede calcular la evolución de las tensiones en cada punto a lo largo de un ciclo de carga externa a partir del análisis de un único estado de carga *unitario* para cada carga externa cíclica, no siendo necesario, como en los modelos no lineales, resolver la evolución temporal de todo el ciclo de carga. Por lo tanto, en el transcurso de la aplicación de los distintos ciclos de carga en una primera etapa se relaciona para cada carga cíclica externa un solo estado de carga *unitario* con el nivel de tensiones en cada punto, por ejemplo mediante el método de los elementos finitos. Con todos los casos de carga unitarios resueltos asociados a cada carga externa es posible obtener por superposición el nivel de carga en cada instante para cada punto material, teniendo en cuenta las distintas frecuencias de aplicación de las cargas y su desfase.

Cada carga cíclica aplicada sobre el componente de compuesto se define mediante la suma de dos valores, una componente media de la carga estacionaria a lo largo del tiempo (F_m) y una componente alterna de la carga que varía en función del tiempo ($F_a(t)$).

$$F(t) = F_m + F_a(t) \quad (4-106)$$

La evolución temporal de la componente alterna de la carga se puede definir mediante una ecuación sinusoidal regulada a través de una serie de parámetros.

$$F_a(t) = F_a \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi) \quad (4-107)$$

donde F_a es la amplitud de la carga alterna, ω la frecuencia y Φ el desfase inicial.

Durante la vida en servicio de un componente estas cargas pueden ir variando sus parámetros. En consecuencia, y sobretodo para vidas largas, es importante realizar una correcta gestión de la variación temporal de estos cambios en las cargas aplicadas. En la práctica se simula el proceso de fatiga real agrupando las cargas en bloques de número de ciclos donde se considera que los parámetros que la definen se mantienen constantes. Estos bloques de incremento de carga deben estar correctamente ordenados en el tiempo, ya que según que método de acumulación de la carga se use, la simulación es sensible a esta secuenciación. Por lo tanto, la historia de carga se define mediante una tabla donde para cada incremento de carga está asociado a un bloque de número de ciclos para el que especifican los valores de los parámetros que aparecen en las ecuaciones (4-106) y (4-107) para cada una de las cargas externas aplicadas.

Considerando que el componente de composite presenta un comportamiento lineal, se puede calcular la evolución de las tensiones en cada punto a lo largo de un ciclo de carga externa a partir de un estado de carga unitario para cada carga externa cíclica. Con todos los casos de carga unitarios resueltos asociados a cada carga externa es posible obtener por superposición el nivel de carga en cada instante para cada punto material, teniendo en cuenta las distintas frecuencias de aplicación de las cargas y su desfase.

Dadas n cargas externas cíclicas con evolución sinusoidal desfasadas entre ellas. Cada carga cíclica puede expresarse como indica la ecuación (4-106). Si para cada carga aplicada se obtiene la tensión equivalente a su carga con valor unitario ($F_j = 1$) se obtiene el valor de tensión equivalente a la carga unitaria (σ_j^n) para cada punto material. De este modo, la tensión real en cada instante i -ésimo para cada punto material se puede calcular por superposición de las tensiones calculadas para las cargas unitarias según

$$\sigma^i = \sum_{j=1}^n \sigma_j^n \cdot [F_{m_j} + F_{a_j} \cdot \sin(\omega_j \cdot t^i + \Phi_j)] \quad (4-108)$$

donde, F_{mj} es el valor de la carga media j -ésima, F_{aj} el valor de la carga alterna j -ésima, ω la frecuencia y Φ_j el desfase de cada carga.

A partir de los valores σ^i es posible calcular las características de la tensión cíclica de cada punto, su tensión máxima, su tensión mínima y su índice de reversión. Por lo tanto en modelos lineales es mucho menos costoso obtener las características de las tensiones cíclicas. Una vez obtenidas se puede afrontar la etapa de linealización del problema en incrementos de cargas a través del número de ciclos según el modelo mostrado en los apartados anteriores

4.8. Conclusiones

Se ha formulado la degradación de la resistencia bajo cargas cíclicas implementándola en un modelo constitutivo que permite: *i*) el tratamiento de la fatiga simultáneamente a cualquier fenómeno no lineal (daño, plasticidad, etc.), *ii*) la acumulación de la degradación a fatiga sensible a cambios en la tensión cíclica ya sea su valor medio, su amplitud o su índice de reversión, *iii*) el modelo es coherente con la pérdida de resistencia a compresión y/o tracción y *iv*) el rápido avance en la historia de cargas con adaptación automática a los cambios de las características en la tensión cíclica. También se ha presentado las simplificaciones que permite la metodología para construir una herramienta de seguimiento de la degradación a fatiga apta para la fase de diseño de nuevos componentes con modelos lineales sencillos.

4.9. Referencias

- Armero, F. y S. Oller. (2000). A General Framework for Continuum Damage Models. Part I: Infinitesimal Plastic Damage Models in Stress Space. *International Journal of Solids and Structures* **37**, 7409-7436.
- Curtis, P.T. (1991). Tensile fatigue mechanisms in unidirectional polymer matrix composite materials. *International Journal of Fatigue* **13**, no. 5: 377-382.
- Goodman, John. (1899). *Mechanics Applied to Engineering*. Longmans, Green and Co.
- Harris, B. (2001). The fatigue behaviour of fibre-reinforced plastics and life prediction. En *Materiales Compuestos 01*, editado por A. Fernandez Canteli, F.J. Belzunce y F. París. Gijón: AEMAC.
- Luccioni, B. y S. Oller. (2003). A directional damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **192**, no. 9-10: 1119-1145.
- Marquardt, D. (1963). An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *SIAM J. Appl. Math* **11**, 431-441.
- Mayugo, J.A., Costa, J., Blanco, N. y Oller, S. (2001). A constitutive model for the fatigue life prediction of composite materials based on continuum damage mechanics. En . Brugge (Belgie): European Society of Composite Materials (ESCM).

- Mayugo, J.A., Trias, D., Blanco, N., Oller, S. y Costa, J. (2002). Predicción de la vida a fatiga mediante un modelo de degradación integrado en la mecánica de medios continuos. En *Métodos Numéricos en Ingeniería V*. Madrid: Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería (SEMNI).
- Mayugo, J.A., Trias, D., Oller, S. y Costa, J. (2001). Predicción de la vida a fatiga en un material compuesto mediante un modelo de degradación de sus componentes. Parte I: Modelo Constitutivo Determinista. En *MATCOMP 01*, editado por A. Fernandez-Canteli, F.J. Belzunce y F. París. Gijón: AEMAC.
- Miner, M.A. (1945). Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics* **67**, A159-A164.
- Montgomery, Douglas C. (1997). *Design and analysis of experiments*. 4th ed. New York: Wiley.
- Oller, S., O. Salomon y E. Oñate. (2001). Thermo-mechanical fatigue analysis using generalized continuum damage mechanics and finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **(Aceptado para ser publicado)**, .
- Palmgren, A. (1924). Die Lebensdauer von Kugellagern. *Verfahrenstechnik* **68**, 339-341.
- Suero, A. y Oller, S. (1998). *Tratamiento del fenómeno de fatiga mediante la mecánica de medios continuos*. Barcelona: CIMNE, .
- Turon, A., Mayugo, J.A., Trias, D., Blanco, N., Costa, J. y Oller, S. (2002). Herramienta de simulación en elementos finitos de la predicción de vida a fatiga. Parte I: Cálculo determinista. En *Actas del XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*. Cádiz: .
- Voyiadjis, George Z. y Babur Deliktas. (2000). A coupled anisotropic damage model for the inelastic response of composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **183**, no. 3-4: 159-199.