UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA III

TESIS DOCTORAL

CONTRIBUCIÓN A LA MODELACIÓN Y AL CONTROL DESCENTRALIZADO DE SISTEMAS DE GRAN ESCALA MEDIANTE DESCOMPOSICIÓN CON SOLAPAMIENTO

Presentada por:
Josep Maria Rossell Garriga

Junio 1998

CONTRIBUCIÓN A LA MODELACIÓN Y AL CONTROL DESCENTRALIZADO DE SISTEMAS DE GRAN ESCALA MEDIANTE DESCOMPOSICIÓN CON SOLAPAMIENTO

Memoria de Tesis Doctoral presentada por Josep Maria Rossell Garriga, para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Directores: Dr. José Rodellar Benedé
Dr. Lubomír Bakule

Realizada dentro del Programa de Doctorado de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC).

A mis padres, Teresa y Josep Maria

Agradecimientos

Debo agradecer en primer lugar a los directores de tesis Dr. José Rodellar Benedé y Dr. Lubomír Bakule el esfuerzo de orientación y seguimiento que han realizado para que esta Tesis Doctoral llegase a buen término. Sin su ayuda y colaboración este trabajo no habría sido posible.

Al mismo tiempo, quiero dar las gracias al Dr. Pere Rubió por el apoyo que siempre me ha brindado tanto a nivel profesional como personal y a quien debo buena parte de las ideas desarrolladas a lo largo de la tesis.

A la amiga y compañera de trabajo Dra. Rosa Argelaguet, por haberme mostrado la parte más práctica y aplicable de los temas tratados, lo cual me ha permitido conectar dos aspectos a veces distantes, el teórico y el práctico.

A Sebastià Vila, por su paciencia a la hora de resolver los problemas que el LaTeX me ha creado.

A la Dra. Teresa Escobet, por haberme ayudado en el uso y manejo del programa MATLAB con el cual se han realizado los cálculos que se ofrecen en el quinto capítulo.

A todos los integrantes del Departamento de Matemática Aplicada III de la Escuela Universitaria Politécnica de Manresa, por prestarme siempre su colaboración.

De una forma muy especial, quiero recordar las clases de matemáticas recibidas en la

adolescencia de mi hermano Francisco. Aunque lejanas en el tiempo, a buen seguro, sus excelentes explicaciones influyeron decisivamente a la hora de escoger la carrera que ha supuesto mi vida profesional.

Y como no, a toda mi familia. En particular a mi esposa Bárbara tengo que agradecerle su constante apoyo y comprensión durante estos años de trabajo.

Por último, quiero dedicar esta Tesis Doctoral a mis padres Teresa y Josep Maria.

Índice general

1. Introducción **13**

1.1. Antecedentes Generales 13

1.2. Antecedentes sobre Descomposición de Sistemas con Solapamiento . . . 17

1.3. Motivación y Objetivos de la Tesis 22

1.4. Contenido de la Tesis 27

2. El Principio de Inclusión **29**

2.1. Introducción 29

2.2. El Principio de Inclusión Generalizado 31

2.3. Restricciones y Agregaciones 33

2.4. Expansión-Contracción de Funciones de Coste 36

2.5. Leyes de Control Contraíbles 38

2.6. Solapamiento en el Contexto de las Expansiones 40

2.7. Diseño de Leyes de Control Descentralizadas 41

2.8. Suboptimalidad 48

2.8.1. Caso Particular 51

2.9. Control Centralizado 53

3. Caracterización Matricial del Proceso de Expansión-Contracción 55

3.1. Introducción 55

3.2. Expansiones y Contracciones 56

3.3. Control Óptimo 69

3.4. Contractibilidad 79

4. Restricciones y Agregaciones. Casos Particulares 85

4.1. Introducción 85

4.2. Controlabilidad y Observabilidad 86

4.3. Restricciones y Agregaciones 90

4.4. Otros Casos Particulares 95

4.4.1. Caso 1 96

4.4.2. Caso 2 100

4.4.3. Caso 3 104

4.4.4. Caso 4 108

4.4.5. Caso 5 112

4.5. Leyes de Control Contraíbles 112

4.5.1. Caso 1 113

4.5.2. Caso 2 113

4.5.3. Caso 3 114

4.6. Control Descentralizado 114

5. Ejemplo Ilustrativo **117**

5.1. Introducción 117

5.2. Ejemplo 118

5.3. Estudio del sistema **S** 119

5.4. Estudio del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ expandido mediante el procedimiento habitual . . . 121

5.5. Sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ expandido por el procedimiento desarrollado en la tesis 127

5.6. Respuestas Temporales 131

6. Resumen y Conclusiones **139**

6.1. Introducción 139

6.2. Conclusiones 139

6.3. Algunos Temas Pendientes 141

6.4. Futuras Líneas de Investigación 142

Bibliografía **145**

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes Generales

A medida que los sistemas, en distintos dominios de la ingeniería y de las ciencias, han ido adquiriendo mayor complejidad, el estudio de los denominados *Sistemas de Gran Escala* (*Large Scale Systems*) ha ido intensificándose, Michel y Miller, cf. [49], 1977, Šiljak, cf. [58], 1978. Con un objetivo global de estructurar y hacer más transparente su estudio, diseño y control, han ido emergiendo las nociones de subsistemas, interconexiones, descomposición, descentralización o solapamiento, por citar sólo algunas.

El concepto de complejidad es usado de una manera muy amplia y a veces con subjetivas connotaciones. En modelización y control de sistemas dicha complejidad viene determinada fundamentalmente por tres características, a saber, una *alta dimensionalidad*, debido a que los sistemas están formados por múltiples subsistemas con un buen número de entradas y salidas, una *información restringida* sobre su comportamiento y control y la existencia de *incertidumbres*, que es lo mismo que afirmar que el sistema no puede ser descrito mediante un modelo matemático perfecto o bien que existen en las señales de control del sistema ciertas perturbaciones desconocidas. Por estas razones, el análisis y el control de un sistema de gran escala no se puede abordar de la misma forma que un sistema de reducidas dimensiones, Šiljak, cf. [58], en el año 1978; Sandell, Varaiya, Athans y Safonov, cf. [55], también en 1978; Bernussou y Titli, cf. [10], en 1982; Jamshidi, en el año 1983,

cf. [35].

Estos factores han motivado el desarrollo y la aplicación de metodologías generales que podemos clasificar básicamente en tres grandes grupos. Un primer grupo abarca las técnicas conocidas como de *descomposición*. Puesto que la cantidad de cálculos computacionales requeridos para resolver un problema de análisis y diseño de un sistema crece enormemente a medida que su dimensión aumenta, puede resultar interesante descomponerlo en subproblemas. Cada uno de ellos se resuelve por separado y se combinan las soluciones obtenidas para el sistema inicial en su totalidad. Sin embargo, cada uno de estos subproblemas no es independiente de los restantes, existiendo una cierta interrelación entre sus soluciones. Debemos destacar a Bailey, 1966, cf. [5], como uno de los pioneros en el estudio de sistemas interconectados dentro del marco general de los sistemas de gran escala, a Himmemblau, 1973, cf. [20] y a Singh y Titli, cf. [66], en el año 1978.

Un segundo grupo se centra en los conceptos de *aproximación y robustez*. Este tipo de tratamiento consiste en reducir, mediante algún procedimiento, la dimensión del modelo inicial. Las incertidumbres pueden medirse estimando las diferencias entre el modelo y el sistema real. La solución obtenida a partir de un modelo aproximado debe ser lo suficientemente robusta como para proporcionar una solución al problema original ante posibles perturbaciones, cf. [41], Lunze, 1992.

El tercer grupo hace referencia a las técnicas denominadas de *descentralización*, Himmelblau, en 1973, cf. [20]; Singh y Titli, en el año 1978, cf. [66]; Bakule y Lunze, 1988, cf. [7]. Básicamente consisten en dividir el problema en subproblemas desacoplados, es decir, sin tener en cuenta sus interconexiones. La diferencia entre los métodos de descomposición y de descentralización estriba en que en el primer caso existe una coordinación entre las soluciones de cada subproblema, mientras que en el segundo caso se pretende resolver cada subproblema de forma independiente, incluso sin tener ningún conocimiento sobre el comportamiento de los otros subsistemas ni tan siquiera un mínimo intercambio de información.

La descentralización, a su vez, está en conexión con tres grandes aspectos, esto es, con las *leyes de control*, con el *método de diseño* y con la *implementación*. El primero de los aspectos se refiere al control descentralizado de controladores, que consiste en varias estaciones de control independientes sin ningún intercambio de información entre ellas. El segundo aspecto está relacionado con el diseño descentralizado, que consiste esencialmente en separar el problema del diseño global en el diseño de varios subproblemas de control. Éstos se supone que están *débilmente acoplados* y se resuelven independientemente con-

siderando que el diseñador de cada controlador local conoce únicamente el modelo del subsistema correspondiente y, posiblemente, alguna interconexión. Sin embargo, no tiene conocimiento de los modelos de los otros subsistemas. Por ejemplo, podemos considerar sistemas que están distribuidos geográficamente con largas distancias entre los subsistemas y los controladores locales. Otra motivación para este tipo de diseño viene del desarrollo reciente de la microelectrónica lo que permite formular algoritmos de control distribuido, donde el esfuerzo de cálculo es repartido en procesadores locales manteniendo una coordinación a través de canales de comunicación. Esta reducción de cálculos se conoce como *computación distribuida*, Gajić, 1993, cf. [15].

El tercer aspecto de la descentralización concierne a la implementación de las leyes de control. Aquí, descentralización equivale a decir que las diferentes partes del controlador son implementadas por distintos componentes de hardware o de software. Estos tres aspectos de la descentralización se pueden combinar de todas las formas posibles. Así por ejemplo, se pueden diseñar leyes de control descentralizadas pero realizar el control del sistema mediante un único procesador.

En una primera época, el diseño de controladores descentralizados se hacía considerando el sistema como un todo, sin ninguna estructura, aunque actuando localmente sobre él. Posteriormente, se desarrollaron métodos de descomposición, de manera que éstos se consideraban estructurados en subsistemas con interconexiones. Dentro de este contexto se han propuesto un buen número de estrategias de control descentralizado que tienen en común el siguiente hecho: se considera que todos los controladores locales están formulados por un mismo diseñador que conoce el modelo global del sistema, lo que equivale a decir que conoce cada subsistema y el tipo de interconexiones entre ellos. Mientras que las propiedades de los sistemas de control descentralizado se han investigado con bastante profusión en el marco de un diseño centralizado, los problemas asociados a la descentralización del proceso mismo de diseño lo han sido en menor medida. Ésto supone una de las líneas más prometedoras del área de la teoría de control y sus aplicaciones.

Una de las motivaciones para el desarrollo de los sistemas de gran escala a partir de los años setenta ha sido el interés por su aplicación práctica en distintas áreas. Destaquemos entre otros, artículos iniciales sobre sistemas de regulación de tráfico, Isaksen y Payne, cf. [34], en 1973 y sobre la resolución de problemas de flujo de cargas eléctricas, Medanić y Avramović, cf. [48], en 1975. Otros trabajos versan sobre temas socioeconómicos, como por ejemplo los publicados por Aoki, cf. [4], en el año 1976. En 1978 aparecen una serie de artículos relacionados con la energía eléctrica, tales como un estudio sobre sistemas interconectados de centrales eléctricas, Ćalović, Djorović y Šiljak, cf. [12], so-

bre control óptimo descentralizado de grandes centrales eléctricas, por Davison y Tripathi, cf. [14] y relacionados con la generación y el control de energía eléctrica, por Bakule, cf. [6]. Ya en 1979, encontramos un estudio sobre sistemas de control múltiple publicado por Šiljak, cf. [59]–[60] y otro concerniente a aplicaciones de sistemas de gran escala en general, que es el contenido del libro de Singh y Titli, cf. [67]. Relativos al tratamiento, control y calidad de aguas puede citarse el trabajo de Jamshidi, cf. [35] en 1983. En 1984, West-Vukovich, Davison y Huges escriben sobre control descentralizado de grandes estructuras flexibles, cf. [70]. En esta misma línea de las estructuras flexibles aparecen artículos publicados por Özgüner, Khorami y Iftar en 1988, cf. [50]. En el mismo año 1988, Bakule y Lunze tratan el problema de la regulación de vehículos, cf. [7]. En 1989, aparece un libro de Joshi que versa también sobre el control de grandes estructuras flexibles, cf. [36]. Un estudio de aplicación de técnicas de descomposición a circuitos VLSI lo realizan Sezer y Šiljak en el año 1991, cf. [57]. Bakule y Rodellar publican un estudio sobre control descentralizado y descomposición con solapamiento de sistemas mecánicos, cf. [8]-[9], en el año 1995. En relación al control del tráfico de vehículos, en el año 1997, aparece un artículo de Stanković, Stanojević y Šiljak, cf. [69]. Recientemente, trabajos de Magaña y Rodellar sobre control descentralizado de puentes para reducir las vibraciones inducidas por acciones dinámicas tales como terremotos, cf. [42]–[43].

Esta Tesis Doctoral se enmarca esencialmente en el grupo de métodos de descomposición y de descentralización de sistemas de gran escala. La forma más utilizada de descomposición consiste en considerar el sistema global formado por subsistemas débilmente acoplados. Modelos débilmente acoplados son los que resultan al descomponer el sistema en subsistemas que presentan interconexiones con una influencia sobre la dinámica del sistema menor que la que tiene la dinámica propia de cada subsistema. Sin embargo, en muchos casos, las interconexiones tienen una influencia sobre el comportamiento global del sistema que no puede despreciarse frente a la dinámica propia de cada subsistema. En tal caso se habla de sistemas *fuertemente acoplados*. Una de las formas propuestas para la descomposición de sistemas fuertemente acoplados es la conocida en la bibliografía como *overlapping* y que hemos traducido por *solapamiento*. El concepto de solapamiento en la modelización de sistemas de gran escala fue propuesto por Ikeda y Šiljak en 1980, cf. [26], como comentaremos más adelante. Consiste en modelar el sistema formado por subsistemas que se encuentran solapados, es decir, que comparten algunas de sus componentes. A través de transformaciones apropiadas, un sistema fuertemente acoplado con solapamiento puede representarse mediante un sistema equivalente pero ahora acoplado débilmente. Sobre éste, pueden utilizarse las técnicas para el análisis y el control de sistemas débilmente acoplados que son conocidas y están perfectamente desarrolladas.

Los métodos de descomposición con solapamiento han tenido y tienen una vertiente de

aplicación práctica. En este sentido, podemos citar artículos que han ido apareciendo a lo largo de estos años, como por ejemplo, relativos a modelos reales de sistemas mecánicos, cf. [61], sobre control de sistemas eléctricos y estabilidad transitoria, cf. [74], relacionados con el tratamiento de aguas, cf. [35], problemas sobre la estabilidad y complejidad de modelos de ecosistemas, cf. [47] o que tratan del control y regulación de vehículos, cf. [7], [34], [40] ó [69], por recordar solamente algunos. Otro interés radica en aplicar técnicas de solapamiento en problemas computacionales cuando se consideran sistemas de gran escala, es decir, tratar de reducir el número de cálculos, el tiempo y la memoria requerida al efectuar operaciones numéricas sobre sistemas de estas características. Con esta intención, se conocen resultados, por ejemplo, en la resolución de sistemas lineales y no lineales de ecuaciones algebraicas, Šiljak y Zečević, cf. [63] y cf. [64].

1.2. Antecedentes sobre Descomposición de Sistemas con Solapamiento

Dejamos a un lado este breve repaso histórico sobre publicaciones relativas a los sistemas de gran escala en general, para seguir el hilo conductor de los trabajos que han estado más íntimamente relacionados con el tema de esta tesis. Nuestro estudio parte del concepto de *descomposición con solapamiento* que fue introducido por Ikeda y Šiljak en 1980, en un artículo titulado *Overlapping Decompositions, Expansions and Contractions of Dynamic Systems*, cf. [26]. En dicho trabajo se da la estructura matemática sobre la cual la *inclusión*, *expansión* y *contracción* de un sistema puede utilizarse para generar apropiadas descomposiciones con solapamiento. Se define, pues, el llamado *Principio de Inclusión*. El interés de su aplicación reside en que muchos mecanismos poseen subsistemas compartidos. Esto nos ofrece la posibilidad, y en algunos casos la absoluta necesidad, de construir controladores descentralizados. El estudio sobre sistemas interconectados, que va a ser de gran utilidad de ahora en adelante, es tratado por diversos especialistas. Podemos citar, entre otros, artículos de Yasuda, Hikata y Hirai, como por ejemplo, *On Decentrally Optimizable Interconnected Systems*, cf. [72], del año 1980.

En 1981, Ikeda, Šiljak y White, en *Decentralized Control with Overlapping Informations Sets*, cf. [30], exponen los pasos a seguir para realizar un control descentralizado de un sistema lineal con subsistemas solapados. En este caso, solamente se tiene en cuenta la expansión del espacio de estado. Se trata también el tema del control óptimo y de la suboptimalidad de las leyes de control obtenidas en el espacio expandido al ser contraídas e implementadas en el sistema inicial.

A los pocos meses, y dentro del año 1981, nuevamente Ikeda y Šiljak publican *Generalized Decompositions of Dynamic Systems and Vector Lyapunov Functions*, cf. [27], en donde se define el Principio de Inclusión para sistemas no lineales. Se trata el problema de la estabilidad de los sistemas expandidos y se demuestra como dicha estabilidad implica la del sistema original. Por otra parte, y mediante algún ejemplo, se observa como la descomposición con solapamiento puede lograr la estabilidad de un sistema cuando las técnicas de descomposición disjunta no son efectivas. Es, por lo tanto, un avance en el campo de la estabilidad, cuando los métodos aplicados hasta entonces no resultaban efectivos.

Casi paralelamente a la aparición de estas nuevas técnicas que proporciona el Principio de Inclusión, otros científicos como Geromel y Bernussou, en *Optimal Decentralized Control of Dynamic Systems*, en el año 1982, cf. [19], tratan problemas relacionados con el control descentralizado, control óptimo y estabilidad. Estos estudios servirán, posteriormente, para ser aplicados en el nuevo marco que Ikeda y Šiljak habían propuesto. Estos mismos autores, en esta época, trabajan en temas afines. Así podemos encontrar en su artículo *When is a Linear Decentralized Control Optimal? Analysis and Optimization of Systems*, cf. [28], un estudio sobre control óptimo en sistemas lineales descentralizados, lo cual nos refleja la preocupación existente por el tema de la optimización ya por aquellos años.

A mediados de 1983, Ikeda, Šiljak y Yasuda, publican *Optimality of Decentralized Control for Large-Scale Systems*, cf. [33], en donde se propone un control óptimo descentralizado para la estabilización de sistemas de gran escala interconectados. Además, se estudia como la optimalidad del control descentralizado se preserva bajo perturbaciones en las interconexiones de los subsistemas.

De la misma manera como la definición del Principio de Inclusión se extendió de los sistemas lineales a los no lineales, en 1984 se introduce el mismo principio para los sistemas lineales variables con el tiempo. Así pues, el tema del artículo *Overlapping Decentralized Control of Linear Time-Varying Systems* escrito por Ikeda, Šiljak y White, cf. [32], versa sobre la aplicación de los esquemas de expansión-contracción en el diseño de controladores descentralizados para sistemas solapados y variables con el tiempo. Aquí se utiliza el concepto de suboptimalidad para evaluar el resultado del diseño. Podemos decir que en este trabajo se siguen los mismos pasos que en *Decentralized Control with Overlapping Informations Sets*, cf. [30], comentado anteriormente, para este otro tipo de sistemas lineales. De esta forma, el Principio de Inclusión se va extendiendo a otros tipos de sistemas.

Todavía en 1984, aparece un nuevo artículo de los mismos autores, Ikeda, Šiljak y White, titulado *An Inclusion Principle for Dynamic Systems*, cf. [31], en donde se profundiza

mucho más en las consecuencias que se derivan del Principio de Inclusión y se realiza un estudio detallado de su aspecto matemático y, aunque sólo se tratan sistemas lineales y constantes, los resultados pueden aplicarse también a los sistemas no lineales, variables con el tiempo y estocásticos. Se da, además, un enfoque geométrico y algebraico del Principio de Inclusión. Al mismo tiempo, se caracterizan las denominadas *restricciones* y *agregaciones* como casos particulares de expansiones. Recordemos que el concepto de agregación era conocido anteriormente y fue introducido por Aoki y publicado en el libro *Optimization Methods for Large-Scale Systems with Applications*, cf. [3], en 1971.

Otros científicos como Martynyuk, habida cuenta de la importancia y efectividad del Principio de Inclusión, realizan estudios para ver de que manera puede aplicarse a los sistemas dinámicos más habituales. De esta forma aparece *The Inclusion Principle for Standard Systems*, cf. [45], en 1984.

Entrado el año 1985, tal y como comentaremos en el apartado **Motivación y Objetivos de la Tesis**, aparece un artículo de Malinowski y Singh bajo el título *Controllability and Observability of Expanded Systems with Overlapping Decompositions*, cf. [44], donde después de estudiar con detenimiento la *controlabilidad* y la *observabilidad* de los sistemas expandidos en algunos casos particulares, detectaban una gran diferencia de resultados y verificación de propiedades si se utilizan unas u otras matrices denominadas *complementarias* y notadas por M, N y L. Al final, dejaban una importante cuestión por responder: ¿cómo se podrían escoger estas matrices complementarias de manera que se obtuvieran mayores "ventajas" a la hora de expandir-contraer un sistema? Evidentemente, en este artículo se continuaba trabajando con las matrices complementarias habituales hasta aquel entonces, pero ya se apuntaba la necesidad de encontrar otras expansiones distintas de las usualmente utilizadas, es decir, las restricciones y las agregaciones.

Estamos en 1986. Aparece una nueva versión del Principio de Inclusión, esta vez para los sistemas lineales discretos. Teniendo a Šiljak como personaje central y compartiendo el trabajo con Hodžic, se publica *Decentralized Estimation and Control with Overlapping Information Sets*, cf. [21], artículo en el cual se trata el tema de la expansión-contracción para este tipo de sistemas.

Un avance en la teoría del control descentralizado con solapamiento se da al ampliar el Principio de Inclusión no sólo a la expansión del espacio de estado sino también a los espacios de entrada y salida. Este trabajo realizado por Ikeda y Šiljak apareció bajo el título *Overlapping Decentralized Control with Input, State and Output Inclusion*, cf. [29], en 1986. El objetivo no era otro que el de proporcionar una mayor flexibilidad a la hora

de efectuar un control descentralizado y ésto se refleja en un ejemplo ilustrativo en donde se resuelve un problema de control óptimo relacionado con el movimiento de vehículos circulando en hilera a grandes velocidades. Dicho problema había sido tratado por Levine y Athans, en 1966, en su artículo *On the Optimal Error Regulation of a String of Moving Vehicles*, cf. [40]. A pesar de dar una mayor generalidad al proceso de expansión-contracción, nuevamente los autores se limitan a usar el concepto de restricción en sus aplicaciones y en las conclusiones que cierran el artículo apuntan la necesidad -de forma parecida a como lo hiciera Malinowski y Singh- de buscar otras expansiones distintas de las utilizadas hasta el momento. Observamos pues que, teóricamente, el Principio de Inclusión era muy general, pero en la práctica las matrices usadas habitualmente se limitaban a expansiones del tipo restricción o agregación.

Otros autores que ya habían tratado este tema, como Martynyuk en 1984, publican en 1986 nuevos resultados. Por ejemplo, en *Expansion of the State Space of Dynamic Systems and Stability Problems*, cf. [46], encontramos un estudio sobre la estabilidad de los sistemas expandidos considerando únicamente expansión del espacio de estado. Seguramente coincidieron en el tiempo con los trabajos de Ikeda y Šiljak, cf. [29], ya comentados anteriormente, con lo cual Martynyuk no tuvo en cuenta la expansión del espacio de entrada ni de salida en sus investigaciones.

Una buena cantidad de artículos aparecen durante esta década. Como era de esperar, la eficacia de los métodos introducidos son utilizados en diversas disciplinas para tratar de resolver una serie de problemas que por aquel entonces tenían difícil solución. Yousuff conjuntamente con Ikeda publican *Overlapping Decomposition and Expansion of Mechanical Systems*, en 1988, cf. [73], en donde se pone de manifiesto la utilidad de las técnicas desarrolladas cuando son aplicadas a cierto tipo de sistemas mecánicos.

Una versión particular del Principio de Inclusión definida solamente para expansiones del espacio de estado y de entrada aparece en 1990. Este nuevo concepto se bautiza con el nombre de *extensión*. La ventaja radica en que, bajo este principio, cualquier ley de control diseñada en el *espacio extendido* puede ser siempre contraída al sistema inicial. Se estudia también la repercusión que sufre la función de coste en el sistema ampliado y su relación con la función de coste asociada al sistema original. Todo ello se encuentra en un artículo publicado por Iftar y Özgüner, *Contractible Controller Design and Optimal Control with State and Input Inclusion*, cf. [25], en 1990.

Siguiendo la línea iniciada por Iftar y Özgüner, el primero publica, en 1993, un trabajo titulado *Overlapping Decentralized Dynamic Optimal Control*, cf. [23]. En él se encuen-

tran definidas las extensiones ya no únicamente para los espacios de estado y entrada, sino también para el de salida. Se repasan los conceptos sobre la contractibilidad, control óptimo para sistemas descentralizados con y sin solapamiento y funciones de coste, todo ello dentro del marco de las extensiones. Como es habitual, se ofrecen ejemplos ilustrativos en donde se aprecian las ventajas conseguidas al trabajar con extensiones en lugar de expansiones.

Otro artículo importante aparece en esta época. Se trata de *Decentralized Estimation and Control with Overlapping Input, State and Output Decomposition*, publicado por Iftar en 1993, cf. [22]. En él podemos encontrar el mismo principio pero ahora generalizado al espacio de estado, de entrada y salida.

Saltamos al año 1995, cuando Bakule y Rodellar en *Decentralized Control and Overlapping Decomposition of Mechanical Systems. Part 1: System Decomposition*, cf. [8], y en *Decentralized Control and Overlapping Decomposition of Mechanical Systems. Part 2: Decentralized Stabilization*, cf. [9], mejoran el concepto de extensión-disextensión para sistemas mecánicos descritos por matrices de segundo orden. En estos dos artículos se dan condiciones necesarias y suficientes para las extensiones y controladores contractibles basadas en el espacio de estado del sistema mecánico propuesto. En la parte 2, se trata el problema de la estabilidad de las leyes de control en el espacio extendido y se ofrecen ejemplos en los que se comparan distintos controles descentralizados y se analizan las ventajas e inconvenientes en cada situación.

A pesar de ser un tipo de sistema que no tratamos en esta Tesis Doctoral, cabe señalar que el Principio de Inclusión ha sido definido también para sistemas estocásticos. Así, en 1996 Stanković, Chen y Šiljak, después de un congreso mundial celebrado en San Francisco publican *Stochastic Inclusion Principle Applied to Decentralized Overlapping Suboptimal LQG Control*, cf. [68]. En este trabajo, se tiene en cuenta la expansión del espacio de estado, de entrada y de salida, pero queda restringido a las expansiones del tipo restricción o bien agregación. En el mismo año 1996, Šiljak presenta en *Decentralized Control and Computations: Status and Prospects*, cf. [62], una revisión del pasado y presente en el área de control descentralizado de sistemas de gran escala con interconexiones, poniendo especial atención a los problemas relacionados con la dimensionalidad e incerteza de los sistemas. Otro punto de interés tratado es el relacionado con la descomposición de un sistema de gran escala.

Recientemente, en 1997, encontramos artículos donde se siguen aplicando las técnicas que nos proporciona el marco matemático del Principio de Inclusión. Así por ejemplo,

en *Decentralized Suboptimal LQ Control of a Platoon of Vehicles*, cf. [69], Stanković, Stanojević y Šiljak usan tales métodos con el fin de lograr el control de un hipotético segmento de vehículos circulando en hilera.

Nuestra aportación al tema la podemos encontrar en *El Principio de Inclusión Generalizado: Nuevas Posibilidades de Expansión*, presentado en el "Meeting on Matrix Analysis and Applications", cf. [52], en 1997 en Sevilla, que fue la continuación de otra comunicación precedente, concretamente *Soluciones a la Primera Ecuación del Principio de Inclusión Generalizado*, correspondiente al "Meeting on Matrix Analysis and Applications", celebrado en Vitoria en el año 1994, cf. [53]. En ambos congresos se ofrecían algunos de los resultados contenidos en esta tesis. Por último, decir que hemos presentado un artículo bajo el título *Characterization of Expansion-Contraction Matrices in Overlapping Decompositions of Dynamic Systems* para su aprobación en el "1998 IEEE Conference on Decision and Control", que está previsto que se celebre en Tampa, Florida, en el mes de Diciembre, cf. [51].

1.3. Motivación y Objetivos de la Tesis

Motivación:

El Principio de Inclusión exige que se verifiquen unas ciertas condiciones matriciales que, aunque son muy generales, no dejan de ser restrictivas en la práctica. Ésto se traduce en que a la hora de realizar cualquier expansión y ante la necesidad de que se cumpla dicho principio, las matrices a elegir queden reducidas a unos pocos casos concretos. Por todo ello, si el control descentralizado realizado con estas matrices no cumple los requerimientos deseados, estas técnicas pueden dejar de ser efectivas.

Ikeda y Šiljak en *Generalized Decompositions of Dynamic Systems and Vector Lyapunov Functions*, en 1981, cf. [27], dicen textualmente: "*Our ability to use generalized decompositions depends crucially on the choice of the transformation matrix V and, subsequently, the generalized inverse U and the complementary matrix M*". En este caso solamente se hace referencia a la matriz complementaria M y no a las matrices N y L (de las que hablaremos más adelante) por cuanto las expansiones se efectúan con sistemas sin entradas ni salidas, es decir, del tipo $\mathbf{S}: \dot{x} = Ax$. Mediante un ejemplo, se demuestra como al considerar distintas matrices V y M se obtienen espacios expandidos también distintos, en donde

las interconexiones de los subsistemas son esencialmente diferentes. Todo ello lo resumen diciendo: *"How to use this fact as a recipe in more general cases, is an objective of the future research"*.

En este mismo sentido, en el trabajo de Malinowski y Singh *Controllability and Observability of Expanded Systems with Overlapping Decompositions*, cf. [44], del año 1985, se apuntaba la necesidad de investigar otras posibles matrices de expansión que no fueran las que habitualmente se utilizaban. Revisando publicaciones posteriores, y hasta donde llega nuestro conocimiento, constatamos que este problema continuaba abierto y que se seguían utilizando las matrices complementarias más usuales. Por ello, creímos que podía ser interesante estudiar lo que se escondía tras el Principio de Inclusión en cuanto a su estructura matricial se refiere. Después de repasar minuciosamente el entorno relacionado con dicho principio y a partir de unos cambios de base que se comentarán más adelante, se obtiene la estructura de las matrices que intervienen en el proceso de expansión-contracción y se pueden clasificar, de alguna forma, las posibles expansiones de un sistema. Con ello queda resuelta la cuestión que Malinowski y Singh plantearon.

Para dar una idea del mecanismo seguido a la hora de realizar un control descentralizado y centrar lo que serán los **Objetivos de la Tesis**, supongamos un sistema lineal **S** que representa el modelo objeto de estudio. Supongamos además que se trata de un sistema de gran escala compuesto por s subsistemas. Sean A, B y C las matrices de estado, de entrada y de salida de **S**, respectivamente. Entonces, el mecanismo utilizado para aplicar las técnicas de control descentralizado mediante descomposición con solapamiento, puede esquematizarse de la siguiente manera:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{S}: \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{array} \arrow[r, "(1)"] & \tilde{\mathbf{S}}: \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \end{array} \arrow[d, "(2)"] \\
\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}: \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D\tilde{x} + \tilde{B}_D\tilde{u} \\ \tilde{y} = \sum_{i=1}^{s} \tilde{C}_i\tilde{x}_i \end{array} \arrow[u, "(4)"] & \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}}: \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D\tilde{x} + \tilde{B}_D\tilde{u} + \tilde{A}_C\tilde{x} + \tilde{B}_C\tilde{u} \\ \tilde{y} = \sum_{i=1}^{s} \tilde{C}_i\tilde{x}_i \end{array} \arrow[l, "(3)"']
\end{tikzcd}
$$

Veamos en que consisten cada uno de estos pasos.

En el paso (1),

$$\begin{array}{rl} \mathbf{S}: & \dot{x} = Ax + Bu \\ & y = Cx \end{array} \quad \xrightarrow{(1)} \quad \begin{array}{rl} \tilde{\mathbf{S}}: & \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ & \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \end{array}$$

se expande el sistema $\mathbf{S}$ a un nuevo sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ llamado *sistema expandido*, de manera que dicho proceso cumpla una serie de requisitos, es decir, esté bajo las condiciones del que denominaremos *Principio de Inclusión Generalizado*. Así pues, (1) nos proporciona un sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ que es de mayor dimensión y con la particularidad de que aparece descompuesto en s subsistemas que pueden compartir algunas de sus variables.

En (2),

$$\begin{array}{rl} \tilde{\mathbf{S}}: & \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ & \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \end{array}$$

$$\Big\downarrow (2)$$

$$\begin{array}{rl} \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}}: & \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D\tilde{x} + \tilde{B}_D\tilde{u} + \tilde{A}_C\tilde{x} + \tilde{B}_C\tilde{u} \\ & \tilde{y} = \sum_{i=1}^{s} \tilde{C}_i\tilde{x}_i \end{array}$$

el sistema expandido es tratado como un sistema interconectado, formado por s subsistemas disjuntos. En realidad el paso (2) no aporta ninguna novedad conceptual puesto que los sistemas $\tilde{\mathbf{S}}$ y $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}}$ son idénticos, pero nos permite observar el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ de una forma más ventajosa de cara a realizar un control descentralizado. Las matrices $\tilde{A}_D$ y $\tilde{B}_D$ son matrices diagonales por bloques y las matrices $\tilde{A}_C$ y $\tilde{B}_C$ son las denominadas *matrices de interconexión*.

En el paso (3),

$$\begin{array}{rl} \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}: & \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D\tilde{x} + \tilde{B}_D\tilde{u} \\ & \tilde{y} = \sum_{i=1}^{s} \tilde{C}_i\tilde{x}_i \end{array} \quad \xleftarrow{(3)} \quad \begin{array}{rl} \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}}: & \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D\tilde{x} + \tilde{B}_D\tilde{u} + \tilde{A}_C\tilde{x} + \tilde{B}_C\tilde{u} \\ & \tilde{y} = \sum_{i=1}^{s} \tilde{C}_i\tilde{x}_i \end{array}$$

supondremos que las matrices de interconexión $\tilde{A}_C = 0$ y $\tilde{B}_C = 0$. De esta forma obtenemos un sistema *expandido desacoplado* $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}$, en donde se diseñan las leyes de control. Para ello se utilizan todas las técnicas de control descentralizado disponibles.

Finalmente, en el paso (4),

$$\begin{array}{c}
\mathbf{S}: \ \dot{x} = Ax + Bu \\
y = Cx \\
\Big\uparrow (4) \\
\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}: \ \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D \tilde{x} + \tilde{B}_D \tilde{u} \\
\tilde{y} = \sum_{i=1}^{s} \tilde{C}_i \tilde{x}_i
\end{array}$$

las leyes de control obtenidas para el sistema $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}$ son *contraídas* -siempre que sea posible- para ser implementadas en el sistema inicial $\mathbf{S}$, todo ello bajo las condiciones del Principio de Inclusión Generalizado. El esquema hasta aquí presentado sigue los mecanismos habituales.

Con el objetivo de conseguir otros sistemas expandidos $\tilde{\mathbf{S}}$ con mayores ventajas de cara al diseño de leyes de control descentralizadas, consideramos en este trabajo dos pasos adicionales. Estos dos nuevos pasos modifican el esquema anterior de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{S}: \ \dot{x} = Ax + Bu & & \tilde{\mathbf{S}}: \ \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\
y = Cx & \xrightarrow{(1)} & \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \\
 & & \Big\downarrow (a) \\
 & & \tilde{\tilde{\mathbf{S}}}: \ \dot{\tilde{\tilde{x}}} = \tilde{\tilde{A}}\tilde{\tilde{x}} + \tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{u}} \\
 & & \tilde{\tilde{y}} = \tilde{\tilde{C}}\tilde{\tilde{x}} \\
\Big\uparrow (4) & & \Big\downarrow (b) \\
 & & \tilde{\mathbf{S}}: \ \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\
 & & \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \\
 & & \Big\downarrow (c) \\
\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}: \ \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D \tilde{x} + \tilde{B}_D \tilde{u} & & \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{i}}: \ \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D \tilde{x} + \tilde{B}_D \tilde{u} + \tilde{A}_C \tilde{x} + \tilde{B}_C \tilde{u} \\
\tilde{y} = \sum_{i=1}^{s} \tilde{C}_i \tilde{x}_i & \xleftarrow{(3)} & \tilde{y} = \sum_{i=1}^{s} \tilde{C}_i \tilde{x}_i
\end{array}$$

En (a) se consideran unos cambios de base en los espacios de estado, de entrada y de salida del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$, lo cual siempre es posible por ser el Principio de Inclusión Generalizado independiente de la base escogida. De esta manera se obtiene un nuevo sistema $\breve{\mathbf{S}}$ el cual posee unas características muy especiales. Más concretamente, las matrices que definen la expansión del sistema $\breve{\mathbf{S}}$ poseen bloques matriciales nulos de gran tamaño. Ésto facilita el estudio de la estructura de las matrices que intervienen en este proceso tal y como se verá a lo largo de la tesis. Una vez estudiadas las propiedades que son de interés en el sistema $\breve{\mathbf{S}}$ regresamos de nuevo a $\tilde{\mathbf{S}}$ mediante el paso (b) para seguir trabajando con las bases iniciales. Los pasos (a), (b) y (c) equivalen al paso (2) del esquema anterior. A partir de aquí seguimos con (3) y (4) del primer esquema.

Una vez comentados los antecedentes del control descentralizado e indicado nuestro punto de partida, pasamos a concretar los objetivos de esta tesis.

Objetivos:

El objetivo global consiste en obtener la estructura de las matrices complementarias que intervienen en todo proceso de expansión-contracción de un sistema lineal, junto con las propiedades que dichas matrices deben verificar. Además, y también en términos de matrices complementarias, se trata de caracterizar la contractibilidad de una ley de control con la finalidad de disponer en la práctica de un conjunto de matrices complementarias de fácil elección, lo que representa una gran ventaja para el diseñador. De forma particular, se contempla el caso de una ley de control óptimo lineal cuadrático.

Con el fin de alcanzar estos objetivos centramos la tesis en los siguientes puntos:

- Recopilar los principales resultados sobre el Principio de Inclusión, consecuencias y aplicaciones así como conceptos relacionados con el mismo: funciones de coste, subóptimalidad, control descentralizado, solapamiento, contractibilidad, etc.

- Estudiar y caracterizar la estructura de las matrices que intervienen en cualquier proceso de expansión-contracción. Aplicar los resultados anteriores para obtener condiciones suficientes para la expansión de un sistema, incluida la función de coste, y ver cuando una ley de control es contraíble.

• Determinar la forma matricial de las restricciones y agregaciones como los dos casos particulares más usuales de expansión-contracción.

• Obtener sistemas expandidos particulares y ofrecer un estudio detallado de su estabilidad, controlabilidad y observabilidad, entre otras propiedades.

• Estudiar y clasificar los tipos de expansión-contracción disponibles en la práctica.

• Ofrecer un ejemplo ilustrativo en donde se observen algunas de las ventajas obtenidas al elegir ciertas matrices complementarias obtenidas en esta tesis y ser aplicadas posteriormente en un proceso de expansión-contracción.

1.4. Contenido de la Tesis

Esta Tesis Doctoral se ha estructurado en seis capítulos. Pasamos a resumir escuetamente el contenido de cada uno de ellos.

En el Capítulo 2 se define en primera instancia el Principio de Inclusión y se repasan las principales definiciones, propiedades y conceptos que se utilizarán a lo largo del trabajo. Aquí se sintetiza, en buena medida, lo que se ha publicado hasta este momento y que nos sirve como punto de partida. Se tratan temas relacionados con la expansión-contracción de sistemas, restricciones, agregaciones, funciones de coste, contractibilidad, descomposición con solapamiento, control descentralizado o suboptimalidad, entre otros. Cabe señalar que en este capítulo se han uniformado notaciones, se han extraído los resultados más importantes y se ha recapitulado lo que era de mayor interés para nuestros propósitos.

En el Capítulo 3 empieza la parte teórica, principal e inédita de la tesis. Veremos como, mediante unos cambios de base adecuados, se obtienen unas matrices menos complejas, es decir, formadas por submatrices con un buen número de filas y columnas nulas. Todo ello nos permite estudiar y descubrir la estructura de las matrices que intervienen en cualquier proceso de expansión-contracción de un sistema. Una vez determinada dicha estructura procedemos a deshacer los cambios de base efectuados. A partir de este momento, se enuncian y se demuestran los teoremas vistos en el capítulo anterior pero ahora con una

mayor simplicidad matricial a la hora de escoger las matrices que deben de cumplir las condiciones impuestas por el Principio de Inclusión. Se trata también el tema del control óptimo y de la contractibilidad de una ley de control.

Siguiendo en la línea del capítulo anterior, el Capítulo 4 se centra en el estudio de los dos casos particulares más utilizados a la hora de expandir-contraer un sistema: las restricciones y las agregaciones. En primer lugar se determina la estructura matricial de estas formas de expansión y posteriormente se detalla la *estabilidad*, *controlabilidad* y *observabilidad* de los sistemas expandidos en ambas situaciones, entre otras propiedades.

Otro punto realmente importante consiste en caracterizar las matrices complementarias. Se demuestra como en la práctica disponemos de dos grandes tipos de expansiones, dentro de los cuales están incluidas las restricciones y las agregaciones. Como resultado de este estudio quedan delimitadas, de alguna manera, las posibles elecciones de las matrices complementarias. Todo ello proporciona nuevas matrices probablemente no utilizadas hasta el momento pero que pueden ser de gran interés en función del tipo de control que se pretenda efectuar.

En el Capítulo 5 se presenta un ejemplo ilustrativo en donde se aplican las técnicas de control descentralizado seguidas por Šiljak y colaboradores y que convendremos en denominar "habituales" y las que hemos venido desarrollando en esta tesis, haciendo especial hincapié en las ventajas conseguidas si expandimos de una determinada forma. Este ejemplo también nos sirve para revisar y aplicar lo que se ha visto teóricamente en los capítulos precedentes.

El Capítulo 6 está destinado a resumir lo que se ha tratado a lo largo del trabajo. También se dedican unos comentarios sobre las posibles consecuencias y aplicaciones de este estudio. Además de plantear una serie de cuestiones que han ido surgiendo, se perfilan las futuras líneas de investigación que pueden derivarse de los resultados obtenidos. Se concluye la tesis con una bibliografía de referencia.

Capítulo 2

El Principio de Inclusión

2.1. Introducción

Supongamos un sistema formado por una colección de subsistemas. Es fácil pensar que dichos subsistemas puedan tener partes en común, es decir, que exista un cierto solapamiento. Un sistema con subsistemas solapados se puede expandir, obteniéndose un nuevo sistema más amplio donde los subsistemas sean disjuntos. Entonces es posible diseñar en el espacio expandido leyes de control descentralizadas para cada subsistema usando las técnicas habituales en estos casos. Este tipo de control recibe el nombre de control descentralizado. Una vez diseñadas las leyes de control para cada una de las partes, pueden ser contraídas e implementadas en el sistema original. Tratando con sistemas de gran escala probablemente sea más conveniente construir controladores descentralizados antes que intentar crear un macrocontrolador global. En muchas ocasiones, quizás sea ésta la única vía posible.

Las técnicas de descomposición juegan un papel primordial en el tratamiento de sistemas de gran escala. Los controladores locales proporcionan información de cada subsistema y ésta, a su vez, puede ser utilizada para controlar el sistema en su totalidad. Evidentemente, la forma de escoger los subsistemas es importante aunque a menudo estemos limitados por las condiciones físicas de la planta. Por todo ello y ante distintas opciones, deberemos estudiar si una mayor simplicidad de cálculos -como resultado de una partición en el

sistema- nos facilita el control o es más conveniente abordar el problema por otras vías. Aquí trataremos fundamentalmente las cuestiones más teóricas del control y no entraremos en profundidad en su puesta en práctica puesto que, entre otras razones, cada modelo conlleva una problemática diferente y debe ser estudiado de forma particular.

En ocasiones, al efectuar los análisis de estabilidad y controlabilidad de un modelo correspondiente a un sistema de gran escala donde las particiones se han realizado con el fin de simplificar cálculos, la descomposición con solapamiento aporta una solución cuando las técnicas de descomposición disjunta no son efectivas (pueden encontrarse ejemplos en *"Closed-loop Balanced Realizations in the Analysis of Suboptimality and Stability of Decentralized Systems"*, Iftar y Özgüner, 1984, cf. [24], entre otros).

Todas estas ideas descansan bajo una estructura matemática que se conoce con el nombre de Principio de Inclusión. Fue en el año 1980 cuando Ikeda y Šiljak introdujeron en *"Overlapping Decompositions, Expansions and Contractions of Dynamic Systems"*, cf. [26], el Principio de Inclusión.

En 1986, los mismos autores amplían este concepto en su trabajo titulado *"Overlapping Decentralized Control with Input, State and Ouput Inclusion"*, cf. [29]. Esta nueva versión es la que nosotros hemos convenido en llamar *Principio de Inclusión Generalizado* y de la cual partimos. Se trata del marco matemático que garantiza el proceso de expansión-contracción de un sistema.

Trataremos a lo largo de la tesis con sistemas lineales constantes con el tiempo, aunque el Principio de Inclusión haya sido generalizado a diversos tipos de sistemas, tal y como se ha comentado en el apartado dedicado a los antecedentes históricos. Algunos de los resultados que aquí se ofrecen se pueden trasladar sin mayor problema a otros tipos de sistemas, pero en cada situación habrá que realizar un estudio particularizado.

En este capítulo se resumen la mayor parte de definiciones, teoremas y consecuencias que conlleva el Principio de Inclusión Generalizado, puesto que son numerosos los trabajos realizados sobre el tema a lo largo de estos años. Se ha procurado en todo momento respetar al máximo la notación habitualmente utilizada, unificando la simbología cuando ha sido necesario.

2.2. El Principio de Inclusión Generalizado

Sean los sistemas lineales

$$\mathbf{S}: \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\tilde{\mathbf{S}}: \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{l}}$, son el estado, la entrada y la salida del sistema $\mathbf{S}$ para $t \in \mathbb{R}^+$. De forma análoga, $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{n}}}$, $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{m}}}$, $\tilde{y}(t) \in \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{l}}}$, son el estado, la entrada y la salida del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$, respectivamente. Las matrices A, B, C y $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ de tamaño $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$ y $\tilde{n} \times \tilde{n}$, $\tilde{n} \times \tilde{m}$, $\tilde{l} \times \tilde{n}$, respectivamente, se supondrán constantes y representarán a los sistemas $\mathbf{S}$ y $\tilde{\mathbf{S}}$. Supondremos que los vectores $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ correspondientes a $\mathbf{S}$ son de dimensión menor (o a lo sumo igual) que los respectivos vectores $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$, $\tilde{y}(t)$ del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$, es decir, $n \leqslant \tilde{n}$, $m \leqslant \tilde{m}$, $l \leqslant \tilde{l}$. Notaremos por $x(t; x_0, u)$ a la solución de $\mathbf{S}$ para el instante inicial $t = 0$, estado inicial $x(0) = x_0$ y una entrada fijada $u(t)$. Designaremos por $y[x(t)]$ a su correspondiente salida. Análogamente para $\tilde{x}(t; \tilde{x}_0, \tilde{u})$ y $\tilde{y}[\tilde{x}(t)]$ del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$. Por brevedad de notación, $x(t)$ indicará la solución para un arbitrario $x_0 \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ y una entrada de control $u(t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$. Asimismo, x representará al vector $x(t)$ para $t \geqslant 0$. Análogamente, para $\tilde{x}(t)$ de $\tilde{\mathbf{S}}$.

Los sistemas $\mathbf{S}$ y $\tilde{\mathbf{S}}$ están relacionados mediante las siguientes transformaciones:

$$\tilde{x} = Vx, \qquad x = U\tilde{x}, \tag{2.3}$$

$$\tilde{u} = Ru, \qquad u = Q\tilde{u}, \tag{2.4}$$

$$\tilde{y} = Ty, \qquad y = S\tilde{y}, \tag{2.5}$$

donde V, R y T son matrices constantes, de dimensiones apropiadas y de rango máximo por columnas. La matrices U, Q y S son también constantes y de rango máximo por filas, verificando las relaciones

$$UV = I_n, \qquad QR = I_m, \qquad ST = I_l, \tag{2.6}$$

siendo I_n, I_m y I_l las matrices identidad de órdenes correspondientes a los subíndices.

Nota: Las definiciones y teoremas dados en esta sección pueden consultarse en [29], [30], [31] y [61].

Definición 2.1 *(Principio de Inclusión Generalizado) Diremos que un sistema* $\tilde{\mathbf{S}}$ *incluye al sistema* $\mathbf{S}$ *(o bien que* $\mathbf{S}$ *está incluido en* $\tilde{\mathbf{S}}$*) y lo notaremos por* $\tilde{\mathbf{S}} \supset \mathbf{S}$*, si existe una cuaterna de matrices* (U,V,R,S) *tal que para cualquier estado inicial* x_0 *y cualquier entrada fijada* $u(t)$ *de* $\mathbf{S}$*, si*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= Vx_0, \\ \tilde{u}(t) &= Ru(t), \text{ para todo } t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

siendo $\tilde{x}_0$ *el estado inicial y* $\tilde{u}(t)$ *la entrada para el sistema* $\tilde{\mathbf{S}}$*, entonces*

$$\begin{aligned} x(t;x_0,u) &= U\tilde{x}(t;\tilde{x}_0,\tilde{u}), \\ y[x(t)] &= S\tilde{y}[\tilde{x}(t)], \text{ para todo } t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Definición 2.2 *Cuando un sistema* $\tilde{\mathbf{S}}$ *incluye al sistema* $\mathbf{S}$ *decimos que* $\tilde{\mathbf{S}}$ *es una expansión de* $\mathbf{S}$ *o bien que* $\mathbf{S}$ *es una contracción de* $\tilde{\mathbf{S}}$*.*

Observación: La Definición 2.1, que hemos dado el nombre de Principio de Inclusión Generalizado, es una extensión del Principio de Inclusión dado por Ikeda y Šiljak en 1980, cf. [26], en donde se consideraba que los espacios de entrada y salida de los sistemas $\mathbf{S}$ y $\tilde{\mathbf{S}}$ eran idénticos. Es decir, si $\tilde{m} = m$, $\tilde{l} = l$, $R = I_m$ y $S = I_l$ obtenemos el Principio de Inclusión como caso particular del Principio de Inclusión Generalizado. Esta extensión permite el tratamiento de sistemas con subsistemas interconectados cuando existe solapamiento en los estados, las entradas y las salidas.

Podemos observar como la Definición 2.1 garantiza que el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ contiene toda la información acerca del comportamiento de $\mathbf{S}$. Más aún, es posible obtener cualquier propiedad de $\mathbf{S}$ a partir de $\tilde{\mathbf{S}}$ o bien usar $\mathbf{S}$ como modelo reducido de $\tilde{\mathbf{S}}$. Así por ejemplo, podemos establecer la estabilidad o la controlabilidad de $\mathbf{S}$ a partir de $\tilde{\mathbf{S}}$. Esta es la idea subyacente y principal que se esconde bajo el Principio de Inclusión Generalizado.

La condición necesaria y suficiente para que se cumpla el Principio de Inclusión Generalizado nos la da el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Un sistema* $\tilde{\mathbf{S}}$ *incluye al sistema* $\mathbf{S}$ *si y sólo si existe una cuaterna de matrices*

(U,V,R,S) *tales que:*

$$\begin{array}{lrcl} a) & U\tilde{A}^iV & = & A^i, \\ b) & U\tilde{A}^i\tilde{B}R & = & A^iB, \\ c) & S\tilde{C}\tilde{A}^iV & = & CA^i, \\ d) & S\tilde{C}\tilde{A}^i\tilde{B}R & = & CA^iB \end{array} \tag{2.9}$$

para todo i=$0,1,2,...$ □

Cuando consideramos descomposiciones con solapamiento del sistema **S** estamos interesados en generar expansiones $\tilde{\mathbf{S}}$ de **S**. Si los pares de matrices (U,V), (Q,R) y (S,T) están especificados, las matrices $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$ podrán ser expresadas por las relaciones matriciales

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= VAU + M, \\ \tilde{B} &= VBQ + N, \\ \tilde{C} &= TCU + L. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Las matrices M, N y L se denominan *matrices complementarias* y pueden ser escogidas arbitrariamente siempre que verifiquen el teorema dado a continuación, equivalente al Teorema 2.1, el cual nos proporciona una condición necesaria y suficiente para que se cumpla el Principio de Inclusión Generalizado en términos de las propias matrices complementarias.

Teorema 2.2 *Un sistema* $\tilde{\mathbf{S}}$ *es una expansión del sistema* **S** *si y sólo si existe una cuaterna de matrices* (U,V,R,S) *tales que:*

$$\begin{array}{lr} a) & UM^iV = 0, \\ b) & UM^{i-1}NR = 0, \\ c) & SLM^{i-1}V = 0, \\ d) & SLM^{i-1}NR = 0 \end{array} \tag{2.11}$$

para todo i=$1,2,...,\tilde{n}$. □

2.3. Restricciones y Agregaciones

Antes de continuar con el estudio sobre el Principio de Inclusión Generalizado, vamos a detenernos en los dos casos particulares más utilizados en la práctica a la hora de considerar expansiones-contracciones de un sistema. Se trata de las *restricciones* y las *agregaciones*.

Definición 2.3 *Diremos que el sistema* **S** *es una restricción del sistema* $\tilde{\mathbf{S}}$*, cf. [61], si existe una terna de matrices* (V,R,T) *tal que para cualquier estado inicial* x_0 *y cualquier entrada fijada* $u(t)$ *de* **S***, si*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= Vx_0, \\ \tilde{u}(t) &= Ru(t), \ \textit{para todo } t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

siendo $\tilde{x}_0$ *el estado inicial y* $\tilde{u}(t)$ *la entrada de* $\tilde{\mathbf{S}}$*, entonces*

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t;\tilde{x}_0,\tilde{u}) &= Vx(t;x_0,u), \\ \tilde{y}[\tilde{x}(t)] &= Ty[x(t)], \ \textit{para todo } t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

La condición necesaria y suficiente para que **S** sea una restricción de $\tilde{\mathbf{S}}$ viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 2.3 *El sistema* **S** *es una restricción del sistema* $\tilde{\mathbf{S}}$*, cf. [61], si y sólo si existe una terna de matrices* (V,R,T) *verificando:*

$$\begin{aligned} &a) \quad \tilde{A}V = VA, \\ &b) \quad \tilde{B}R = VB, \\ &c) \quad \tilde{C}V = TC. \qquad \square \end{aligned} \tag{2.14}$$

Teniendo en cuenta las matrices complementarias M, N y L, el Teorema 2.3 se traduce en el siguiente:

Teorema 2.4 *El sistema* **S** *es una restricción del sistema* $\tilde{\mathbf{S}}$ *si y sólo si se verifica:*

$$\begin{aligned} &a) \quad MV = 0, \\ &b) \quad NR = 0, \\ &c) \quad LV = 0. \qquad \square \end{aligned} \tag{2.15}$$

Observación: En cualquier restricción el subespacio $\operatorname{Im} V \subset \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ es invariante en el sentido que las soluciones $\tilde{x}(t)$ de $\tilde{\mathbf{S}}$ que empiezan en $\tilde{x}_0 \in \operatorname{Im} V$, permanecen en $\operatorname{Im} V$ para cualquier entrada. Dado que V es una matriz inyectiva, existe una matriz U tal que $UV = I_n$ y en consecuencia, por la Definición 2.3, $\tilde{\mathbf{S}}$ incluye **S**.

Definición 2.4 *Diremos que el sistema* **S** *es una agregación del sistema* $\tilde{\mathbf{S}}$ *si existe una terna de matrices* (U,Q,S) *tal que para cualquier estado inicial* $\tilde{x}_0$ *y cualquier entrada fijada* $\tilde{u}(t)$ *de* $\tilde{\mathbf{S}}$*, si*

$$\begin{aligned} x_0 &= U\tilde{x}_0, \\ u(t) &= Q\tilde{u}(t), \ \textit{para todo } t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

siendo x_0 *el estado inicial y* $u(t)$ *la entrada de* **S***, entonces*

$$\begin{aligned} x(t;x_0,u) &= U\tilde{x}(t;\tilde{x}_0,\tilde{u}), \\ y[x(t)] &= S\tilde{y}[\tilde{x}(t)], \ \textit{para todo } t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Así pues, en términos matriciales, la condición necesaria y suficiente para que **S** sea una agregación de $\tilde{\mathbf{S}}$ nos la proporciona el siguiente teorema.

Teorema 2.5 *El sistema* **S** *es una agregación del sistema* $\tilde{\mathbf{S}}$ *si y sólo si existe una terna de matrices* (U,Q,S) *tales que:*

$$\begin{aligned} &a) \quad U\tilde{A} = AU, \\ &b) \quad U\tilde{B} = BQ, \\ &c) \quad S\tilde{C} = CU. \qquad \square \end{aligned} \tag{2.18}$$

Teniendo en cuenta las matrices complementarias, podemos enunciar el Teorema 2.5 de otra forma equivalente.

Teorema 2.6 *El sistema* **S** *es una agregación del sistema* $\tilde{\mathbf{S}}$ *si y sólo si se verifica:*

$$\begin{aligned} &a) \quad UM = 0, \\ &b) \quad UN = 0, \\ &c) \quad SL = 0. \qquad \square \end{aligned} \tag{2.19}$$

Observación: De la Definición 2.4 de agregación se deduce fácilmente que se verifica la inclusión del sistema **S** en $\tilde{\mathbf{S}}$. Cabe señalar que las agregaciones especifican el comportamiento de la proyección de una trayectoria de $\tilde{\mathbf{S}}$ para una arbitraria condición inicial $\tilde{x}_0$, mientras que las restricciones lo hacen para un conjunto limitado de condiciones iniciales $\tilde{x}_0 \in \operatorname{Im} V \subset \mathbb{R}^{\tilde{n}}$. En ambos casos, sin embargo, $\tilde{\mathbf{S}}$ contiene toda la información acerca del comportamiento de **S**.

2.4. Expansión-Contracción de Funciones de Coste

Una forma habitual de abordar el problema de control es utilizar criterios de *control óptimo*, particularmente mediante funciones de coste lineal cuadrático. En esta sección trataremos este aspecto.

Sea el sistema lineal

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \ \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.20}$$

al cual le asociamos una función de coste

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty (x^t Q^* x + u^t R^* u)\, dt, \tag{2.21}$$

donde x_0 es el estado inicial del sistema $\mathbf{S}$, Q^* una matriz simétrica de orden n, constante, semidefinida positiva y R^* una matriz simétrica de orden m, constante y definida positiva. Notaremos por $(\mathbf{S}, J)$ al par formado por un sistema lineal y su función de coste asociada.

Asimismo, al sistema lineal ampliado

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}: \ \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned} \tag{2.22}$$

podemos asociarle una función de coste dada por

$$\tilde{J}(\tilde{x}_0, \tilde{u}) = \int_0^\infty (\tilde{x}^t \tilde{Q}^* \tilde{x} + \tilde{u}^t \tilde{R}^* \tilde{u})\, dt, \tag{2.23}$$

siendo $\tilde{x}_0$ el vector de estado inicial para el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$, $\tilde{Q}^*$ una matriz simétrica de orden $\tilde{n}$, constante, semidefinida positiva y $\tilde{R}^*$ una matriz simétrica de orden $\tilde{m}$, constante y definida positiva. De forma análoga consideraremos el par $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{J})$. Supongamos las transformaciones lineales $\tilde{x} = Vx$, $\tilde{u} = Ru$ dadas en (2.3) y (2.4). Entonces:

Definición 2.5 *Diremos que un par $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{J})$ incluye al par $(\mathbf{S}, J)$ y lo notaremos por $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{J}) \supset (\mathbf{S}, J)$, si el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ incluye al sistema $\mathbf{S}$ y además*

$$J(x_0, u) = \tilde{J}(\tilde{x}_0, \tilde{u}), \tag{2.24}$$

para cualquier estado inicial x_0 y cualquier entrada fijada $u(t)$ de $\mathbf{S}$.

Definición 2.6 *Cuando un par* $(\tilde{\mathbf{S}},\tilde{J})$ *incluye al par* $(\mathbf{S},J)$ *diremos que* $(\tilde{\mathbf{S}},\tilde{J})$ *es una expansión de* $(\mathbf{S},J)$ *o bien que* $(\mathbf{S},J)$ *es una contracción de* $(\tilde{\mathbf{S}},\tilde{J})$.

Comentario: Si $(\tilde{\mathbf{S}},\tilde{J})$ es una expansión de $(\mathbf{S},J)$ el problema de control óptimo correspondiente a la expansión $\tilde{\mathbf{S}}$ es equivalente al problema de control óptimo en $\mathbf{S}$.

Bajo las transformaciones (2.3) y (2.4), las matrices de $(\tilde{\mathbf{S}},\tilde{J})$ y $(\mathbf{S},J)$ pueden relacionarse mediante:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= VAU + M, \\ \tilde{B} &= VBQ + N, \\ \tilde{Q}^* &= U^t Q^* U + M_{Q^*}, \\ \tilde{R}^* &= Q^t R^* Q + N_{R^*}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

siendo M_{Q^*} y N_{R^*} matrices complementarias de órdenes $\tilde{n}$ y $\tilde{m}$, respectivamente. Entonces, condiciones suficientes para que $(\tilde{\mathbf{S}},\tilde{J}) \supset (\mathbf{S},J)$ nos las da el siguiente teorema.

Teorema 2.7 *Un par* $(\tilde{\mathbf{S}},\tilde{J})$ *incluye al par* $(\mathbf{S},J)$ *si se verifica uno de los dos bloques de condiciones:*

$$\begin{array}{ll} a) & MV = 0, \\ b) & NR = 0, \\ c) & V^t M_{Q^*} V = 0, \\ d) & R^t N_{R^*} R = 0 \end{array} \tag{2.26}$$

o bien

$$\begin{array}{ll} a') & UM^i V = 0, \\ b') & UM^{i-1} NR = 0, \\ c') & M_{Q^*} M^{i-1} V = 0, \\ d') & M_{Q^*} M^{i-1} NR = 0, \\ e') & R^t N_{R^*} R = 0 \end{array} \tag{2.27}$$

para todo i=$1,2,\ldots,\tilde{n}$. □

Observación: Los dos bloques de condiciones son independientes. Cualquiera de ellos garantiza que el par $(\tilde{\mathbf{S}},\tilde{J})$ incluye al par $(\mathbf{S},J)$.

2.5. Leyes de Control Contraíbles

Se trata ahora de diseñar una ley de control lineal para el sistema $\mathbf{S}$ de la forma $u = -Kx$ a partir de una apropiada ley de control $\tilde{u} = -\tilde{K}\tilde{x}$ diseñada en el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$. Las matrices K y $\tilde{K}$ correspondientes a los sistemas $\mathbf{S}$ y $\tilde{\mathbf{S}}$, respectivamente, se denominan *matrices de ganancia*.

Definición 2.7 *Una ley de control $\tilde{u} = -\tilde{K}\tilde{x}$ en el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ es contraíble a la ley de control $u = -Kx$ del sistema $\mathbf{S}$ si $\tilde{x}_0 = Vx_0$, $\tilde{u} = Ru$ implican*

$$Kx(t;x_0,u) = Q\tilde{K}\tilde{x}(t;\tilde{x}_0,\tilde{u}) \tag{2.28}$$

para todo $t \geqslant 0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ y cualquier entrada fijada $u(t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$.

Observación: Notemos que la contractibilidad de una ley de control $\tilde{u} = -\tilde{K}\tilde{x}$ a la ley $u = -Kx$ supone que el sistema de lazo cerrado

$$\mathbf{S_c}: \quad \dot{x} = \hat{A}x, \tag{2.29}$$

donde $\hat{A} = A - BK$, debe ser una contracción del sistema de lazo cerrado

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{c}}: \quad \dot{\tilde{x}} = \hat{\tilde{A}}\tilde{x}, \tag{2.30}$$

siendo $\hat{\tilde{A}} = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$.

Para establecer las condiciones de contractibilidad representaremos la matriz $\tilde{K}$ mediante

$$\tilde{K} = RKU + F, \tag{2.31}$$

donde F es una matriz complementaria, a determinar, de tamaño $\tilde{m} \times \tilde{n}$.

Necesitamos ahora condiciones bajo las cuales el control $\tilde{u} = -\tilde{K}\tilde{x}$ es contraíble a $u = -Kx$. Ésto nos lo proporciona el siguiente teorema.

Teorema 2.8 *Una ley de control $\tilde{u} = -\tilde{K}\tilde{x}$ de $\tilde{\mathbf{S}}$ es contraíble a la ley de control $u = -Kx$ de $\mathbf{S}$ si y sólo si se verifica:*

$$\begin{array}{ll} a) & QFM^{i-1}V = 0, \\ b) & QFM^{i-1}NR = 0 \end{array} \tag{2.32}$$

para todo i=$1,2,\ldots,\tilde{n}$. $\square$

El Teorema 2.8 puede aparecer enunciado de otra forma equivalente en la que no se usa explícitamente la matriz complementaria F. Veámoslo.

Teorema 2.9 *Una ley de control $\tilde{u} = -\tilde{K}\tilde{x}$ de $\tilde{\mathbf{S}}$ es contraíble a la ley de control $u = -Kx$ del sistema $\mathbf{S}$ si y sólo si se verifica:*

$$\begin{array}{lrll} a) & Q\tilde{K}V & = K, & \\ b) & Q\tilde{K}M^{i-1}V & = 0, & \textit{para todo } i = 2,\ldots,\tilde{n} \\ c) & Q\tilde{K}M^{i-1}NR & = 0, & \textit{para todo } i = 1,\ldots,\tilde{n}. \quad \square \end{array} \tag{2.33}$$

Comentario: La equivalencia de ambos teoremas queda clara si tenemos en cuenta que, de (2.31), $\tilde{K} = RKU + F$ y en consecuencia $F = \tilde{K} - RKU$. Entonces, sustituyendo la F así obtenida en *a)* y *b)* de (2.32), tenemos:

$$\begin{array}{lrl} a) & Q\tilde{K}M^{i-1}V & = KUM^{i-1}V, \\ b) & Q\tilde{K}M^{i-1}NR & = KUM^{i-1}NR \end{array} \tag{2.34}$$

para todo i=$1,..,\tilde{n}$. Puesto que estamos suponiendo que $\tilde{\mathbf{S}} \supset \mathbf{S}$, de las dos primeras ecuaciones de (2.11) tenemos:

$$\begin{array}{rl} UM^{i}V & = 0, \\ UM^{i-1}NR & = 0 \end{array} \tag{2.35}$$

para todo i=$1,\ldots,\tilde{n}$, con lo cual se concluye:

$$\begin{array}{lrll} a) & Q\tilde{K}V & = K, & \\ b) & Q\tilde{K}M^{i-1}V & = 0, & \text{para todo } i = 2,\ldots,\tilde{n} \\ c) & Q\tilde{K}M^{i-1}NR & = 0, & \text{para todo } i = 1,\ldots,\tilde{n}. \end{array} \tag{2.36}$$

En algunos casos particulares, la contractibilidad exige menos condiciones tal y como nos lo asegura el siguiente corolario.

Corolario 2.1 *Si $MV = 0$ y $NR = 0$, entonces cualquier ley de control $\tilde{u} = -\tilde{K}\tilde{x}$ diseñada en el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ es contraíble a la ley de control $u = -Kx$ del sistema $\mathbf{S}$. Además, $K = Q\tilde{K}V$.* $\square$

Nota: Las definiciones y teoremas vistos en este apartado pueden consultarse en [29], [30] y [61].

2.6. Solapamiento en el Contexto de las Expansiones

Antes de continuar con el tema, conviene dar una interpretación general y matemática del concepto de *solapamiento*. A título de muestra, solamente supondremos expansión del espacio de estado.

Sea el sistema lineal

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \ \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.37}$$

y consideremos una partición del vector de estado $x(t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $x = (x_1^t, x_2^t, ..., x_s^t)^t$, la cual induce una descomposición de las matrices A, B y C de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_s \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \, C_2 \, \cdots \, C_s \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Entonces, **S** puede ser representado como una interconexión de s subsistemas, es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \quad \dot{x}_i &= A_{ii} x_i + B_i u + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} A_{ij} x_j \\ y &= \sum_{i=1}^{s} C_i x_i, \ i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Las trayectorias de **S** pueden ser tratadas como proyecciones de $x(t; x_0, u)$ sobre los subespacios $\mathcal{X}_i$, $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{X}_s, \tag{2.40}$$

esto es, $\mathcal{X}$ es suma directa de los subespacios $\mathcal{X}_i$. Dichos subespacios quedan unívocamente determinados por la partición de x. Recíprocamente, dada una colección de subespacios de esta forma, le corresponde una única partición en el vector de estado x.

Supongamos ahora una partición de $\mathcal{X}$ de la forma

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \cdots + \mathcal{X}_s, \tag{2.41}$$

donde $\mathcal{X}$ es una suma ordinaria de subespacios $\mathcal{X}_i$ no necesariamente disjuntos. Con el fin de obtener una descomposición disjunta, expandimos el espacio $\mathcal{X}$. A cada $\mathcal{X}_i$ de (2.41) le asociamos una aplicación $V_i : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_i$, $i \in \mathbb{N}$ y construimos una expansión $V : \mathcal{X} \to \tilde{\mathcal{X}}$ donde dim $\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{s} \dim \mathcal{X}_i$, siendo $V = (V_1^t \, V_2^t \, \cdots \, V_s^t)^t$, la cual es inyectiva. La correspondiente descomposición del espacio $\tilde{\mathcal{X}}$ de $\tilde{\mathbf{S}}$ es

$$\tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{X}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{X}}_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{\mathcal{X}}_s, \tag{2.42}$$

la cual es suma directa de los subespacios $\tilde{\mathcal{X}}_i$. Como se puede observar $\tilde{\mathcal{X}}_i \simeq \mathcal{X}_i$, es decir, la identidad de los subespacios se preserva con la expansión. De esta manera obtenemos una suma directa de subespacios a partir de una suma ordinaria. La expansión $\tilde{\mathbf{S}}$ adoptará la forma

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}} : \quad \dot{\tilde{x}}_i &= \tilde{A}_{ii}\tilde{x}_i + \tilde{B}_i u + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} \tilde{A}_{ij}\tilde{x}_j \\ y &= \sum_{i=1}^{s} \tilde{C}_i \tilde{x}_i, \;\; i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Ahora podemos diseñar un control en $\tilde{\mathbf{S}}$ usando los métodos habituales de las descomposiciones disjuntas. La ley de control resultante podrá ser contraída para ser implementada en el sistema original $\mathbf{S}$. El mismo razonamiento y proceso seguiríamos en el caso de considerar expansiones del espacio de entrada y de salida con el fin de obtener subsistemas con independientes entradas y salidas.

2.7. Diseño de Leyes de Control Descentralizadas

En esta sección vamos a estudiar como se pueden construir controladores locales para regular modelos con solapamiento. Para ello seguiremos el proceso que se utiliza en el diseño de leyes de control descentralizadas en el espacio expandido y su posterior contracción e implementación en el sistema original.

Supongamos el caso más general en que un sistema $\mathbf{S}$ está constituido por s subsistemas. Dicho sistema puede ser expandido para obtener s subsistemas disjuntos que notaremos

por $\tilde{\mathbf{S}}_\mathbf{i}$ y dados por las ecuaciones

$$\tilde{\mathbf{S}}_\mathbf{i}: \quad \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{A}_{ii}\,\tilde{x}_i + \tilde{B}_{ii}\,\tilde{u}_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \tilde{A}_{ij}\,\tilde{x}_j + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \tilde{B}_{ij}\,\tilde{u}_j, \qquad i = 1,2,\ldots,s, \tag{2.44}$$

donde $\tilde{x}_i(t)$ y $\tilde{u}_i(t)$ son los vectores de estado y de entrada para cada subsistema $\tilde{\mathbf{S}}_\mathbf{i}$ de dimensiones $\tilde{n}_i$ y $\tilde{m}_i$, respectivamente. Las matrices $\tilde{A}_{ii}$, $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{B}_{ii}$, $\tilde{B}_{ij}$, son constantes y de dimensiones correspondientes apropiadas. Una representación más compacta de $\tilde{\mathbf{S}}_\mathbf{i}$ que la dada en (2.44) la notaremos por $\tilde{\mathbf{S}}$, siendo

$$\tilde{\mathbf{S}}: \quad \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D\,\tilde{x} + \tilde{B}_D\tilde{u} + \tilde{A}_C\,\tilde{x} + \tilde{B}_C\tilde{u}, \tag{2.45}$$

donde

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1^t, \tilde{x}_2^t, \cdots, \tilde{x}_s^t)^t, \qquad \tilde{u} = (\tilde{u}_1^t, \tilde{u}_2^t, \cdots, \tilde{u}_s^t)^t, \tag{2.46}$$

son el estado y la entrada del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$, con

$$\begin{aligned} \tilde{A}_D &= \operatorname{diag}\{\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{22}, \ldots, \tilde{A}_{ss}\}, & \tilde{B}_D &= \operatorname{diag}\{\tilde{B}_{11}, \tilde{B}_{22}, \ldots, \tilde{B}_{ss}\}, \\ \tilde{A}_C &= (\tilde{A}_{ij}), & \tilde{B}_C &= (\tilde{B}_{ij}). \end{aligned} \tag{2.47}$$

A las matrices $\tilde{A}_C$ y $\tilde{B}_C$ las llamaremos *matrices de interconexión*. Supondremos que cada par $(\tilde{A}_{ii}, \tilde{B}_{ii})$ de (2.44) es controlable con lo cual el par $(\tilde{A}_D, \tilde{B}_D)$ de (2.47) también lo será.

Con el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ asociamos una función de coste

$$\tilde{J}(\tilde{x}_0, \tilde{u}) = \int_0^\infty (\tilde{x}^t \tilde{Q}_D^* \tilde{x} + \tilde{u}^t \tilde{R}_D^* \tilde{u})\, dt, \tag{2.48}$$

donde

$$\tilde{Q}_D^* = \operatorname{diag}\{\tilde{Q}_{11}^*, \tilde{Q}_{22}^*, \ldots, \tilde{Q}_{ss}^*\}, \quad \tilde{R}_D^* = \operatorname{diag}\{\tilde{R}_{11}^*, \tilde{R}_{22}^*, \ldots, \tilde{R}_{ss}^*\}, \tag{2.49}$$

siendo cada $\tilde{Q}_{ii}^*$ una matriz constante, semidefinida positiva, de tamaño $\tilde{n}_i \times \tilde{n}_i$ y $\tilde{R}_{ii}^*$ matrices también constantes, definidas positivas, de tamaño $\tilde{m}_i \times \tilde{m}_i$. Además supondremos que cada par $\left(\tilde{A}_{ii}, (\tilde{Q}_{ii}^*)^{\frac{1}{2}}\right)$ es observable, es decir, $\left(\tilde{A}_D, (\tilde{Q}_D^*)^{\frac{1}{2}}\right)$ es observable.

Consideremos ahora el sistema expandido y desacoplado representado por

$$\tilde{\mathbf{S}}_\mathbf{D}: \quad \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D\,\tilde{x} + \tilde{B}_D\,\tilde{u}, \tag{2.50}$$

que se obtiene de (2.45) al considerar $\tilde{A}_C = 0$ y $\tilde{B}_C = 0$, es decir, no teniendo en cuenta las interconexiones. Elegimos una ley de control óptimo para este sistema descentralizado de la forma

$$\tilde{u}_D = -\tilde{K}_D\,\tilde{x}, \tag{2.51}$$

donde

$$\tilde{K}_D = (\tilde{R}_D^*)^{-1}\tilde{B}_D^t\tilde{P}_D, \tag{2.52}$$

siendo $\tilde{P}_D$ la única matriz simétrica, definida positiva, solución de la ecuación de Riccati

$$\tilde{A}_D^t\tilde{P}_D + \tilde{P}_D\tilde{A}_D - \tilde{P}_D\tilde{B}_D(\tilde{R}_D^*)^{-1}\tilde{B}_D^t\tilde{P}_D + \tilde{Q}_D^* = 0. \tag{2.53}$$

Notemos que debido a (2.52) y (2.53),

$$\tilde{P}_D = \operatorname{diag}\{\tilde{P}_{11}, \tilde{P}_{22}, \ldots, \tilde{P}_{ss}\}, \qquad \tilde{K}_D = \operatorname{diag}\{\tilde{K}_{11}, \tilde{K}_{22}, \ldots, \tilde{K}_{ss}\}, \tag{2.54}$$

donde las submatrices $\tilde{P}_{ii}$ y $\tilde{K}_{ii}$, i=1,...,s, concuerdan con las dimensiones de los subsistemas de $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}$.

Como resultado de todo este proceso, obtenemos una matriz de ganancia diagonal

$$\tilde{K}_D = \begin{pmatrix} \tilde{K}_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{K}_{ss} \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

con su ley de control correspondiente $\tilde{u}_D = -\tilde{K}_D\tilde{x}$, que podrá ser contraída al sistema original **S** calculando previamente la matriz de ganancia $K_D = Q\tilde{K}_D V$. Se tiene así una ley de control dada por

$$u_D = -K_D x, \tag{2.56}$$

que será implementada en el sistema **S**.

A modo de ejemplo ilustrativo vamos a considerar a continuación un sistema lineal:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \ \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.57}$$

que supondremos representado por las siguientes matrices prototipo:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{c|cc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \hline A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|cc} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ \hline B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{c|cc} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ \hline C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ \hline C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.58}$$

con una partición del vector de estado, $x(t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, la entrada $u(t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ y la salida $y(t) \in \mathbb{R}^{\mathbf{l}}$ en tres componentes, es decir, x=$(x_1^t, x_2^t, x_3^t)^t$, u=$(u_1^t, u_2^t, u_3^t)^t$, y=$(y_1^t, y_2^t, y_3^t)^t$ de dimensiones n_i, m_i y l_i, respectivamente, para i=$1,2,3$ y tal que $n = n_1 + n_2 + n_3$, $m = m_1 + m_2 + m_3$ y $l = l_1 + l_2 + l_3$. Los bloques matriciales en (2.58), A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, con i, j=$1,2,3$, se suponen constantes y de dimensiones correspondientes adecuadas.

Consideremos una descomposición en dos componentes solapadas, señaladas por líneas discontinuas en (2.58), esto es, $\tilde{x}_1$=$(x_1^t, x_2^t)^t$, $\tilde{x}_2$=$(x_2^t, x_3^t)^t$. De esta forma obtenemos un nuevo vector de estado $\tilde{x}$=$(\tilde{x}_1^t, \tilde{x}_2^t)^t$ de dimensión $\tilde{n}$ siendo $\tilde{n}$=$n_1 + 2n_2 + n_3$. Análogamente, $\tilde{u}_1$=$(u_1^t, u_2^t)^t$, $\tilde{u}_2$=$(u_2^t, u_3^t)^t$ con $\tilde{u}$=$(\tilde{u}_1^t, \tilde{u}_2^t)^t$ de dimensión $\tilde{m}$ siendo $\tilde{m} = m_1 + 2m_2 + m_3$. De igual manera $\tilde{y}_1$=$(y_1^t, y_2^t)^t$, $\tilde{y}_2$=$(y_2^t, y_3^t)^t$ con $\tilde{y}$=$(\tilde{y}_1^t, \tilde{y}_2^t)^t$ de dimensión $\tilde{l}$, donde $\tilde{l}$=$l_1 + 2l_2 + l_3$ corresponde a la salida.

De esta forma se obtiene un sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ que notaremos por:

$$\tilde{\mathbf{S}}: \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.59}$$

donde las matrices $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix}$ y $\tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix}$, de dimensiones correspondientes apropiadas, las calcularemos aplicando las relaciones (2.10).

Comentario: Para no complicar innecesariamente la notación consideramos descomposiciones con solapamiento únicamente para el caso de dos subsistemas de **S**. Sin embargo, estas mismas ideas pueden ser ampliadas, sin mayores complicaciones, a sistemas con cualquier número de subsistemas interconectados.

Hasta el momento no hemos comentado como deben ser las matrices que intervienen en el proceso de expansión-contracción salvo en el caso de las matrices A, B y C que nos vienen impuestas por el modelo y que caracterizan el sistema **S**.

Por definición, sabemos que las matrices U, V, Q, R, S y T deben verificar $UV = I_n$, $QR = I_m$, $ST = I_l$, pero no hemos dado la estructura que presentan. Puesto que interesa que el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ conserve una apariencia lo más parecida posible a **S** supondremos, como

es habitual, que estas matrices son de la forma:

$$V = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_2} & 0 \\ 0 & I_{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_3} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} I_{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{l_2} & 0 \\ 0 & I_{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{l_3} \end{pmatrix}, \tag{2.60}$$

con $n_1+n_2+n_3=n,\ m_1+m_2+m_3=m,\ l_1+l_2+l_3=l$. Además, $U=(V^tV)^{-1}V^t$, $Q=(R^tR)^{-1}R^t$, $S=(T^tT)^{-1}T^t$, son sus pseudoinversas respectivas. De esta manera quedan determinadas las matrices U, Q y S siendo

$$U = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{n_2} & \frac{1}{2}I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_3} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{m_2} & \frac{1}{2}I_{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_3} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} I_{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{l_2} & \frac{1}{2}I_{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{l_3} \end{pmatrix}. \tag{2.61}$$

En cuanto a las matrices complementarias M, N y L de (2.10), la situación es más flexible y complicada al mismo tiempo. Este punto lo trataremos en el próximo capítulo y en él reside la parte más importante de este trabajo. No obstante podemos avanzar que, generalmente, las matrices que se vienen utilizando son de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_{12} & -\frac{1}{2}A_{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}A_{22} & -\frac{1}{2}A_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{22} & \frac{1}{2}A_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{32} & \frac{1}{2}A_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}A_{21} & \frac{1}{2}A_{22} & -\frac{1}{2}A_{22} & -\frac{1}{2}A_{23} \\ -\frac{1}{2}A_{21} & -\frac{1}{2}A_{22} & \frac{1}{2}A_{22} & \frac{1}{2}A_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.62}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}B_{12} & -\frac{1}{2}B_{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}B_{22} & -\frac{1}{2}B_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}B_{22} & \frac{1}{2}B_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}B_{32} & \frac{1}{2}B_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}B_{21} & \frac{1}{2}B_{22} & -\frac{1}{2}B_{22} & -\frac{1}{2}B_{23} \\ -\frac{1}{2}B_{21} & -\frac{1}{2}B_{22} & \frac{1}{2}B_{22} & \frac{1}{2}B_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.63}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}C_{12} & -\frac{1}{2}C_{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}C_{22} & -\frac{1}{2}C_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}C_{22} & \frac{1}{2}C_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}C_{32} & \frac{1}{2}C_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}C_{21} & \frac{1}{2}C_{22} & -\frac{1}{2}C_{22} & -\frac{1}{2}C_{23} \\ -\frac{1}{2}C_{21} & -\frac{1}{2}C_{22} & \frac{1}{2}C_{22} & \frac{1}{2}C_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.64}$$

como puede observarse en [9], [21], [23], [27], [30], [32], [61], entre otros artículos. En algunas ocasiones se considera $N=0$ o $L=0$ con la finalidad de que se cumpla alguna condición adicional, como ya comentaremos en los Capítulos 3 y 4. Evidentemente todas ellas garantizan el Principio de Inclusión Generalizado pero, por el Teorema 2.2, M, N y L pueden ser cualesquiera con tal de que verifiquen las condiciones (2.11). A priori, no es tan fácil elegir otras matrices complementarias que cumplan el Teorema 2.2, si se prescinde de las que vienen siendo habituales. Más adelante estudiaremos como debe ser la estructura de una matriz complementaria y las propiedades que deben de verificar sus submatrices para que sea una posible matriz de expansión-contracción y veremos como

las matrices dadas en (2.62)-(2.64) son casos particulares de matrices complementarias que están incluidas dentro de una estructura más general.

Con el fin de diseñar una ley de control óptimo para el sistema **S**, consideremos la función de coste J dada por

$$J(x_0,u) = \int_0^\infty (x^t Q^* x + u^t R^* u)\, dt, \tag{2.65}$$

como ya definimos en (2.21), siendo u el vector de control que optimiza J para un determinado vector de estado x_0 y cuyo coste óptimo viene dado por

$$\hat{J}^\circ(x_0) = x_0^t P x_0, \tag{2.66}$$

donde $x_0 = x(0)$ es el estado inicial de **S** y P la única matriz simétrica y definida positiva que es solución de la ecuación de Riccati

$$A^t P + PA - PB(R^*)^{-1}B^t P + Q^* = 0, \tag{2.67}$$

suponiendo que el par (A,B) es controlable y $\left(A,\, (Q^*)^{\frac{1}{2}}\right)$ es observable, cf [41]. La matriz de ganancia K es precisamente

$$K = (R^*)^{-1}B^t P, \tag{2.68}$$

con lo cual elegimos el vector que optimiza J como

$$u = -(R^*)^{-1}B^t P x = -Kx. \tag{2.69}$$

El proceso desarrollado hasta este momento se ajustaría a un tipo de control óptimo centralizado en el cual no se diseñan las leyes de control en el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ sino en **S**. Puesto que estamos interesados en un tipo de control descentralizado vamos a expandir el sistema original y a diseñar leyes de control en este nuevo sistema. Sea pues el sistema expandido representado por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}} : \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned} \tag{2.70}$$

siendo en este caso la función de coste asociada al sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ la dada por

$$\tilde{J}(\tilde{x}_0,\tilde{u}) = \int_0^\infty (\tilde{x}^t \tilde{Q}^* \tilde{x} + \tilde{u}^t \tilde{R}^* \tilde{u})\, dt, \tag{2.71}$$

como ya se definió en (2.23). Ahora, la parte correspondiente a $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}$, del sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ puede ser representada por dos subsistemas interconectados, es decir

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_1 :\ \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{B}_{11}\tilde{u}_1 + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_{12}\tilde{u}_2, \\ \tilde{\mathbf{S}}_2 :\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_{22}\tilde{u}_2 + \tilde{A}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{B}_{21}\tilde{u}_1, \end{aligned} \tag{2.72}$$

siendo $\tilde{A}_{ij}$, $\tilde{B}_{ij}$ con i,j=1,2, las matrices dadas en (2.59) o bien de forma más compacta como en (2.45) mediante

$$\tilde{\mathbf{S}}: \quad \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D\,\tilde{x} + \tilde{B}_D\,\tilde{u} + \tilde{A}_C\,\tilde{x} + \tilde{B}_C\,\tilde{u}. \tag{2.73}$$

Los subsistemas desacoplados podrán ser expresados por:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}^1 &: \ \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\,\tilde{x}_1 + \tilde{B}_{11}\tilde{u}_1, \\ \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}^2 &: \ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{22}\,\tilde{x}_2 + \tilde{B}_{22}\tilde{u}_2, \end{aligned} \tag{2.74}$$

o bien en la forma

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}: \quad \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_D\,\tilde{x} + \tilde{B}_D\,\tilde{u}, \tag{2.75}$$

en los cuales no se tienen en cuenta las interconexiones. Con cada subsistema de (2.74) asociamos una función de coste

$$\begin{aligned} \tilde{J}_D^1(\tilde{x}_{10},\tilde{u}_1) &= \int_0^\infty (\tilde{x}_1^t\tilde{Q}_{11}^*\tilde{x}_1 + \tilde{u}_1^t\tilde{R}_{11}^*\tilde{u}_1)\,dt, \\ \tilde{J}_D^2(\tilde{x}_{20},\tilde{u}_2) &= \int_0^\infty (\tilde{x}_2^t\tilde{Q}_{22}^*\tilde{x}_2 + \tilde{u}_2^t\tilde{R}_{22}^*\tilde{u}_2)\,dt, \end{aligned} \tag{2.76}$$

donde $\tilde{x}_{10}$ y $\tilde{x}_{20}$ son los estados iniciales de $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}^1$ y $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}^2$ respectivamente y $\tilde{Q}_{11}^*$, $\tilde{Q}_{22}^*$, $\tilde{R}_{11}^*$ y $\tilde{R}_{22}^*$ son matrices apropiadas. La función de coste total, por ser ésta aditiva, vendrá dada por

$$\tilde{J}_D = \tilde{J}_D^1 + \tilde{J}_D^2. \tag{2.77}$$

Así pues, la función de coste conjunta para el sistema expandido y desacoplado $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}$ de (2.75) será

$$\tilde{J}_D(\tilde{x}_0,\tilde{u}) = \int_0^\infty (\tilde{x}^t\tilde{Q}_D^*\tilde{x} + \tilde{u}^t\tilde{R}_D^*\tilde{u})\,dt, \tag{2.78}$$

donde

$$\tilde{Q}_D^* = \mathrm{diag}\{\tilde{Q}_{11}^*,\tilde{Q}_{22}^*\}, \qquad \tilde{R}_D^* = \mathrm{diag}\{\tilde{R}_{11}^*,\tilde{R}_{22}^*\}. \tag{2.79}$$

Observación: La elección de funciones de coste por separado se corresponde con el deseo de aplicar un control descentralizado, donde cada subsistema es controlado por sus propias entradas. Cuando se realiza un control descentralizado en el sistema expandido y desacoplado $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}$, se considera que la función de coste asociada al sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ y que hemos notado por $\tilde{J}$ en (2.71) es la propia función $\tilde{J}_D$ de (2.78). Asimismo, las matrices de peso Q^* y R^* de (2.65), por ser J una contracción de J_D, deberán verificar

$$Q^* = Q_D^* = V^t\tilde{Q}_D^*V, \qquad R^* = R_D^* = R^t\tilde{R}_D^*R. \tag{2.80}$$

El siguiente paso del proceso consiste en diseñar leyes de control descentralizadas para cada uno de los subsistemas, esto es:

$$\tilde{u}_1 = -\tilde{K}_{11}\tilde{x}_1, \qquad \tilde{u}_2 = -\tilde{K}_{22}\tilde{x}_2, \tag{2.81}$$

para los subsistemas desacoplados $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}^1$ y $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}^2$ dados en (2.74), donde

$$\tilde{K}_{11} = (\tilde{R}_{11}^*)^{-1}\tilde{B}_{11}^t\tilde{P}_{11}, \qquad \tilde{K}_{22} = (\tilde{R}_{22}^*)^{-1}\tilde{B}_{22}^t\tilde{P}_{22}, \tag{2.82}$$

siendo $\tilde{P}_{11}$, $\tilde{P}_{22}$ las matrices solución de las respectivas ecuaciones de Riccati para cada uno de los subsistemas:

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_{11}^t\tilde{P}_{11} + \tilde{P}_{11}\tilde{A}_{11} - \tilde{P}_{11}\tilde{B}_{11}(\tilde{R}_{11}^*)^{-1}\tilde{B}_{11}^t\tilde{P}_{11} + \tilde{Q}_{11}^* = 0, \\ &\tilde{A}_{22}^t\tilde{P}_{22} + \tilde{P}_{22}\tilde{A}_{22} - \tilde{P}_{22}\tilde{B}_{22}(\tilde{R}_{22}^*)^{-1}\tilde{B}_{22}^t\tilde{P}_{22} + \tilde{Q}_{22}^* = 0. \end{aligned} \tag{2.83}$$

De esta manera obtenemos una matriz diagonal $\tilde{P}_D = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{22} \end{pmatrix}$ y a partir de ésta la matriz $\tilde{K}_D = \begin{pmatrix} \tilde{K}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{22} \end{pmatrix}$, lo que permite elegir un vector de control óptimo $\tilde{u}_D = -\tilde{K}_D\tilde{x}$ que al ser contraído al sistema original $\mathbf{S}$ produce un vector de control $u_D = -K_D x$, donde la matriz de ganancia se obtiene de la relación $K_D = Q\tilde{K}_D V$.

Observación: El valor mínimo de la función de coste J cuando cerramos un sistema con distintos vectores de control no tiene porque coincidir. Lógicamente, necesitamos medir de alguna manera la diferencia existente entre estos valores, a fin de determinar el grado de optimalidad a la hora de aplicar un control centralizado mediante leyes de control descentralizadas diseñadas en el sistema expandido y desacoplado que posteriormente son contraídas e implementadas en el sistema inicial. Este tema lo tratamos a continuación.

2.8. Suboptimalidad

Siguiendo el proceso del diseño de leyes de control descentralizado observamos que estamos trabajando con tres sistemas, a saber, el sistema inicial $\mathbf{S}$, el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ y el sistema expandido y desacoplado $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}$. A cada uno de estos sistemas le asociamos una

función de coste lineal cuadrático de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{S},J) \quad &\longrightarrow \quad J(x_0,u) = \textstyle\int_0^\infty (x^t Q^* x + u^t R^* u),\\
(\tilde{\mathbf{S}},\tilde{J}) \quad &\longrightarrow \quad \tilde{J}(\tilde{x}_0,\tilde{u}) = \textstyle\int_0^\infty (\tilde{x}^t \tilde{Q}^* \tilde{x} + \tilde{u}^t \tilde{R}^* \tilde{u}),\\
(\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}},\tilde{J}_D) \quad &\longrightarrow \quad \tilde{J}_D(\tilde{x}_0,\tilde{u}) = \textstyle\int_0^\infty (\tilde{x}^t \tilde{Q}_D^* \tilde{x} + \tilde{u}^t \tilde{R}_D^* \tilde{u}).
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Tal y como se ha procedido en el apartado anterior, la función de coste que se le asigna al sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ es en realidad la función de coste del sistema expandido y desacoplado $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}$. De esta manera, podemos decir que $\tilde{J}$ y $\tilde{J}_D$ de (2.84) coinciden. Por otro lado, la función de coste asignada al sistema $\mathbf{S}$ está formada por unas matrices de peso Q^* y R^* obtenidas mediante las relaciones:

$$Q^* = V^t \tilde{Q}_D^* V, \qquad R^* = R^t \tilde{R}_D^* R, \tag{2.85}$$

lo que garantiza que J y $\tilde{J}$ son iguales si tenemos la precaución de considerar las restricciones impuestas por el Teorema 2.7. Sin embargo, si un sistema se cierra mediante una ley de control óptimo que ha sido diseñada en otro sistema distinto, el valor de coste obtenido generalmente variará, con lo cual no podremos hablar de control óptimo sino más bien de *control subóptimo*.

Sea pues la ley de control óptimo $\tilde{u}_D = -\tilde{K}_D \tilde{x}$ obtenida en el sistema expandido y desacoplado $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}$. El coste óptimo vendrá dado por

$$\tilde{J}^\circ(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0^t \tilde{P}_D \tilde{x}_0, \tag{2.86}$$

para el sistema desacoplado $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}$.

Sin embargo, cuando la ley de control descentralizada $\tilde{u}_D$ obtenida anteriormente se aplica al sistema interconectado $\tilde{\mathbf{S}}$ de (2.73) es, en general, no óptima. Si designamos por $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{C}}$ al sistema de lazo cerrado mediante la ley de control $\tilde{u}_D = -\tilde{K}_D \tilde{x}$, se tiene

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{C}}: \quad \dot{\tilde{x}} = (\tilde{A}_D - \tilde{B}_D \tilde{K}_D + \tilde{A}_C - \tilde{B}_C \tilde{K}_D)\tilde{x} = \hat{\tilde{A}} \tilde{x}, \tag{2.87}$$

con lo cual el valor de la función de coste obtenido será

$$\tilde{J}^\oplus(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0^t \tilde{H} \tilde{x}_0, \tag{2.88}$$

donde la matriz $\tilde{H}$ viene dada por

$$\tilde{H} = \int_0^\infty e^{\hat{\tilde{A}}^t t} \tilde{G}_D e^{\hat{\tilde{A}} t}\, dt, \tag{2.89}$$

que se puede calcular de la ecuación de Lyapunov

$$\hat{\tilde{A}}^t \tilde{H} + \tilde{H}\hat{\tilde{A}} = -\tilde{G}_D, \tag{2.90}$$

siendo

$$\tilde{G}_D = \tilde{Q}_D^* + \tilde{K}_D^t \tilde{R}_D^* \tilde{K}_D. \tag{2.91}$$

Esto nos obliga a introducir el concepto de *suboptimalidad* de una ley de control, cf. [30].

Definición 2.8 *Diremos que una ley de control*

$$\tilde{u}_D = -(\tilde{R}_D^*)^{-1} \tilde{B}_D^t \tilde{P}_D \tilde{x} \tag{2.92}$$

es subóptima de grado $\tilde{\mu}$ para el par $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{J})$, si existe un valor positivo $\tilde{\mu}$ tal que

$$\tilde{J}^{\oplus}(\tilde{x}_0) \leqslant \tilde{\mu}^{-1} \tilde{J}^{\circ}(\tilde{x}_0) \tag{2.93}$$

para todo $\tilde{x}_0$.

Comentario: El sistema de referencia en la Definición 2.8 es el sistema $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}$. Una consecuencia de este control descentralizado es una reducción de la dimensión del problema, puesto que en su diseño solamente se han considerado subsistemas de menor tamaño. Además, el control realizado preserva la autonomía de cada uno de los subsistemas. Es posible comparar este control local con el que se obtendría con un control global, en cuanto al coste se refiere. Para ello conviene conocer la relación entre la suboptimalidad de $\tilde{\mathbf{S}}$ y la del sistema original $\mathbf{S}$. Se puede observar que la ley de control $\tilde{u}_D$ de (2.92), una vez contraída al sistema $\mathbf{S}$, es subóptima para el par $(\mathbf{S}, J)$, donde J es una contracción de $\tilde{J}$ y con el mismo grado de suboptimalidad $\tilde{\mu}$.

Por lo tanto, (2.93) implica

$$J^{\oplus}(x_0) \leqslant \tilde{\mu}^{-1} J^{\circ}(x_0), \tag{2.94}$$

para todo x_0, donde $J^{\oplus}(x_0)$ denota el valor de la función de coste $J(x_0, u)$ para el sistema $\mathbf{S}$ y la ley de control (2.92) contraída a $\mathbf{S}$, siendo además

$$J^{\circ}(x_0) = \tilde{J}^{\circ}(V x_0). \tag{2.95}$$

Esta implicación permite aplicar a la expansión $\tilde{\mathbf{S}}$ las técnicas habituales para el diseño de leyes de control descentralizado y contraerlas para ser implementadas en el sistema inicial $\mathbf{S}$, el cual contiene subsistemas solapados.

Teorema 2.10 *Una ley de control* $\tilde{u}_D = -(\tilde{R}_D^*)^{-1}\tilde{B}_D^t\tilde{P}_D\tilde{x}$ *de (2.92) es subóptima para el par* $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{J})$ *con grado de suboptimalidad*

$$\tilde{\mu}^* = \lambda_M^{-1}\left(\tilde{H}\tilde{P}_D^{-1}\right) \tag{2.96}$$

si la matriz $\tilde{H}$ *de (2.89) es finita, siendo* λ_M *el mayor valor propio de la matriz* $\tilde{H}\tilde{P}_D^{-1}$. □

Comentario: $\tilde{\mu}^*$ es el mayor valor de $\tilde{\mu}$ para el cual se verifica (2.93). Es conocido que la matriz $\tilde{H}$ es finita siempre que la matriz $\hat{\tilde{A}}$ de (2.87) sea estable, es decir, si todos sus valores propios tienen parte real negativa. En tal caso, podemos calcular $\tilde{H}$ como la solución de la ecuación de Lyapunov

$$\hat{\tilde{A}}^t\tilde{H} + \tilde{H}\hat{\tilde{A}} = -\tilde{G}_D \tag{2.97}$$

(2.89) y después hallar $\tilde{\mu}^*$ del Teorema 2.10.

Teorema 2.11 *Una ley de control* $\tilde{u}_D = -(\tilde{R}_D^*)^{-1}\tilde{B}_D^t\tilde{P}_D\tilde{x}$ *de (2.92) es estabilizadora, si es subóptima y el par de matrices* $\left(\hat{\tilde{A}}, (\tilde{G}_D)^{\frac{1}{2}}\right)$ *es observable.* □

Observación: Decir que una ley de control es estabilizadora es lo mismo que decir que la matriz $\hat{\tilde{A}}$ es estable. Por otro lado, la observabilidad del par $\left(\tilde{A}, (\tilde{Q}_D^*)^{\frac{1}{2}}\right)$ implica la observabilidad del par $\left(\hat{\tilde{A}}, (\tilde{G}_D)^{\frac{1}{2}}\right)$ donde, de (2.73), $\tilde{A} = \tilde{A}_D + \tilde{A}_C$. Así pues, cuando la expansión $\tilde{\mathbf{S}}$ y su correspondiente función de coste $\tilde{J}$ satisfacen esta condición de observabilidad, la ley de control $\tilde{u}_D$ es subóptima si y sólo si es estabilizadora.

2.8.1. Caso Particular

Como ya sabemos, la estabilidad de un sistema **S** no presupone necesariamente la estabilidad del sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$. Esto ocurre justamente cuando la matriz correspondiente a la parte solapada del sistema **S** no es asintóticamente estable. Por ello, la suboptimalidad también podría verse afectada en estos casos.

Supongamos que una vez efectuada la expansión y después de cerrar el sistema mediante la ley de control descentralizado obtenida con las técnicas de descomposición comentadas

anteriormente, la matriz $\tilde{H}$ no exista. Entonces, la suboptimalidad de la ley de control diseñada para el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ falla. Con el fin de recuperar la suboptimalidad, contraemos la ley de control y el test de suboptimalidad al sistema de lazo cerrado del sistema inicial $\mathbf{S}$. Veamos cual es el valor del coste si en lugar de utilizar el vector de control $u = -Kx$ dado en (2.69), diseñado directamente en el sistema $\mathbf{S}$ y que optimiza la función de coste J, usamos el vector de control $u_D = -K_D x$. Esta será una manera de comparar costes. Para ello consideremos el sistema inicial de lazo cerrado $\mathbf{S}_\mathbf{c}$ mediante el vector $u_D = -K_D x$. Entonces,

$$\dot{x} = Ax + Bu_D = Ax + B(-Q\tilde{K}_D V x) = (A - BQ\tilde{K}_D V)x = \hat{A}x. \tag{2.98}$$

El coste para un cierto vector de estado inicial x_0 vendrá dado por:

$$\begin{aligned} J(x_0, u_D) &= \int_0^\infty (x^t Q_D^* x + u_D^t R_D^* u_D)\, dt = \int_0^\infty \left[x^t (Q_D^* + K_D^t R_D^* K_D) x\right]\, dt = \\ &= \int_0^\infty x^t G_D x\, dt = \int_0^\infty \left(e^{\hat{A}t}(x_0)\right)^t G_D \left(e^{\hat{A}t}(x_0)\right)\, dt = x_0^t \left[\int_0^\infty e^{\hat{A}^t t} G_D e^{\hat{A}t}\, dt\right] x_0 = \\ &= x_0^t H x_0, \end{aligned} \tag{2.99}$$

donde la matriz de Lyapunov $H = \int_0^\infty e^{\hat{A}^t t} G_D e^{\hat{A}t}\, dt$ la podemos calcular a través de la ecuación matricial

$$\hat{A}^t H + H\hat{A} = -G_D = -\left[Q_D^* + K_D^t R_D^* K_D\right]. \tag{2.100}$$

Así pues, el coste mínimo será en este caso

$$J^\oplus = x_0^t H x_0, \tag{2.101}$$

que podemos comparar con el que tendría el sistema inicial si no hubiésemos realizado ningún tipo de expansión-contracción ni de control descentralizado.

Definición 2.9 *Diremos que una ley de control*

$$u_D = -Q(\tilde{R}_D^*)^{-1} \tilde{B}_D^t \tilde{P}_D V x \tag{2.102}$$

es subóptima de grado μ para el par $(\mathbf{S}, J)$, si existe un valor positivo μ tal que

$$J^\oplus(x_0) \leqslant \mu^{-1} J^\circ(x_0), \tag{2.103}$$

para todo x_0.

Un resultado paralelo al dado por el Teorema (2.10) nos lo da el siguiente teorema.

Teorema 2.12 *Una ley de control* $u_D = -Q(\tilde{R}_D^*)^{-1}\tilde{B}_D^t\tilde{P}_D V x$ *es subóptima para el par* $(\mathbf{S}, J)$ *con grado de suboptimalidad*

$$\mu^* = \lambda_M^{-1}[H(V^t\tilde{P}_D V)^{-1}], \tag{2.104}$$

si y sólo si la matriz H *de (2.101) es finita.* □

Observación: El valor de μ^* es el mayor valor de μ para el cual se satisface (2.103). Si $\hat{A}$ es estable, la matriz H se puede obtener de la ecuación de Lyapunov

$$\hat{A}^t H + H\hat{A} = -G_D \tag{2.105}$$

y μ^* se puede calcular usando (2.104).

2.9. Control Centralizado

Hasta el momento hemos considerado que el sistema de referencia para evaluar la suboptimalidad era una colección de subsistemas desacoplados, es decir, sin tener en cuenta las interconexiones. La justificación no ha sido otra que la de poseer unos subsistemas totalmente autónomos. Sin embargo puede resultar interesante conocer cual es la relación entre el valor de la función de coste obtenido mediante la suma de los costes de los subsistemas desacoplados y el coste global que se obtendría si no se efectuara ningún tipo de expansión.

Para ello consideremos una vez más el sistema lineal

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \ \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.106}$$

y sea la función de coste asociada

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty (x^t Q^* x + u^t R^* u)\, dt. \tag{2.107}$$

Supongamos que el par (A, B) es controlable y que el par $\left(A, (Q^*)^{\frac{1}{2}}\right)$ es observable. La ley de control óptimo vendrá dada por

$$u = -(R^*)^{-1}B^t P x, \tag{2.108}$$

como en (2.69), donde P es una matriz simétrica y definida positiva, solución de la ecuación de Riccati

$$A^tP + PA - PB(R^*)^{-1}B^tP + Q^* = 0 \tag{2.109}$$

y cuyo valor óptimo será

$$\hat{J}^\circ(x_0) = x_0^tPx_0 \tag{2.110}$$

como en (2.66). La ley de control descentralizada

$$u_D = -Q(\tilde{R}_D^*)^{-1}\tilde{B}_D^t\tilde{P}_DVx \tag{2.111}$$

de (2.102) puede ser evaluada utilizando los costes $J^\oplus(x_0)$ y $\hat{J}^\circ(x_0)$ de (2.101) y (2.110), respectivamente, donde $J^\oplus(x_0)$ es el valor del coste cuando se aplica al sistema inicial **S** la ley de control (2.111).

Para medir la diferencia, en cuanto al coste se refiere, al aplicar o bien la ley de control $u = -(R^*)^{-1}B^tPx$ o bien $u_D = -Q(\tilde{R}_D^*)^{-1}\tilde{B}_D^t\tilde{P}_DVx$, consideremos el valor $\hat{\mu}$ para el cual se verifica

$$J^\oplus(x_0) \leqslant \hat{\mu}^{-1}\hat{J}^\circ(x_0), \tag{2.112}$$

para todo x_0. Dicho valor existirá si y sólo si la matriz H es finita, siendo H la solución de la ecuación

$$\hat{A}^tH + H\hat{A} = -G = -\left[Q^* + K_D^tR^*K_D\right]. \tag{2.113}$$

En este caso, el mayor valor $\hat{\mu}^*$ para el cual se verifica (2.112) viene dado por

$$\hat{\mu}^* = \lambda_M^{-1}(HP^{-1}), \tag{2.114}$$

que es similar a la expresión de $\tilde{\mu}^*$ dada en (2.96). Como puede observarse, el grado de suboptimalidad de una ley de control es distinta para sistemas de referencia diferentes.

Capítulo 3

Caracterización Matricial del Proceso de Expansión-Contracción

3.1. Introducción

En el capítulo anterior hemos dado un repaso a lo concerniente al Principio de Inclusión Generalizado con algunas de las consecuencias más importantes que de él se deducen. Hemos podido observar como se efectúa el proceso de expansión-contracción, a través de unas matrices complementarias M, N y L escogidas de forma muy concreta. Sin duda, con dichas matrices garantizamos que se verifiquen todas las propiedades requeridas para llevar a cabo el proceso de expansión-contracción. Pero, ¿por qué se toman estas matrices de esa manera? ¿Qué otras matrices M, N y L podríamos considerar? ¿Tienen todas ellas una estructura conocida? ¿Se puede expandir el sistema $\mathbf{S}$ de otro modo, con el fin de lograr un espacio $\tilde{\mathbf{S}}$ con unas características más "ventajosas"?

Estas cuestiones ya fueron apuntadas por Ikeda y Šiljak en *Generalized Decompositions of Dynamic Systems and Vector Lyapunov Functions*, cf. [27], en 1981 y posteriormente por Malinowski y Singh, en 1985, en su artículo *Controllability and Observability of Expanded Systems with Overlapping Decompositions*, cf. [44], cuando al estudiar el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ se observaba que dependiendo de la elección de las matrices complementarias se verificaban unas u otras propiedades.

En este capítulo veremos como pueden ser las matrices M, N y L que intervienen en el proceso de expansión a fin de que cumplan todas las condiciones del Principio de Inclusión Generalizado. Así logramos caracterizar los sistemas expandidos de forma que el diseñador tiene la posibilidad de escoger aquel que en cada circunstancia sea más favorable a sus intereses.

Trataremos también el problema de *control óptimo*, centrándonos en el caso de funciones de coste lineal cuadrático. Veremos que condiciones han de cumplir las expansiones a fin de que el coste sea el mismo para ambos sistemas, el original y el expandido. Finalmente, nos centraremos en la *contractibilidad*, y deduciremos cuando y en que condiciones podemos contraer una ley de control diseñada en el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ para ser implementada en el sistema inicial $\mathbf{S}$. Trabajaremos con la expansión a todos los niveles, es decir, del espacio de estado, de entrada y de salida, por ser este el caso más general.

3.2. Expansiones y Contracciones

Sean de nuevo los sistemas

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \ \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}: \ \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{x}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Vamos a seguir considerando a lo largo de este capítulo las siguientes matrices prototipo para el sistema $\mathbf{S}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} &= \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & n_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & n_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde se indican las dimensiones de cada una de las submatrices que intervienen, siendo $n_1+n_2+n_3=n,\ m_1+m_2+m_3=m,\ l_1+l_2+l_3=l,\ n_1+2n_2+n_3=\tilde{n}, m_1+2m_2+m_3=\tilde{m},\ l_1+2l_2+l_3=\tilde{l}$.

Siguiendo con la notación del capítulo anterior, el proceso de expansión y contracción se ajusta al siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{S} & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{S}} & \longrightarrow & \mathbf{S} \\ \mathbb{R}^{\mathbf{n}} & \xrightarrow{V} & \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{n}}} & \xrightarrow{U} & \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \\ \mathbb{R}^{\mathbf{m}} & \xrightarrow{R} & \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{m}}} & \xrightarrow{Q} & \mathbb{R}^{\mathbf{m}} \\ \mathbb{R}^{\mathbf{l}} & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{l}}} & \xrightarrow{S} & \mathbb{R}^{\mathbf{l}}. \end{array} \tag{3.4}$$

Por ser el Principio de Inclusión independiente de la base escogida, podemos considerar cambios de base. Representemos por T_A, T_A^{-1}, T_B, T_B^{-1}, T_C y T_C^{-1} las matrices de cambio en los espacios expandidos, siendo

$$T_A = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 & I_{n_2} \\ 0 & I_{n_2} & 0 & -I_{n_2} \\ 0 & 0 & I_{n_3} & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_A^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{n_2} & \frac{1}{2}I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_3} \\ 0 & \frac{1}{2}I_{n_2} & -\frac{1}{2}I_{n_2} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

las que definimos en el espacio $\mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{n}}}$.

Análogamente, para los espacios $\mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{m}}}$ y $\mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{l}}}$ correspondientes a la entrada y salida, respectivamente, definimos:

$$T_B = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_2} & 0 & I_{m_2} \\ 0 & I_{m_2} & 0 & -I_{m_2} \\ 0 & 0 & I_{m_3} & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_B^{-1} = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{m_2} & \frac{1}{2}I_{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_3} \\ 0 & \frac{1}{2}I_{m_2} & -\frac{1}{2}I_{m_2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

$$T_C = \begin{pmatrix} I_{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{l_2} & 0 & I_{l_2} \\ 0 & I_{l_2} & 0 & -I_{l_2} \\ 0 & 0 & I_{l_3} & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_C^{-1} = \begin{pmatrix} I_{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{l_2} & \frac{1}{2}I_{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{l_3} \\ 0 & \frac{1}{2}I_{l_2} & -\frac{1}{2}I_{l_2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Las matrices I_{n_i}, I_{m_i} y I_{l_i}, i=1,2,3, representan a las matrices identidad de órdenes n_i, m_i y l_i, respectivamente.

El nuevo esquema del proceso de expansión y contracción, para cada uno de los espacios,

vendrá dado por:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{S} & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{S}} & \longrightarrow & \tilde{\tilde{\mathbf{S}}} & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{S}} & \longrightarrow & \mathbf{S} \\
\mathbb{R}^{\mathbf{n}} & \xrightarrow{V} & \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{n}}} & \xrightarrow{T_A^{-1}} & \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{n}}} & \xrightarrow{T_A} & \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{n}}} & \xrightarrow{U} & \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \\
\mathbb{R}^{\mathbf{m}} & \xrightarrow{R} & \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{m}}} & \xrightarrow{T_B^{-1}} & \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{m}}} & \xrightarrow{T_B} & \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{m}}} & \xrightarrow{Q} & \mathbb{R}^{\mathbf{m}} \\
\mathbb{R}^{\mathbf{l}} & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{l}}} & \xrightarrow{T_C^{-1}} & \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{l}}} & \xrightarrow{T_C} & \mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{l}}} & \xrightarrow{S} & \mathbb{R}^{\mathbf{l}}.
\end{array} \tag{3.8}$$

Además, estos cambios de base así considerados solamente afectan a los espacios expandidos $\mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{n}}}$, $\mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{m}}}$ y $\mathbb{R}^{\tilde{\mathbf{l}}}$ pero no a los espacios originales $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ y $\mathbb{R}^{\mathbf{l}}$.

Supondremos, como es habitual, que las matrices V, U, R, Q, T y S son:

$$V = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_2} & 0 \\ 0 & I_{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_3} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} I_{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{l_2} & 0 \\ 0 & I_{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{l_3} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

A partir de estas matrices definimos:

$$\begin{aligned} U &= (V^t V)^{-1} V^t, \\ Q &= (R^t R)^{-1} R^t, \\ S &= (T^t T)^{-1} T^t \end{aligned} \tag{3.10}$$

como las pseudoinversas de V, R y T, respectivamente, resultando:

$$U = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I_{n_2} & \frac{1}{2} I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_3} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I_{m_2} & \frac{1}{2} I_{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m_3} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} I_{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I_{l_2} & \frac{1}{2} I_{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{l_3} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Observación: El Principio de Inclusión exige que $UV = I_n$, $QR = I_m$ y $ST = I_l$, pero no tenemos ninguna condición sobre los productos VU, RQ y TS. Con los cambios de base considerados, los productos UV, QR y ST continuarán siendo los mismos, pero además VU, RQ y TS adoptarán una forma que nos recuerda a las matrices identidad $I_{\tilde{n}}$, $I_{\tilde{m}}$ y $I_{\tilde{l}}$, respectivamente. Concretamente, si notamos por:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= T_A^{-1} V, \\ \bar{U} &= U T_A, \\ \bar{R} &= T_B^{-1} R, \\ \bar{Q} &= Q T_B, \\ \bar{T} &= T_C^{-1} T, \\ \bar{S} &= S T_C \end{aligned} \tag{3.12}$$

puede comprobarse fácilmente que $\bar{U}\bar{V} = I_n$ y $\bar{V}\bar{U} = \left(\begin{smallmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, donde cada submatriz (0) es de dimensión tal que la matriz resultante es de orden $\tilde{n}$. De forma análoga, $\bar{Q}\bar{R} = I_m$, $\bar{R}\bar{Q} = \left(\begin{smallmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; $\bar{S}\bar{T} = I_l$, $\bar{T}\bar{S} = \left(\begin{smallmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. La manera como calcular una base en la cual se verifica esta propiedad puede consultarse en [17], [18], [54].

Notación: A lo largo de este trabajo cuando las matrices carezcan de símbolo en su parte superior, como A, B, C, ... nos referiremos al sistema inicial, **S**. Cuando las matrices estén coronadas por una tilde $(\tilde{\ })$, por ejemplo $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, ... haremos referencia al sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$. Por último, cuando la notación sea del tipo barra horizontal con tilde, $(\bar{\tilde{\ }})$ léase $\bar{\tilde{A}}$, $\bar{\tilde{B}}$, $\bar{\tilde{C}}$, ... es que trabajamos en el sistema expandido $\bar{\tilde{\mathbf{S}}}$, considerando las bases definidas en (3.5) a (3.7).

A partir de aquí empieza el desarrollo del paso (4) del esquema dado en **Motivación y Objetivos de Tesis** del primer capítulo.

Sean los sistemas lineales:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \ \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{\mathbf{S}}}: \ \dot{\bar{\tilde{x}}} &= \bar{\tilde{A}}\bar{\tilde{x}} + \bar{\tilde{B}}\bar{\tilde{u}} \\ \bar{\tilde{y}} &= \bar{\tilde{C}}\bar{\tilde{x}} \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde las matrices $\bar{\tilde{A}}$, $\bar{\tilde{B}}$, $\bar{\tilde{C}}$, se suponen constantes y de dimensiones apropiadas. Los vectores $\bar{\tilde{x}}$, $\bar{\tilde{u}}$, $\bar{\tilde{y}}$ están definidos por:

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{x}} &= T_A^{-1}Vx = \bar{V}x, \\ \bar{\tilde{u}} &= T_B^{-1}Ru = \bar{R}u, \\ \bar{\tilde{y}} &= T_C^{-1}Ty = \bar{T}y. \end{aligned} \tag{3.15}$$

En las nuevas bases, las relaciones (2.10) las notaremos por:

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{A}} &= \bar{V}A\bar{U} + \bar{M}, \\ \bar{\tilde{B}} &= \bar{V}B\bar{Q} + \bar{N}, \\ \bar{\tilde{C}} &= \bar{T}C\bar{U} + \bar{L}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

siendo

$$\begin{aligned} \bar{M} &= T_A^{-1} M T_A, \\ \bar{N} &= T_A^{-1} N T_B, \\ \bar{L} &= T_C^{-1} L T_A, \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde recordemos que M, N y L son las matrices complementarias correspondientes a las relaciones dadas en (2.10).

De aquí deducimos además,

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{A}} &= T_A^{-1} \tilde{A} T_A, \\ \tilde{\bar{B}} &= T_A^{-1} \tilde{B} T_B, \\ \tilde{\bar{C}} &= T_C^{-1} \tilde{C} T_A. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Las condiciones (2.11) vendrán dadas ahora por:

$$\begin{array}{ll} a) & \bar{U}\bar{M}^i\bar{V} = 0, \\ b) & \bar{U}\bar{M}^{i-1}\bar{N}\bar{R} = 0, \\ c) & \bar{S}\bar{L}\bar{M}^{i-1}\bar{V} = 0, \\ d) & \bar{S}\bar{L}\bar{M}^{i-1}\bar{N}\bar{R} = 0 \end{array} \tag{3.19}$$

para todo i=$1, 2, \ldots, \tilde{n}$.

Vamos a estudiar las condiciones que se desprenden al considerar las relaciones (3.19) referidas al sistema $\tilde{\bar{\mathbf{S}}}$. En primer lugar veremos la forma que deben adoptar las matrices complementarias $\bar{M}$, $\bar{N}$ y $\bar{L}$.

Notación: A lo largo de este trabajo las matrices complementarias que vamos a utilizar supondremos que son de la forma y dimensión siguientes:

$$M = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_2 \\ n_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_2 & n_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.20}$$

$$N = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_2 \\ n_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & m_2 & m_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} \\ N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.21}$$

$$L = \begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_2 & n_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{3.22}$$

Usando las matrices T_A, T_B, T_C, T_A^{-1}, T_B^{-1}, T_C^{-1}, será conveniente trabajar con bloques matriciales. Por ello, supondremos

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

siendo $\bar{M}_{11}$ una matriz de orden n, $\bar{M}_{22}$ de orden $(\tilde{n}-n)$.

$$\bar{N} = \begin{pmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

siendo $\bar{N}_{11}$ una matriz de dimensión $n \times m$ y $\bar{N}_{22}$ de dimensión $(\tilde{n}-n)\times(\tilde{m}-m)$.

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} \bar{L}_{11} & \bar{L}_{12} \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

siendo $\bar{L}_{11}$ una matriz de dimensión $l \times n$ y $\bar{L}_{22}$ de dimensión $(\tilde{l}-l)\times(\tilde{n}-n)$.

En adelante será preciso conocer de que forma son las submatrices $\bar{M}_{ij}$, $\bar{N}_{ij}$ y $\bar{L}_{ij}$, i,j=1,2, que acabamos de definir. Esto nos lo proporciona la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *Consideremos las matrices* $\bar{M} = \left(\begin{smallmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{smallmatrix}\right)$, $\bar{N} = \left(\begin{smallmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{smallmatrix}\right)$ *y* $\bar{L} = \left(\begin{smallmatrix} \bar{L}_{11} & \bar{L}_{12} \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} \end{smallmatrix}\right)$ *como en (3.23) a (3.25). Entonces, las submatrices* $\bar{M}_{ij}$, $\bar{N}_{ij}$ *y* $\bar{L}_{ij}$, $i,j = 1,2$, *son de la for-*

ma:

$$
\begin{aligned}
\bar{M}_{11} &= \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12}+M_{13} & M_{14} \\ \frac{1}{2}(M_{21}+M_{31}) & \frac{1}{2}(M_{22}+M_{23}+M_{32}+M_{33}) & \frac{1}{2}(M_{24}+M_{34}) \\ M_{41} & M_{42}+M_{43} & M_{44} \end{pmatrix}, \\
\bar{M}_{12} &= \begin{pmatrix} M_{12}-M_{13} \\ \frac{1}{2}(M_{22}-M_{23}+M_{32}-M_{33}) \\ M_{42}-M_{43} \end{pmatrix}, \\
\bar{M}_{21} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (M_{21}-M_{31}) & (M_{22}+M_{23}-M_{32}-M_{33}) & (M_{24}-M_{34}) \end{pmatrix}, \\
\bar{M}_{22} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} M_{22}-M_{23}-M_{32}+M_{33} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{N}_{11} &= \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12}+N_{13} & N_{14} \\ \frac{1}{2}(N_{21}+N_{31}) & \frac{1}{2}(N_{22}+N_{23}+N_{32}+N_{33}) & \frac{1}{2}(N_{24}+N_{34}) \\ N_{41} & N_{42}+N_{43} & N_{44} \end{pmatrix}, \\
\bar{N}_{12} &= \begin{pmatrix} N_{12}-N_{13} \\ \frac{1}{2}(N_{22}-N_{23}+N_{32}-N_{33}) \\ N_{42}-N_{43} \end{pmatrix}, \\
\bar{N}_{21} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (N_{21}-N_{31}) & (N_{22}+N_{23}-N_{32}-N_{33}) & (N_{24}-N_{34}) \end{pmatrix}, \\
\bar{N}_{22} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} N_{22}-N_{23}-N_{32}+N_{33} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{L}_{11} &= \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12}+L_{13} & L_{14} \\ \frac{1}{2}(L_{21}+L_{31}) & \frac{1}{2}(L_{22}+L_{23}+L_{32}+L_{33}) & \frac{1}{2}(L_{24}+L_{34}) \\ L_{41} & L_{42}+L_{43} & L_{44} \end{pmatrix}, \\
\bar{L}_{12} &= \begin{pmatrix} L_{12}-L_{13} \\ \frac{1}{2}(L_{22}-L_{23}+L_{32}-L_{33}) \\ L_{42}-L_{43} \end{pmatrix}, \\
\bar{L}_{21} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (L_{21}-L_{31}) & (L_{22}+L_{23}-L_{32}-L_{33}) & (L_{24}-L_{34}) \end{pmatrix}, \\
\bar{L}_{22} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} L_{22}-L_{23}-L_{32}+L_{33} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Demostración: Para demostrar (3.26) utilizamos la relación $\bar{M} = T_A^{-1} M T_A$ dada en (3.17), siendo T_A y T_A^{-1} como en (3.5) y M como en (3.20). Entonces identificando los bloques de la matriz resultante de dicho producto con la matriz $\bar{M}$ que hemos definido en (3.23) por $\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}$, se obtiene (3.26).

De forma parecida, si usamos $\bar{N} = T_A^{-1} N T_B$ dada en (3.17), siendo T_A^{-1} y T_B como en (3.5) y (3.6), respectivamente, y N como en (3.21), entonces identificando los bloques de la matriz resultante de dicho producto con la matriz $\bar{N}$ de (3.24) dada por $\bar{N} = \begin{pmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}$, obtenemos las relaciones (3.27).

Finalmente, si tenemos en cuenta que $\bar{L} = T_C^{-1} L T_A$, por (3.17), siendo T_C^{-1} y T_A como en (3.7) y (3.5), respectivamente, y L como en (3.22), efectuando este producto e igualando la matriz así obtenida con la matriz $\bar{L}$ dada en (3.25), se obtiene (3.28) y con ello se concluye la demostración. $\square$

Estamos ahora en disposición de ver las condiciones que deben de cumplir las matrices complementarias $\bar{M}$, $\bar{N}$ y $\bar{L}$.

Proposición 3.2 *Consideremos el sistema dado en (3.13) y su correspondiente sistema expandido (3.14), verificando (3.15) a (3.19). Entonces:* $\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}$, *siendo* (0) *una matriz de orden n tal que* $\bar{M}_{12}\bar{M}_{22}^{i-2}\bar{M}_{21} = 0$, *para todo* i=$2,\ldots,\tilde{n}$.

Demostración: Sea $\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}$. Consideremos $\bar{U} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix}$, siendo (0) una matriz de dimensión $n\times(\tilde{n}-n)$ y $\bar{V} = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$, con (0) una matriz de dimensión $(\tilde{n}-n)\times n$. Imponiendo la primera condición de (3.19), tenemos que para i=1, $\bar{U}\bar{M}\bar{V} = 0$, con lo cual $\bar{M}_{11} = 0$. Calculando las potencias de la matriz $\bar{M}$, para μ=$2,\ldots,\tilde{n}$, se obtiene la expresión general

$$\bar{M}^{\mu} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{12}\bar{M}_{22}^{\mu-2}\bar{M}_{21} & \bar{M}_{12}\bar{M}_{22}^{\mu-1} \\ \bar{M}_{22}^{\mu-1}\bar{M}_{21} & \bar{M}_{22}^{\mu} + \sum_{j=0}^{j=\mu-2} \bar{M}_{22}^{j}\bar{M}_{21}\bar{M}_{12}\bar{M}_{22}^{\mu-2-j} \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Entonces, para i=$k\geqslant 2$, $\bar{U}\bar{M}^{k}\bar{V} = 0$, lo que implica $\bar{M}_{12}\bar{M}_{22}^{k-2}\bar{M}_{21} = 0$. Reiterando este proceso, cuando i=$\tilde{n}$ implica $\bar{U}\bar{M}^{\tilde{n}}\bar{V} = 0$, con lo cual $\bar{M}_{12}\bar{M}_{22}^{\tilde{n}-2}\bar{M}_{21} = 0$. $\square$

Corolario 3.1 *En las condiciones de la Proposición 3.2,* $\tilde{\bar{A}} = \begin{pmatrix} A & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}$.

Demostración: Por (3.16), $\tilde{\bar{A}} = \bar{V}A\bar{U} + \bar{M}$ y efectuando estas operaciones se obtiene $\tilde{\bar{A}} = \begin{pmatrix} A & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}$. $\square$

Proposición 3.3 *Consideremos el sistema dado en (3.13) y su correspondiente sistema expandido (3.14), verificando (3.15) a (3.19). Entonces:* $\bar{N} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{N}_{12} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}$, *siendo* (0) *una matriz de dimensión* $n\times m$ *tal que* $\bar{M}_{12}\bar{M}_{22}^{i-2}\bar{N}_{21} = 0$, *para todo* i=$2,\ldots,\tilde{n}$.

Demostración: Sea $\bar{N} = \begin{pmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}$. Sea $\bar{R} = \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$, donde (0) es una matriz de dimensión $(\tilde{m}-m)\times m$. Imponiendo la segunda condición de (3.19) y teniendo en cuenta los resultados de la Proposición 3.2, tenemos que para i=1, $\bar{U}\bar{N}\bar{R} = 0$, con lo cual $\bar{N}_{11} = 0$. Si consideramos $\bar{M}^{\mu}$ como en (3.29), vemos que para i=$k\geqslant 2$, $\bar{U}\bar{M}^{k-1}\bar{N}\bar{R} = 0$ y por ello $\bar{M}_{12}\bar{M}_{22}^{k-2}\bar{N}_{21} = 0$. Reiterando este proceso, cuando i=$\tilde{n}$, $\bar{U}\bar{M}^{\tilde{n}-1}\bar{N}\bar{R} = 0$ lo que implica que $\bar{M}_{12}\bar{M}_{22}^{\tilde{n}-2}\bar{N}_{21} = 0$. □

Corolario 3.2 *En las condiciones de la Proposición 3.3,* $\tilde{\bar{B}} = \begin{pmatrix} B & \bar{N}_{12} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}$.

Demostración: Por definición, $\tilde{\bar{B}} = \bar{V}B\bar{Q} + \bar{N}$. Tomando $\bar{Q} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \end{pmatrix}$, siendo (0) una matriz de dimensión $m\times(\tilde{m}-m)$, y efectuando estas operaciones, se obtiene $\tilde{\bar{B}} = \begin{pmatrix} B & \bar{N}_{12} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}$. □

Proposición 3.4 *Consideremos el sistema dado en (3.13) y su correspondiente sistema expandido (3.14), verificando (3.15) a (3.19). Entonces:* $\bar{L} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{L}_{12} \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} \end{pmatrix}$, *siendo* (0) *una matriz de dimensión* $l\times n$ *tal que* $\bar{L}_{12}\bar{M}_{22}^{i-2}\bar{M}_{21} = 0$, *para todo* i=$2,\ldots,\tilde{n}$.

Demostración: Sea $\bar{L} = \begin{pmatrix} \bar{L}_{11} & \bar{L}_{12} \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} \end{pmatrix}$. Sea $\bar{S} = \begin{pmatrix} I_l & 0 \end{pmatrix}$, donde (0) es una matriz de dimensión $l\times(\tilde{l}-l)$. Imponiendo la condición tercera de (3.19) y teniendo en cuenta los resultados de la Proposición 3.2, tenemos que para i=1, $\bar{S}\bar{L}\bar{V} = 0$, por lo tanto $\bar{L}_{11} = 0$. Reiterando este proceso y considerando $\bar{M}^{\mu}$ como en (3.29), tendremos que para i=$k\geqslant 2$, $\bar{S}\bar{L}\bar{M}^{k-1}\bar{V} = 0$ y en consecuencia $\bar{L}_{12}\bar{M}_{22}^{k-2}\bar{M}_{21} = 0$. Así, para i=$\tilde{n}$, $\bar{S}\bar{L}\bar{M}^{\tilde{n}-1}\bar{V} = 0$, de donde se deduce $\bar{L}_{12}\bar{M}_{22}^{\tilde{n}-2}\bar{M}_{21} = 0$. □

Corolario 3.3 *En las condiciones de la Proposición 3.4,* $\tilde{\bar{C}} = \begin{pmatrix} C & \bar{L}_{12} \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} \end{pmatrix}$.

Demostración: Por definición, $\tilde{\bar{C}} = \bar{T}C\bar{U} + \bar{L}$. Tomando $\bar{T} = \begin{pmatrix} I_l \\ 0 \end{pmatrix}$, siendo (0) una matriz de dimensión $(\tilde{l}-l)\times l$ y efectuando dichas operaciones, se obtiene la matriz $\tilde{\bar{C}} = \begin{pmatrix} C & \bar{L}_{12} \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} \end{pmatrix}$. □

Nos queda todavía la cuarta condición de (3.19), que aunque no modificará la forma de las matrices $\bar{M}$, $\bar{N}$ y $\bar{L}$ añadirá alguna restricción. Veámoslo.

Proposición 3.5 *Consideremos el sistema dado en (3.13) y su correspondiente sistema expandido (3.14), verificando (3.15) a (3.19). Sean* $\overline{M} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{M}_{12} \\ \overline{M}_{21} & \overline{M}_{22} \end{pmatrix}$, $\overline{N} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{N}_{12} \\ \overline{N}_{21} & \overline{N}_{22} \end{pmatrix}$ *y* $\overline{L} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{L}_{12} \\ \overline{L}_{21} & \overline{L}_{22} \end{pmatrix}$ *cumpliendo las Proposiciones 3.2, 3.3 y 3.4. Entonces:* $\overline{L}_{12}\overline{M}_{22}^{i-2}\overline{N}_{21} = 0$, *para todo* i=$2,\ldots,\tilde{n}+1$.

Demostración: Por la cuarta condición de (3.19) tenemos que para i=1, $\overline{S}\overline{L}\overline{N}\overline{R} = 0$, con lo cual $\overline{L}_{12}\overline{N}_{21} = 0$. Siguiendo con el proceso, si consideramos nuevamente $\overline{M}^{\mu}$ como en (3.29), tendremos que para i=$k \geqslant 2$, $\overline{S}\overline{L}\overline{M}^{k-1}\overline{N}\overline{R} = 0$, lo cual teniendo en cuenta los resultados de la Proposición 3.4 implica que $\overline{L}_{12}\overline{M}_{22}^{k-1}\overline{N}_{21} = 0$. Por último, cuando i=$\tilde{n}$, $\overline{S}\overline{L}\overline{M}^{\tilde{n}-1}\overline{N}\overline{R} = 0$ y así $\overline{L}_{12}\overline{M}_{22}^{\tilde{n}-1}\overline{N}_{21} = 0$, lo que concluye la demostración. □

Comentario: En las Proposiciones 3.2 a 3.5 hemos trabajado en unas nuevas bases. Las condiciones matriciales que nos exige el Principio de Inclusión Generalizado han quedado reducidas a restricciones submatriciales de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{M}_{12}\overline{M}_{22}^{i-2}\overline{M}_{21} = 0, \\ \overline{M}_{12}\overline{M}_{22}^{i-2}\overline{N}_{21} = 0, \\ \overline{L}_{12}\overline{M}_{22}^{i-2}\overline{M}_{21} = 0 \end{array}\right\} \text{para todo } i = 2,\ldots,\tilde{n}$$

$$\overline{L}_{12}\overline{M}_{22}^{i-2}\overline{N}_{21} = 0 \qquad \text{para todo } i = 2,\ldots,\tilde{n}+1, \tag{3.30}$$

donde $\overline{M} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{M}_{12} \\ \overline{M}_{21} & \overline{M}_{22} \end{pmatrix}$, $\overline{N} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{N}_{12} \\ \overline{N}_{21} & \overline{N}_{22} \end{pmatrix}$ y $\overline{L} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{L}_{12} \\ \overline{L}_{21} & \overline{L}_{22} \end{pmatrix}$. Ahora veremos como son las matrices complementarias M, N y L en las bases iniciales.

Teorema 3.1 *Consideremos el sistema dado en (3.1) y su correspondiente sistema expandido (3.2), verificando las relaciones (2.11). Entonces, las matrices complementarias M, N y L de (3.20) a (3.22), son de la forma:*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & -M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ -M_{21} & -(M_{22}+M_{23}+M_{33}) & M_{33} & -M_{24} \\ 0 & M_{42} & -M_{42} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & N_{12} & -N_{12} & 0 \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ -N_{21} & -(N_{22}+N_{23}+N_{33}) & N_{33} & -N_{24} \\ 0 & N_{42} & -N_{42} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & -L_{12} & 0 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ -L_{21} & -(L_{22}+L_{23}+L_{33}) & L_{33} & -L_{24} \\ 0 & L_{42} & -L_{42} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

debiendo verificar:

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{23}+M_{33} \\ M_{42} \end{pmatrix} \left(M_{22}+M_{33}\right)^{i-2} \begin{pmatrix} M_{21} & M_{22}+M_{23} & M_{24} \end{pmatrix} = 0, \\
\begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{23}+M_{33} \\ M_{42} \end{pmatrix} \left(M_{22}+M_{33}\right)^{i-2} \begin{pmatrix} N_{21} & N_{22}+N_{23} & N_{24} \end{pmatrix} = 0, \\
\begin{pmatrix} L_{12} \\ L_{23}+L_{33} \\ L_{42} \end{pmatrix} \left(M_{22}+M_{33}\right)^{i-2} \begin{pmatrix} M_{21} & M_{22}+M_{23} & M_{24} \end{pmatrix} = 0
\end{array}\right\} \textit{para todo } i = 2, \ldots, \tilde{n}$$

$$\begin{pmatrix} L_{12} \\ L_{23}+L_{33} \\ L_{42} \end{pmatrix} \left(M_{22}+M_{33}\right)^{i-2} \begin{pmatrix} N_{21} & N_{22}+N_{23} & N_{24} \end{pmatrix} = 0 \quad \textit{para todo } i = 2, \ldots, \tilde{n}+1. \tag{3.34}$$

Demostración: La Proposición 3.1 nos asegura que

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12}+M_{13} & M_{14} & M_{12}-M_{13} \\ \frac{1}{2}(M_{21}+M_{31}) & \frac{1}{2}(M_{22}+M_{23}+M_{32}+M_{33}) & \frac{1}{2}(M_{24}+M_{34}) & \frac{1}{2}(M_{22}-M_{23}+M_{32}-M_{33}) \\ M_{41} & M_{42}+M_{43} & M_{44} & M_{42}-M_{43} \\ \frac{1}{2}(M_{21}-M_{31}) & \frac{1}{2}(M_{22}+M_{23}-M_{32}-M_{33}) & \frac{1}{2}(M_{24}-M_{34}) & \frac{1}{2}(M_{22}-M_{23}-M_{32}+M_{33}) \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Por la Proposición 3.2, $\overline{M} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{M}_{12} \\ \overline{M}_{21} & \overline{M}_{22} \end{pmatrix}$. Al ser $\overline{M}_{11} = 0$, se obtienen de (3.26) las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
M_{11} &= 0, \\
M_{12} + M_{13} &= 0, \\
M_{14} &= 0, \\
\frac{1}{2}(M_{21} + M_{31}) &= 0, \\
\frac{1}{2}(M_{22} + M_{23} + M_{32} + M_{33}) &= 0, \\
\frac{1}{2}(M_{24} + M_{34}) &= 0, \\
M_{41} &= 0, \\
M_{42} + M_{43} &= 0, \\
M_{44} &= 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
M_{11} &= 0,\\
M_{13} &= -M_{12},\\
M_{14} &= 0,\\
M_{31} &= -M_{21},\\
M_{32} &= -(M_{22}+M_{23}+M_{33}),\\
M_{34} &= -M_{24},\\
M_{41} &= 0,\\
M_{43} &= -M_{42},\\
M_{44} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Sustituyendo estas relaciones en (3.20), la matriz general M quedará de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & -M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ -M_{21} & -(M_{22}+M_{23}+M_{33}) & M_{33} & -M_{24} \\ 0 & M_{42} & -M_{42} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

lo que prueba (3.31).

Para la matriz $\overline{N}$ sabemos de (3.17) que $\overline{N} = T_A^{-1} N T_B$. Entonces, efectuando dicho producto y comparando con la matriz $\overline{N} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{N}_{12} \\ \overline{N}_{21} & \overline{N}_{22} \end{pmatrix}$ dada por la Proposición 3.3, al ser $\overline{N}_{11} = 0$, se llega a un sistema de ecuaciones similar a (3.37), cambiando M_{ij} por N_{ij}, i, j=1,2,3,4. Sustituyendo las relaciones así obtenidas en (3.21) se deduce la matriz N de (3.32).

Análogamente para la matriz $\overline{L}$. Sea $\overline{L} = T_C^{-1} L T_A$, por (3.17). Por la Proposición 3.4, $\overline{L} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{L}_{12} \\ \overline{L}_{21} & \overline{L}_{22} \end{pmatrix}$. Al considerar $\overline{L}_{11} = 0$, se deducen de (3.28) unas relaciones equivalentes a (3.37) si se efectúa el cambio M_{ij} por L_{ij}, para i, j=1,2,3,4. Sustituyendo en (3.22) las relaciones obtenidas se llega a la matriz L de (3.33). Para ver que se cumplen las condiciones (3.34) no hay más que sustituir las condiciones obtenidas hasta el momento en las submatrices $\overline{M}_{ij}$, $\overline{N}_{ij}$ y $\overline{L}_{ij}$, i, j=1,2, dadas en (3.26)–(3.28) y obligar a que se verifique (3.30), lo que concluye la demostración. □

Los siguientes corolarios nos dan la forma que adoptan las matrices $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$ a partir de las matrices complementarias dadas por el Teorema 3.1.

Corolario 3.4 *En las condiciones del Teorema 3.1, la matriz $\tilde{A}$ será de la forma*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \frac{1}{2}A_{12}+M_{12} & \frac{1}{2}A_{12}-M_{12} & A_{13} \\ A_{21}+M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{22} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{23} & A_{23}+M_{24} \\ A_{21}-M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}-(M_{22}+M_{23}+M_{33}) & \frac{1}{2}A_{22}+M_{33} & A_{23}-M_{24} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32}+M_{42} & \frac{1}{2}A_{32}-M_{42} & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

Demostración: Por definición, $\tilde{A} = VAU + M$ y utilizando la expresión de la matriz A dada en (3.3) y de la matriz M de (3.31), se concluye el resultado. □

Corolario 3.5 *En las condiciones del Teorema 3.1, la matriz $\tilde{B}$ será de la forma*

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & \frac{1}{2}B_{12}+N_{12} & \frac{1}{2}B_{12}-N_{12} & B_{13} \\ B_{21}+N_{21} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{22} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{23} & B_{23}+N_{24} \\ B_{21}-N_{21} & \frac{1}{2}B_{22}-(N_{22}+N_{23}+N_{33}) & \frac{1}{2}B_{22}+N_{33} & B_{23}-N_{24} \\ B_{31} & \frac{1}{2}B_{32}+N_{42} & \frac{1}{2}B_{32}-N_{42} & B_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Demostración: Teniendo en cuenta que $\tilde{B} = VBQ + N$ y utilizando la matriz N dada en (3.32) y la matriz B definida en (3.3), se demuestra el corolario. □

Corolario 3.6 *En las condiciones del Teorema 3.1, la matriz $\tilde{C}$ será de la forma*

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & \frac{1}{2}C_{12}+L_{12} & \frac{1}{2}C_{12}-L_{12} & C_{13} \\ C_{21}+L_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{23} & C_{23}+L_{24} \\ C_{21}-L_{21} & \frac{1}{2}C_{22}-(L_{22}+L_{23}+L_{33}) & \frac{1}{2}C_{22}+L_{33} & C_{23}-L_{24} \\ C_{31} & \frac{1}{2}C_{32}+L_{42} & \frac{1}{2}C_{32}-L_{42} & C_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Demostración: Teniendo en cuenta que $\tilde{C} = TCU + L$ y siendo L como en (3.33) y C la matriz dada en (3.3), se concluye la demostración. □

Comentario: Hemos hallado la forma que deben adoptar y las condiciones que deben de cumplir las matrices complementarias M, N y L a fin de que se verifique el Principio de Inclusión Generalizado. Como puede observarse, las condiciones (3.30) solamente afectan a unas cuantas submatrices. Esto nos ofrece una mayor flexibilidad a la hora de escoger las matrices complementarias. Al tratar con sistemas de gran escala las dimensiones de M, N y L pueden ser considerables y por ello, todo lo que suponga poder trabajar con matrices de menor tamaño ya sea para el estudio de propiedades como para el diseño de determinadas leyes de control, deberá ser tenido en cuenta.

Partiendo de un teorema dado en *An Inclusion Principle for Dynamic Systems*, cf. [31], que nos asegura que un sistema $\tilde{\mathbf{S}} \supset \mathbf{S}$ si y sólo si existe un sistema $\bar{\mathbf{S}}$ tal que $\tilde{\mathbf{S}} \supset \bar{\mathbf{S}} \supset \mathbf{S}$, donde $\bar{\mathbf{S}}$ es una restricción (agregación) de $\tilde{\mathbf{S}}$ y $\mathbf{S}$ es una agregación (restricción) de $\bar{\mathbf{S}}$ podríamos llegar, mediante un proceso previo de construcción del sistema $\bar{\mathbf{S}}$, a determinar la forma de la matriz complementaria M dada en (3.31). De forma análoga se podría utilizar para hallar la expresión matricial de N y L si dicho teorema se ampliara al caso de expansión-contracción del espacio de entrada y de salida.

Aun así, las condiciones matriciales exigidas por el Principio de Inclusión Generalizado no se traducen en otras de más simples a partir de dicho teorema. Por este motivo, una posible clasificación de las matrices complementarias como la que se presenta en este capítulo sería, a nuestro entender, difícil de obtener. El procedimiento seguido en nuestro trabajo permite caracterizar la estructura de las matrices M, N y L y redefinir las condiciones exigidas por el Principio de Inclusión en términos submatriciales.

3.3. Control Óptimo

Uno de los problemas que a menudo interesa abordar es el de la optimización. Nos centraremos en el diseño de leyes de control óptimo basado en funciones de coste lineal cuadrático. Se trata de elegir un vector de control de manera que se minimice una cierta función de coste, todo ello en el marco del proceso de expansión-contracción y por lo tanto del Principio de Inclusión Generalizado.

En primer lugar estudiaremos cuales son las condiciones que nos garantizan que el par $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{J})$ incluye a $(\mathbf{S}, J)$. Una vez obtenidas dichas condiciones caracterizaremos dicha inclusión en términos de matrices complementarias.

Sea $\tilde{\mathbf{S}}$ el sistema expandido de $\mathbf{S}$, al cual asociamos la función de coste

$$\tilde{J}(\tilde{x}_0, \tilde{u}) = \int_0^\infty (\tilde{x}^t \tilde{Q}^* \tilde{x} + \tilde{u}^t \tilde{R}^* \tilde{u})\, dt, \tag{3.42}$$

donde $\tilde{Q}^*$ es una matriz simétrica, constante, semidefinida positiva y de orden $\tilde{n}$. La matriz $\tilde{R}^*$ la supondremos también simétrica, constante, definida positiva y de orden $\tilde{m}$. Consideremos $\tilde{x}_0 = T_A^{-1} V x_0 = \bar{V} x_0$, $\tilde{u} = T_B^{-1} R u = \bar{R} u$, como en (3.15).

Las relaciones (2.25) se convertirán ahora en:

$$\begin{aligned}
\tilde{\bar{A}} &= \bar{V}A\bar{U} + \bar{M}, \\
\tilde{\bar{B}} &= \bar{V}B\bar{Q} + \bar{N}, \\
\tilde{\bar{Q}}^* &= \bar{U}^t Q^* \bar{U} + \bar{M}_{Q^*}, \\
\tilde{\bar{R}}^* &= \bar{Q}^t R^* \bar{Q} + \bar{N}_{R^*}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

siendo

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{Q^*} &= T_A^t M_{Q^*} T_A, \\
\bar{N}_{R^*} &= T_B^t N_{R^*} T_B, \\
\tilde{\bar{Q}}^* &= T_A^t \tilde{Q}^* T_A, \\
\tilde{\bar{R}}^* &= T_B^t \tilde{R}^* T_B
\end{aligned} \tag{3.44}$$

las cuales nos expresan las relaciones matriciales entre el par $(\tilde{\bar{\mathbf{S}}}, \tilde{\bar{J}})$ y el par $(\mathbf{S}, J)$.

Notación: Las matrices complementarias que vamos a utilizar en esta sección, M_{Q^*} y N_{R^*} dadas en (2.25) las supondremos de la forma y dimensión siguientes:

$$M_{Q^*} = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_2 \\ n_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_2 & n_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} M_{Q^*_{11}} & M_{Q^*_{12}} & M_{Q^*_{13}} & M_{Q^*_{14}} \\ M^t_{Q^*_{12}} & M_{Q^*_{22}} & M_{Q^*_{23}} & M_{Q^*_{24}} \\ M^t_{Q^*_{13}} & M^t_{Q^*_{23}} & M_{Q^*_{33}} & M_{Q^*_{34}} \\ M^t_{Q^*_{14}} & M^t_{Q^*_{24}} & M^t_{Q^*_{34}} & M_{Q^*_{44}} \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.45}$$

y

$$N_{R^*} = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_2 \\ m_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & m_2 & m_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} N_{R^*_{11}} & N_{R^*_{12}} & N_{R^*_{13}} & N_{R^*_{14}} \\ N^t_{R^*_{12}} & N_{R^*_{22}} & N_{R^*_{23}} & N_{R^*_{24}} \\ N^t_{R^*_{13}} & N^t_{R^*_{23}} & N_{R^*_{33}} & N_{R^*_{34}} \\ N^t_{R^*_{14}} & N^t_{R^*_{24}} & N^t_{R^*_{34}} & N_{R^*_{44}} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.46}$$

de órdenes $\tilde{n}$ y $\tilde{m}$, respectivamente.

Observación: La forma simétrica que adoptan estas dos matrices viene impuesta por el hecho de ser simétricas $\tilde{Q}^*$ y $\tilde{R}^*$ de (2.25). Lógicamente, los bloques diagonales $M_{Q^*_{ii}}$ y $N_{R^*_{ii}}$, i=$1,2,3,4$, están a su vez formados por matrices simétricas.

Trabajando con bloques matriciales, como viene siendo habitual en este capítulo, definimos:

$$\bar{M}_{Q^*} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{Q^*_{11}} & \bar{M}_{Q^*_{12}} \\ \bar{M}^t_{Q^*_{12}} & \bar{M}_{Q^*_{22}} \end{pmatrix}, \tag{3.47}$$

siendo $\bar{M}_{Q^*_{11}}$ una matriz simétrica de orden n y $\bar{M}_{Q^*_{22}}$ de orden $(\tilde{n}-n)$ y la matriz

$$\bar{N}_{R^*} = \begin{pmatrix} \bar{N}_{R^*_{11}} & \bar{N}_{R^*_{12}} \\ \bar{N}^t_{R^*_{12}} & \bar{N}_{R^*_{22}} \end{pmatrix}, \tag{3.48}$$

donde $\bar{N}_{R^*_{11}}$ es una matriz simétrica de orden m y $\bar{N}_{R^*_{22}}$ de orden $(\tilde{m}-m)$.

La forma que adoptan las submatrices de $\bar{M}_{Q^*}$ y $\bar{N}_{R^*}$ nos la da la siguiente proposición.

Proposición 3.6 *Sean* $\bar{M}_{Q^*} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{Q^*_{11}} & \bar{M}_{Q^*_{12}} \\ \bar{M}^t_{Q^*_{12}} & \bar{M}_{Q^*_{22}} \end{pmatrix}$ *y* $\bar{N}_{R^*} = \begin{pmatrix} \bar{N}_{R^*_{11}} & \bar{N}_{R^*_{12}} \\ \bar{N}^t_{R^*_{12}} & \bar{N}_{R^*_{22}} \end{pmatrix}$. *Entonces, las submatrices* $\bar{M}_{Q^*_{ij}}$ *y* $\bar{N}_{R^*_{ij}}$, $i, j=1,2$, *son de la forma:*

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{Q^*_{11}} &= \begin{pmatrix} M_{Q^*_{11}} & M_{Q^*_{12}}+M_{Q^*_{13}} & M_{Q^*_{14}} \\ M^t_{Q^*_{12}}+M^t_{Q^*_{13}} & M_{Q^*_{22}}+M_{Q^*_{23}}+M^t_{Q^*_{23}}+M_{Q^*_{33}} & M_{Q^*_{24}}+M_{Q^*_{34}} \\ M^t_{Q^*_{14}} & M^t_{Q^*_{24}}+M^t_{Q^*_{34}} & M_{Q^*_{44}} \end{pmatrix}, \\
\bar{M}_{Q^*_{12}} &= \begin{pmatrix} M_{Q^*_{12}}-M_{Q^*_{13}} \\ M_{Q^*_{22}}-M_{Q^*_{23}}+M^t_{Q^*_{23}}-M_{Q^*_{33}} \\ M^t_{Q^*_{24}}-M^t_{Q^*_{34}} \end{pmatrix}, \\
\bar{M}^t_{Q^*_{12}} &= \begin{pmatrix} M^t_{Q^*_{12}}-M^t_{Q^*_{13}} & M_{Q^*_{22}}+M_{Q^*_{23}}-M^t_{Q^*_{23}}-M_{Q^*_{33}} & M_{Q^*_{24}}-M_{Q^*_{34}} \end{pmatrix}, \\
\bar{M}_{Q^*_{22}} &= \begin{pmatrix} M_{Q^*_{22}}-M_{Q^*_{23}}-M^t_{Q^*_{23}}+M_{Q^*_{33}} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
\bar{N}_{R^*_{11}} &= \begin{pmatrix} N_{R^*_{11}} & N_{R^*_{12}}+N_{R^*_{13}} & N_{R^*_{14}} \\ N^t_{R^*_{12}}+N^t_{R^*_{13}} & N_{R^*_{22}}+N_{R^*_{23}}+N^t_{R^*_{23}}+N_{R^*_{33}} & N_{R^*_{24}}+N_{R^*_{34}} \\ N^t_{R^*_{14}} & N^t_{R^*_{24}}+N^t_{R^*_{34}} & N_{R^*_{44}} \end{pmatrix}, \\
\bar{N}_{R^*_{12}} &= \begin{pmatrix} N_{R^*_{12}}-N_{R^*_{13}} \\ N_{R^*_{22}}-N_{R^*_{23}}+N^t_{R^*_{23}}-N_{R^*_{33}} \\ N^t_{R^*_{24}}-N^t_{R^*_{34}} \end{pmatrix}, \\
\bar{N}^t_{R^*_{12}} &= \begin{pmatrix} N^t_{R^*_{12}}-N^t_{R^*_{13}} & N_{R^*_{22}}+N_{R^*_{23}}-N^t_{R^*_{23}}-N_{R^*_{33}} & N_{R^*_{24}}-N_{R^*_{34}} \end{pmatrix}, \\
\bar{N}_{R^*_{22}} &= \begin{pmatrix} N_{R^*_{22}}-N_{R^*_{23}}-N^t_{R^*_{23}}+N_{R^*_{33}} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Demostración: Para demostrar (3.49) utilizamos la relación $\bar{M}_{Q^*} = T_A^t M_{Q^*} T_A$ dada en (3.44), siendo T_A como en (3.5) y M_{Q^*} como en (3.45). Entonces identificando los bloques de la matriz resultante de dicho producto con la matriz $\bar{M}_{Q^*}$ que hemos definido en (3.47) se obtiene (3.49).

De forma parecida, si usamos $\bar{N}_{R^*} = T_B^t N_{R^*} T_B$ dada en (3.44), siendo T_B como en (3.6) y N_{R^*} como en (3.46), identificando los bloques de la matriz resultante de dicho producto con la matriz $\bar{N}_{R^*}$ dada en (3.48), obtenemos las relaciones (3.50). □

Estamos ahora en condiciones de formular el siguiente teorema, en el cual se supone que $\tilde{\mathbf{S}} \supset \mathbf{S}$.

Teorema 3.2 *Sean los sistemas (3.13) y (3.14) junto con sus funciones de coste respectivas. Entonces,* $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{J}) \supset (\mathbf{S}, J)$ *si se cumple uno de los dos bloques de condiciones:*

$$\begin{aligned} &a) \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{M}_{12} \\ 0 & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}, \\ &b) \quad \bar{N} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{N}_{12} \\ 0 & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}, \\ &c) \quad \bar{M}_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{M}_{Q^*_{12}} \\ \bar{M}^t_{Q^*_{12}} & \bar{M}_{Q^*_{22}} \end{pmatrix}, \\ &d) \quad \bar{N}_{R^*} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{N}_{R^*_{12}} \\ \bar{N}^t_{R^*_{12}} & \bar{N}_{R^*_{22}} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.51}$$

o bien

a') $\bar{M}_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_{Q^*_{22}} \end{pmatrix}$ *tal que*

$$\begin{aligned} \bar{M}_{Q^*_{22}} \bar{M}_{22}^{i-2} \bar{M}_{21} = 0, \ \textit{para todo } i = 2, \ldots, \tilde{n}, \\ \bar{M}_{Q^*_{22}} \bar{M}_{22}^{i-2} \bar{N}_{21} = 0, \ \textit{para todo } i = 2, \ldots, \tilde{n}+1, \end{aligned} \tag{3.52}$$

b') $\bar{N}_{R^*} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{N}_{R^*_{12}} \\ \bar{N}^t_{R^*_{12}} & \bar{N}_{R^*_{22}} \end{pmatrix}$.

Demostración: Consideremos el primer conjunto de condiciones dados por (2.26). En la base que estamos utilizando será:

a) $\bar{M}\bar{V} = 0$, con lo cual $\bar{M}_{21} = 0$ y por lo tanto $\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{M}_{12} \\ 0 & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}$,

b) $\bar{N}\bar{R} = 0$, y por ello $\bar{N}_{21} = 0$, siendo $\bar{N} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{N}_{12} \\ 0 & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}$,

c) $\bar{V}^t \bar{M}_{Q^*} \bar{V} = 0$, por lo tanto $\bar{M}_{Q^*_{11}} = 0$ y entonces $\bar{M}_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{M}_{Q^*_{12}} \\ \bar{M}^t_{Q^*_{12}} & \bar{M}_{Q^*_{22}} \end{pmatrix}$,

d) $\bar{R}^t \bar{N}^*_R \bar{R} = 0$, en consecuencia $\bar{N}_{R^*} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{N}_{R^*_{12}} \\ \bar{N}^t_{R^*_{12}} & \bar{N}_{R^*_{22}} \end{pmatrix}$ por ser $\bar{N}_{R^*_{11}} = 0$.

De esta manera queda probado el primer bloque de condiciones de (3.51).

a') Consideremos el segundo bloque de condiciones dado por 2.27. En la base que estamos utilizando se traducirán en:

$$\bar{U}\bar{M}^i\bar{V} = 0, \text{ que se verifica por la primera condición de (3.19)},$$
$$\bar{U}\bar{M}^{i-1}\bar{N}\bar{R} = 0, \text{ que se verifica por la segunda condición de (3.19)}.$$

La condición $\bar{M}_{Q^*}\bar{M}^{i-1}\bar{V}$=0, implica que para i=1, $\bar{M}_{Q^*}\bar{V} = 0$, con lo cual se obtiene $\bar{M}_{Q^*_{11}}$=0, $\bar{M}^t_{Q^*_{12}}$=0. En general, considerando $\bar{M}^\mu$ como en (3.29), tenemos que para i=$k \geqslant 2$, $\bar{M}_{Q^*}\bar{M}^{k-1}\bar{V} = 0$, con lo cual $\bar{M}_{Q^*_{22}}\bar{M}^{k-2}_{22}\bar{M}_{21} = 0$. Reiterando este proceso cuando i=$\tilde{n}$, $\bar{M}_{Q^*}\bar{M}^{\tilde{n}-1}\bar{V} = 0$, es decir, $\bar{M}_{Q^*_{22}}\bar{M}^{\tilde{n}-2}_{22}\bar{M}_{21} = 0$. Por lo tanto, $\bar{M}_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_{Q^*_{22}} \end{pmatrix}$ verificando $\bar{M}_{Q^*_{22}}M^{i-2}_{22}\bar{M}_{21} = 0$, para todo i=$2,\ldots,\tilde{n}$.

La cuarta condición de (2.27) nos dice que $\bar{M}_{Q^*}\bar{M}^{i-1}\bar{N}\bar{R} = 0$. De este producto matricial deducimos para i=1, $\bar{M}_{Q^*}\bar{N}\bar{R} = 0$, es decir $\bar{M}_{Q^*_{22}}\bar{N}_{21} = 0$. Reiterando este proceso y considerando $\bar{M}^\mu$ como en (3.29), tendremos que cuando i=$k \geqslant 2$, $\bar{M}_{Q^*}\bar{M}^{k-1}\bar{N}\bar{R} = 0$, con lo cual $\bar{M}_{Q^*_{22}}\bar{M}^{k-1}_{22}\bar{N}_{21} = 0$, si tenemos en cuenta que $\bar{M}_{Q^*}\bar{M}^{i-1}\bar{V} = 0$. Por último, para i=$\tilde{n}$, $\bar{M}_{Q^*}\bar{M}^{\tilde{n}-1}\bar{N}\bar{R} = 0$ y en consecuencia $\bar{M}_{Q^*_{22}}\bar{M}^{\tilde{n}-1}_{22}\bar{N}_{21} = 0$. Por lo tanto, $\bar{M}_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_{Q^*_{22}} \end{pmatrix}$, verificando $\bar{M}_{Q^*_{22}}\bar{M}^{i-2}_{22}\bar{N}_{21} = 0$, para todo i=$2,\ldots,\tilde{n}+1$. De esta forma deducimos *a')* del teorema.

Por la quinta condición de (2.27), $\bar{R}^t\bar{N}^*_R\bar{R} = 0$, lo que implica que $\bar{N}_{R^*_{11}} = 0$ y por lo tanto $\bar{N}_{R^*} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{N}_{R^*_{12}} \\ \bar{N}^t_{R^*_{12}} & \bar{N}_{R^*_{22}} \end{pmatrix}$. Queda pues demostrado *b')* y con ello el teorema. □

Comentario: De nuevo regresamos al sistema inicial **S** para dar las condiciones matriciales bajo las cuales $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{J}) \supset (\mathbf{S}, J)$. De esta manera podremos escoger directamente las matrices M, N, M_{Q^*} y N_{R^*} que nos garantizan la inclusión anterior. Evidentemente, el

teorema que se da a continuación también hace referencia a dos bloques de condiciones suficientes para que $(\tilde{\mathbf{S}},\tilde{J}) \supset (\mathbf{S},J)$. Estos dos bloques de condiciones son además independientes entre sí, puesto que son equivalentes a los dados en el Teorema 2.7 visto en el Capítulo 2. Veámoslo.

Teorema 3.3 *Sean los sistemas (3.1) y (3.2) junto con sus funciones de coste respectivas. Entonces,* $(\tilde{\mathbf{S}},\tilde{J}) \supset (\mathbf{S},J)$ *si se verifica uno de los dos bloques de condiciones:*

$$
\begin{aligned}
&a) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & -M_{12} & 0 \\ 0 & M_{22} & -M_{22} & 0 \\ 0 & M_{32} & -M_{32} & 0 \\ 0 & M_{42} & -M_{42} & 0 \end{pmatrix}, \\
&b) \quad N = \begin{pmatrix} 0 & N_{12} & -N_{12} & 0 \\ 0 & N_{22} & -N_{22} & 0 \\ 0 & N_{32} & -N_{32} & 0 \\ 0 & N_{42} & -N_{42} & 0 \end{pmatrix}, \\
&c) \quad M_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & M_{Q^*_{12}} & -M_{Q^*_{12}} & 0 \\ M^t_{Q^*_{12}} & -M_{Q^*_{23}} & -M^t_{Q^*_{23}} & -M_{Q^*_{33}} & M_{Q^*_{23}} & M_{Q^*_{24}} \\ -M^t_{Q^*_{12}} & M^t_{Q^*_{23}} & M_{Q^*_{33}} & -M_{Q^*_{24}} \\ 0 & M^t_{Q^*_{24}} & -M^t_{Q^*_{24}} & 0 \end{pmatrix}, \\
&d) \quad N_{R^*} = \begin{pmatrix} 0 & N_{R^*_{12}} & -N_{R^*_{12}} & 0 \\ N^t_{R^*_{12}} & -N_{R^*_{23}} & -N^t_{R^*_{23}} & -N_{R^*_{33}} & N_{R^*_{23}} & N_{R^*_{24}} \\ -N^t_{R^*_{12}} & N^t_{R^*_{23}} & N_{R^*_{33}} & -N_{R^*_{24}} \\ 0 & N^t_{R^*_{24}} & -N^t_{R^*_{24}} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

o bien

$$
a') \quad M_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{Q^*_{22}} & -M_{Q^*_{22}} & 0 \\ 0 & -M_{Q^*_{22}} & M_{Q^*_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ cumpliendo las relaciones:}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(M_{Q^*_{22}}\right)\left(M_{22}+M_{33}\right)^{i-2}\begin{pmatrix} M_{21} & M_{22}+M_{23} & M_{24} \end{pmatrix} &= 0, \text{ para todo } i = 2,\ldots,\tilde{n}, \\
\left(M_{Q^*_{22}}\right)\left(M_{22}+M_{33}\right)^{i-2}\begin{pmatrix} N_{21} & N_{22}+N_{23} & N_{24} \end{pmatrix} &= 0, \text{ para todo } i = 2,\ldots,\tilde{n}+1,
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

$$
b') \quad N_{R^*} = \begin{pmatrix} 0 & N_{R^*_{12}} & -N_{R^*_{12}} & 0 \\ N^t_{R^*_{12}} & -N_{R^*_{23}} & -N^t_{R^*_{23}} & -N_{R^*_{33}} & N_{R^*_{23}} & N_{R^*_{24}} \\ -N^t_{R^*_{12}} & N^t_{R^*_{23}} & N_{R^*_{33}} & -N_{R^*_{24}} \\ 0 & N^t_{R^*_{24}} & -N^t_{R^*_{24}} & 0 \end{pmatrix}.
$$

Demostración: Consideremos el primer conjunto de condiciones dados por el Teorema 3.2.
a) Al ser $\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{M}_{12} \\ 0 & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}$ implica $\bar{M}_{11} = 0$ y $\bar{M}_{21} = 0$. Entonces, $\bar{M}_{11} = 0$ nos proporciona el sistema de ecuaciones (3.37) y $\bar{M}_{21} = 0$ el sistema:

$$\begin{aligned} M_{21} - M_{31} &= 0, \\ M_{22} + M_{23} - M_{32} - M_{33} &= 0, \\ M_{24} - M_{34} &= 0 \end{aligned} \tag{3.55}$$

obtenido de (3.26). Sustituyendo dichas relaciones en la matriz M dada en (3.20) obtenemos la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & -M_{12} & 0 \\ 0 & M_{22} & -M_{22} & 0 \\ 0 & M_{32} & -M_{32} & 0 \\ 0 & M_{42} & -M_{42} & 0 \end{pmatrix}$ del teorema.

b) $\bar{N} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{N}_{12} \\ 0 & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}$, es decir, $\bar{N}_{11} = 0$, lo que implica el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} N_{11} &= 0, \\ N_{13} &= -N_{12}, \\ N_{14} &= 0, \\ N_{31} &= -N_{21}, \\ N_{32} &= -(N_{22} + N_{23} + N_{33}), \\ N_{34} &= -N_{24}, \\ N_{41} &= 0, \\ N_{43} &= -N_{42}, \\ N_{44} &= 0. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Por otro lado, al ser $\bar{N}_{21} = 0$, se obtienen de (3.27) las relaciones:

$$\begin{aligned} N_{21} - N_{31} &= 0, \\ N_{22} + N_{23} - N_{32} - N_{33} &= 0, \\ N_{24} - N_{34} &= 0 \end{aligned} \tag{3.57}$$

y por lo tanto $N = \begin{pmatrix} 0 & N_{12} & -N_{12} & 0 \\ 0 & N_{22} & -N_{22} & 0 \\ 0 & N_{32} & -N_{32} & 0 \\ 0 & N_{42} & -N_{42} & 0 \end{pmatrix}$ sin más que sustituir dichas relaciones en la matriz N dada en (3.21).

c) Haciendo uso de las relaciones (3.44), $\bar{M}_{Q^*} = T_A^t M_{Q^*} T_A$. Efectuando este producto se

obtiene la matriz $\bar{M}_{Q^*}$ siguiente:

$$\begin{pmatrix} M_{Q^*_{11}} & M_{Q^*_{12}}+M_{Q^*_{13}} & M_{Q^*_{14}} & M_{Q^*_{12}}-M_{Q^*_{13}} \\ M^t_{Q^*_{12}}+M^t_{Q^*_{13}} & M_{Q^*_{22}}+M_{Q^*_{23}}+M^t_{Q^*_{23}}+M_{Q^*_{33}} & M_{Q^*_{24}}+M_{Q^*_{34}} & M_{Q^*_{22}}-M_{Q^*_{23}}+M^t_{Q^*_{23}}-M_{Q^*_{33}} \\ M^t_{Q^*_{14}} & M^t_{Q^*_{24}}+M^t_{Q^*_{34}} & M_{Q^*_{44}} & M^t_{Q^*_{24}}-M^t_{Q^*_{34}} \\ M^t_{Q^*_{12}}-M^t_{Q^*_{13}} & M_{Q^*_{22}}+M_{Q^*_{23}}-M^t_{Q^*_{23}}-M_{Q^*_{33}} & M_{Q^*_{24}}-M_{Q^*_{34}} & M_{Q^*_{22}}-M_{Q^*_{23}}-M^t_{Q^*_{23}}+M_{Q^*_{33}} \end{pmatrix}. \tag{3.58}$$

Por *c)* del Teorema 3.2, $\bar{M}_{Q^*_{11}} = 0$, con lo cual de (3.49) obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} M_{Q^*_{11}} &= 0, \\ M_{Q^*_{12}} + M_{Q^*_{13}} &= 0, \\ M_{Q^*_{14}} &= 0, \\ M_{Q^*_{22}} + M_{Q^*_{23}} + M^t_{Q^*_{23}} + M_{Q^*_{33}} &= 0, \\ M_{Q^*_{24}} + M_{Q^*_{34}} &= 0, \\ M_{Q^*_{44}} &= 0. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Sustituyendo dichas relaciones en la matriz (3.45), se concluye *c)* del teorema.

d) $\bar{N}_{R^*} = T^t_B N_{R^*} T_B$, por (3.44). De aquí,

$$\bar{N}_{R^*} = \begin{pmatrix} N_{R^*_{11}} & N_{R^*_{12}}+N_{R^*_{13}} & N_{R^*_{14}} & N_{R^*_{12}}-N_{R^*_{13}} \\ N^t_{R^*_{12}}+N^t_{R^*_{13}} & N_{R^*_{22}}+N_{R^*_{23}}+N^t_{R^*_{23}}+N_{R^*_{33}} & N_{R^*_{24}}+N_{R^*_{34}} & N_{R^*_{22}}-N_{R^*_{23}}+N^t_{R^*_{23}}-N_{R^*_{33}} \\ N^t_{R^*_{14}} & N^t_{R^*_{24}}+N^t_{R^*_{34}} & N_{R^*_{44}} & N^t_{R^*_{24}}-N^t_{R^*_{34}} \\ N^t_{R^*_{12}}-N^t_{R^*_{13}} & N_{R^*_{22}}+N_{R^*_{23}}-N^t_{R^*_{23}}-N_{R^*_{33}} & N_{R^*_{24}}-N_{R^*_{34}} & N_{R^*_{22}}-N_{R^*_{23}}-N^t_{R^*_{23}}+N_{R^*_{33}} \end{pmatrix}. \tag{3.60}$$

Por ser $\bar{N}_{R^*_{11}} = 0$, obtenemos de (3.50) el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} N_{R^*_{11}} &= 0, \\ N_{R^*_{12}} + N_{R^*_{13}} &= 0, \\ N_{R^*_{14}} &= 0, \\ N_{R^*_{22}} + N_{R^*_{23}} + N^t_{R^*_{23}} + N_{R^*_{33}} &= 0, \\ N_{R^*_{24}} + N_{R^*_{34}} &= 0, \\ N_{R^*_{44}} &= 0. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Por lo tanto se deduce que $N_{R^*} = \begin{pmatrix} 0 & N_{R^*_{12}} & -N_{R^*_{12}} & 0 \\ N^t_{R^*_{12}} & -N_{R^*_{23}}-N^t_{R^*_{23}}-N_{R^*_{33}} & N_{R^*_{23}} & N_{R^*_{24}} \\ -N^t_{R^*_{12}} & N^t_{R^*_{23}} & N_{R^*_{33}} & -N_{R^*_{24}} \\ 0 & N^t_{R^*_{24}} & -N^t_{R^*_{24}} & 0 \end{pmatrix}$, si sustituimos las relaciones en (3.46).

Consideremos ahora el segundo bloque de condiciones suficientes dado por el Teorema 3.3.

a') Por el apartado *a')* del Teorema 3.2, sabemos que $\bar{M}_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_{Q^*_{22}} \end{pmatrix}$. Por el hecho de ser $\bar{M}_{Q^*_{11}} = 0$ y $\bar{M}^t_{Q^*_{12}} = 0$ se obtienen, además de (3.59), las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\begin{aligned} M_{Q^*_{12}} - M_{Q^*_{13}} &= 0, \\ M_{Q^*_{22}} + M_{Q^*_{23}} - M^t_{Q^*_{23}} - M_{Q^*_{33}} &= 0, \\ M_{Q^*_{24}} - M_{Q^*_{34}} &= 0, \end{aligned} \tag{3.62}$$

con lo cual se concluye que $M_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{Q^*_{22}} & -M_{Q^*_{22}} & 0 \\ 0 & -M_{Q^*_{22}} & M_{Q^*_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nos queda por comprobar que se verifican las relaciones (3.52). En este caso, $\bar{M}_{Q^*_{22}} = 4M_{Q^*_{22}}$. Sustituyendo esta matriz junto con la forma ya conocida de la matrices $\bar{M}_{22}$, $\bar{M}_{21}$ y $\bar{N}_{21}$ en (3.52), se cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned} \left(M_{Q^*_{22}}\right)\left(M_{22}+M_{33}\right)^{i-2}\begin{pmatrix} M_{21} & M_{22}+M_{23} & M_{24} \end{pmatrix} &= 0, \text{ para todo } i = 2,\ldots,\tilde{n}, \\ \left(M_{Q^*_{22}}\right)\left(M_{22}+M_{33}\right)^{i-2}\begin{pmatrix} N_{21} & N_{22}+N_{23} & N_{24} \end{pmatrix} &= 0, \text{ para todo } i = 2,\ldots,\tilde{n}+1 \end{aligned}$$

y con ello se concluye *a')* del Teorema 3.3.

b') La demostración de este apartado es idéntica a como se ha obtenido *d)* del primer bloque de condiciones. De esta forma queda probado el teorema. □

Observación: El Teorema 2.7 nos da condiciones suficientes para que el par $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{J}) \supset (\mathbf{S}, J)$. Dichas condiciones quedan explicitadas por el Teorema 3.3 anterior en términos de matrices complementarias. Sin embargo, en estos teoremas no se ha supuesto en ningún momento que el control a efectuar sea un control óptimo. Si queremos restringirnos a este tipo de control necesitamos las condiciones bajo las cuales el par $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{J})$ incluye al par $(\mathbf{S}, J)$, siendo $\tilde{J}$ y J las funciones de coste asociadas a cada uno de los sistemas, respectivamente. La intención es diseñar leyes de control u y $\tilde{u}$ de tal forma que $J^\circ = \tilde{J}^\circ$ y para ello estudiaremos cuales son las condiciones que deben de cumplirse.

Teorema 3.4 *Un par $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{J}) \supset (\mathbf{S}, J)$, siendo $\tilde{J}$ y J las funciones de coste para unas determinadas leyes de control óptimo $\tilde{u}$ y u, respectivamente, si se verifican las siguientes*

condiciones:

$$\begin{aligned} &a) & MV &= 0, \\ &b) & R^* &= [Q(\tilde{R}^*)^{-1}Q^t]^{-1}, \\ &c) & N &= 0, \\ &d) & V^t M_{Q^*} V &= 0. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Demostración: Sean las funciones de coste J y $\tilde{J}$ como las definidas en (2.21) y (2.23), respectivamente, es decir,

$$J(x_0,u) = \int_0^\infty (x^t Q^* x + u^t R^* u)\, dt, \tag{3.64}$$

siendo $u = -Kx$, con $K = (R^*)^{-1}B^t P$ la única solución de la ecuación de Riccati

$$A^t P + PA - PB(R^*)^{-1}B^t P + Q^* = 0 \tag{3.65}$$

y

$$\tilde{J}(\tilde{x}_0,\tilde{u}) = \int_0^\infty (\tilde{x}^t \tilde{Q}^* \tilde{x} + \tilde{u}^t \tilde{R}^* \tilde{u})\, dt, \tag{3.66}$$

con $\tilde{u} = \tilde{K}\tilde{x}$, siendo $\tilde{K} = (\tilde{R}^*)^{-1}\tilde{B}^t \tilde{P}$ la única solución de la ecuación de Riccati

$$\tilde{A}^t \tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A} - \tilde{P}\tilde{B}(\tilde{R}^*)^{-1}\tilde{B}^t \tilde{P} + \tilde{Q}^* = 0. \tag{3.67}$$

El coste mínimo vendrá dado, en cada caso, por

$$J^\circ(x_0) = {x_0}^t P x_0 \tag{3.68}$$

y

$$\tilde{J}^\circ(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0^t \tilde{P} \tilde{x}_0. \tag{3.69}$$

La exigencia $J^\circ(x_0) = \tilde{J}^\circ(\tilde{x}_0)$ implica que $P = V^t \tilde{P} V$, sin más que igualar ambos costes y tener en cuenta que $\tilde{x}_0 = V x_0$. Como estamos suponiendo que

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= VAU + M, \\ \tilde{B} &= VBQ + N, \end{aligned} \tag{3.70}$$

si sustituimos dichas relaciones en (3.67), junto con $P = V^t \tilde{P} V$ y la comparamos a la ecuación matricial (3.65), obtenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} (MV)^t \tilde{P} V &= 0, \\ V^t \tilde{P} M V &= 0, \\ Q(\tilde{R}^*)^{-1} Q^t &= (R^*)^{-1}, \\ V^t \tilde{P} N (\tilde{R}^*)^{-1} Q^t B^t P &= 0, \\ V^t \tilde{P} N (\tilde{R}^*)^{-1} N^t \tilde{P} V &= 0, \\ PBQ(\tilde{R}^*)^{-1} N^t \tilde{P} V &= 0, \\ V^t \tilde{Q}^* V &= Q^*. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Suponiendo, como caso particular, que se verifique:

$$\begin{aligned} MV &= 0, \\ Q(\tilde{R}^*)^{-1}Q^t &= (R^*)^{-1}, \\ N &= 0, \\ V^t\tilde{Q}^*V &= Q^*, \end{aligned} \tag{3.72}$$

que se traducen en:

$$\begin{aligned} MV &= 0, \\ R^* &= [Q(\tilde{R}^*)^{-1}Q^t]^{-1}, \\ N &= 0, \\ V^tM_{Q^*}V &= 0 \end{aligned} \tag{3.73}$$

si tenemos en cuenta que $\tilde{Q}^* = U^tQ^*U + M_{Q^*}$. De esta forma se garantizan las relaciones (3.71), con lo cual se cumple (3.63) y se concluye el teorema. □

3.4. Contractibilidad

Tal y como ya hemos apuntado en el Capítulo 2, nos interesa buscar leyes de control en el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ de manera que sea posible contraerlas e implementarlas en el sistema original $\mathbf{S}$. Vamos a estudiar cuando una ley de control diseñada en el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ podrá ser contraída al sistema inicial $\mathbf{S}$ en términos de matrices complementarias.

Notación: Siguiendo un procedimiento análogo a las secciones anteriores, vamos a dar la notación para las matrices que intervienen en la contractibilidad de una ley de control. Supondremos las siguientes matrices prototipo:

$$F = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_2 \\ m_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_2 & n_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{3.74}$$

Definimos ahora

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.75}$$

siendo $\bar{F}_{11}$ una matriz de dimensión $m\times n$ y $\bar{F}_{22}$ de dimensión $(\tilde{m}-m)\times(\tilde{n}-n)$. Análogamente,

$$K = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & n_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{3.76}$$

La matriz de ganancia para el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$, que designaremos $\tilde{K}$, vendrá dada por

$$\tilde{K} = \bar{R}K\bar{U} + \bar{F}, \tag{3.77}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= T_B^{-1}\tilde{K}T_A, \\ \bar{F} &= T_B^{-1}FT_A. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Proposición 3.7 *Consideremos la matriz* $\bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{pmatrix}$. *Entonces, las submatrices* $\bar{F}_{ij}$, *para* $i,j=1,2$, *son de la forma:*

$$\begin{aligned} \bar{F}_{11} &= \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12}+F_{13} & F_{14} \\ \frac{1}{2}(F_{21}+F_{31}) & \frac{1}{2}(F_{22}+F_{23}+F_{32}+F_{33}) & \frac{1}{2}(F_{24}+F_{34}) \\ F_{41} & F_{42}+F_{43} & F_{44} \end{pmatrix}, \\ \bar{F}_{12} &= \begin{pmatrix} F_{12}-F_{13} \\ \frac{1}{2}(F_{22}-F_{23}+F_{32}-F_{33}) \\ F_{42}-F_{43} \end{pmatrix}, \\ \bar{F}_{21} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} F_{21}-F_{31} & F_{22}+F_{23}-F_{32}-F_{33} & F_{24}-F_{34} \end{pmatrix}, \\ \bar{F}_{22} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} F_{22}-F_{23}-F_{32}+F_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Demostración: Considerando $\bar{F} = T_B^{-1}FT_A$ como en (3.78), siendo T_A y T_B^{-1} como en (3.5) y (3.6), respectivamente y efectuando dicho producto se demuestra la proposición sin más que comparar la matriz producto resultante con la matriz definida por $\bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{pmatrix}$. □

Corolario 3.7 *En las condiciones de la proposición anterior, la matriz* $\tilde{K}$ *del sistema expandido* $\tilde{\mathbf{S}}$ *es de la forma* $\tilde{K} = \begin{pmatrix} K+\bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{pmatrix}$.

Demostración: Si tomamos $\tilde{\bar{K}}$ como en (3.77), $\bar{R} = \left(\begin{smallmatrix} I_m \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, donde (0) es una matriz de dimensión $(\tilde{m}-m)\times m$, $\bar{U} = \left(\begin{smallmatrix} I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$, donde (0) es una matriz de dimensión $n\times(\tilde{n}-n)$ y efectuamos dicho producto, se obtiene el resultado. □

Por Definición 2.7 de contractibilidad, sabemos que $\tilde{\bar{u}} = -\tilde{\bar{K}}\tilde{\bar{x}}$ es contraíble a la ley de control $u = -Kx$ siempre que $K[x(t;x_0,u)] = \bar{Q}\tilde{\bar{K}}[\tilde{\bar{x}}(t;\bar{V}x_0,\bar{R}u)]$. Entonces, en el sistema expandido $\tilde{\bar{\mathbf{S}}}$ podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.5 *Una ley de control $\tilde{\bar{u}} = -\tilde{\bar{K}}\tilde{\bar{x}}$ en el sistema $\tilde{\bar{\mathbf{S}}}$ es contraíble a la ley de control $u = -Kx$ del sistema $\mathbf{S}$ si y sólo si se verifica*

$$\begin{array}{ll} a) & \bar{Q}\bar{F}\bar{M}^{i-1}\bar{V} = 0, \\ b) & \bar{Q}\bar{F}\bar{M}^{i-1}\bar{N}\bar{R} = 0 \end{array} \tag{3.80}$$

para todo i=1,...,$\tilde{n}$.

Demostración: Sabemos que

$$x(t) = e^{At}(x_0) + \int_o^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d(\tau) \tag{3.81}$$

y que

$$\tilde{\bar{x}}(t) = e^{\tilde{\bar{A}}t}\bar{V}(x_0) + \int_o^t e^{\tilde{\bar{A}}(t-\tau)}\tilde{\bar{B}}\bar{R}u(\tau)d(\tau), \tag{3.82}$$

siendo

$$e^{At}(x_0) = [I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \ldots](x_0) \tag{3.83}$$

y

$$e^{\tilde{\bar{A}}t}V(x_0) = [I + \tilde{\bar{A}}t + \frac{1}{2!}\tilde{\bar{A}}^2t^2 + \frac{1}{3!}\tilde{\bar{A}}^3t^3 + \ldots]V(x_0). \tag{3.84}$$

Puesto que estamos exigiendo que $K[x(t;x_0,u)] = \bar{Q}\tilde{\bar{K}}[\tilde{\bar{x}}(t;\bar{V}x_0,\bar{R}u)]$, si consideramos $\tilde{\bar{K}} = \bar{R}K\bar{U} + \bar{F}$, se tiene $K(x(t)) = [\bar{Q}\bar{R}K\bar{U} + \bar{Q}\bar{F}](\tilde{\bar{x}}(t))$, con lo cual, $K(x(t)) = [K\bar{U}](\tilde{\bar{x}}(t)) + [\bar{Q}\bar{F}](\tilde{\bar{x}}(t))$. Entonces, aplicando K a las relaciones (3.81), así como $K\bar{U}$ y $\bar{Q}\bar{F}$ a (3.82) ambos resultados coincidirán si y sólo si se cumple

$$\begin{array}{ll} a) & \bar{Q}\bar{F}\bar{M}^{i-1}\bar{V} = 0, \\ b) & \bar{Q}\bar{F}\bar{M}^{i-1}\bar{N}\bar{R} = 0 \end{array}$$

para todo i=1,...,$\tilde{n}$. □

Otra forma equivalente de enunciar el Teorema 3.5 nos la proporciona el siguiente teorema, en el que no se hace referencia, de manera explícita, a la matriz complementaria F.

Teorema 3.6 *Una ley de control $\tilde{u} = -\tilde{K}\tilde{x}$ en el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ es contraíble a la ley de control $u = -Kx$ del sistema $\mathbf{S}$ si y sólo si se verifica*

$$\begin{array}{lll} a) & \bar{Q}\tilde{K}\bar{V} & = K, \\ b) & \bar{Q}\tilde{K}\bar{M}^{i-1}\bar{V} & = 0, \text{ para todo } i = 2,\ldots,\tilde{n} \\ c) & \bar{Q}\tilde{K}\bar{M}^{i-1}\bar{N}\bar{R} & = 0, \text{ para todo } i = 1,\ldots,\tilde{n}. \end{array} \tag{3.85}$$

Demostración: Para demostrar el Teorema 3.6 veamos la equivalencia con el Teorema 3.5. Sea $\tilde{K} = \bar{R}K\bar{U} + \bar{F}$ como en (3.77). Entonces, $\bar{F} = \tilde{K} - \bar{R}K\bar{U}$. Sustituyendo $\bar{F}$ en *a)* y *b)* del Teorema 3.5, obtenemos:

$$\begin{array}{lll} a) & \bar{Q}[\tilde{K} - \bar{R}K\bar{U}]\bar{M}^{i-1}\bar{V} = 0, & \text{con lo cual } \bar{Q}\tilde{K}\bar{M}^{i-1}\bar{V} = K\bar{U}\bar{M}^{i-1}\bar{V}, \\ b) & \bar{Q}[\tilde{K} - \bar{R}K\bar{U}]\bar{M}^{i-1}\bar{N}\bar{R} = 0, & \text{con lo cual } \bar{Q}\tilde{K}\bar{M}^{i-1}\bar{N}\bar{R} = K\bar{U}\bar{M}^{i-1}\bar{N}\bar{R} \end{array}$$

para todo i=1,...,$\tilde{n}$. De (3.19), $\bar{U}\bar{M}^{i}\bar{V}$= 0, para todo i=1,...,$\tilde{n}$, por lo tanto de *a)* tendremos que:

$$\bar{Q}\tilde{K}\bar{V} = K, \qquad \bar{Q}\tilde{K}\bar{M}^{i-1}\bar{V} = 0 \tag{3.86}$$

para todo i=2,...,$\tilde{n}$. Por (3.19) sabemos que $\bar{U}\bar{M}^{i-1}\bar{N}\bar{R} = 0$ y por lo tanto, $\bar{Q}\tilde{K}\bar{M}^{i-1}\bar{N}\bar{R} = 0$ para todo i=1,...,$\tilde{n}$, lo que concluye la demostración. □

Comentario: Hasta el momento desconocemos la forma que debe adoptar la matriz complementaria F y las condiciones que debe verificar por tal que una ley de control pueda ser contraída al sistema inicial. El teorema que se presenta a continuación nos proporciona la estructura de dicha matriz F y las condiciones que debe de cumplir para que cualquier ley de control diseñada en el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ pueda ser contraída al sistema $\mathbf{S}$. Posteriormente, enunciaremos un teorema equivalente para los sistemas $\tilde{\mathbf{S}}$ y $\mathbf{S}$.

Teorema 3.7 *Una ley de control $\tilde{u} = -\tilde{K}\tilde{x}$ en el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ será contraíble a la ley de control $u = -Kx$ del sistema $\mathbf{S}$ si y sólo si $\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{F}_{12} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{pmatrix}$ tal que $\bar{F}_{12}\bar{M}_{22}^{i-2}\bar{M}_{21}$=0, $\bar{F}_{12}\bar{M}_{22}^{i-2}\bar{N}_{21}$=0, para todo i=2,...,$\tilde{n}$.*

Demostración: Consideremos las relaciones (3.80). Para el conjunto *a)* de condiciones, cuando i=1, $\bar{Q}\bar{F}\bar{V} = 0$, con lo cual $\bar{F}_{11} = 0$ y en consecuencia $\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{F}_{12} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{pmatrix}$. Considerando la matriz $\bar{M}^{\mu}$ como en (3.29), tenemos que para i=$k \geqslant 2$, $\bar{Q}\bar{F}\bar{M}^{k-1}\bar{V} = 0$, lo que implica $\bar{F}_{12}\bar{M}_{22}^{k-2}\bar{M}_{21} = 0$. Reiterando este proceso, para i=$\tilde{n}$, $\bar{Q}\bar{F}\bar{M}^{\tilde{n}-1}\bar{V}$ =0, obteniéndose $\bar{F}_{12}\bar{M}_{22}^{\tilde{n}-2}\bar{M}_{21} = 0$. Así pues, $\bar{F}_{12}\bar{M}_{22}^{i-2}\bar{M}_{21} = 0$, para todo i=2,...,$\tilde{n}$.

Sea ahora el conjunto *b)* de condiciones. Para i=1, $\bar{Q}\bar{F}\bar{N}\bar{R}=0$ y por lo tanto $\bar{F}_{12}\bar{N}_{21}=0$. Sea de nuevo la matriz $\bar{M}^{\mu}$ como en (3.29). Entonces, para i=$k\geqslant 2$, $\bar{Q}\bar{F}\bar{M}^{k-1}\bar{N}\bar{R}=0$, en consecuencia $\bar{F}_{12}\bar{M}_{22}^{k-1}\bar{N}_{21}=0$, utilizando los resultados de la Proposición 3.3. Finalmente, para i=$\tilde{n}$, $\bar{Q}\bar{F}\bar{M}^{\tilde{n}-1}\bar{N}\bar{R}=0$, resultando $\bar{F}_{12}\bar{M}_{22}^{\tilde{n}-1}\bar{N}_{21}=0$. Resumiendo, $\bar{F}_{12}\bar{M}_{22}^{i-2}\bar{N}_{21}=0$, para todo i=$2,\ldots,\tilde{n}$. □

Teorema 3.8 *Una ley de control $\tilde{u}=-\tilde{K}\tilde{x}$ en el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ es contraíble a la ley de control $u=-Kx$ del sistema $\mathbf{S}$ si y sólo si la matriz F es de la forma*

$$F=\begin{pmatrix} 0 & F_{12} & -F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ -F_{21} & -(F_{22}+F_{23}+F_{33}) & F_{33} & -F_{24} \\ 0 & F_{42} & -F_{42} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.87}$$

verificando:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{12} \\ F_{23}+F_{33} \\ F_{42} \end{pmatrix} \left(M_{22}+M_{33}\right)^{i-2} \begin{pmatrix} M_{21} & M_{22}+M_{23} & M_{24} \end{pmatrix} &= 0, \\ \begin{pmatrix} F_{12} \\ F_{23}+F_{33} \\ F_{42} \end{pmatrix} \left(M_{22}+M_{33}\right)^{i-2} \begin{pmatrix} N_{21} & N_{22}+N_{23} & N_{24} \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \tag{3.88}$$

para todo i=$2,\ldots,\tilde{n}+1$.

Demostración: La demostración es parecida a la utilizada en el Teorema 3.1. Para ello, consideremos la matriz $\bar{F}=T_B^{-1}FT_A$ dada en (3.78). Entonces, efectuando dicho producto se obtiene:

$$\bar{F}=\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12}+F_{13} & F_{14} & F_{12}-F_{13} \\ \frac{1}{2}(F_{21}+F_{31}) & \frac{1}{2}(F_{22}+F_{23}+F_{32}+F_{33}) & \frac{1}{2}(F_{24}+F_{34}) & \frac{1}{2}(F_{22}-F_{23}+F_{32}-F_{33}) \\ F_{41} & F_{42}+F_{43} & F_{44} & F_{42}-F_{43} \\ \frac{1}{2}(F_{21}-F_{31}) & \frac{1}{2}(F_{22}+F_{23}-F_{32}-F_{33}) & \frac{1}{2}(F_{24}-F_{34}) & \frac{1}{2}(F_{22}-F_{23}-F_{32}+F_{33}) \end{pmatrix}. \tag{3.89}$$

Por otro lado, según el Teorema 3.7, $\bar{F}=\begin{pmatrix} 0 & \bar{F}_{12} \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} \end{pmatrix}$. Al ser $\bar{F}_{11}=0$, de (3.79) se obtiene

$$F=\begin{pmatrix} 0 & F_{12} & -F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ -F_{21} & -(F_{22}+F_{23}+F_{33}) & F_{33} & -F_{24} \\ 0 & F_{42} & -F_{42} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.90}$$

Nuevamente de (3.79), $\bar{F}_{12}$ es de la forma $\bar{F}_{12}=\begin{pmatrix} F_{12}-F_{13} \\ \frac{1}{2}(F_{22}-F_{23}+F_{32}-F_{33}) \\ F_{42}-F_{43} \end{pmatrix}$. Ahora, tomando $\bar{M}_{21}$, $\bar{M}_{22}$ y $\bar{N}_{21}$ como las obtenidas en el Teorema 3.1 y obligando a que se cumplan

las relaciones dadas por el Teorema 3.7, se concluye que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{12} \\ F_{23}+F_{33} \\ F_{42} \end{pmatrix} \left(M_{22}+M_{33} \right)^{i-2} \begin{pmatrix} M_{21} & M_{22}+M_{23} & M_{24} \end{pmatrix} = 0, \\ \begin{pmatrix} F_{12} \\ F_{23}+F_{33} \\ F_{42} \end{pmatrix} \left(M_{22}+M_{33} \right)^{i-2} \begin{pmatrix} N_{21} & N_{22}+N_{23} & N_{24} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{3.91}$$

para todo i=$2,\ldots,\tilde{n}+1$, quedando así demostrado el teorema. □

Comentario: Iftar y Özgüner en su artículo *Contractible Controller Design and Optimal Control with State and Input Inclusion*, cf. [25], tratan el tema de la contractibilidad de controladores pero bajo el contexto de las *extensiones*, es decir, un caso particular del concepto de expansión donde cualquier ley de control en el sistema expandido es contraíble al sistema original. En este trabajo hemos preferido ofrecer los resultados para el caso general de las expansiones.

Capítulo 4

Restricciones y Agregaciones. Casos Particulares

4.1. Introducción

El concepto de expansión introducido por Šiljak, permite buscar controladores descentralizados de sistemas de gran escala que poseen subsistemas solapados. Sin embargo, no toda expansión será conveniente para nuestros propósitos. Habrá que analizar, por ejemplo, la estabilidad, la controlabilidad o la observabilidad, entre otras propiedades, de los espacios expandidos. Las características que son deseables en el sistema inicial no siempre se van a mantener después de una expansión. Solamente algunos tipos especiales de expansiones podrán utilizarse a la hora de diseñar leyes de control que reúnan las condiciones deseadas.

A lo largo de este capítulo vamos a aprovechar los resultados del Capítulo 3 para estudiar dos de los casos particulares más utilizados a la hora de expandir-contraer un sistema: las restricciones y las agregaciones. Caracterizaremos la estructura de las matrices complementarias en estos casos, con lo cual dispondremos de una gama muy amplia de restricciones y agregaciones. Además, trataremos otros casos que no son tan frecuentes pero que nos garantizan que el proceso puede llevarse a cabo y aportaremos nuevas formas de expansión que, hasta donde llega nuestro conocimiento, no han sido usadas hasta el momento.

4.2. Controlabilidad y Observabilidad

Dos de las propiedades más deseadas por cualquier diseñador de sistemas son la controlabilidad y la observabilidad. Recordemos la definición de controlabilidad y observabilidad así como algún teorema que nos permita averiguar si un sistema dado verifica dichas características.

Definición 4.1 *Un sistema se dice que es controlable en el tiempo t_0, si por medio de un vector de control no restringido, es posible transferir el sistema desde cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, en un tiempo finito. Si todo estado es controlable, diremos que el sistema es controlable de estado completo.*

Para comprobar si un sistema es controlable podemos utilizar el siguiente teorema.

Teorema 4.1 *Un sistema*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \ \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde A es una matriz $n \times n$, B es $n \times m$ y C de tamaño $l \times n$, es controlable de estado completo si y sólo si la matriz de controlabilidad

$$\left(B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B \right) \tag{4.2}$$

es de rango n. □

Este teorema es equivalente, cf. [13], al teorema dado a continuación.

Teorema 4.2 *Un sistema*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \ \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde A es una matriz $n \times n$, B es $n \times m$ y C de tamaño $l \times n$, es completamente controlable si y sólo si para todo $\lambda \in \mathbf{C}$, el rango de la matriz $\left(A - \lambda I \mid B \right)$ es n. Notaremos dicha matriz por H_λ^c. □

Puesto que nos interesa estudiar propiedades en el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$, la matriz de controlabilidad $\tilde{H}^c_\lambda$ en dicho sistema si utilizamos la matriz ampliada $\tilde{A}$ dada por el Corolario 3.4 y la matriz $\tilde{B}$ del Corolario 3.5, vendrá dada por:

$$\tilde{H}^c_\lambda = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
A_{11}-\lambda I_1 & \frac{1}{2}A_{12}+M_{12} & \frac{1}{2}A_{12}-M_{12} & A_{13} & B_{11} & \frac{1}{2}B_{12}+N_{12} & \frac{1}{2}B_{12}-N_{12} & B_{13} \\
A_{21}+M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{22}-\lambda I_2 & \frac{1}{2}A_{22}+M_{23} & A_{23}+M_{24} & B_{21}+N_{21} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{22} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{23} & B_{23}+N_{24} \\
A_{21}-M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}-(M_{22}+M_{23}+M_{33}) & \frac{1}{2}A_{22}+M_{33}-\lambda I_2 & A_{23}-M_{24} & B_{21}-N_{21} & \frac{1}{2}B_{22}-(N_{22}+N_{23}+N_{33}) & \frac{1}{2}B_{22}+N_{33} & B_{23}-N_{24} \\
A_{31} & \frac{1}{2}A_{32}+M_{42} & \frac{1}{2}A_{32}-M_{42} & A_{33}-\lambda I_3 & B_{31} & \frac{1}{2}B_{32}+N_{42} & \frac{1}{2}B_{32}-N_{42} & B_{33}
\end{array}\right). \tag{4.4}$$

Restando a la segunda fila la tercera, sumando a la tercera columna la segunda y restándole a la sexta la séptima columna, obtenemos una matriz equivalente con la siguiente estructura

$$\tilde{H}^c_\lambda = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
A_{11}-\lambda I_1 & \frac{1}{2}A_{12}+M_{12} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & 2N_{12} & \frac{1}{2}B_{12}-N_{12} & B_{13} \\
2M_{21} & 2M_{22}+M_{23}+M_{33}-\lambda I_2 & 2M_{22}+2M_{23} & 2M_{24} & 2N_{21} & 2N_{22}+2N_{33} & N_{23}-N_{33} & 2N_{24} \\
A_{21}-M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}-(M_{22}+M_{23}+M_{33}) & A_{22}-M_{22}-M_{23}-\lambda I_2 & A_{23}-M_{24} & B_{21}-N_{21} & -N_{22}-N_{23}-2N_{33} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{33} & B_{23}-N_{24} \\
A_{31} & \frac{1}{2}A_{32}+M_{42} & A_{32} & A_{33}-\lambda I_3 & B_{31} & 2N_{42} & \frac{1}{2}B_{32}-N_{42} & B_{33}
\end{array}\right). \tag{4.5}$$

Comentario: Esta nueva matriz, por abuso de notación, la designamos también por $\tilde{H}^c_\lambda$. De igual manera mantendremos la notación de las matrices de controlabilidad y observabilidad después de efectuar cambios en sus filas y columnas.

Análogamente, nos interesa tratar el tema de la observabilidad, puesto que es útil cuando hay que reconstruir, en un breve espacio de tiempo, variables de estado que no son

medibles a partir de otras que sí lo son. En muchas ocasiones, al aplicar un control de retroalimentación de estado, algunas variables no se pueden medir directamente y por ello debemos estimar las variables de estado no medibles con el fin de construir las señales de control. Sabemos que ésto no será posible si el sistema no es completamente controlable.

Definimos, a título de recordatorio, lo que se entiende por observabilidad.

Definición 4.2 *Diremos que un sistema es completamente observable si cada estado $x(t_0)$ se puede determinar a partir de la observación de $y(t)$ en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leqslant t_1$.*

Al igual que en el caso de la controlabilidad, necesitamos algún teorema que nos permita decidir si un sistema es observable. A tal efecto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.3 *Un sistema*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \ \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde A es una matriz $n \times n$, B es $n \times m$ y C de tamaño $l \times n$, es completamente observable si y sólo si la matriz de observabilidad

$$\begin{pmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline \vdots \\ \hline CA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

es de rango n. □

Un teorema equivalente al Teorema 4.3, cf. [13], viene dado a continuación.

Teorema 4.4 *Un sistema*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \ \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde A es una matriz $n\times n$, B es $n\times m$ y C de tamaño $l\times n$, es completamente observable si y sólo si para todo $\lambda\in\mathbf{C}$, la matriz

$$\begin{pmatrix} A-\lambda I \\ ---- \\ C \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

es de rango n. Notaremos dicha matriz por H^o_λ. $\square$

Desde el punto de vista de la observabilidad, veamos como se presenta la matriz $\tilde{H}^o_\lambda$ del sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ objeto de estudio, al considerar $\tilde{A}$ como en el Corolario 3.4 y $\tilde{C}$ como en el Corolario 3.6. Así pues,

$$\tilde{H}^o_\lambda = \begin{pmatrix} A_{11}-\lambda I_1 & \frac{1}{2}A_{12}+M_{12} & \frac{1}{2}A_{12}-M_{12} & A_{13} \\ A_{21}+M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{22}-\lambda I_2 & \frac{1}{2}A_{22}+M_{23} & A_{23}+M_{24} \\ A_{21}-M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}-(M_{22}+M_{23}+M_{33}) & \frac{1}{2}A_{22}+M_{33}-\lambda I_2 & A_{23}-M_{24} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32}+M_{42} & \frac{1}{2}A_{32}-M_{42} & A_{33}-\lambda I_3 \\ \hline C_{11} & \frac{1}{2}C_{12}+L_{12} & \frac{1}{2}C_{12}-L_{12} & C_{13} \\ C_{21}+L_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{23} & C_{23}+L_{24} \\ C_{21}-L_{21} & \frac{1}{2}C_{22}-(L_{22}+L_{23}+L_{33}) & \frac{1}{2}C_{22}+L_{33} & C_{23}-L_{24} \\ C_{31} & \frac{1}{2}C_{32}+L_{42} & \frac{1}{2}C_{32}-L_{42} & C_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Restando a la segunda columna la tercera; sumando a la tercera fila la segunda y a la sexta fila restándole la séptima, obtenemos la siguiente matriz equivalente

$$\tilde{H}^o_\lambda = \begin{pmatrix} A_{11}-\lambda I_1 & 2M_{12} & \frac{1}{2}A_{12}-M_{12} & A_{13} \\ A_{21}+M_{21} & M_{22}-M_{23}-\lambda I_2 & \frac{1}{2}A_{22}+M_{23} & A_{23}+M_{24} \\ 2A_{21} & -2M_{23}-2M_{33} & A_{22}+M_{23}+M_{33}-\lambda I_2 & 2A_{23} \\ A_{31} & 2M_{42} & \frac{1}{2}A_{32}-M_{42} & A_{33}-\lambda I_3 \\ \hline C_{11} & 2L_{12} & \frac{1}{2}C_{12}-L_{12} & C_{13} \\ 2L_{21} & 2L_{22}+2L_{33} & L_{23}-L_{33} & 2L_{24} \\ C_{21}-L_{21} & -L_{22}-L_{23}-2L_{33} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{33} & C_{23}-L_{24} \\ C_{31} & 2L_{42} & \frac{1}{2}C_{32}-L_{42} & C_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Más adelante haremos uso de estas matrices de controlabilidad y observabilidad. Por el momento nos centraremos en el estudio de las restricciones y las agregaciones como los

dos casos particulares más importantes de expansión. Evidentemente, en estas dos situaciones se cumplen todas las condiciones exigidas por el Principio de Inclusión Generalizado. Veamos la estructura matricial, en términos de matrices complementarias, que tiene cualquier restricción y agregación.

4.3. Restricciones y Agregaciones

Proposición 4.1 *Un sistema* **S** *es una restricción de* $\tilde{\mathbf{S}}$ *si y sólo si se verifica:*

$$\begin{aligned} &a) \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{M}_{12} \\ 0 & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}, \\ &b) \quad \bar{N} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{N}_{12} \\ 0 & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}, \\ &c) \quad \bar{L} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{L}_{12} \\ 0 & \bar{L}_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Demostración: Por el Teorema 2.4, sabemos que toda restricción ha de cumplir:

$$\begin{aligned} &a) \quad \bar{M}\bar{V} = 0, \\ &b) \quad \bar{N}\bar{R} = 0, \\ &c) \quad \bar{L}\bar{V} = 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Sean $\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}$, $\bar{N} = \begin{pmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}$ y $\bar{L} = \begin{pmatrix} \bar{L}_{11} & \bar{L}_{12} \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} \end{pmatrix}$, como en (3.23) a (3.25). De *a)*, si $\bar{M}\bar{V} = 0$, tenemos que $\bar{M}_{11} = 0$ y $\bar{M}_{21} = 0$, y por lo tanto $\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{M}_{12} \\ 0 & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}$. De *b)*, $\bar{N}\bar{R} = 0$ implica que $\bar{N}_{11} = 0$ y $\bar{N}_{21} = 0$ y, en consecuencia, $\bar{N} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{N}_{12} \\ 0 & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}$. Finalmente, de *c)* se tiene $\bar{L}\bar{V} = 0$, de donde se concluye que $\bar{L}_{11} = 0$ y $\bar{L}_{21} = 0$ y por ello, $\bar{L} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{L}_{12} \\ 0 & \bar{L}_{22} \end{pmatrix}$. De esta forma queda probada la proposición. □

Corolario 4.1 *Sea* **S** *una restricción de* $\tilde{\mathbf{S}}$. *Entonces las matrices ampliadas* $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ *y* $\tilde{C}$ *son de la forma*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & \bar{M}_{12} \\ 0 & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & \bar{N}_{12} \\ 0 & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C & \bar{L}_{12} \\ 0 & \bar{L}_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Demostración: Solamente debemos sustituir $\bar{M}_{21} = 0$, $\bar{N}_{21} = 0$ y $\bar{L}_{21} = 0$ en las matrices $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$ obtenidas en los Corolarios 3.1, 3.2 y 3.3, respectivamente, para obtener el resultado. □

Veamos ahora como serán las condiciones matriciales de las matrices complementarias M, N y L en las bases iniciales.

Teorema 4.5 *Un sistema* **S** *es una restricción de* $\tilde{\mathbf{S}}$ *si y sólo si las matrices M, N y L son de la forma:*

$$
\begin{aligned}
a) \quad M &= \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & -M_{12} & 0 \\ 0 & M_{22} & -M_{22} & 0 \\ 0 & M_{32} & -M_{32} & 0 \\ 0 & M_{42} & -M_{42} & 0 \end{pmatrix}, \\
b) \quad N &= \begin{pmatrix} 0 & N_{12} & -N_{12} & 0 \\ 0 & N_{22} & -N_{22} & 0 \\ 0 & N_{32} & -N_{32} & 0 \\ 0 & N_{42} & -N_{42} & 0 \end{pmatrix}, \\
c) \quad L &= \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & -L_{12} & 0 \\ 0 & L_{22} & -L_{22} & 0 \\ 0 & L_{32} & -L_{32} & 0 \\ 0 & L_{42} & -L_{42} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Demostración: Consideremos M como en el Teorema 3.1. Puesto que por la Proposición 4.1 $\bar{M}_{11} = 0$ y $\bar{M}_{21} = 0$, se obtienen los sistemas de ecuaciones (3.36) y (3.55), respectivamente. Sustituyendo dichos resultados en la matriz M dada en (3.31), se concluye *a)* del teorema.

Para demostrar *b)* trabajaremos de forma parecida. En este caso hay que considerar la matriz N de (3.32) dada en el Teorema 3.1 y suponer que $\bar{N}_{11} = 0$ y $\bar{N}_{21} = 0$, por el apartado *b)* de la Proposición 4.1. De nuevo, sustituyendo estos resultados en la matriz N de (3.32) se llega al resultado. Análogamente para la matriz L de *c)*. □

Corolario 4.2 *Sea* **S** *una restricción de* $\tilde{\mathbf{S}}$. *Entonces las matrices ampliadas $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$ son*

de la forma:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \frac{1}{2}A_{12}+M_{12} & \frac{1}{2}A_{12}-M_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{22} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{22} & A_{23} \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{32} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{32} & A_{23} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32}+M_{42} & \frac{1}{2}A_{32}-M_{42} & A_{33} \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & \frac{1}{2}B_{12}+N_{12} & \frac{1}{2}B_{12}-N_{12} & B_{13} \\ B_{21} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{22} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{22} & B_{23} \\ B_{21} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{32} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{32} & B_{23} \\ B_{31} & \frac{1}{2}B_{32}+N_{42} & \frac{1}{2}B_{32}-N_{42} & B_{33} \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & \frac{1}{2}C_{12}+L_{12} & \frac{1}{2}C_{12}-L_{12} & C_{13} \\ C_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{22} & C_{23} \\ C_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{32} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{32} & C_{23} \\ C_{31} & \frac{1}{2}C_{32}+L_{42} & \frac{1}{2}C_{32}-L_{42} & C_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Demostración: Consideremos las matrices $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$ dadas por los Corolarios 3.4, 3.5 y 3.6, respectivamente. Tomando M, N y L, como en (4.15) y sustituyendo en las matrices (3.39) a (3.41) obtenemos el resultado. □

De forma similar a como hemos procedido con las restricciones vamos a estudiar como serán las matrices complementarias en el caso de las agregaciones.

Proposición 4.2 *Un sistema* **S** *es una agregación de* $\tilde{\mathbf{S}}$ *si y sólo si se verifica:*

$$\begin{aligned} &a) \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}, \\ &b) \quad \bar{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}, \\ &c) \quad \bar{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Demostración: Por el Teorema 2.6, sabemos que toda agregación ha de cumplir:

$$\begin{aligned} &a) \quad \bar{U}\bar{M} = 0, \\ &b) \quad \bar{U}\bar{N} = 0, \\ &c) \quad \bar{S}\bar{L} = 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Sean $\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}$, $\bar{N} = \begin{pmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}$ y $\bar{L} = \begin{pmatrix} \bar{L}_{11} & \bar{L}_{12} \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} \end{pmatrix}$, como en (3.23) a (3.25). Entonces, de *a)* si $\bar{U}\bar{M} = 0$ tenemos que $\bar{M}_{11} = 0$ y $\bar{M}_{12} = 0$, con lo cual $\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}$. De *b)*,

$\bar{U}\bar{N} = 0$, es decir, $\bar{N}_{11} = 0$ y $\bar{N}_{12} = 0$ y en consecuencia, $\bar{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}$. Por último, de *c)*, $\bar{S}\bar{L} = 0$, con lo cual $\bar{L}_{11} = 0$ y $\bar{L}_{12} = 0$ y así, $\bar{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} \end{pmatrix}$, lo que concluye la demostración. □

Corolario 4.3 *Sea* **S** *una agregación de* $\tilde{\mathbf{S}}$. *Entonces las matrices ampliadas* $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ *y* $\tilde{C}$ *son de la forma:*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Demostración: Para demostrar el corolario, sustituiremos $\bar{M}_{12} = 0$, $\bar{N}_{12} = 0$ y $\bar{L}_{12} = 0$ en las matrices $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$ dadas en los Corolarios 3.1, 3.2 y 3.3, respectivamente, concluyéndose el resultado. □

Puesto que nos interesa conocer la estructura de las matrices complementarias de las agregaciones en el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$, trabajaremos de nuevo en las bases iniciales. Dichas estructuras vienen caracterizadas por el teorema siguiente.

Teorema 4.6 *Un sistema* **S** *es una agregación de* $\tilde{\mathbf{S}}$ *si y sólo si las matrices* M, N *y* L *son de la forma:*

$$\begin{aligned}
a) \quad M &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ -M_{21} & -M_{22} & -M_{23} & -M_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
b) \quad N &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ -N_{21} & -N_{22} & -N_{23} & -N_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
c) \quad L &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ -L_{21} & -L_{22} & -L_{23} & -L_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Demostración: Consideremos la matriz M dada por el Teorema 3.1. Por la Proposición 4.2, $\bar{M}_{11} = 0$ y $\bar{M}_{12} = 0$. Obtenemos el sistema de ecuaciones (3.37) junto con

$$\begin{aligned}
M_{12} - M_{13} &= 0, \\
M_{22} - M_{23} + M_{32} - M_{33} &= 0, \\
M_{42} - M_{43} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Esto nos conduce a $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ -M_{21} & -M_{22} & -M_{23} & -M_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sin más que sustituir las relaciones obtenidas en la matriz M dada en (3.31).

Para demostrar *b)* procederemos de forma parecida. En este caso hay que considerar las relaciones que se deducen del hecho de ser $\overline{N}_{11} = 0$ junto con

$$\begin{aligned} N_{12} - N_{13} &= 0, \\ N_{22} - N_{23} + N_{32} - N_{33} &= 0, \\ N_{42} - N_{43} &= 0 \end{aligned} \tag{4.24}$$

por ser $\overline{N}_{12} = 0$ según la Proposición 4.2. Al sustituir estas relaciones en (3.32) se concluye el resultado. De forma análoga para la matriz L. □

Corolario 4.4 *Sea* **S** *una agregación de* $\tilde{\mathbf{S}}$. *Entonces las matrices ampliadas* $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ *y* $\tilde{C}$ *son de la forma:*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \frac{1}{2}A_{12} & \frac{1}{2}A_{12} & A_{13} \\ A_{21}+M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{22} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{23} & A_{23}+M_{24} \\ A_{21}-M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{22} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{23} & A_{23}-M_{24} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32} & \frac{1}{2}A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & \frac{1}{2}B_{12} & \frac{1}{2}B_{12} & B_{13} \\ B_{21}+N_{21} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{22} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{23} & B_{23}+N_{24} \\ B_{21}-N_{21} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{22} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{23} & B_{23}-N_{24} \\ B_{31} & \frac{1}{2}B_{32} & \frac{1}{2}B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & \frac{1}{2}C_{12} & \frac{1}{2}C_{12} & C_{13} \\ C_{21}+L_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{23} & C_{23}+L_{24} \\ C_{21}-L_{21} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{23} & C_{23}-L_{24} \\ C_{31} & \frac{1}{2}C_{32} & \frac{1}{2}C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Demostración: Se demuestra de forma parecida al Corolario 4.2. Por ser **S** una agregación de $\tilde{\mathbf{S}}$, sabemos que M, N y L son como en (4.22). Sustituyendo la estructura que presentan dichas matrices en (3.39) a (3.41), respectivamente, se concluye la demostración. □

Proposición 4.3 *Sea* **S** *una restricción de* $\tilde{\mathbf{S}}$. *Entonces, toda ley de control* $\tilde{u} = -\tilde{K}\tilde{x}$ *de* $\tilde{\mathbf{S}}$ *es contraíble a la ley de control* $u = -Kx$ *de* **S**.

Demostración: El Teorema 3.8 del capítulo anterior nos proporciona la condición necesaria y suficiente para que la ley de control $\tilde{u} = -\tilde{K}\tilde{x}$ de $\tilde{\mathbf{S}}$ sea contraíble a la ley $u = -Kx$. Para ello, la matriz $F = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & -F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ -F_{21} & -(F_{22}+F_{23}+F_{33}) & F_{33} & -F_{24} \\ 0 & F_{42} & -F_{42} & 0 \end{pmatrix}$ ha de verificar:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{12} \\ F_{23}+F_{33} \\ F_{42} \end{pmatrix} \left(M_{22}+M_{33}\right)^{i-2} \begin{pmatrix} M_{21} & M_{22}+M_{23} & M_{24} \end{pmatrix} = 0, \\ \begin{pmatrix} F_{12} \\ F_{23}+F_{33} \\ F_{42} \end{pmatrix} \left(M_{22}+M_{33}\right)^{i-2} \begin{pmatrix} N_{21} & N_{22}+N_{23} & N_{24} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

para todo i=2, ..., $\tilde{n}+1$.

Como estamos suponiendo que $\mathbf{S}$ es una restricción de $\tilde{\mathbf{S}}$ se cumple:

$$\begin{aligned} M_{21} &= 0, \\ M_{22}+M_{23} &= 0, \\ M_{24} &= 0, \\ N_{21} &= 0, \\ N_{22}+N_{23} &= 0, \\ N_{24} &= 0. \end{aligned} \tag{4.27}$$

De estas relaciones se deduce obviamente que $\begin{pmatrix} M_{21} & M_{22}+M_{23} & M_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} N_{21} & N_{22}+N_{23} & N_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con lo cual se verifican las condiciones (4.26) para toda matriz complementaria F de la forma (3.87). □

Observación: Hasta el momento hemos caracterizado las posibles restricciones y agregaciones en función de sus matrices complementarias. Sin embargo, existen otros casos en los que, sin ser restricciones ni agregaciones, se verifican las condiciones exigidas por el Principio de Inclusión Generalizado para poder expandir un sistema y diseñar en el sistema expandido leyes de control descentralizadas. Haciendo uso de la información procedente del Teorema 3.1 analizaremos con detalle cada una de las posibilidades.

4.4. Otros Casos Particulares

En base a los resultados que nos proporciona el Teorema 3.1 veremos que existen dos grandes estructuras de matrices complementarias que, en la práctica, podemos utilizar

para expandir-contraer un sistema. Dentro de cada una de ellas, habrá una infinidad de posibilidades a la hora de elegir las matrices M, N y L. Al margen de las restricciones y agregaciones vistas anteriormente, trataremos otros casos particulares matricialmente más complejos aunque igualmente factibles.

Partimos de las ecuaciones (3.34). Puesto que dichas ecuaciones submatriciales son las que deben de cumplirse para que se verifique el Principio de Inclusión Generalizado, vamos a estudiar las estructuras más simples que pueden adoptar dichas submatrices para que se verifiquen todas las condiciones de (3.34). En primer lugar se observa que si $(M_{22}+M_{33})^{i-2}=0$ se cumplen todas las condiciones exigidas, salvo para i=2 en que $(M_{22}+M_{33})^0=I_n$, aun en el caso que $M_{22}+M_{33}=0$. Así pues, las ecuaciones anteriores obligan a que se cumpla:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{23}+M_{33} \\ M_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{21} & M_{22}+M_{23} & M_{24} \end{pmatrix} &= 0, \\
\begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{23}+M_{33} \\ M_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{21} & N_{22}+N_{23} & N_{24} \end{pmatrix} &= 0, \\
\begin{pmatrix} L_{12} \\ L_{23}+L_{33} \\ L_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{21} & M_{22}+M_{23} & M_{24} \end{pmatrix} &= 0, \\
\begin{pmatrix} L_{12} \\ L_{23}+L_{33} \\ L_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{21} & N_{22}+N_{23} & N_{24} \end{pmatrix} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Estos productos matriciales nos conducen a dos grandes tipos de expansiones de un sistema. Evidentemente, las dos posibilidades prácticas de expansión vendrán de obligar a que se anulen algunos bloques matriciales. Veámoslo.

4.4.1. Caso 1

Con una simple observación de las ecuaciones matriciales (4.28) obtenemos las siguientes condiciones suficientes para que se cumpla el Teorema 3.1:

$$\begin{aligned}
M_{12} &= 0, \\
M_{23}+M_{33} &= 0, \\
M_{42} &= 0, \\
L_{12} &= 0, \\
L_{23}+L_{33} &= 0, \\
L_{42} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

es decir,

$$\begin{aligned} M_{12} &= 0, \\ M_{23} &= -M_{33}, \\ M_{42} &= 0, \\ L_{12} &= 0, \\ L_{23} &= -L_{33}, \\ L_{42} &= 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Las matrices complementarias M, N y L serán en este caso de la forma:

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ -M_{21} & -M_{22} & -M_{23} & -M_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ N &= \begin{pmatrix} 0 & N_{12} & -N_{12} & 0 \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ -N_{21} & -(N_{22}+N_{23}+N_{33}) & N_{33} & -N_{24} \\ 0 & N_{42} & -N_{42} & 0 \end{pmatrix}, \\ L &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ -L_{21} & -L_{22} & -L_{23} & -L_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Observación: La estructura matricial de cualquier agregación, (4.22), queda incluida en este Caso 1 por cuanto la matriz complementaria N de una agregación es más restrictiva que la que acabamos de obtener.

Realizamos a continuación un estudio de la controlabilidad y observabilidad del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ con el fin de garantizar estas propiedades a partir de los valores que toman ciertas submatrices de las matrices complementarias M, N y L y que pueden ser escogidas con suma flexibilidad.

Controlabilidad caso 1

Sea la matriz de controlabilidad $\tilde{H}^c_\lambda$ de (4.5) que resulta de sustituir en ella las relaciones (4.30).

$$\tilde{H}_{\lambda}^{c} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} A_{11}-\lambda I_1 & \frac{1}{2}A_{12} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & 2N_{12} & \frac{1}{2}B_{12}-N_{12} & B_{13} \\ 2M_{21} & 2M_{22}-\lambda I_2 & 2M_{22}+2M_{23} & 2M_{24} & 2N_{21} & 2N_{22}+2N_{33} & N_{23}-N_{33} & 2N_{24} \\ A_{21}-M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{22} & A_{22}-M_{22}-M_{23}-\lambda I_2 & A_{23}-M_{24} & B_{21}-N_{21} & -N_{22}-N_{23}-2N_{33} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{33} & B_{23}-N_{24} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32} & A_{32} & A_{33}-\lambda I_3 & B_{31} & 2N_{42} & \frac{1}{2}B_{32}-N_{42} & B_{33} \end{array}\right). \tag{4.32}$$

Operando con filas y columnas se obtiene:

$$\tilde{H}_{\lambda}^{c} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} A_{11}-\lambda I_1 & \frac{1}{2}A_{12} & 0 & A_{13} & B_{11} & 2N_{12} & \frac{1}{2}B_{12}-N_{12} & B_{13} \\ 2A_{21} & A_{22}-\lambda I_2 & 0 & 2A_{23} & 2B_{21} & -2N_{23}-2N_{33} & B_{22}+N_{23}+N_{33} & 2B_{23} \\ A_{21}-M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{22} & M_{22}-M_{23}-\lambda I_2 & A_{23}-M_{24} & B_{21}-N_{21} & -N_{22}-N_{23}-2N_{33} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{33} & B_{23}-N_{24} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32} & 0 & A_{33}-\lambda I_3 & B_{31} & 2N_{42} & \frac{1}{2}B_{32}-N_{42} & B_{33} \end{array}\right). \tag{4.33}$$

Se aprecia que los valores propios de la matriz $M_{22}-M_{23}$ son los candidatos para que el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ no sea controlable. Por esta razón, podemos denominarlos valores propios *no controlables*. Los restantes valores propios serán controlables si y sólo si el par (A,B) es controlable. Puede ser interesante considerar matrices N_{12}, N_{22}, N_{23}, N_{33} y N_{42} de forma que eligiendo convenientemente la sexta columna de la matriz (4.33) el rango sea máximo, es decir $\tilde{n}$.

Observabilidad caso 1

La matriz de observabilidad (4.11) después de sustituir las condiciones (4.30) vendrá dada

por:

$$\tilde{H}_{\lambda}^{o} = \left(\begin{array}{cccc} A_{11}-\lambda I_1 & 0 & \frac{1}{2}A_{12} & A_{13} \\ A_{21}+M_{21} & M_{22}-M_{23}-\lambda I_2 & \frac{1}{2}A_{22}+M_{23} & A_{23}+M_{24} \\ 2A_{21} & 0 & A_{22}-\lambda I_2 & 2A_{23} \\ A_{31} & 0 & \frac{1}{2}A_{32} & A_{33}-\lambda I_3 \\ \hline C_{11} & 0 & \frac{1}{2}C_{12} & C_{13} \\ 2L_{21} & 2L_{22}-2L_{23} & 2L_{23} & 2L_{24} \\ C_{21}-L_{21} & L_{23}-L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{23} & C_{23}-L_{24} \\ C_{31} & 0 & \frac{1}{2}C_{32} & C_{33} \end{array}\right). \tag{4.34}$$

Mediante algunas operaciones entres filas y columnas se obtiene una matriz equivalente que presenta la forma:

$$\tilde{H}_{\lambda}^{o} = \left(\begin{array}{cccc} A_{11}-\lambda I_1 & 0 & \frac{1}{2}A_{12} & A_{13} \\ A_{21}+M_{21} & M_{22}-M_{23}-\lambda I_2 & \frac{1}{2}A_{22}+M_{23} & A_{23}+M_{24} \\ 2A_{21} & 0 & A_{22}-\lambda I_2 & 2A_{23} \\ A_{31} & 0 & \frac{1}{2}A_{32} & A_{33}-\lambda I_3 \\ \hline C_{11} & 0 & \frac{1}{2}C_{12} & C_{13} \\ 2C_{21} & 0 & C_{22} & 2C_{23} \\ C_{21}-L_{21} & L_{23}-L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{23} & C_{23}-L_{24} \\ C_{31} & 0 & \frac{1}{2}C_{32} & C_{33} \end{array}\right). \tag{4.35}$$

Se observa como los valores candidatos a ser *no observables* del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ son nuevamente los valores propios de la matriz $M_{22}-M_{23}$. Por ello, conviene tomar matrices L_{22} y L_{23} de forma que $L_{23}-L_{22}$ produzca rango máximo $\tilde{n}$.

Las matrices ampliadas $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$ tendrán la siguiente estructura:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \frac{1}{2}A_{12} & \frac{1}{2}A_{12} & A_{13} \\ A_{21}+M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{22} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{23} & A_{23}+M_{24} \\ A_{21}-M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{22} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{23} & A_{23}-M_{24} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32} & \frac{1}{2}A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & \frac{1}{2}B_{12}+N_{12} & \frac{1}{2}B_{12}-N_{12} & B_{13} \\ B_{21}+N_{21} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{22} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{23} & B_{23}+N_{24} \\ B_{21}-N_{21} & \frac{1}{2}B_{22}-(N_{22}+N_{23}+N_{33}) & \frac{1}{2}B_{22}+N_{33} & B_{23}-N_{24} \\ B_{31} & \frac{1}{2}B_{32}+N_{42} & \frac{1}{2}B_{32}-N_{42} & B_{33} \end{pmatrix}, \tag{4.36}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & \frac{1}{2}C_{12} & \frac{1}{2}C_{12} & C_{13} \\ C_{21}+L_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{23} & C_{23}+L_{24} \\ C_{21}-L_{21} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{23} & C_{23}-L_{24} \\ C_{31} & \frac{1}{2}C_{32} & \frac{1}{2}C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

4.4.2. Caso 2

Un segundo caso de condiciones suficientes nos viene dado por:

$$\begin{aligned} M_{21} &= 0, \\ M_{22}+M_{23} &= 0, \\ M_{24} &= 0, \\ N_{21} &= 0, \\ N_{22}+N_{23} &= 0, \\ N_{24} &= 0, \end{aligned} \tag{4.37}$$

es decir,

$$\begin{aligned} M_{21} &= 0, \\ M_{22} &= -M_{23}, \\ M_{24} &= 0, \\ N_{21} &= 0, \\ N_{22} &= -N_{23}, \\ N_{24} &= 0. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Las matrices complementarias M, N y L quedarán ahora de la forma:

$$
\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & -M_{12} & 0 \\ 0 & M_{22} & -M_{22} & 0 \\ 0 & M_{32} & -M_{32} & 0 \\ 0 & M_{42} & -M_{42} & 0 \end{pmatrix}, \\
N &= \begin{pmatrix} 0 & N_{12} & -N_{12} & 0 \\ 0 & N_{22} & -N_{22} & 0 \\ 0 & N_{32} & -N_{32} & 0 \\ 0 & N_{42} & -N_{42} & 0 \end{pmatrix}, \\
L &= \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & -L_{12} & 0 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ -L_{21} & -(L_{22}+L_{23}+L_{33}) & L_{33} & -L_{24} \\ 0 & L_{42} & -L_{42} & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

con lo cual teniendo en cuenta que también consideramos expansión del espacio de salida, la matriz complementaria L tiene mayor libertad de elección que la correspondiente a una restricción. Así pues, las restricciones son casos particulares del Caso 2.

Controlabilidad caso 2

De nuevo vamos a considerar la matriz de controlabilidad (4.5), que en la situación presente será:

$$
\tilde{H}^c_\lambda = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
A_{11}-\lambda I_1 & \frac{1}{2}A_{12}+M_{12} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & 2N_{12} & \frac{1}{2}B_{12}-N_{12} & B_{13} \\
0 & M_{22}-M_{32}-\lambda I_2 & 0 & 0 & 0 & 2N_{22}-2N_{32} & -N_{22}+N_{32} & 0 \\
A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{32} & A_{22}-\lambda I_2 & A_{23} & B_{21} & 2N_{32} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{32} & B_{23} \\
A_{31} & \frac{1}{2}A_{32}+M_{42} & A_{32} & A_{33}-\lambda I_3 & B_{31} & 2N_{42} & \frac{1}{2}B_{32}-N_{42} & B_{33}
\end{array}\right). \tag{4.40}
$$

Sumando a la sexta columna el doble de la séptima se obtiene

$$\tilde{H}_{\lambda}^{c} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} A_{11}-\lambda I_1 & \frac{1}{2}A_{12}+M_{12} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & \frac{1}{2}B_{12}-N_{12} & B_{13} \\ 0 & M_{22}-M_{32}-\lambda I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{22}+N_{32} & 0 \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{32} & A_{22}-\lambda I_2 & A_{23} & B_{21} & B_{22} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{32} & B_{23} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32}+M_{42} & A_{32} & A_{33}-\lambda I_3 & B_{31} & B_{32} & \frac{1}{2}B_{32}-N_{42} & B_{33} \end{array}\right). \tag{4.41}$$

Los valores propios de la matriz $M_{22}-M_{32}$ son ahora los candidatos valores propios no controlables. Los restantes valores propios, es decir, los correspondientes a la matriz A, serán controlables siempre que el par (A,B) lo sea. Con el fin de compensar la posible pérdida de rango puede ser interesante considerar matrices N_{22} y N_{32} de forma que la matriz $N_{32}-N_{22}$ sea de rango máximo.

Observabilidad caso 2

Si partimos de la matriz de observabilidad (4.10), obtenemos:

$$\tilde{H}_{\lambda}^{o} = \left(\begin{array}{cccc} A_{11}-\lambda I_1 & \frac{1}{2}A_{12}+M_{12} & \frac{1}{2}A_{12}-M_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{22}-\lambda I_2 & \frac{1}{2}A_{22}-M_{22} & A_{23} \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{32} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{32}-\lambda I_2 & A_{23} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32}+M_{42} & \frac{1}{2}A_{32}-M_{42} & A_{33}-\lambda I_3 \\ \hline C_{11} & \frac{1}{2}C_{12}+L_{12} & \frac{1}{2}C_{12}-L_{12} & C_{13} \\ C_{21}+L_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{23} & C_{23}+L_{24} \\ C_{21}-L_{21} & \frac{1}{2}C_{22}-(L_{22}+L_{23}+L_{33}) & \frac{1}{2}C_{22}+L_{33} & C_{23}-L_{24} \\ C_{31} & \frac{1}{2}C_{32}+L_{42} & \frac{1}{2}C_{32}-L_{42} & C_{33} \end{array}\right). \tag{4.42}$$

Operando con filas y columnas se llega a una matriz de la forma:

$$\tilde{H}_{\lambda}^{o} = \left(\begin{array}{cccc} A_{11}-\lambda I_1 & A_{12} & \frac{1}{2}A_{12}-M_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda I_2 & \frac{1}{2}A_{22}-M_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & M_{22}-M_{32}-\lambda I_2 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & \frac{1}{2}A_{32}-M_{42} & A_{33}-\lambda I_3 \\ \hline C_{11} & C_{12} & \frac{1}{2}C_{12}-L_{12} & C_{13} \\ 2L_{21} & 2L_{22}+2L_{23} & L_{23}-L_{33} & 2L_{24} \\ C_{21}-L_{21} & C_{22}-L_{22}-L_{23} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{33} & C_{23}-L_{24} \\ C_{31} & C_{32} & \frac{1}{2}C_{32}-L_{42} & C_{33} \end{array}\right). \tag{4.43}$$

Se aprecia como los candidatos valores no observables del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ son justamente los valores propios de la matriz $M_{22} - M_{32}$. Para ello, se pueden tomar matrices L_{23} y L_{33} de forma conveniente con el fin de obtener rango máximo.

Las matrices ampliadas $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$ serán de la forma:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \frac{1}{2}A_{12}+M_{12} & \frac{1}{2}A_{12}-M_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{22} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{22} & A_{23} \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{32} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{32} & A_{23} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32}+M_{42} & \frac{1}{2}A_{32}-M_{42} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & \frac{1}{2}B_{12}+N_{12} & \frac{1}{2}B_{12}-N_{12} & B_{13} \\ B_{21} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{22} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{22} & B_{23} \\ B_{21} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{32} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{32} & B_{23} \\ B_{31} & \frac{1}{2}B_{32}+N_{42} & \frac{1}{2}B_{32}-N_{42} & B_{33} \end{pmatrix}, \tag{4.44}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & \frac{1}{2}C_{12}+L_{12} & \frac{1}{2}C_{12}-L_{12} & C_{13} \\ C_{21}+L_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{23} & C_{23}+L_{24} \\ C_{21}-L_{21} & \frac{1}{2}C_{22}-(L_{22}+L_{23}+L_{33}) & \frac{1}{2}C_{22}+L_{33} & C_{23}-L_{24} \\ C_{31} & \frac{1}{2}C_{32}+L_{42} & \frac{1}{2}C_{32}-L_{42} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Comentario: Como hemos visto, existen dos grandes situaciones en las que resulta fácil la elección de las matrices complementarias. Además, en ambos casos las expansiones no son necesariamente restricciones ni agregaciones, lo cual aumenta y acota las posibles expansiones-contracciones de un sistema. Hay que prestar atención a la hora de considerar unas u otras submatrices complementarias y cualquier diseñador deberá seguir en todo momento algún criterio que sea de su interés. Inclusive, se puede expandir con la intención que el valor de coste sea mínimo una vez diseñadas unas determinadas leyes de control en el espacio $\tilde{\mathbf{S}}$ y de ser contraídas al sistema inicial $\mathbf{S}$.

A la vista del Teorema 3.1 existen otras matrices complementarias dignas de tener en cuenta, todas aquellas que verifiquen las condiciones (3.34). Sin embargo, en la práctica pueden resultar complejas de obtener. Malinowski y Singh, en su artículo "*Controllability and Observability of Expanded Systems with Overlapping Decomposition*", cf. [44], tratan el tema de la estabilidad, controlabilidad y observabilidad para dos casos concretos de expansiones. Aunque en aquel trabajo no se incluye la expansión del espacio de entrada ni de salida y se utilizan las matrices complementarias que continúan siendo habituales a

la hora de poner en práctica el proceso de expansión-contracción, los estudiaremos como casos importantes dentro del contexto del Principio de Inclusión Generalizado, pero desde la perspectiva de nuestra tesis. Los notaremos por Caso 3 y Caso 4. Al final, veremos como las estructuras de las matrices complementarias obtenidas se encuentran incluidas como subcasos del Caso 1 y Caso 2.

4.4.3. Caso 3

Consideremos las condiciones generales dadas por (2.11), es decir,

$$\begin{array}{ll} a) & UM^iV = 0, \\ b) & UM^{i-1}NR = 0, \\ c) & SLM^{i-1}V = 0, \\ d) & SLM^{i-1}NR = 0 \end{array} \tag{4.45}$$

para todo i=$1,2,\ldots,\tilde{n}$.

Supongamos que se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{ll} a) & MV = 0, \\ b) & UN = 0, \\ c) & MN = 0, \\ d) & LV = 0, \\ e) & LN = 0. \end{array} \tag{4.46}$$

Se observa como, en este supuesto, tenemos condiciones suficientes para que se cumplan las relaciones *a)* a *d)* de (4.45) y por lo tanto el Principio de Inclusión Generalizado. Veamos ahora que forma adoptarán las matrices complementarias M, N y L.

a) MV=0 implica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & -M_{12} & 0 \\ 0 & M_{22} & -M_{22} & 0 \\ 0 & M_{32} & -M_{32} & 0 \\ 0 & M_{42} & -M_{42} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.47}$$

De esta manera, la matriz ampliada $\tilde{A} = VAU + M$ quedará de la forma:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \frac{1}{2}A_{12}+M_{12} & \frac{1}{2}A_{12}-M_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{22} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{22} & A_{23} \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{32} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{32} & A_{23} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32}+M_{42} & \frac{1}{2}A_{32}-M_{42} & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.48}$$

b) De $UN = 0$ se tiene

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ -N_{21} & -N_{22} & -N_{23} & -N_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.49}$$

Así pues, la matriz ampliada $\tilde{B}$ adoptará la forma:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & \frac{1}{2}B_{12} & \frac{1}{2}B_{12} & B_{13} \\ B_{21}+N_{21} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{22} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{23} & B_{23}+N_{24} \\ B_{21}-N_{21} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{22} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{23} & B_{23}-N_{24} \\ B_{31} & \frac{1}{2}B_{32} & \frac{1}{2}B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.50}$$

c) $MN = 0$ implica

$$MN = \begin{pmatrix} M_{12}N_{21} & M_{12}N_{22} & M_{12}N_{23} & M_{12}N_{24} \\ M_{22}N_{21} & M_{22}N_{22} & M_{22}N_{23} & M_{22}N_{24} \\ M_{32}N_{21} & M_{32}N_{22} & M_{32}N_{23} & M_{32}N_{24} \\ M_{42}N_{21} & M_{42}N_{22} & M_{42}N_{23} & M_{42}N_{24} \end{pmatrix} = 0. \tag{4.51}$$

d) Al considerar $LV = 0$, obtenemos:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & -L_{12} & 0 \\ 0 & L_{22} & -L_{22} & 0 \\ 0 & L_{32} & -L_{32} & 0 \\ 0 & L_{42} & -L_{42} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.52}$$

con lo cual la matriz ampliada $\tilde{C}$ será de la forma:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & \frac{1}{2}C_{12}+L_{12} & \frac{1}{2}C_{12}-L_{12} & C_{13} \\ C_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{22} & C_{23} \\ C_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{32} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{32} & C_{23} \\ C_{31} & \frac{1}{2}C_{32}+L_{42} & \frac{1}{2}C_{32}-L_{42} & C_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.53}$$

e) Al suponer LN=0, se requiere que

$$LN = \begin{pmatrix} L_{12}N_{21} & L_{12}N_{22} & L_{12}N_{23} & L_{12}N_{24} \\ L_{22}N_{21} & L_{22}N_{22} & L_{22}N_{23} & L_{22}N_{24} \\ L_{32}N_{21} & L_{32}N_{22} & L_{32}N_{23} & L_{32}N_{24} \\ L_{42}N_{21} & L_{42}N_{22} & L_{42}N_{23} & L_{42}N_{24} \end{pmatrix} = 0. \tag{4.54}$$

Para que se cumpla $MN = 0$ y $LN = 0$ podemos considerar, como caso particular muy usado en la literatura, $N_{21} = N_{22} = N_{23} = N_{24} = 0$, es decir, $N = 0$. Entonces, se verifican todas las condiciones anteriores sean cuales sean las matrices M y L obtenidas en los apartados *a)* y *b)*, respectivamente.

Controlabilidad caso 3

Vamos a estudiar cuando va a ser controlable el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ en esta situación. Para nuestros propósitos, consideremos la matriz general de controlabilidad obtenida en (4.5), teniendo en cuenta como deben ser las submatrices en este caso. Entonces:

$$\tilde{H}_{\lambda}^{c} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} A_{11}-\lambda I_1 & \frac{1}{2}A_{12}+M_{12} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & 0 & \frac{1}{2}B_{12} & B_{13} \\ 0 & M_{22}-M_{32}-\lambda I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{32} & A_{22}-\lambda I_2 & A_{23} & B_{21} & 0 & \frac{1}{2}B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32}+M_{42} & A_{32} & A_{33}-\lambda I_3 & B_{31} & 0 & \frac{1}{2}B_{32} & B_{33} \end{array}\right). \tag{4.55}$$

Como podemos apreciar, cuando $|M_{22}-M_{32}-\lambda I_2| = 0$, $\tilde{\mathbf{S}}$ no es controlable. Es decir, los valores propios de la matriz $M_{22}-M_{32}$ son los que harán que se pierda la controlabilidad del sistema expandido, puesto que en este momento el rango de $\tilde{H}_{\lambda}^{c}$ será menor que $\tilde{n}$. Por otro lado, los restantes valores propios de $\tilde{A}$, es decir, los valores propios de A, serán *controlables* si y sólo si el par (A,B) es controlable.

Observación: Supongamos un sistema $\mathbf{S}$ autónomo, es decir, en el que la matriz $B=0$. Puesto que tenemos libertad a la hora de escoger las matrices M_{22} y M_{32}, lo haremos de tal forma que los valores propios de $M_{22}-M_{32}$ tengan parte real negativa. De esta forma, el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ será estabilizable si y sólo si el par (A,B) es estable y los valores propios de la matriz $M_{22}-M_{32}$ tienen parte real negativa.

Observabilidad caso 3

Por el Teorema 4.4, $(\tilde{A},\tilde{C})$ será observable si y sólo si para todo $\lambda \in \mathbf{C}$, la matriz $\tilde{H}_{\lambda}^{o}$ tiene rango $\tilde{n}$. Si partimos de la matriz de observabilidad (4.10), tenemos:

$$\tilde{H}_{\lambda}^{o} = \left(\begin{array}{cccc} A_{11}-\lambda I_1 & \frac{1}{2}A_{12}+M_{12} & \frac{1}{2}A_{12}-M_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{22}-\lambda I_2 & \frac{1}{2}A_{22}-M_{22} & A_{23} \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{32} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{32}-\lambda I_2 & A_{23} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32}+M_{42} & \frac{1}{2}A_{32}-M_{42} & A_{33}-\lambda I_3 \\ \hline C_{11} & \frac{1}{2}C_{12}+L_{12} & \frac{1}{2}C_{12}-L_{12} & C_{13} \\ C_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{22} & C_{23} \\ C_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{32} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{32} & C_{23} \\ C_{31} & \frac{1}{2}C_{32}+L_{42} & \frac{1}{2}C_{32}-L_{42} & C_{33} \end{array}\right). \tag{4.56}$$

Sumando a la tercera columna la segunda, restando a la segunda fila la tercera y a la sexta fila la séptima, se llega a la matriz:

$$\tilde{H}_{\lambda}^{o} = \left(\begin{array}{cccc} A_{11}-\lambda I_1 & \frac{1}{2}A_{12}+M_{12} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & M_{22}-M_{32}-\lambda I_2 & 0 & 0 \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{32} & A_{22}-\lambda I_2 & A_{23} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32}+M_{42} & A_{32} & A_{33}-\lambda I_3 \\ \hline C_{11} & \frac{1}{2}C_{12}+L_{12} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & L_{22}-L_{32} & 0 & 0 \\ C_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{32} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & \frac{1}{2}C_{32}+L_{42} & C_{32} & C_{33} \end{array}\right). \tag{4.57}$$

Se aprecia fácilmente que, para todo λ que no sea valor propio de $M_{22}-M_{32}$, el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ será observable siempre que el par (A,C) lo sea. Así pues, si el par (A,C) es observable, los candidatos valores propios no observables del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ son los de la matriz $M_{22}-M_{32}$. Una estrategia para compensar la pérdida de rango de la matriz $M_{22}-M_{32}$, es tomar las matrices L_{22} y L_{32} de forma que el rango de $L_{22}-L_{32}$ sea máximo, o cuando menos, que al sustituir filas de ceros de la matriz $M_{22}-M_{32}$ por filas de $L_{22}-L_{32}$, la matriz resultante sea de rango $\tilde{n}$. Esto será posible siempre que el rango de $M_{22}-M_{32}$ sea mayor o igual que n_2-l_2. En cualquier caso, podemos complementar la matriz $M_{22}-M_{32}$ con filas de otras matrices correspondientes a los bloques situados en la parte inferior de la matriz punteada (4.57).

Comentario: Si además consideramos otras restricciones en las matrices complementarias que intervienen, tales como:

$$\begin{aligned} M_{12} &= \tfrac{1}{2}A_{12}, & M_{22} &= \tfrac{1}{2}A_{22}, \\ M_{32} &= -\tfrac{1}{2}A_{22}, & M_{42} &= -\tfrac{1}{2}A_{32}, \end{aligned} \tag{4.58}$$

entonces la matriz ampliada $\tilde{A}$ aparecerá de la forma:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{23} \\ \hline A_{21} & 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & 0 & A_{32} & A_{33} \end{array}\right) \tag{4.59}$$

que suele ser uno de los tipos de expansión más utilizados. La ventaja estriba en que $\tilde{A}$ posee submatrices nulas en los bloques no diagonales, con lo cual las interconexiones

pueden resultar más débiles. En esta situación, los valores propios de la matriz A_{22} son los no controlables valores propios del sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$.

4.4.4. Caso 4

Otras condiciones suficientes para que se verifiquen las ecuaciones (4.45) vienen dadas por:

$$\begin{array}{ll} a) & UM = 0, \\ b) & UN = 0, \\ c) & LV = 0, \\ d) & LM = 0, \\ e) & LN = 0. \end{array} \tag{4.60}$$

Así pues,

a) $UM = 0$, implica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ -M_{21} & -M_{22} & -M_{23} & -M_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.61}$$

De esta manera, la matriz $\tilde{A}$ quedará de la forma

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \frac{1}{2}A_{12} & \frac{1}{2}A_{12} & A_{13} \\ A_{21}+M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{22} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{23} & A_{23}+M_{24} \\ A_{21}-M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{22} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{23} & A_{23}-M_{24} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32} & \frac{1}{2}A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.62}$$

b) $UN = 0$ obliga, de forma análoga al apartado anterior, una matriz N de la forma

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ -N_{21} & -N_{22} & -N_{23} & -N_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.63}$$

En este supuesto, la matriz ampliada $\tilde{B}$ será,

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & \frac{1}{2}B_{12} & \frac{1}{2}B_{12} & B_{13} \\ B_{21}+N_{21} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{22} & \frac{1}{2}B_{22}+N_{23} & B_{23}+N_{24} \\ B_{21}-N_{21} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{22} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{23} & B_{23}-N_{24} \\ B_{31} & \frac{1}{2}B_{32} & \frac{1}{2}B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.64}$$

c) Si $LV = 0$, tendrá al igual que en (4.52) la forma:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & -L_{12} & 0 \\ 0 & L_{22} & -L_{22} & 0 \\ 0 & L_{32} & -L_{32} & 0 \\ 0 & L_{42} & -L_{42} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.65}$$

con lo cual la matriz ampliada $\tilde{C}$ será de la forma

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & \frac{1}{2}C_{12}+L_{12} & \frac{1}{2}C_{12}-L_{12} & C_{13} \\ C_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{22} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{22} & C_{23} \\ C_{21} & \frac{1}{2}C_{22}+L_{32} & \frac{1}{2}C_{22}-L_{32} & C_{23} \\ C_{31} & \frac{1}{2}C_{32}+L_{42} & \frac{1}{2}C_{32}-L_{42} & C_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.66}$$

d) Al considerar $LM = 0$, se tiene:

$$LM = \begin{pmatrix} L_{12}M_{21} & L_{12}M_{22} & L_{12}M_{23} & L_{12}M_{24} \\ L_{22}M_{21} & L_{22}M_{22} & L_{22}M_{23} & L_{22}M_{24} \\ L_{32}M_{21} & L_{32}M_{22} & L_{32}M_{23} & L_{32}M_{24} \\ L_{42}M_{21} & L_{42}M_{22} & L_{42}M_{23} & L_{42}M_{24} \end{pmatrix} = 0. \tag{4.67}$$

e) Al suponer LN=0 se obtiene, como en (4.54),

$$LN = \begin{pmatrix} L_{12}N_{21} & L_{12}N_{22} & L_{12}N_{23} & L_{12}N_{24} \\ L_{22}N_{21} & L_{22}N_{22} & L_{22}N_{23} & L_{22}N_{24} \\ L_{32}N_{21} & L_{32}N_{22} & L_{32}N_{23} & L_{32}N_{24} \\ L_{42}N_{21} & L_{42}N_{22} & L_{42}N_{23} & L_{42}N_{24} \end{pmatrix} = 0. \tag{4.68}$$

Puesto que debe cumplirse $LM = 0$ y $LN = 0$ podemos considerar como caso particular $L_{12} = L_{22} = L_{32} = L_{42} = 0$, es decir, $L = 0$. Entonces, se cumplen las condiciones anteriores para cualquier matriz M y N dadas en *a)* y *b)*. Estudiemos como será la controlabilidad y la observabilidad del sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$.

Controlabilidad caso 4

Partimos de la matriz de controlabilidad (4.5) del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$. En la situación que nos encontramos adoptará la forma:

$$\tilde{H}_{\lambda}^{c} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} A_{11}-\lambda I_1 & \frac{1}{2}A_{12} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & 0 & \frac{1}{2}B_{12} & B_{13} \\ 2M_{21} & 2M_{22}-\lambda I_2 & 2M_{22}+2M_{23} & 2M_{24} & 2N_{21} & 2N_{22}-2N_{23} & 2N_{23} & 2N_{24} \\ A_{21}-M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{22} & A_{22}-M_{22}-M_{23}-\lambda I_2 & A_{23}-M_{24} & B_{21}-N_{21} & N_{23}-N_{22} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{23} & B_{23}-N_{24} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32} & A_{32} & A_{33}-\lambda I_3 & B_{31} & 0 & \frac{1}{2}B_{32} & B_{33} \end{array} \right). \tag{4.69}$$

Si sumamos a la segunda fila la tercera multiplicada por dos y posteriormente sumamos a la tercera columna la segunda multiplicada por menos dos, se llega a la matriz

$$\tilde{H}_{\lambda}^{c} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} A_{11}-\lambda I_1 & \frac{1}{2}A_{12} & 0 & A_{13} & B_{11} & 0 & \frac{1}{2}B_{12} & B_{13} \\ 2A_{21} & A_{22}-\lambda I_2 & 0 & 2A_{23} & 2B_{21} & 0 & B_{22} & 2B_{23} \\ A_{21}-M_{21} & \frac{1}{2}A_{22}-M_{22} & M_{22}-M_{23}-\lambda I_2 & A_{23}-M_{24} & B_{21}-N_{21} & N_{23}-N_{22} & \frac{1}{2}B_{22}-N_{23} & B_{23}-N_{24} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32} & 0 & A_{33}-\lambda I_3 & B_{31} & 0 & \frac{1}{2}B_{32} & B_{33} \end{array} \right). \tag{4.70}$$

Vemos que los valores propios de $M_{22} - M_{23}$ son los candidatos para que el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ sea no controlable. Por ello, será interesante considerar submatrices complementarias N_{23} y N_{22} de forma que la matriz $\tilde{H}_{\lambda}^{c}$ tenga rango máximo.

Observabilidad caso 4

Desde el punto de vista de la observabilidad, veamos como se presenta la matriz (4.11) en

este caso.

$$\tilde{H}_{\lambda}^{o} = \left(\begin{array}{cccc} A_{11}-\lambda I_1 & 0 & \frac{1}{2}A_{12} & A_{13} \\ A_{21}+M_{21} & M_{22}-M_{23}-\lambda I_2 & \frac{1}{2}A_{22}+M_{23} & A_{23}+M_{24} \\ 2A_{21} & 0 & A_{22}-\lambda I_2 & 2A_{23} \\ A_{31} & 0 & \frac{1}{2}A_{32} & A_{33}-\lambda I_3 \\ \hline C_{11} & 0 & \frac{1}{2}C_{12} & C_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & 0 & \frac{1}{2}C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & 0 & \frac{1}{2}C_{32} & C_{33} \end{array}\right). \tag{4.71}$$

Al tomar $L = 0$ el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ dejará de ser observable para los valores propios de la matriz $M_{22} - M_{23}$. En esta situación no podemos compensar la pérdida de rango por tener toda una columna de ceros.

Observación: Al igual que en el Caso 3, es frecuente considerar matrices M_{ij} particulares tales como:

$$\begin{aligned} M_{21} &= A_{21}, & M_{22} &= \tfrac{1}{2}A_{22}, \\ M_{23} &= -\tfrac{1}{2}A_{22}, & M_{24} &= -A_{23}. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Entonces, la matriz $\tilde{A}$ quedará de la forma

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & \frac{1}{2}A_{12} & \frac{1}{2}A_{12} & A_{13} \\ 2A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{22} & 2A_{23} \\ A_{31} & \frac{1}{2}A_{32} & \frac{1}{2}A_{32} & A_{33} \end{array}\right). \tag{4.73}$$

Los valores propios de $M_{22} - M_{23}$ coincidirán con los de la matriz A_{22}. Así pues, estos serán los no observables valores propios de $\tilde{\mathbf{S}}$. Con estas submatrices complementarias M_{ij} se obtiene una matriz ampliada $\tilde{A}$ con algunos bloques matriciales no diagonales nulos, lo cual debilita el efecto de las interconexiones a la hora de desacoplar el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ y diseñar leyes de control en el espacio expandido y desacoplado.

Comentario: A pesar de ser el Caso 3 de uso frecuente en múltiples artículos, $\mathbf{S}$ es un caso particular de restricción de $\tilde{\mathbf{S}}$, según el Teorema 4.5. No hay más que considerar $N_{12} = N_{22} = N_{32} = N_{42} = 0$ en *b)* de (4.15). Puesto que toda restricción quedaba incluida como subcaso del Caso 2 estudiado anteriormente, el Caso 3 también queda inmerso dentro del Caso 2. El Caso 4 se trata de una agregación si escogemos $L_{21} = L_{22} = L_{23} = L_{24} = 0$

en *c)* de (4.22). Así pues, ya que toda agregación estaba incluida dentro del Caso 1, el Caso 4 será asimismo un subcaso del Caso 1.

Nos queda otro tipo de estructura que no está contemplada en ninguna de las anteriores y aunque no presenta una gran simplicidad matricial vale la pena comentarla. La notaremos como Caso 5.

4.4.5. Caso 5

De las relaciones (3.34) si escogemos una matriz $(M_{22}+M_{33})$ *nilpotente de índice* r, es decir, de forma que $(M_{22}+M_{33})^r = 0$ y $(M_{22}+M_{33})^{r-1} \neq 0$, con $2 < r \leqslant \tilde{n}+1$, las condiciones impuestas por el Teorema 3.1 deberán verificarse no para toda i=$2,\ldots,\tilde{n}+1$ sino para toda i=$2,\ldots,r$. Este caso es algo más laborioso que los dos anteriores, pero ofrece nuevas posibles matrices de expansión M, siendo N y L cualquier matriz de la forma dada en (3.32) y (3.33), respectivamente. Aquí no se puede realizar un estudio genérico sobre la controlabilidad y observabilidad del sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ por cuanto dichas propiedades dependerán en concreto del sistema que se esté tratando.

4.5. Leyes de Control Contraíbles

Aprovechando los resultados que nos proporciona el Teorema 3.8 acerca de la contractibilidad de una ley de control $\tilde{u} = -\tilde{K}\,\tilde{x}$ diseñada en el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ para obtener una ley $u = -K\,x$ y ser implementada en el sistema inicial $\mathbf{S}$, vamos a estudiar cuales son los casos particulares dignos de mención.

Observando las condiciones (3.88), vemos que se resumirán en dos grandes casos, cada uno de ellos como condición suficiente de contractibilidad.

4.5.1. Caso 1

Partimos de una matriz complementaria F de la forma

$$F = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & -F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ -F_{21} & -(F_{22}+F_{23}+F_{33}) & F_{33} & -F_{24} \\ 0 & F_{42} & -F_{42} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.74}$$

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} F_{12} &= 0, \\ F_{23} + F_{33} &= 0, \\ F_{42} &= 0. \end{aligned} \tag{4.75}$$

En este caso, toda ley de control $\tilde{u} = -\tilde{K}\tilde{x}$ será contraíble a $u = -Kx$, independientemente de como sean escogidas las matrices complementarias M y N aunque, lógicamente, cumpliendo las condiciones del Teorema 3.1. Así pues, la matriz F quedará de la forma:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ -F_{21} & -F_{22} & -F_{23} & -F_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.76}$$

4.5.2. Caso 2

Un segundo caso vendrá dado por las condiciones suficientes siguientes:

$$\begin{aligned} M_{21} &= 0, \\ M_{22} + M_{23} &= 0, \\ M_{24} &= 0, \\ N_{21} &= 0, \\ N_{22} + N_{23} &= 0, \\ N_{24} &= 0 \end{aligned} \tag{4.77}$$

donde ahora no importa la forma de escoger las submatrices F_{ij} correspondientes a (3.87) del Teorema 3.8. Como puede apreciarse, estas condiciones corresponden a las dadas en el Caso 2 de la sección anterior, donde ya habíamos señalado la contractibilidad de una ley de control en este supuesto.

4.5.3. Caso 3

De forma análoga al Caso 5 de la sección anterior, si la matriz $(M_{22}+M_{33})$ es nilpotente de índice r, con $2<r\leqslant\tilde{n}+1$, las condiciones (3.88) impuestas por el Teorema 3.8 deberán verificarse no para toda i=$2,\ldots,\tilde{n}+1$ sino para toda i=$2,\ldots,r$. De esta manera puede resultar más fácil elegir matrices complementarias F_{ij}, M_{ij} y N_{ij} cumpliendo las condiciones requeridas, siendo la matriz complementaria F como en (3.87).

4.6. Control Descentralizado

Al estar interesados en el control descentralizado con solapamiento, podemos preguntarnos sobre la existencia de alguna expansión tal que, en la matriz ampliada correspondiente $\tilde{A}$, los bloques diagonales permanezcan inalterados, esto es:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & * & * \\ A_{21} & A_{22} & * & * \\ \hline * & * & A_{22} & A_{23} \\ * & * & A_{32} & A_{33} \end{array}\right). \tag{4.78}$$

Considerando la matriz $\tilde{A}$ dada por el Corolario 3.4, correspondiente a la ecuación (3.39), vemos que deberán cumplirse las siguientes condiciones matriciales:

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{1}{2}A_{12}, \\ M_{21} &= 0, \\ M_{22} &= \frac{1}{2}A_{22}, \\ M_{24} &= 0, \\ M_{33} &= \frac{1}{2}A_{22}, \\ M_{42} &= -\frac{1}{2}A_{32}. \end{aligned} \tag{4.79}$$

En este momento, la matriz complementaria M será

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_{12} & -\frac{1}{2}A_{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}A_{22} & M_{23} & 0 \\ 0 & -A_{22}-M_{23} & \frac{1}{2}A_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{32} & \frac{1}{2}A_{32} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.80}$$

Por su parte la matriz ampliada $\tilde{A}$ adoptará la expresión:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & \frac{1}{2}A_{22}+M_{23} & A_{23} \\ A_{21} & -\frac{1}{2}A_{22}-M_{23} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.81}$$

Con el fin de disponer del máximo número bloques matriciales nulos fuera de la diagonal principal, podemos escoger $M_{23} = -\frac{1}{2}A_{22}$. Entonces, la matriz M será del tipo

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_{12} & -\frac{1}{2}A_{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}A_{22} & -\frac{1}{2}A_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{22} & \frac{1}{2}A_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{32} & \frac{1}{2}A_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.82}$$

y la matriz ampliada $\tilde{A}$ de la forma

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{23} \\ \hline A_{21} & 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & 0 & A_{32} & A_{33} \end{array}\right). \tag{4.83}$$

En este mismo sentido, se pueden obtener todavía más bloques matriciales nulos fuera de la diagonal principal escogiendo las submatrices complementarias M_{ij} de (3.31) como:

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{1}{2}A_{12}, \\ M_{21} &= A_{21}, \\ M_{22} &= \frac{1}{2}A_{22}, \\ M_{23} &= -\frac{1}{2}A_{22}, \\ M_{24} &= -A_{23}, \\ M_{33} &= \frac{1}{2}A_{22}, \\ M_{42} &= -\frac{1}{2}A_{32}. \end{aligned} \tag{4.84}$$

La matriz M será, en este caso, de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_{12} & -\frac{1}{2}A_{12} & 0 \\ A_{21} & \frac{1}{2}A_{22} & -\frac{1}{2}A_{22} & -A_{23} \\ -A_{21} & -\frac{1}{2}A_{22} & \frac{1}{2}A_{22} & A_{23} \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{32} & \frac{1}{2}A_{32} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.85}$$

siendo la matriz ampliada

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{13} \\ 2A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{22} & 2A_{23} \\ A_{31} & 0 & A_{32} & A_{33} \end{array}\right), \tag{4.86}$$

suponiendo, claro está, que dicha matriz M verifique las ecuaciones (3.34).

Comentario: Llegados a este punto, se pueden elegir matrices complementarias que produzcan sistemas ampliados $\tilde{\mathbf{S}}$ de alguna forma concreta y que sean de interés para el diseñador. Puesto que el proceso de expansión-contracción queda garantizado, existe la opción de escoger las matrices con un gran margen de flexibilidad, tomando siempre aquellas que aporten mayores ventajas de cara a un buen control del sistema.

Capítulo 5

Ejemplo Ilustrativo

5.1. Introducción

En este capítulo se presenta un ejemplo ilustrativo de las principales ideas que se han tratado hasta el momento, haciendo especial hincapié en las ventajas aportadas por las nuevas posibilidades de expansión-contracción frente a las que se vienen utilizando habitualmente en múltiples artículos y trabajos que versan sobre control de sistemas de gran escala mediante descomposición con solapamiento.

Partiendo de un sistema **S** y con la intención de diseñar leyes de control óptimo, expandimos dicho sistema de dos formas, es decir, utilizando matrices complementarias distintas. En cada uno de los sistemas expandidos $\tilde{\mathbf{S}}$ diseñamos leyes de control para los sistemas desacoplados y las contraemos al sistema original **S**. Al comparar el valor del coste que se obtiene al cerrar el sistema inicial con las leyes de control contraídas, apreciaremos como es posible disminuir dicho coste al elegir las matrices complementarias de una forma que no es la habitual. No solamente la elección de estas matrices puede suponer una mejora en cuanto al coste se refiere, sino que además proporciona una gran flexibilidad para obtener determinadas propiedades y características del sistema requeridas por el diseñador. Señalemos que todos los cálculos matriciales han sido realizados con el programa MATLAB versión 4.2c.

5.2. Ejemplo

Sea un sistema lineal

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \quad \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{5.1}$$

que expresado matricialmente supondremos que es de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}: \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \hline A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{cc|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ \hline B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{cc|c} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ \hline C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ \hline C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde las matrices de estado, de entrada y de salida son constantes y vienen dadas por:

$$A = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ \hline -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{5.3}$$

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -1 \end{array}\right), \tag{5.4}$$

$$C = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{5.5}$$

donde A_{ij}, B_{ij} y C_{ij}, $i,j = 1,2,3$, se corresponden con los bloques matriciales dados en (5.1). Supondremos una partición del vector de estado, $x(t) \in \mathbb{R}^4$, del vector de entrada $u(t) \in \mathbb{R}^3$ y del de salida $y(t) \in \mathbb{R}^3$ en dos componentes, es decir, $x = (x_1^t, x_2^t, x_3^t)^t$, $u = (u_1^t, u_2^t, u_3^t)^t$, $y = (y_1^t, y_2^t, y_3^t)^t$. Las dimensiones de cada componente, como ya se ha comentado en (2.58), serán $n_1 = n_3 = 1, n_2 = 2$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $l_1 = l_3 = 1, l_2 = 2$.

5.3. Estudio del sistema S

Vamos a estudiar en primer lugar algunas propiedades del sistema **S** definido a partir de las matrices A, B y C anteriores. En este apartado no tendremos en cuenta ningún tipo de expansión. Además, dada una función de coste J, para unas ciertas matrices de peso Q^*, R^* y un cierto vector de estado inicial x_0, hallaremos el vector de control $u = -Kx$ que hace mínimo dicho valor de coste, así como el propio valor de coste. Todo ello nos servirá para efectuar posteriores comparaciones con los costes que se obtienen al diseñar leyes de control en el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ y contraerlas al sistema inicial **S**, ya sea utilizando las matrices complementarias habituales de expansión-contracción como otras matrices complementarias introducidas en esta tesis.

Por el Teorema 4.1 podemos comprobar que el par (A,B) es controlable puesto que la matriz de controlabilidad

$$\left(B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B \right) \tag{5.6}$$

es de rango 4. Asimismo, según el Teorema 4.3, el par (A,C) es observable, ya que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

es también 4, es decir de rango máximo.

Asociamos con el sistema **S** una función de coste como en (2.21), dada por

$$J(x_0,u) = \int_0^\infty (x^t Q^* x + u^t R^* u)\, dt, \tag{5.8}$$

tomando como matrices Q^* y R^* las siguientes:

$$Q^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

que evidentemente son simétricas y definidas positivas.

Fácilmente se comprueba que el par $\left(A,(Q^*)^{1/2}\right)$ es observable, puesto que el rango vale 4. Por otro lado, los valores propios de la matriz A son:

$$\{-2,\ -1\pm \mathrm{i},\ 1\}. \tag{5.10}$$

Se trata ahora de obtener una ley de control óptimo de manera que minimice la función J. Para ello, debemos calcular cual es el vector $u=-Kx$ que optimiza J. Para hallar la matriz de ganancia K, planteamos la ecuación matricial de Riccati, (2.67), siguiente:

$$A^tP+PA-PB(R^*)^{-1}B^tP+Q^*=0. \tag{5.11}$$

En las condiciones que estamos, por ser el par (A,B) controlable y el par $\left(A,(Q^*)^{1/2}\right)$ observable, al resolver dicha ecuación obtenemos una única matriz P simétrica y definida positiva, solución de la ecuación (5.11), que resulta ser

$$P=\begin{pmatrix} 1.3548 & 0.1255 & -0.0451 & -0.7207 \\ 0.1255 & 0.7612 & 0.0186 & -0.0694 \\ -0.0451 & 0.0186 & 0.3232 & -0.0099 \\ -0.7207 & -0.0694 & -0.0099 & 0.7274 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

De esta manera, la matriz de ganancia $K=(R^*)^{-1}B^tP$ dada en (2.68) será:

$$K=\begin{pmatrix} 1.2232 & 0.1308 & 0.2131 & 0.0034 \\ -0.0226 & 0.0093 & 0.1616 & -0.0050 \\ 2.2010 & 0.9561 & -0.0165 & -1.5174 \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Cerrando el sistema con el vector $u=-Kx$, se obtiene el sistema de lazo cerrado

$$\mathbf{S}_{\mathrm{c}}:\dot{x}=\hat{A}x, \tag{5.14}$$

donde

$$\hat{A}=A-BK=\begin{pmatrix} -3.6473 & -0.2177 & -0.4097 & 0.5106 \\ -3.2010 & -1.9561 & 1.0165 & 2.5174 \\ -1.2006 & -2.1402 & -3.3747 & 0.0016 \\ -2.2453 & -1.3056 & -0.4427 & -1.5243 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

y cuyos valores propios son:

$$\{-3.4772,\ -2.5086,\ -2.2583\pm 2.0717\,\mathrm{i}\}, \tag{5.16}$$

todos ellos con parte real negativa, con lo cual el sistema de lazo cerrado $\mathbf{S}_{\mathrm{c}}$ obtenido es estable.

Supongamos un vector inicial x_0 cuyas componentes son,

$$x_0=(3,1,0,2)^t \tag{5.17}$$

Entonces, el valor mínimo de la función de coste (5.8) como ya se vio en (2.110), será

$$\hat{J}^{\circ} = x_0^t P x_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.3548 & 0.1255 & -0.0451 & -0.7207 \\ 0.1255 & 0.7612 & 0.0186 & -0.0694 \\ -0.0451 & 0.0186 & 0.3232 & -0.0099 \\ -0.7207 & -0.0694 & -0.0099 & 0.7274 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 7.69. \tag{5.18}$$

Este será el valor mínimo de J que nos servirá de punto de comparación con el valor mínimo de la función de coste obtenida al cerrar el sistema $\mathbf{S}$ con otras leyes de control diseñadas en el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ y posteriormente contraídas e implementadas en $\mathbf{S}$.

5.4. Estudio del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ expandido mediante el procedimiento habitual

Siguiendo los pasos teóricos de este trabajo, pretendemos ahora efectuar un control descentralizado. Para ello, debemos expandir previamente el sistema $\mathbf{S}$. Supondremos como en (2.59) que el sistema ampliado $\tilde{\mathbf{S}}$ adopta la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}: \quad & \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Consideraremos una descomposición en dos componentes del vector de estado solapadas y señaladas en (5.1) mediante líneas discontinuas, es decir, $\tilde{x}_1 = (x_1^t, x_2^t)^t$, $\tilde{x}_2 = (x_2^t, x_3^t)^t$. De esta forma obtenemos un nuevo vector de estado $\tilde{x} = (\tilde{x}_1^t, \tilde{x}_2^t)^t$, que será de dimensión $\tilde{n} = 6$, por ser $\tilde{n}_1 = \tilde{n}_2 = 3$ las dimensiones de $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$, respectivamente. Análogamente, consideraremos solapamiento en el control (solapando la entrada u_2), es decir, $\tilde{u}_1 = (u_1^t, u_2^t)^t$, $\tilde{u}_2 = (u_2^t, u_3^t)^t$, con $\tilde{u} = (\tilde{u}_1^t, \tilde{u}_2^t)^t$, de dimensión $\tilde{m} = 4$ ya que $\tilde{m}_1 = \tilde{m}_2 = 2$ son las dimensiones de $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$. De igual manera se solapará la salida y_2, resultando $\tilde{y}_1 = (y_1^t, y_2^t)^t$, $\tilde{y}_2 = (y_2^t, y_3^t)^t$ con $\tilde{y} = (\tilde{y}_1^t, \tilde{y}_2^t)^t$, de dimensión $\tilde{l} = 4$, puesto que $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 2$ que son las dimensiones respectivas de $\tilde{y}_1$ y $\tilde{y}_2$.

Las matrices de expansión y contracción V y U, respectivamente, serán las que vienen

definidas en (2.60) y (2.61), y que en nuestro caso vendrán dadas por:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

Elegimos las matrices complementarias para la expansión del espacio de estado, de entrada y de salida siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_{12} & -\frac{1}{2}A_{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}A_{22} & -\frac{1}{2}A_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{22} & \frac{1}{2}A_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{32} & \frac{1}{2}A_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & -1 & -1.5 & 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 & -1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}C_{12} & -\frac{1}{2}C_{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}C_{22} & -\frac{1}{2}C_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}C_{22} & \frac{1}{2}C_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}C_{32} & \frac{1}{2}C_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

Comentario: Dichas matrices complementarias, unas de las más utilizadas a la hora de expandir-contraer un sistema tal y como ya habíamos apuntado en (2.62) y (2.64), aparecen en múltiples artículos y trabajos. Por ejemplo en [9], [21], [23], [27], [30], [32], [61], entre otros, se usan este tipo de matrices en ejemplos prácticos de expansión.

Estamos interesados en establecer una expansión de forma que $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{J}) \supset (\mathbf{S}, J)$, donde el tipo de control diseñado sea un control óptimo lineal cuadrático. Por el Teorema 3.4 consideraremos $N = 0$, por ser una condición suficiente. Las restantes condiciones del teorema ya se verifican tal y como se han tomado las matrices M, V, Q, Q^* y R^*. En esta situación, las matrices ampliadas $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$, deducidas en los Corolarios 3.4 a 3.6 y dadas por las

ecuaciones (3.39) a (3.41), serán:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.24}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.25}$$

Los valores propios de la matriz $\tilde{A}$ son:

$$\{-2,\ -1 \pm \mathrm{i},\ -2 \pm \mathrm{i},\ 1\}. \tag{5.26}$$

Comentario: Como era de esperar, los valores propios de la matriz A dados en (5.10) están incluidos en los valores propios de $\tilde{A}$, por ser $\tilde{A}$ una expansión de A. Ésto es consecuencia de un teorema que nos asegura que si $\tilde{\mathbf{S}} \supset \mathbf{S}$ entonces $\det(\lambda I_{\tilde{n}} - \tilde{A}) = \lambda^{-n} \det(\lambda I_n - A)\ \det(\lambda I_{\tilde{n}} - M)$, cf. [26].

Las matrices diagonales de $\tilde{A}$ dadas en (2.72), serán:

$$\tilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.27}$$

siendo las matrices de interconexión

$$\tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

Análogamente para la matriz $\tilde{B}$, las matrices correspondientes a los bloques diagonales y a las interconexiones de (2.72) vendrán dadas, respectivamente, por:

$$\tilde{B}_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{B}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.29}$$

y

$$\tilde{B}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{B}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0.5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.30}$$

respectivamente.

Asociamos al sistema desacoplado $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}$ dado en (2.75), la función de coste

$$\tilde{J}_D(\tilde{x}_0, \tilde{u}) = \int_0^\infty (\tilde{x}^t \tilde{Q}_D^* \tilde{x} + \tilde{u}^t R_D^* \tilde{u})\, dt, \tag{5.31}$$

dada en (2.78), donde las matrices $\tilde{Q}_D^*$ y $\tilde{R}_D^*$ de (2.79) se obtienen de las relaciones (3.72) que garantizan el mismo coste tanto para el sistema inicial como para el expandido y que vendrán dadas por:

$$\tilde{Q}_D^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{R}_D^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.32}$$

de donde sus matrices diagonales son:

$$\tilde{Q}_{11}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{Q}_{22}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.33}$$

y

$$\tilde{R}_{11}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{R}_{22}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.34}$$

respectivamente. Calculamos ahora las matrices de ganancia $\tilde{K}_{11}$ y $\tilde{K}_{22}$ correspondientes a los subsistemas desacoplados (2.74)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}^1 &: \ \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{B}_{11}\tilde{u}_1, \\ \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}^2 &: \ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_{22}\tilde{u}_2, \end{aligned} \tag{5.35}$$

cuyas funciones de coste asociadas sabemos de (2.76) que son:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_D^1(\tilde{x}_{10},\tilde{u}_1) &= \int_0^\infty (\tilde{x}_1^t\tilde{Q}_{11}^*\tilde{x}_1 + \tilde{u}_1^t\tilde{R}_{11}^*\tilde{u}_1)\,dt, \\ \tilde{J}_D^2(\tilde{x}_{20},\tilde{u}_2) &= \int_0^\infty (\tilde{x}_2^t\tilde{Q}_{22}^*\tilde{x}_2 + \tilde{u}_2^t\tilde{R}_{22}^*\tilde{u}_2)\,dt. \end{aligned} \tag{5.36}$$

A partir de las ecuaciones de Riccati (2.83)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11}^t\tilde{P}_{11} + \tilde{P}_{11}\tilde{A}_{11} - \tilde{P}_{11}\tilde{B}_{11}(\tilde{R}_{11}^*)^{-1}\tilde{B}_{11}^t\tilde{P}_{11} + \tilde{Q}_{11}^* = 0, \\ \tilde{A}_{22}^t\tilde{P}_{22} + \tilde{P}_{22}\tilde{A}_{22} - \tilde{P}_{22}\tilde{B}_{22}(\tilde{R}_{22}^*)^{-1}\tilde{B}_{22}^t\tilde{P}_{22} + \tilde{Q}_{22}^* = 0, \end{aligned} \tag{5.37}$$

obtenemos las matrices solución $\tilde{P}_{11}$ y $\tilde{P}_{22}$ siguientes:

$$\tilde{P}_{11} = \begin{pmatrix} 0.7909 & 0.0993 & -0.0381 \\ 0.0993 & 0.5182 & 0.0277 \\ -0.0381 & 0.0277 & 0.1731 \end{pmatrix}, \ \tilde{P}_{22} = \begin{pmatrix} 0.5183 & 0.0409 & -0.1679 \\ 0.0409 & 0.1783 & -0.0243 \\ -0.1679 & -0.0243 & 0.6470 \end{pmatrix}. \tag{5.38}$$

De esta forma, la matriz diagonal $\tilde{P}_D = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{22} \end{pmatrix}$ será:

$$\tilde{P}_D = \begin{pmatrix} 0.7909 & 0.0993 & -0.0381 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0993 & 0.5182 & 0.0277 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0381 & 0.0277 & 0.1731 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5183 & 0.0409 & -0.1679 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0409 & 0.1783 & -0.0243 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1679 & -0.0243 & 0.6470 \end{pmatrix}. \tag{5.39}$$

Podemos calcular ahora las leyes de control descentralizado de (2.81),

$$\tilde{u}_1 = -\tilde{K}_{11}\tilde{x}_1, \qquad \tilde{u}_2 = -\tilde{K}_{22}\tilde{x}_2, \tag{5.40}$$

para los subsistemas desacoplados $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}^1$, $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{D}}^2$ dados en (2.74), donde

$$\tilde{K}_{11} = (\tilde{R}_{11}^*)^{-1}\tilde{B}_{11}^t\tilde{P}_{11}, \qquad \tilde{K}_{22} = (\tilde{R}_{22}^*)^{-1}\tilde{B}_{22}^t\tilde{P}_{22} \tag{5.41}$$

como en (2.82). Como resultado de todo este proceso, obtenemos una matriz de ganancia diagonal

$$\tilde{K}_D = \begin{pmatrix} \tilde{K}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{22} \end{pmatrix}, \tag{5.42}$$

que numéricamente valdrá

$$\tilde{K}_D = \begin{pmatrix} 1.5437 & 0.2262 & 0.0968 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0191 & 0.0138 & 0.0865 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0205 & 0.0891 & -0.0121 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6862 & 0.0652 & -0.8149 \end{pmatrix}. \tag{5.43}$$

Contraemos la ley de control $\tilde{u} = -\tilde{K}_D\,\tilde{x}$ a la ley de control $u = K_D\,x$. La matriz de ganancia $K_D = Q\tilde{K}_D V$ que se obtiene es

$$K_D = \begin{pmatrix} 1.5437 & 0.2262 & 0.0968 & 0 \\ -0.0095 & 0.0172 & 0.0878 & -0.0061 \\ 0 & 0.6862 & 0.0652 & -0.8149 \end{pmatrix}. \tag{5.44}$$

El sistema $\mathbf{S_D}$ de lazo cerrado (2.98) tendrá por matriz $\hat{A}$ siguiente:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -2.0873 & -0.1386 & -0.2588 & -0.1851 \\ -1.0000 & -1.6862 & 0.9348 & 1.8149 \\ -1.5341 & -2.2434 & -3.1847 & 0.0061 \\ -5.0873 & -1.7663 & -0.1285 & -0.8149 \end{pmatrix}. \tag{5.45}$$

Con el fin de evaluar el coste calculamos la matriz de Lyapunov H de (2.100) que será

$$H = \begin{pmatrix} 3.8303 & 0.6659 & -0.1123 & -1.3361 \\ 0.6659 & 0.8894 & 0.0041 & -0.1924 \\ -0.1123 & 0.0041 & 0.3286 & 0.0067 \\ -1.3361 & -0.1924 & 0.0067 & 0.8961 \end{pmatrix}. \tag{5.46}$$

El coste final para el sistema **S**, después de ser contraída la ley de control descentralizada y ser implementada en el sistema inicial **S**, es:

$$J^{\oplus}(x_0) = x_0^t H x_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 26.14. \tag{5.47}$$

El índice o grado de suboptimalidad $\hat{\mu}^*$, dado en (2.114), valdrá en este caso 0.16, puesto que el mayor valor propio de la matriz HP^{-1} es $\lambda_M = 6.27$. De esta manera podemos asegurar que $J^{\oplus}(x_0) \leqslant 6.27\,\hat{J}^{\circ}(x_0)$ para todo x_0, por la ecuación (2.112).

Observación: En el caso que estamos tratando, también habría sido posible calcular el grado de suboptimalidad sin necesidad de contraer la ley de control óptimo al sistema **S**, ya que la matriz de Lyapunov $\tilde{H}$ de (2.90) existe y es finita, siendo

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 3.8304 & 0.9887 & 0.0775 & -0.3228 & -0.1897 & -1.3362 \\ 0.9887 & 0.9280 & 0.1031 & -0.3340 & -0.1310 & -0.1340 \\ 0.0775 & 0.1031 & 0.1915 & -0.0688 & -0.0338 & -0.0002 \\ -0.3228 & -0.3340 & -0.0688 & 0.6293 & 0.1008 & -0.0584 \\ -0.1897 & -0.1310 & -0.0338 & 0.1008 & 0.2047 & 0.0069 \\ -1.3362 & -0.1340 & -0.0002 & -0.0584 & 0.0069 & 0.8961 \end{pmatrix}. \tag{5.48}$$

Procediendo de esta manera se llegaría al mismo valor de $\hat{\mu}^*$ como consecuencia de que $\tilde{J}^{\oplus}(\tilde{x}_0) \leqslant \tilde{\mu}^{-1}\tilde{J}^{\circ}(\tilde{x}_0)$ implica $J^{\oplus}(x_0) \leqslant \tilde{\mu}^{-1}J^{\circ}(x_0)$, tal y como se ha visto en el Capítulo 2.

5.5. Sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ expandido por el procedimiento desarrollado en la tesis

Se trata ahora de ver que se puede disminuir el valor $J^{\oplus}(x_0) = 26.14$ al expandir y contraer el sistema inicial mediante otras posibles matrices complementarias introducidas en esta tesis. Seguiremos pues los mismos pasos que en el apartado anterior.

Partimos de las mismas matrices U, V, Q, R, S y T anteriores y que vienen dadas por (2.60) y (2.61). Sin embargo, las matrices complementarias para la expansión del espacio de estado, de entrada y de salida las elegimos de la siguiente manera:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 1.5 & 1.5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4.5 & 1 & -4.5 & -1 & 0 \\ 0 & 1.5 & -0.5 & -1.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.49}$$

La matriz N será considerada como anteriormente, es decir $N = 0$, ya que así se verifica el Teorema 3.4. En cuanto a la matriz L podemos tomar, sin mayores dificultades, la misma que en (5.22), por lo tanto:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.50}$$

Comentario: Señalemos cual ha sido el procedimiento para escoger las matrices M y L dadas en (5.49) y (5.50). Partiendo de las matrices M y L de (5.21) y (5.22), respectivamente, y utilizando como herramienta de cálculo el programa MATLAB 4.2c, se ha confeccionado un algoritmo que conduce, en cada iteración, a un valor de la función de coste cada vez menor. Dicho procedimiento se basa en incrementar o reducir uno a uno los coeficientes de las matrices en cada paso y evaluar el coste obtenido. Se pueden estudiar otros procedimientos más rápidos y convergentes a la solución requerida tal y como

planteamos en el resumen final de la tesis. Debemos recordar que una vez determinadas las matrices complementarias quedará fijado el modelo, con lo cual el diseñador procurará elegir dichas matrices con sumo cuidado, pues de ellas dependen casi todas las características del sistema.

En esta situación, las matrices ampliadas $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$ que se obtienen de (3.39) a (3.41) son:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 1.5 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1.5 & -3 & -1.5 & 0 \\ -1 & -1.5 & 1.5 & 0.5 & -0.5 & 1 \\ 0 & 3.5 & -0.5 & -5.5 & -2.5 & 0 \\ -2 & 0.5 & -0.5 & -2.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.51}$$

siendo $\tilde{B}$ y $\tilde{C}$ como en (5.24) y (5.25), respectivamente. Procediendo de la misma manera que en el apartado anterior, los valores propios de la matriz $\tilde{A}$ obtenida a partir de estas nuevas matrices complementarias, son:

$$\{-2,\ -1 \pm \mathrm{i},\ -0.75 \pm 1.09\,i,\ 1\}, \tag{5.52}$$

que evidentemente incluye a los valores propios de la matriz A, como ya hemos comentado anteriormente.

Desacoplamos ahora el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$, obteniendo las matrices diagonales siguientes:

$$\tilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1.5 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 1 \\ -5.5 & -2.5 & 0 \\ -2.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.53}$$

siendo las matrices de interconexión

$$\tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1.5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_{21} = \begin{pmatrix} -1 & -1.5 & 1.5 \\ 0 & 3.5 & -0.5 \\ -2 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}. \tag{5.54}$$

La función de coste dada en (2.48), supondremos que está compuesta por unas matrices de

peso diagonales $\tilde{Q}_D^*$ y $\tilde{R}_D^*$ como en el caso anterior, es decir:

$$\tilde{Q}_D^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{R}_D^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.55}$$

con lo cual también tendremos que:

$$\tilde{Q}_{11}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{Q}_{22}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.56}$$

y

$$\tilde{R}_{11}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{R}_{22}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.57}$$

Vamos a calcular las matrices de ganancia $\tilde{K}_{11}$ y $\tilde{K}_{22}$ en esta situación. Para ello, necesitamos conocer previamente los valores de las matrices $\tilde{P}_{11}$ y $\tilde{P}_{22}$, es decir,

$$\tilde{P}_{11} = \begin{pmatrix} 1.4783 & -0.5804 & -0.7235 \\ -0.5804 & 0.5640 & 0.5583 \\ -0.7235 & 0.5583 & 0.9132 \end{pmatrix}, \tilde{P}_{22} = \begin{pmatrix} 3.2166 & -0.5567 & 1.3720 \\ -0.5567 & 0.2453 & -0.1482 \\ 1.3720 & -0.1482 & 3.3056 \end{pmatrix}. \tag{5.58}$$

De esta forma, la matriz $\tilde{P}_D$ diagonal será:

$$\tilde{P}_D = \begin{pmatrix} 1.4783 & -0.5804 & -0.7235 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5804 & 0.5640 & 0.5583 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7235 & 0.5583 & 0.9132 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.2166 & -0.5567 & 1.3720 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5567 & 0.2453 & -0.1482 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3720 & -0.1482 & 3.3056 \end{pmatrix}. \tag{5.59}$$

La matriz de ganancia $\tilde{K}_D = \begin{pmatrix} \tilde{K}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{22} \end{pmatrix}$ que se obtiene es:

$$\tilde{K}_D = \begin{pmatrix} 2.2330 & -0.6025 & -0.5338 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3618 & 0.2791 & 0.4566 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2783 & 0.1227 & -0.0741 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8446 & -0.4085 & -1.9335 \end{pmatrix}. \tag{5.60}$$

Contraemos la ley de control $\tilde{u} = -\tilde{K}_D \tilde{x}$ al sistema **S** y consideramos el sistema de lazo cerrado que se obtiene. De esta manera tenemos:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -3.4660 & 0.3603 & 1.4761 & 0.9335 \\ -1.0000 & -2.8446 & 1.4085 & 2.9335 \\ -2.0521 & -1.3979 & -2.7558 & 0.0371 \\ -6.4660 & 1.0495 & 0.6592 & -1.9335 \end{pmatrix}. \tag{5.61}$$

La matriz H resulta ser:

$$H = \begin{pmatrix} 2.1741 & -0.2467 & 0.0054 & -0.6610 \\ -0.2467 & 0.9593 & -0.0248 & -0.0951 \\ 0.0054 & -0.0248 & 0.4712 & 0.0238 \\ -0.6610 & -0.0951 & 0.0238 & 0.7632 \end{pmatrix}. \tag{5.62}$$

El coste final, $J^{\oplus}(x_0)$, después de ser contraída la ley de control y de ser implementada en el sistema inicial **S** tendrá un valor

$$J^{\oplus} = x_0^t H x_0 = 13.78 \tag{5.63}$$

siendo x_0=$(3,1,0,2)^t$. En cuanto al índice o grado de suboptimalidad, $\hat{\mu}^*$ valdrá 0.06, ya que el mayor valor propio de la matriz HP^{-1} es $\lambda_M = 18.24$. De esta forma tendremos que $J^{\oplus}(x_0) \leqslant 18.24\, \hat{J}^{\circ}(x_0)$ para todo x_0, por la ecuación (2.112). La misma observación que se ha hecho en el apartado anterior respecto a la no necesidad de contraer la ley de control óptimo u_D diseñada en el sistema expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ al sistema **S**, valdría en este caso, puesto que ahora también la matriz $\tilde{H}$ existe y es finita, siendo

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 2.2369 & -0.0369 & -0.1758 & -0.2369 & 0.1664 & -0.6803 \\ -0.0369 & 3.2187 & 0.2305 & -3.6036 & 0.0120 & -0.0276 \\ -0.1758 & 0.2305 & 0.8860 & -0.0352 & -0.4806 & -0.0045 \\ -0.2396 & -3.6036 & -0.0352 & 4.9686 & -0.2194 & -0.0577 \\ 0.1664 & 0.0120 & -0.4806 & -0.2194 & 0.5565 & 0.0337 \\ -0.6803 & -0.0276 & -0.0045 & -0.0577 & 0.0337 & 0.7694 \end{pmatrix}, \tag{5.64}$$

lo cual nos permitiría calcular el valor de $\tilde{J}^{\oplus}(x_0)$ directamente del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$. Todo esto nos sirve para ilustrar mediante un ejemplo las implicaciones y los comentarios que se han efectuado en el segundo capítulo, en donde ha tratado el tema de una forma totalmente teórica.

Observación: Tal y como queríamos probar, se ha conseguido un menor coste al considerar otras matrices complementarias de expansión. En nuestro caso, hemos disminuido

casi un 50 % el valor de $J^{\oplus}$, pasando de 26.14 a 13.78. Cabe señalar, sin embargo, que éste no tiene porque que ser necesariamente el más óptimo de todos los costes que se pueden hallar al aplicar distintas expansiones. En cada situación que se nos presente, el diseñador deberá realizar un estudio particular y minucioso a la hora de elegir aquellas que más le convengan.

Digamos también que el hecho de haber presentado un ejemplo ilustrativo en donde se han comparado los costes al utilizar distintas matrices de expansión, no constituye un objetivo en sí mismo, sino una forma de ver como en éste y otros muchos aspectos se pueden mejorar las características de un sistema al trabajar con unas u otras matrices complementarias.

5.6. Respuestas Temporales

Otra forma de comparar los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores es ver como se comportan gráficamente los sistemas en ambos casos. Para ello disponemos de una serie de respuestas temporales a la condición inicial. Dichos gráficos se ofrecen en las páginas siguientes.

En primer lugar, Figura 1, se pueden observar las respuestas temporales del sistema **S**, notadas por (- - -), al cual se le ha aplicado un tipo de control centralizado, es decir, sin ningún procedimiento previo de expansión-contracción. El lazo ha sido cerrado mediante una ley de control óptimo lineal cuadrático $u = -Kx$ diseñada en el sistema inicial **S**. Estas respuestas pueden servir como punto de referencia de los dos controles posteriores, esto es, cuando el sistema se cierra mediante leyes de control diseñadas en el espacio expandido y contraídas al sistema original. Señalemos sin embargo, que nuestra intención es comparar las respuestas temporales obtenidas siguiendo el procedimiento habitual y el propuesto en esta tesis. Por ello, el sistema **S** no deja de ser un simple punto de referencia de cara a lo que se pretende mostrar.

En la Figura 2 se representa la respuesta temporal del sistema mediante control descentralizado diseñado por el procedimiento de expansión-contracción habitual, tanto para los estados, las salidas como las entradas. Puede observarse que, aproximadamente, cuando $t = 4$ las tres respuestas tienden al valor cero. Se señalan las respuestas temporales mediante líneas punteadas ($\cdots$).

En la Figura 3 observamos la respuesta temporal también para los estados, las salidas y las entradas, respectivamente, pero en este caso para el sistema inicial **S** de lazo cerrado mediante un vector de la forma $u = -Kx$, que ha sido diseñado en el espacio expandido $\tilde{\mathbf{S}}$ y contraído al sistema original para su implementación. En este caso la expansión se ha realizado escogiendo matrices complementarias propuestas en esta tesis y distintas de las normalmente utilizadas. Se trazan las respuestas mediante líneas continuas (—).

La Figura 4 representa la superposición de los estados correspondientes a las Figuras 2 y 3. De esta forma se pueden observar con mayor claridad las ventajas al elegir las matrices complementarias obtenidas en este trabajo. En primer lugar, las oscilaciones de cada uno de los estados representados por (—) es menor que los representados por $(\cdots)$. Además, tienden más rápidamente a cero usando las matrices complementarias que hemos introducido en este trabajo.

En la Figura 5 vemos la superposición de las salidas. Nuevamente se observa un mayor amortiguamiento para las salidas correspondientes a (—) que para las trazadas con líneas punteadas $(\cdots)$ y que se corresponden con las expansiones habituales. También en esta situación cada una de las salidas tiende con mayor celeridad al punto de equilibrio si se usan las matrices complementarias M y L dadas en (5.49) y (5.50), respectivamente.

De forma similar, en la Figura 6 se comparan las entradas por ambos métodos. También en este caso, las entradas que se corresponden con el uso de matrices complementarias introducidas en este trabajo, tienden a cero con mayor celeridad.

En resumen, a la vista está que el hecho de expandir de otra manera diferente a la habitual nos permite obtener respuestas más ventajosas en muchos aspectos. El diseñador será el que elija según sus conveniencias aquellas expansiones y posteriores contracciones de leyes de control que le aporten mayores beneficios, teniendo una gran flexibilidad a la hora de escoger las matrices complementarias y con la seguridad que todas ellas verifican las condiciones impuestas por el Principio de Inclusión Generalizado.

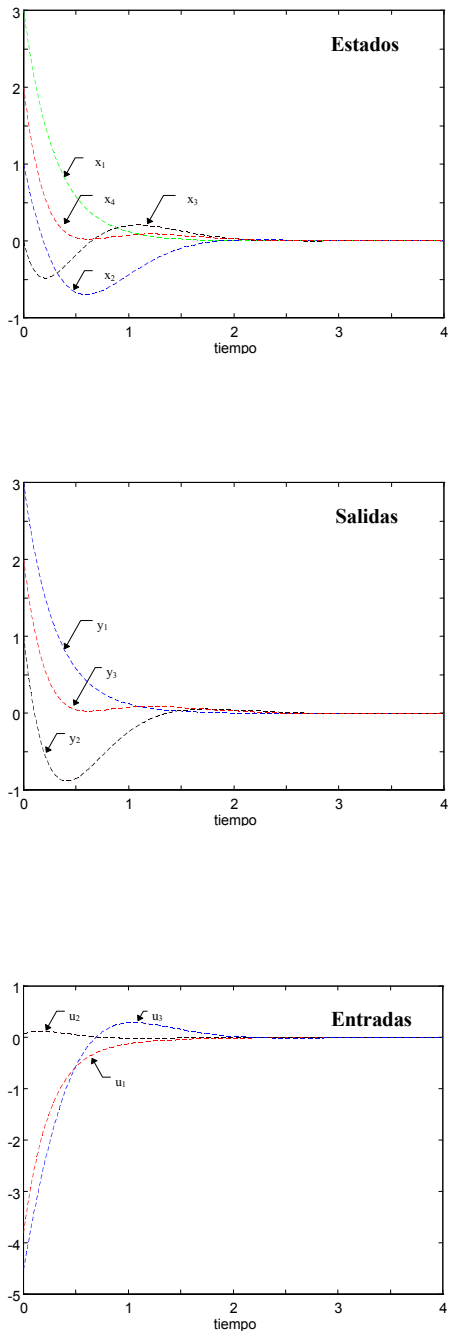

Figura 1. Respuesta del sistema inicial **S** con un control centralizado.

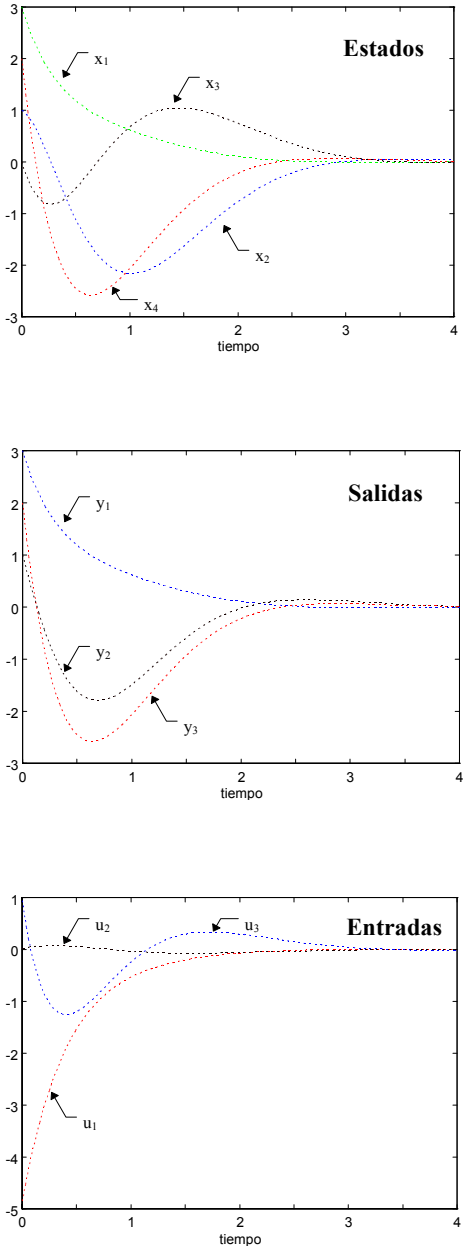

Figura 2. Respuesta del sistema **S** con control descentralizado diseñado mediante el procedimiento de expan-ión-contracción habitual.

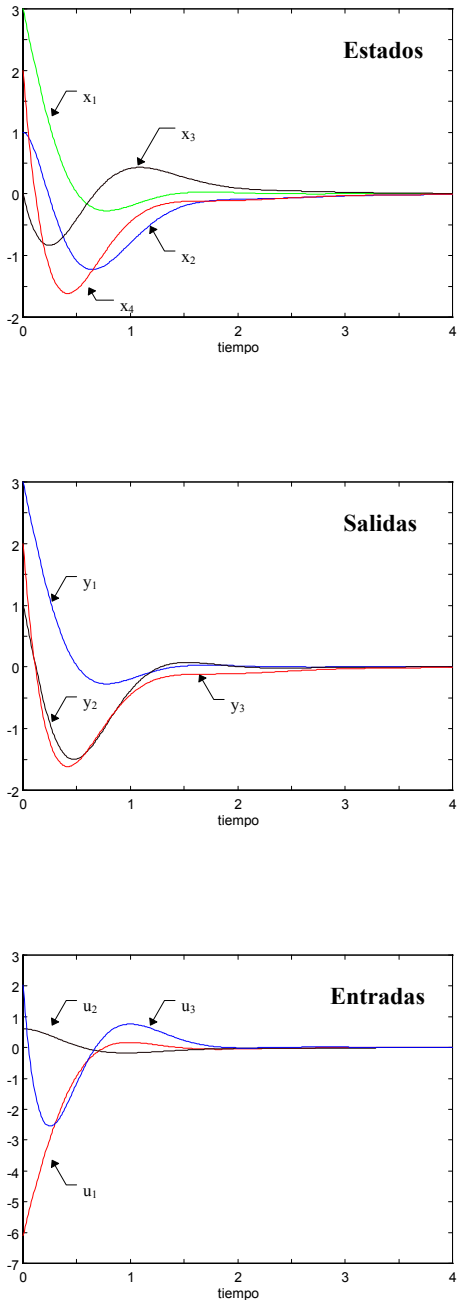

Figura 3. Respuesta del sistema **S** con control descentralizado diseñado mediante el procedimiento de expansión-contracción propuesto en la tesis.

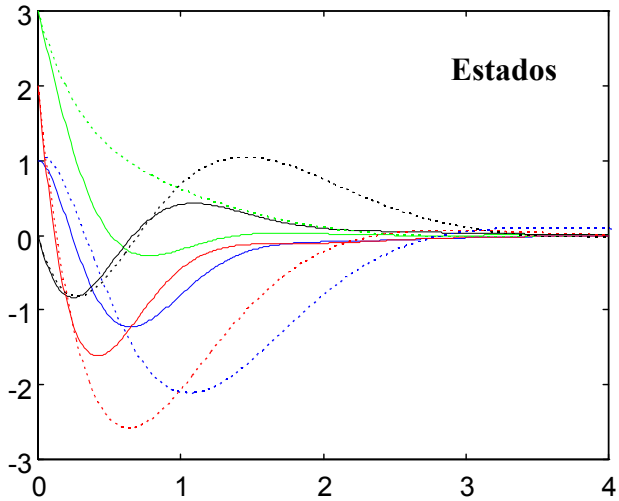

Figura 4. Comparación de los estados correspondientes al procedimiento habitual (···) y al propuesto en esta tesis (——)

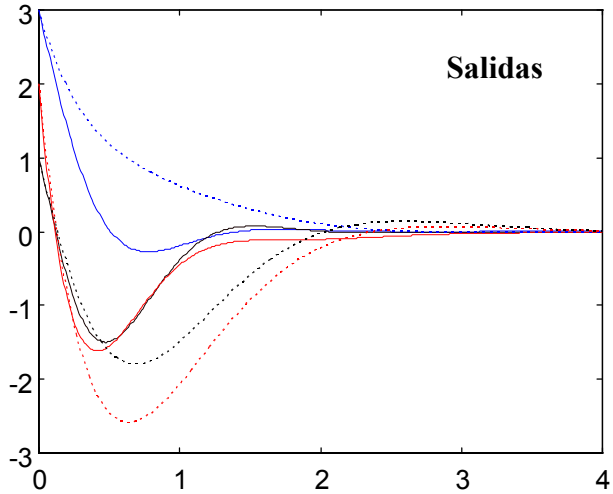

Figura 5. Comparación de las salidas correspondientes al procedimiento habitual (···) y al propuesto en esta tesis (——)

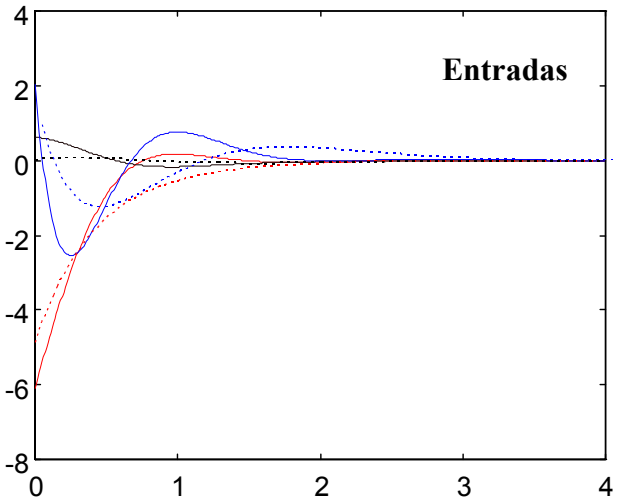

Figura 6. Comparación de las entradas correspondientes al procedimiento habitual (···) y al propuesto en esta tesis (——)

Capítulo 6

Resumen y Conclusiones

6.1. Introducción

En este último capítulo de recapitulación se resume lo que se ha visto y se ha obtenido a lo largo del desarrollo de la tesis y se plantean algunas cuestiones que no han sido resueltas en este trabajo pero que serán abordadas próximamente. Además, se perfilan las futuras líneas de investigación que pueden derivarse de los resultados alcanzados.

6.2. Conclusiones

En el primer capítulo se ha hecho un repaso histórico del Principio de Inclusión desde sus inicios en 1980 hasta la actualidad. Hemos visto como el marco matemático que nos brinda este principio nos permite desarrollar y aplicar métodos de descomposición con solapamiento a un amplio conjunto de sistemas de gran escala. Se han referenciado algunos de los artículos más significativos aparecidos a lo largo de estos años y que abarcan disciplinas tan diversas como la mecánica, la electrónica, la hidráulica, la biología o la socioeconomía, por citar algunas.

El Capítulo 2 ha estado dedicado a recoger los aspectos más relevantes relacionados con la modelización y el control sistemas de gran escala que poseen estructuras solapadas y que han sido publicados en distintos artículos, libros y trabajos en general durante casi veinte años, homogeneizando la notación cuando ha sido necesario. Cabe decir que no se trata de una recapitulación exhaustiva pero sí de aquellos conceptos que posteriormente se han utilizado en la tesis.

Como objetivo global y principal, se ha caracterizado la estructura de las matrices complementarias que intervienen en cualquier proceso de expansión-contracción. Después de una serie de proposiciones previas, se ha enunciado y demostrado el Teorema 3.1, que proporciona la forma que deben tener las matrices complementarias M, N y L junto con las condiciones que deben de cumplir. Posteriormente, se ha tratado el tema de las funciones de coste, llegando a otro teorema importante en este contexto, el Teorema 3.3, el cual nos da condiciones suficientes para que $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{J}) \supset (\mathbf{S}, J)$. Por último, se han aplicado los resultados obtenidos para caracterizar cuando una ley de control diseñada en el sistema expandido es contraíble al sistema inicial. Esto queda resumido en el Teorema 3.8, dando la estructura y condiciones para la matriz complementaria F, lo que concluye el Capítulo 3.

Otro de los objetivos era determinar la forma de las restricciones y las agregaciones, por ser éstas las más utilizadas a la hora de expandir-contraer un sistema. Este punto ha sido tratado en el Capítulo 4. Concretamente, el Teorema 4.5 y el Teorema 4.6 detallan la forma de las matrices M, N y L en tales situaciones. También se han ofrecido otros casos particulares de matrices complementarias y se han estudiado las características del sistema cuando se eligen estos tipos especiales de expansiones.

En este mismo capítulo, se han clasificado las posibles matrices complementarias básicamente en dos grandes tipos. De esta manera, no solamente conocemos la estructura de dichas matrices sino que además tenemos acotadas, de alguna forma, las posibilidades de elección.

Por último, en el Capítulo 5, se han considerado otras posibles expansiones distintas de las habituales y se han utilizado en un ejemplo ilustrativo. Se han observado algunas de las ventajas que supone elegir otras matrices complementarias, tanto desde el punto de visto numérico (valor de la función de coste mínimo) como gráfico, a partir de las respuestas temporales. Asimismo, ha servido para revisar los conceptos matemáticos tratados a lo largo del trabajo.

6.3. Algunos Temas Pendientes

En el Capítulo 5 hemos observado como se podía mejorar el coste en el caso de considerar distintas expansiones y contracciones. En el ejemplo que nos ocupaba se ha reducido el valor de coste de 26.14 a 13.78. Sin embargo nos queda una pregunta por responder: ¿cuáles serían las matrices complementarias más "óptimas"? Dicha cuestión pasaría por la optimización de una función no lineal bajo una serie de restricciones, algunas de ellas lineales y otras no. Lógicamente, habría que aplicar en cada situación algún algoritmo adecuado para encontrar la solución, caso de que exista. Puesto que este problema se escapa de los objetivos propuestos en la tesis, dejamos abierta la pregunta:

Cuestión 1: ¿Se pueden escoger las matrices complementarias M, N y L de forma que el coste obtenido sea mínimo?

Otros sistemas de interés son los sistemas con incertidumbres. En este terreno todavía queda mucho por investigar. La complejidad que presentan es elevada y por ello pensamos que algunas de las aportaciones de esta tesis podrían resultar provechosas. Por ello, preguntamos:

Cuestión 2: ¿De qué manera podemos utilizar los resultados obtenidos para ser aplicados a sistemas lineales con incertidumbres? ¿Es posible encontrar controladores descentralizados para este tipo de sistemas aprovechando que conocemos la estructura matricial que se esconde bajo el proceso de expansión-contracción?

Generalizando la pregunta a otros tipos de sistemas, tenemos:

Cuestión 3: ¿Qué ventajas podrían obtenerse al utilizar las nuevas matrices complementarias en sistemas no lineales, de tiempo discreto, variables con el tiempo, estocásticos, etc...?

Por último, revisando un artículo de Stanković, Chen y Šiljak, *Stochastic Inclusion Principle Applied to Decentralized Overlapping Suboptimal LQG Control*, del año 1996, cf. [68], encontramos unas matrices de expansión-contracción algo más generales. Es decir, siempre hemos supuesto que la matriz de expansión V y la matriz de contracción U eran de la

forma

$$V = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{n_2} & \frac{1}{2}I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_3} \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

pero en dicho artículo se introducen matrices V y U del tipo

$$V = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta I_{n_2} & (1-\beta)I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_3} \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

siendo β un escalar tal que $0 < \beta < 1$. Así pues, podemos preguntarnos:

Cuestión 4: ¿Qué nuevas ventajas podríamos conseguir si utilizáramos matrices de expansión-contracción V y U como en (6.2), para distintos valores de β?

Estas son algunas de las preguntas que han surgido a lo largo del trabajo. Otras cuestiones de menor importancia ya han sido resueltas e incluídas en los diversos capítulos.

6.4. Futuras Líneas de Investigación

El hecho de disponer de otras posibles expansiones y de conocer con todo detalle las matrices implicadas en un proceso de decomposición con solapamiento, hace pensar que los resultados obtenidos se pueden aplicar a dos grandes líneas de investigación. Una primera línea puede ser el replanteamiento de algunos modelos reales tales como sistemas mecánicos, cf. [61], problemas sobre control de sistemas eléctricos y estabilidad transitoria, cf. [74], relacionados con el tratamiento de aguas, cf. [35], problemas sobre la estabilidad y complejidad de modelos de ecosistemas, cf. [47] o sobre control y regulación del tráfico de vehículos, cf. [7], [34], [40], [69], por citar solamente algunos campos en donde se han utilizado técnicas de descomposición con solapamiento como método de resolución.

Otra línea importante es ver como se pueden aplicar dichos resultados a problemas computacionales cuando se consideran sistemas de gran escala, es decir, reducir en buena medida el número de cálculos, el tiempo y la memoria requerida al efectuar operaciones numéricas sobre sistemas de estas características. Con esta intención, se podrían aprovechar los resultados contenidos en esta tesis a la resolución de sistemas lineales y no lineales de

ecuaciones algebraicas ya sea por métodos directos o iterativos, cf. [63], [64], [74], que aparecen por ejemplo en problemas relacionados con el flujo de cargas eléctricas, cf. [48], [74], simulaciones de circuitos VLSI, cf. [57], sobre predicción del tiempo, cf. [38], etc. Además, señalemos sus posibles repercusiones en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias, por ejemplo en el uso de algoritmos de computación paralela en problemas de control óptimo, cf. [15]. Tratando con ecuaciones en derivadas parciales, se puede aplicar al método conocido como *dominio de descomposición*, método muy conveniente cuando hay que efectuar un elevado número de cálculos computacionales y que engloba a una amplia gama de sistemas de gran escala presentes en la física, la ingeniería y las ciencias en general, cf. [11].

Bibliografía

[1] "Future Directions in Control Theory. A Mathematical Perspective. Report of the panel", *SIAM Reports*, Philadelphia, USA, 1988.

[2] Anderson, B. and Moore, J. *Optimal Control. Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall, 1990.

[3] Aoki, M. "Optimization Methods for Large-Scale Systems with Applications", D.A. Wismer (ed.). McGraw-Hill, New York, pp. 191-232, 1971.

[4] Aoki, M. "On Decentralized Stabilisation Policies and Dynamic Assignment Problems", *Journal International Economy*, No. 6, pp. 143-171, 1976.

[5] Bailey, F.N. "The Aplication of Lyapunov's Method to Interconnected Systems", *SIAM J. Control*, 3, pp. 433-462, 1966.

[6] Bakule, L. "Two-level Control Generation of Multiarea Electric Energy Systems", *IMACS Symposium on Simulation of Control Systems*, pp. 161-163, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[7] Bakule, L. and Lunze, J. "Decentralized Design of Feedback Control for Large-Scale Systems", *Kybernetika*, 3-6, pp. 1-100, 1988.

[8] Bakule, L. and Rodellar, J. "Decentralized Control and Overlapping Decomposition of Mechanical Systems. Part 1: System Decomposition", *Int. J. Control*, Vol. 61, No. 3, pp. 559-570, 1995.

[9] Bakule, L. and Rodellar, J. "Decentralized Control and Overlapping Decomposition of Mechanical Systems. Part 2: Decentralized Stabilization", *Int. J. Control*, Vol. 61, No. 3, pp. 571-587, 1995.

[10] Bernussou, J. and Titli, A. *Interconnected Dynamical Systems: Stability, Decomposition and Decentralisation*, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[11] Bjorstad, P., Espeda, M. and Keyes, D. *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, ed. John Wiley and Sons, Ltd., 1997.

[12] Ćalović, M., Djorović, D.D. and Šiljak, D.D. "Decentralized Approach to Automatic Generation Control of Interconnected Power Systems", *Proceedings of the International Conference on Large High-Voltage Electric Systems*, (CIGRE) París, France, 1978.

[13] Chi-Tsong Chen. *Linear Systems Theory and Desing*. HRW Series in Electrical and Computer Engineering, New York, 1970.

[14] Davison, E.J. and Tripathi, N.K. "The Optimal Decentralized Control of a Large Power System: Load and Frequency Control", *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-23, pp. 312-325, 1978.

[15] Gajić, Z. and Shen, X. *Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1993.

[16] Gantmatcher, F.R. *The Theory of Matrices Vol. I and II*, Academic Press, Inc., 1985.

[17] Gelonch, J. "Contribución al Estudio de los Pares de Matrices Doblemente Multiplicables", *Tesis Doctoral*. Departamento de Matemática Aplicada. Universitat Politècnica Catalunya, 1993.

[18] Gelonch, J., Jonhson, C.R. and Rubió, P. "An Extension of Flanders Theorem to Several Matrices", *Linear Multilinear Algebra*, Vol. 43, No. 1-3, pp. 181-200, 1997.

[19] Geromel, J.C. y Bernussou, J. "Optimal Decentralized Control of Dynamic Systems", *Automatica*, 18, pp. 545-557, 1982.

[20] Himmelblau, D. *Decomposition of Large Scale Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[21] Hodžic, M. and Šiljak, D.D. "Decentralized Estimation and Control with Overlapping Information Sets", *IEEE Transactions*, AC-31, pp. 83-86, 1986.

[22] Iftar, A. "Decentralized Estimation and Control with Overlapping Input, State and Output Decomposition", *Automatica*, Vol.29, No. 2, pp. 511-516, 1993.

[23] Iftar, A. "Overlapping Decentralized Dynamic Optimal Control", *International Journal of Control*, 58, pp. 187-209, 1993.

[24] Iftar, A. and Özgüner, Ü. “Closed-loop Balanced Realizations in the Analysis of Suboptimality and Stability of Decentralized Systems”, *Proceedings of the 23rd Conference on Decision and Control*, pp. 143-148, Las Vegas, Nevada, 1984.

[25] Iftar, A. and Özgüner, *Ü*. “Contractible Controller Design and Optimal Control with State and Input Inclusion”, *Automatica*, Vol.26, No. 3, pp. 593-597, 1990.

[26] Ikeda, M. and Šiljak, D.D. “Overlapping Decompositions, Expansions and Contractions of Dynamic Systems”, *Large Scale Systems*, 1, pp. 29-38, 1980.

[27] Ikeda, M. and Šiljak, D.D. “Generalized Decompositions of Dynamic Systems and Vector Lyapunov Functions”, *IEEE Transactions*, AC-26, pp. 1118-1125, 1981.

[28] Ikeda, M. and Šiljak, D.D. *When is a Linear Decentralized Control Optimal? Analysis and Optimization of Systems*. A. Bensoussan and J.L. Lion (eds.), Springer, Berlin, FRG, pp. 413-419, 1982.

[29] Ikeda, M. and Šiljak, D.D. “Overlapping Decentralized Control with Input, State and Output Inclusion”, *Control-Theory and Advanced Technology*, Vol.2, No. 2, pp. 155-172, 1986.

[30] Ikeda, M., Šiljak, D.D. and White, D.E. “Decentralized Control with Overlapping Informations Sets”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 34, pp. 279-310, 1981.

[31] Ikeda, M., Šiljak, D.D. and White, D.E. “An Inclusion Principle for Dynamic Systems”, *IEEE Transactions*, AC-29, pp. 244-249, 1984.

[32] Ikeda, M., Šiljak, D.D. and White, D.E. “Overlapping Decentralized Control of Linear Time-Varying Systems”, *Advances in Large Scale Systems*, Vol. 1, J.B. Cruz, Jr., JAI Press, Greenwich, Connecticut, pp. 93-116, 1984.

[33] Ikeda, M., Šiljak, D.D. and Yasuda, K. “Optimality of Decentralized Control for Large-Scale Systems”, *Automatica*, 19, pp. 309-316, 1983.

[34] Isaksen, L. and Payne, H.J. “Suboptimal Control of Linear Systems by Augmentation with Application to Freeway Traffic Regulation”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-18, pp. 210-219, 1973.

[35] Jamshidi, M. *Large Scale Systems. Modeling and Control*, North-Holland, Amsterdam-New York, 1983.

[36] Joshi, S.M. *Control of Large Flexible Space Structures*, Springer, Berlin, 1989.

[37] Kailath, T. *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.

[38] Kopp, H. “Numerical Weather Forecasting with the Multiprocessor System SMS201”, *Parallel Computers-Parallel Mathematics*, M. Feilmeier, ed., Int. Assoc. for Mathematics and Computers in Simulation, pp. 265-268, 1977.

[39] Krtolica, R. and Šiljak, D.D. “Suboptimality of Decentralized Stochastic Control and Estimation”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-25, pp. 76-83, 1980.

[40] Levine, W.S. and Athans, M. “On the Optimal Error Regulation of a String of Moving Vehicles”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-11, pp. 355-361, 1966.

[41] Lunze, J. *Feedback Control of Large-Scale Systems*. Prentice Hall International, 1992.

[42] Magaña, M.E. and Rodellar, J. “Decentralized Active Control of a Segment of a Cable-stayed Bridge Subjected to Seismic Motions”. Pendiente de publicación en *Journal of Structural Control*, 1997.

[43] Magaña, M.E. and Rodellar, J. “Nonlinear Decentralized Active Tendon Control of Cable-stayed Bridges”. Pendiente de publicación en *Journal of Structural Control*, 1997.

[44] Malinowski, K. and Singh, M. “Controllability and Observability of Expanded Systems with Overlapping Decompositions”, *Automatica*, Vol.21, No. 2, pp. 203-208, 1985.

[45] Martynyuk, A.A. “The Inclusion Principle for Standard Systems”, *Dokladi Academii Nauk SSSR*, 276, pp. 34-37, 1984.

[46] Martynyuk, A.A. “Expansion of the State Space of Dynamic Systems and Stability Problems”, *Prikladnaya Mekhanika*, 22, pp. 10-25, 1986.

[47] May, R.M. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, 2nd. ed., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.

[48] Medanić, J. and Avramović, B. “Solution of Load-Flow Problems in Power Systems by ε-Coupling Method”, *IEE Proc.*, 122, pp. 801-805, 1975.

[49] Michel, A.N. and Miller, R.K. *Qualitative Analysis of Large Scale Dynamic Systems*, Academic Press, New York, 1977.

[50] Özgüner, Ü., Khorami, F. and Iftar, A. “Two Controller Design Approches for Decentralized Systems”, *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Minneapolis, Minnesota, pp. 337-344, 1988.

[51] Rossell, J.M. and Rodellar, J. “Characterization of Expansion-Contraction Matrices in Overlapping Decompositions of Dynamic Systems” (pendiente de aprobación), *1998 IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, Diciembre de 1998.

[52] Rossell, J.M., Rodellar, J. y Rubió, P. “El Principio de Inclusión Generalizado: Nuevas Posibilidades de Expansin”, Actas del *Meeting on Matrix Analysis and Applications*, Sevilla (España), pp. 375-382, 1997.

[53] Rossell, J.M. y Rubió, P. “Soluciones a la Primera Ecuación del Principio de Inclusión Generalizado”, *Meeting on Matrix Analysis and Applications*, Vitoria-Gasteiz (España), 1994.

[54] Rubió, P. and Gelonch, J. “Doubly Multipliable Matrices”, *Rendiconti dell’Istituto di Matematica dell’Università di Trieste*, Vol. XXIV-Fasc.I-II, 1992.

[55] Sandell, N.R., Varaiya, P., Athans, M. and Safonov, M.G. “Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems”, *IEEE Transaction Automatica Control*, AC-23, pp. 108-128, 1978.

[56] Sangiovanni-Vincentelli, A.L. and White, J. “Waveform Relaxation Techniques and their Parallel Implementation”, *Proceedings of the 24-th Conference on Decision and Control*, Fort Lauderdale, IEEE, Piscataway, NJ, pp. 1544-1551, 1985.

[57] Sezer, M.E. and Šiljak, D.D. “Nested Epsilon Decompositions of Linear Systems Weakly Coupled and Overlapping Blocks”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol.12, No. 3, pp. 521-533, 1991.

[58] Šiljak, D.D. *Large Scale Dynamic Systems: Stability and Structure*, North-Holland, New York, 1978.

[59] Šiljak, D.D. “On Reliability of Control”, *Proc. Seventeenth IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 687-694, 1979.

[60] Šiljak, D.D. “Overlapping Decentralized Control. Large Scale Systems Engineering Applications”. M.G. Singh and A. Titlii (eds.), North-Holland, Amsterdam, Holland, pp. 145-166, 1979.

[61] Šiljak, D.D. *Decentralized Control of Complex Systems*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 184. Academic Press, 1991.

[62] Šiljak, D.D. “Decentralized Control and Computations: Status and Prospects”, *A. Rev. Control*, Vol. 20, pp. 131-141, 1996.

[63] Šiljak, D.D. and Zečević, A.I. “Overlapping Block-Iterative Methods for Solving Algebraic Equations”, *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol.1, pp. 125-136, 1995.

[64] Šiljak, D.D. and Zečević, A.I. “Parallel Solutions of Linear Equations by Overlapping Epsilon Decompositions”, *Systems and Control Theory for Power Systems*, Springer-Verlag, New York, pp. 315-300, 1995.

[65] Singh, M.G. *Decentralized Control*, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[66] Singh, M.G. and Titli, A. *Systems Decomposition, Optimization and Control*, Pergamon, Oxford, 1978.

[67] Singh, M.G. and Titli, A. *Handbook of Large Scale Systems Engineering Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[68] Stanković, S., Chen, X. and Šiljak, D.D. “Stochastic Inclusion Principle Applied to Decentralized Overlapping Suboptimal LQG Control”, *13th Triennial World Congress*, pp. 7-12. San Francisco, USA, 1996.

[69] Stanković, S., Stanojević, M. and Šiljak, D.D. “Decentralized Suboptimal LQ Control of a Platoon of Vehicles”, *8th IFAC Symposium on Transportation Systems*, Chania, Grecia, 1997.

[70] West-Vukovich, G.S., Davison, E.J. and Huges, P.C. “The Decentralized Control of Large Flexible Space Structures”, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-29, 10, pp. 866-879, 1984.

[71] Xinogalas, T., Mahmoud, M. and Singh, M. “Hierarchical Computation of Decentralized Gains for Interconnected Systems”, *Automatica*, 18, pp. 473-478, 1982.

[72] Yasuda, K., Hikata, T. and Hirai, K. “On Decentrally Optimizable Interconnected Systems”, *Proceedings of the 19th IEEE Conference on Decision and Control*, Albuquerque, New Mexico, pp. 536-537, 1980.

[73] Yousuff, A. and Ikeda, M. “Overlapping Decomposition and Expansion of Mechanical Systems”, *Proceedings of the 1988 AIAA Conference on Guidance, Navigation and Control*, Paper No. 88-4169-CP, pp. 958-963, 1988.

[74] Zečević, A.I. and Šiljak, D.D. “A Block-Parallel Newton Method Via Overlapping Epsilon Decompositions”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol.15, No. 3, pp. 824-844, 1994.