

## *Capítulo 3*

# **MODELO DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **3.1. INTRODUCCIÓN**

Las dificultades en el análisis de estructuras que incorporan hormigón estriban, entre otros factores, en la modelización del comportamiento conjunto de dos o más materiales con propiedades distintas (hormigón, acero, fibras, nuevos materiales) y de la historia de cargas aplicada, en la no linealidad de la respuesta debida a la fisuración y en la influencia de los efectos diferidos provocados por la fluencia y la retracción del hormigón y la relajación del acero activo. En los casos de reparación o de construcción evolutiva habrá que añadir a los aspectos anteriores los cambios de las características resistentes de la sección (daños, corrosión, refuerzos), la influencia del proceso constructivo, la incorporación de nuevas partes seccionales y de elementos estructurales o los procesos de cimbrado y descimbrado.

En el caso del análisis en servicio tendrá una especial importancia la determinación de los desplazamientos y del estado tensodeformacional y de fisuración alcanzados por las distintas partes de la estructura. En ello influirá de manera notable la evolución de las tensiones y deformaciones a lo largo del tiempo.

Debido al comportamiento característico de los materiales que intervienen en las estructuras de hormigón (fluencia, retracción, relajación, fisuración), se producen redistribuciones de tensiones entre ellos a nivel seccional y variaciones de las reacciones en los apoyos y de los esfuerzos internos en el caso de estructuras hiperestáticas. La importancia de dichos fenómenos es más destacable en los casos de construcción por etapas como pueden los procesos de construcción evolutivos, el refuerzo o la sustitución de elementos resistentes.

La consideración de los efectos de la construcción evolutiva se ha venido enfocando de manera muy especial a estructuras de gran envergadura o a casos específicos como pueden ser los puentes construidos por avance en voladizo o por vigas prefabricadas conectadas con losas "in situ". La mejora de las técnicas constructivas, la aplicación cada vez más general de los procesos de prefabricación y de las intervenciones en reparación conducen a estructuras en las que la consideración de la influencia de este fenómeno es cada vez más importante.

Existen procedimientos de análisis simplificado del comportamiento seccional en servicio (extrapolables al comportamiento de los miembros de la estructura), que están recogidos en la mayoría de los códigos de nuestro entorno [6,57,61,82] y que normalmente han sido concebidos para aplicar a secciones construidas en una sola fase e historias de carga sencillas. Por otra parte, algunas de las ecuaciones y coeficientes multiplicadores utilizados habitualmente para evaluar flechas instantáneas o a largo plazo han sido obtenidos de manera empírica, debiéndose tener en cuenta que estos procedimientos son precisos cuando se reproducen las condiciones de los experimentos en que se han basado. Frente a esta situación surge la necesidad de desarrollar modelos de análisis más generales en los que se contemplen de una manera racional los principales fenómenos descritos anteriormente. El uso de tales métodos queda recogido en el artículo 25 de la actual Instrucción de Hormigón Estructural EHE [57]. Por otra parte la disponibilidad de ordenadores personales con creciente potencia de cálculo y capacidad de memoria posibilita en gran medida su aplicación a un número cada vez mayor de casos.

Atendiendo a distintos grados de complejidad y de generalidad de las hipótesis en que se basan, en los últimos años se han desarrollado diversos procedimientos para el análisis en el tiempo de estructuras reticulares de hormigón. Así, existen modelos de tipo general para análisis no lineal instantáneo y diferido como los de Kang [140], Mari [160,162], Carol y Murcia [44] y Ulm *et al.* [233]. Otros como los de Tadros *et al.* [223], Khalil [145], Van Zyl y Scordelis [237], Shushkewich [218], Ketchum [144], Abbas y Scordelis [2], Millanes [172], Murcia y Henkerkoff [183], incluyen los efectos de la construcción evolutiva, aunque adoleciendo algunos de ellos de la inclusión de la fisuración, del efecto de *tension stiffening* o de la consideración de la evolución en las dos direcciones, transversal y longitudinal.

Muchos de los modelos citados se basan en el Método de los Elementos Finitos (MEF) [1,140,144,160,233,237], sin embargo para el análisis de estructuras constituidas por barras también se han desarrollado procedimientos basados en la extensión de los métodos matriciales hacia una Formulación Matricial Generalizada (FMG) [44,162], la cual ha sido aplicada asimismo a otros tipos de estructuras y materiales (elementos curvos de obra de fábrica, Molins y Roca [173,174]). Esta metodología se caracteriza por el establecimiento “exacto” del equilibrio entre cargas exteriores y esfuerzos internos. No es necesaria la discretización de las barras en elementos de menor dimensión ni el empleo de funciones de forma para aproximar la ley de desplazamientos. Se reducen los grados de libertad del problema y se obtienen sistemas con un número menor de ecuaciones. Como contrapartida, deben efectuarse integraciones a lo largo de las barras para lo cual es necesario adoptar reglas numéricas adecuadas.

Dentro de los modelos generales escalables a estructuras reales, basados en la formulación matricial, que incluyen la construcción evolutiva, la fisuración y el análisis diferido, cabe destacar el trabajo de Ghali y Elbadry [109]. En este caso el efecto de *tension stiffening* se incorpora mediante interpolación del comportamiento entre secciones totalmente fisuradas y no fisuradas [59], lo que obliga a la realización de un doble cálculo durante el proceso de análisis en el tiempo. No se incluyen las no linealidades geométricas y el análisis en el tiempo se realiza mediante el método

AAEMM [19,231,232] que permite la utilización de períodos largos a costa de suponer una variación preestablecida de la tensión con el tiempo. Más recientemente Cruz *et al.* [67] y Marí [164] han presentado modelos muy completos para construcción evolutiva basados en el MEF.

Por lo que se refiere al comportamiento en servicio y a la incidencia estructural de las propiedades diferidas del hormigón, con aplicaciones a construcción en diversas fases, cabe destacar los recientes trabajos de Pérez Caldenteny [192] y del Grupo de Trabajo II/3 del GEHO [103].

Partiendo de unos trabajos preliminares [197,228,229,230], se ha desarrollado un modelo numérico de análisis en servicio para estructuras reticulares planas de hormigón (armado o pretensado), aplicable asimismo a estructuras mixtas y de acero, basado en una extensión de la formulación matricial para barras (FMG). El comportamiento en el tiempo se describe mediante un método paso a paso. Incorpora los aspectos más relevantes del análisis de pórticos, se incluyen las no linealidades geométricas y se ha hecho especial incidencia en la implementación del efecto de *tension stiffening* y de la influencia del proceso constructivo. La contribución del hormigón traccionado entre fisuras se tiene en cuenta mediante la modificación de la ley constitutiva del hormigón, lo cual proporciona un método directo (no obliga a un doble cálculo) y genérico, ajustable a datos experimentales, a modelos contrastados o a la interacción con nuevos materiales. En los aspectos concernientes al proceso constructivo se tiene en cuenta la construcción evolutiva (seccional y estructural), la incorporación de refuerzos, la historia de cargas, los procesos de cimbrado y descimbrado, la variación de las propiedades de los materiales con el tiempo o el empleo conjunto de distintos materiales.

La generalidad del modelo permite la inclusión del comportamiento diferido de los materiales según distintas formulaciones (por defecto se han adoptado las del MC-90 [61]) y la inclusión futura de leyes constitutivas no lineales.

En la exposición del capítulo se ha seguido un proceso semejante al del desarrollo del modelo. En primer lugar se ha expuesto el tratamiento del análisis seccional y la modelización del comportamiento de los materiales lo cual se ha implementado en el programa informático SECSER. A continuación se ha descrito el comportamiento estructural, implementado en el programa ANSER (que incluye al primero como una parte del mismo).

### 3.2. HIPÓTESIS BÁSICAS

El método de análisis se ha desarrollado teniendo en cuenta las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad, atendiendo al comportamiento de los materiales definido por sus ecuaciones constitutivas. En su planteamiento se han considerado las siguientes hipótesis:

- Las secciones inicialmente planas antes de ser sometidas a una acción, continúan siendo planas después de la aplicación de una carga o deformación impuesta.

- No se tienen en cuenta las deformaciones debidas a las tensiones tangenciales.
- Se admite adherencia perfecta entre los materiales que constituyen la estructura. Ello es aplicable a distintas tipologías de armaduras (después de la inyección en el caso de postensados adherentes) y a secciones construidas evolutivamente, ya sea añadiendo hormigones u otros materiales.
- Se considera que los esfuerzos se aplican en un plano de simetría de la sección, originándose una situación de flexocompresión recta.

### 3.3. MODELIZACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES

#### 3.3.1. Hormigón

La deformación en el hormigón en un instante de tiempo  $t$ , se descompone en suma de la mecánica  $\varepsilon_c^m(t)$  y de la no mecánica  $\varepsilon_c^{nm}(t)$ .

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c^m(t) + \varepsilon_c^{nm}(t) \quad (3.1)$$

En este trabajo, al igual que en otros similares [162,164], la deformación mecánica es la producida de manera instantánea por la tensión aplicada, mientras que la no mecánica engloba a la deformación debida a la fluencia  $\varepsilon_c^c(t)$ , a la retracción  $\varepsilon_c^s(t)$ , al envejecimiento  $\varepsilon_c^a(t)$  y a los efectos térmicos  $\varepsilon_c^T(t)$ .

$$\varepsilon_c^{nm}(t) = \varepsilon_c^c(t) + \varepsilon_c^s(t) + \varepsilon_c^a(t) + \varepsilon_c^T(t) \quad (3.2)$$

El modelo constitutivo instantáneo del hormigón se define en la Figura 3.1. Para situaciones de servicio puede suponerse que el comportamiento en compresión sigue una ley lineal, con valores de la tensión menores que  $0.4f_{cm}$ . Para el hormigón traccionado se considera comportamiento lineal siempre que no se supere el valor de la resistencia a tracción  $f_{ct}$ .

Tal como se ha indicado en el Capítulo 2, existe una amplia propuesta de métodos para tener en cuenta el efecto de *tension stiffening*, basados en formulaciones deducidas a partir de procedimientos distintos (mecanismo *bond-slip* [75,97,123], modificación de leyes constitutivas [24,49,62,70,100,121,129,153,170,195], áreas equivalentes [48,118], inercia seccional o global equivalente [6,31,57,64], diagramas seccionales M-C [12,59,61,78], etc).

El modelo adoptado queda definido por la modificación de la ley constitutiva del hormigón en tracción y ha sido uno de los más ampliamente utilizados. La colaboración del hormigón en la dirección perpendicular a las fisuras queda representada por una curva decreciente que relaciona la tensión y la deformación media indicando el aumento progresivo de la fisuración. Se ha considerado que esta metodología cumple de manera satisfactoria los requisitos para su inclusión en un modelo general de análisis

estructural, valorándose su sencillez (en comparación con otros más sofisticados, p.e. *bond-slip*), la claridad en la reproducción del fenómeno físico, la capacidad para ser aplicado en estructuras a escala real, la versatilidad en su uso y la no necesidad de hacer los cálculos por duplicado (interpolación entre sección fisurada y no fisurada).

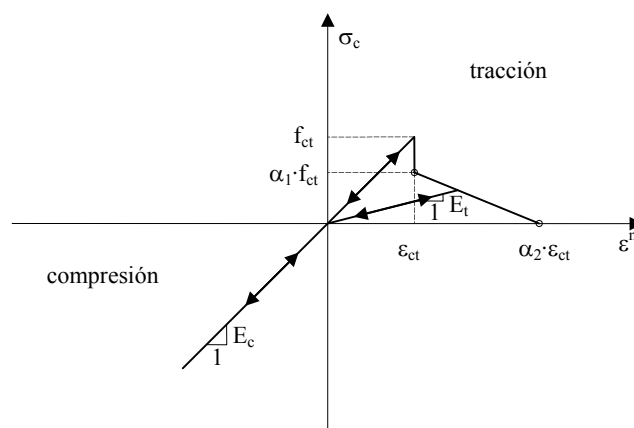


Figura 3.1 – Diagrama tensión-deformación para el hormigón

De acuerdo con lo comentado en el Capítulo 2, son bastantes las propuestas realizadas para este tipo de diagramas, diferenciándose entre ellas por la forma de los mismos y por los valores de las deformaciones máximas hasta las que debe considerarse la influencia del *tension stiffening*. En este trabajo se ha escogido una ley con una forma similar a la presentada por Damjanic y Owen [70] en la que la rama de decreciente queda definida por un escalón a partir de la resistencia a tracción del hormigón  $f_{ct}$  seguido de una recta con pendiente negativa, con lo cual el diagrama queda definido solamente por dos rectas y un escalón. En el modelo desarrollado en la presente tesis se ha caracterizado la zona con pendiente negativa del diagrama mediante los coeficientes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  que afectan a la resistencia a tracción  $f_{ct}$  y a la deformación correspondiente  $\epsilon_{ct}$ , respectivamente. Dichos parámetros pueden ser calibrados mediante ensayos experimentales o ajustarlos a modelos existentes, definiéndolos en función de las características seccionales, tal como se expone en el Capítulo 4. A conocimiento del autor, éste último procedimiento, sólo ha sido utilizado para el caso específico de losas de estructuras mixtas, por el Grupo de Trabajo V/4 del GEHO [105], haciendo intervenir únicamente la cuantía geométrica.

Siguiendo la metodología usualmente empleada en este tipo de modelos, los procesos de inversión de cargas se representan siguiendo la trayectoria definida por las flechas del diagrama de la Figura 3.1 [70,98]. Cuando el hormigón se encuentra en la zona fisurada la carga-descarga sigue una pendiente  $E_t$ , menor que  $E_c$ , con objeto de tener en cuenta el grado de fisuración alcanzado hasta el momento.

Ya que el modelo descrito en la Figura 3.1 es no lineal, el análisis se desarrolla en forma incremental. El incremento de deformación mecánica en un determinado instante  $t$  se obtiene mediante la siguiente ecuación

$$\Delta \varepsilon_c^m(t) = \frac{\Delta \sigma_c(t)}{E(t)} \quad (3.4)$$

siendo  $\Delta \sigma_c$  el incremento de tensión en el hormigón y  $E$  su módulo de deformación, el cual adopta distintos valores dependiendo del signo de la tensión y del grado de fisuración.

En el tratamiento de la deformación no mecánica debida a la fluencia, para niveles de carga en servicio, puede suponerse que existe linealidad entre las deformaciones de fluencia y las tensiones, pudiéndose aplicar el principio de superposición de Boltzman. Para el caso general de un elemento sometido a una tensión variable en el tiempo, supuesto un valor inicial  $\sigma_c(t_0)$ , la deformación total considerando el efecto de la fluencia puede expresarse como

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t_0) C(t, t_0) + \int_{t_0}^t C(t, \tau) d\sigma_c(\tau) \quad (3.5)$$

en la que  $\sigma_c(t_0)$  es la tensión inicial aplicada y  $C(t, t_0)$  recibe la denominación de función de fluencia. Si se introduce el coeficiente de fluencia  $\phi(t, t_0)$  de tal manera que

$$C(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad (3.6)$$

la expresión (3.5) podrá escribirse como

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} [1 + \phi(t, t_0)] + \int_{t_0}^t \frac{1 + \phi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.7)$$

En el caso de usar el modelo de fluencia del MC-90 [61], el denominador del segundo sumando de la ecuación (3.6) anterior deberá ser  $E_c(28)$ .

En este trabajo se ha tomado el mismo modelo de fluencia para las tensiones de compresión que para las de tracción (su implementación en la zona traccionada se describe en 3.6.3). Aun cuando la bibliografía sobre la consideración conjunta de los efectos diferidos y de la modelización del *tension stiffening* con modificación del diagrama constitutivo del hormigón es más bien escasa, la mayor parte de las referencias consultadas parece adoptar este mismo criterio [13,162,164,211]. Sin embargo Bazant y Oh [24] sugieren que para tracción se adopte un coeficiente de fluencia tres veces superior al normal de compresión. No obstante, este tema ha sido estudiado por Alwis *et al.* [13] de manera que aplicando el mismo modelo desarrollado por Bazant y Oh, pero incluyendo los efectos de la retracción en el modelo BP-2 utilizado por los primeros e idéntico coeficiente de fluencia para tracción y compresión, obtuvieron resultados totalmente satisfactorios y coincidentes con los valores experimentales de referencia.

Para la resolución de la integral de la ec. (3.7) debería conocerse la variación de la tensión con el tiempo. Habitualmente ésta no es la situación y la resolución del problema suele plantearse mediante procedimientos numéricos discretizando el tiempo o aplicando sistemas simplificados, los cuales se basan en suponer una cierta función de variación de la tensión en un intervalo de tiempo relativamente grande (EMM, MSM, AAEMM, indicados en el Capítulo 2).

Siguiendo la metodología expuesta en el desarrollo del presente trabajo, en el sentido de plantear un método general, se propone un cálculo “paso a paso”, considerando intervalos finitos de tiempo (de corta duración) con una variación escalonada de la tensión, de tal forma que los incrementos de  $\sigma_c$  se introducen de forma discreta en instantes predeterminados. Se adopta el instante central de cada intervalo para incorporar los incrementos de tensión [111,119]. Aunque habitualmente la precisión aumenta al disminuir la duración de los intervalos de tiempo sea cual sea el instante de introducción de la tensión, Kawano y Warner [143] han constatado que la inclusión en el centro de los mismos es el procedimiento que mejores resultados presenta frente a diversas tipologías de variación tensional. La metodología y la nomenclatura utilizadas quedan representadas en la Figura 3.2.

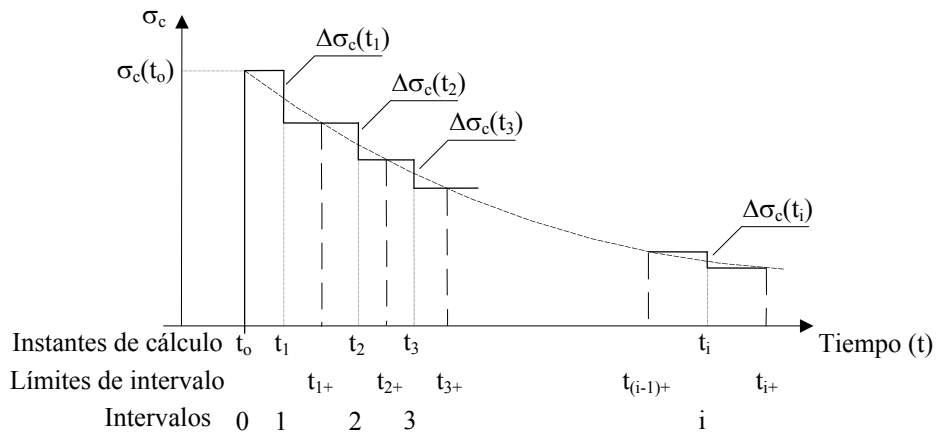


Figura 3.2 – Modelización de la variación de la tensión en el hormigón con el tiempo

Teniendo en cuenta la discretización del tiempo indicada, la ecuación (3.7) puede escribirse de la siguiente forma

$$\varepsilon_c(t_{i+}) = \frac{\sigma_c(t_o)}{E_c(t_o)} [1 + \phi(t_{i+}, t_o)] + \sum_{j=1}^i \frac{1 + \phi(t_{i+}, t_j)}{E_c(t_j)} \Delta\sigma_c(t_j) \quad (3.8)$$

siendo

$$\Delta\sigma_c(t_i) = \sigma_c(t_{i+}) - \sigma_c(t_{(i-1)+}) \quad t_i = \frac{t_{i+} - t_{(i-1)+}}{2} \quad (3.9)$$

La deformación no mecánica, correspondiente solamente a la fluencia, en un determinado intervalo  $(t_{i+}, t_{(i-1)+})$ , podrá obtenerse de

$$\Delta \varepsilon_c^c(t_{i+}, t_{(i-1)+}) = \left[ \sum_{j=0}^i (\phi(t_{i+}, t_j) - \phi(t_{(i-1)+}, t_j)) \frac{\Delta \sigma_c(t_j)}{E_c(t_j)} \right] \quad (3.10)$$

Como puede observarse el empleo de las ecuaciones (3.8) y (3.10), requiere conocer la historia tensional previa a la que ha estado sometida la capa. Para un cálculo con computador será necesario tener almacenados los valores de incrementos de tensión de los intervalos anteriores  $(\Delta \sigma(t_j))$ .

Existen métodos basados en la formulación de la función de fluencia mediante series de Dirichlet, que permiten resolver el problema anterior almacenando solamente el estado tensional correspondiente al último intervalo de tiempo [162,164], reduciendo de manera muy significativa las necesidades de memoria de la máquina a utilizar en el cálculo. No obstante, dado el gran avance que ha experimentado en los últimos años la disponibilidad de memoria en los ordenadores personales, es posible implementar un modelo multicapa como el desarrollado en la presente tesis sin hacer uso del método citado. Como puede verse en los ejemplos presentados en el Capítulo 7 pueden analizarse estructuras con un considerable número de secciones de control e intervalos de tiempo. En el caso del análisis de estructuras tridimensionales, en las que hubiera que discretizar la sección en dos direcciones (filamentos), las necesidades de memoria aumentarían considerablemente y la utilización del procedimiento indicado podría reportar ventajas más evidentes.

La deformación no mecánica correspondiente a la retracción del hormigón  $\varepsilon_c^s$  es independiente del nivel de tensión, aunque deben considerarse los parámetros que influyen en este fenómeno como son las dimensiones de la pieza, las condiciones medioambientales, la composición del hormigón y la edad del hormigón en el instante analizado. En un intervalo de tiempo  $(t_{i+}, t_{(i-1)+})$  se tiene

$$\Delta \varepsilon_c^s(t_{i+}, t_{(i-1)+}) = \varepsilon_c^s(t_{i+}, t_s) - \varepsilon_c^s(t_{(i-1)+}, t_s) \quad (3.11)$$

donde  $\varepsilon_c^s(t_{i+}, t_s)$  representa la deformación debida a la retracción desde el momento en que ésta empieza  $t_s$  y el instante final del intervalo de cálculo  $t_{i+}$ .

La deformación debida al envejecimiento del hormigón  $\varepsilon_c^a$  no se considera en el cálculo de una manera específica. La variación de las propiedades mecánicas del hormigón con el tiempo se tiene en cuenta introduciendo en cada instante de cálculo los correspondientes valores de  $E_c(t_i)$  o  $f_{ct}(t_i)$ .

Finalmente la deformación debida a las variaciones de temperatura puede expresarse mediante

$$\Delta \varepsilon^T(t_{i+}, t_{(i-1)+}) = \alpha(T_{i+} - T_{(i-1)+}) \quad (3.12)$$



siendo  $\alpha$  el coeficiente de dilatación lineal del material y  $T_{i+}$ ,  $T_{(i-1)+}$  las temperaturas en los instantes que definen el intervalo de tiempo considerado.

El valor total de la deformación a tiempo  $t_{i+}$  según la ec. (3.1), supuesta una discretización temporal en  $i$  intervalos de cálculo, puede expresarse de la siguiente forma

$$\varepsilon_c(t_{i+}) = \sum_{j=0}^i \Delta\varepsilon_{cj}^m + \sum_{j=0}^i \varepsilon_{cj}^{nm} \quad (3.13)$$

El planteamiento expuesto a partir de la ec.(3.1), combinado con el método paso a paso conduce a un modelo abierto que permite la inclusión de distintos refinamientos sobre la base ya establecida. Este podría ser el caso de la consideración de fluencia y retracción diferencial en la misma sección, efecto de las temperaturas sobre la madurez del hormigón, deslizamiento entre acero y hormigón, entre otros.

Por lo que respecta a los parámetros que definen el comportamiento del hormigón, como pueden ser el módulo de deformación, los coeficientes de fluencia y retracción o de dilatación térmica, pueden ser introducidos a partir de datos experimentales o usando las formulaciones incluidas en diversos códigos y manuales.

### 3.3.2. Acero

Para el rango de tensiones previsible en estado de servicio puede adoptarse una ley lineal para la modelización del comportamiento de los aceros. Se consideran aceros de tipo estructural (estructuras de acero o mixtas), aceros pasivos y aceros activos.

El incremento de deformación en el acero en un determinado instante  $t$  viene dado por

$$\Delta\varepsilon_s(t) = \frac{\Delta\sigma_s(t)}{E_s} \quad (3.14)$$

siendo  $\Delta\sigma_s$  el incremento de tensión y  $E_s$  el módulo de deformación del acero.

En el comportamiento diferido de los aceros activos debe tenerse en cuenta el fenómeno de la relajación, introducido en el Capítulo 2.

Habitualmente se dispone de modelos de relajación a deformación constante (relajación intrínseca) [57,61,82,158], mientras que las armaduras incorporadas a una sección de hormigón se encuentran sometidas a variaciones de su deformación debido a incrementos de los esfuerzos o a los efectos de la fluencia y la retracción.

El estudio de la relajación para deformación variable puede ser abordado por varios procedimientos. El primero y más elemental consiste en la utilización de las expresiones que recogen los diversos códigos de diseño y cálculo [6,57,82]. Otra

metodología consiste en adoptar un valor reducido para la relajación que tenga en cuenta la variación en la deformación de las armaduras. Ghali y Treviño [115] han desarrollado un factor reductor  $\chi_r$ , habitualmente menor que la unidad, y que depende de la tensión inicial, del incremento de tensión en el período considerado (generalmente desconocido) y de la relajación intrínseca. La aplicación del método conlleva la utilización de un procedimiento iterativo y ha sido implementado en diversos modelos, teniendo en cuenta períodos “largos” de tiempo [107-110] o métodos paso a paso [128].

Otro tipo de procedimientos de carácter general, adecuados para métodos paso a paso, son los que se basan en el establecimiento de tensiones o tiempos ficticios, permitiendo usar curvas de relajación modificadas. En este trabajo la relajación se ha tenido en cuenta aplicando el método de la tensión ficticia propuesto inicialmente por Hernández y Gamble [130]. Para la obtención de la relajación intrínseca se ha adoptado la formulación de MC-90 [61], que clasifica los aceros según el valor de la relajación a 1000 horas. Así, la Clase 1 corresponde a alambres y cordones de relajación normal; la Clase 2 se refiere a alambres y cordones de baja relajación; y la Clase 3 es para barras. El valor de la relajación a 1000 horas  $\rho_{1000}$  puede obtenerse, con ligeras variaciones, de tablas o gráficos en MC-90 [61], en EC-2 [82] o EHE [57], para tensiones iniciales  $\sigma_{p0}$  de 0.6, 0.7 y 0.8 veces la resistencia característica a tracción  $f_{ptk}$  (valores intermedios se pueden interpolar linealmente). La relajación a deformación constante vendrá dada por la ec. (3.15)

$$\rho_t = \rho_{1000} \left( \frac{t}{1000} \right)^k \quad \rho_{1000} = \text{función de} \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{ptk}} \right) \quad k \approx \log \left( \frac{\rho_{1000}}{\rho_{100}} \right) \quad (3.15)$$

donde  $\rho_t$  es la relajación a  $t$  horas;  $\rho_{1000}$  es la relajación a 1000 horas; y  $k$  es un factor dependiente de las características del acero que puede tomarse como 0.12 para aceros de clase 1 y 0.19 para aceros de clase 2.

El procedimiento operativo del método de la tensión ficticia queda representado esquemáticamente en la Figura 3.3.

Conocido el valor de la tensión inicial  $\sigma_{p0}$  aplicada en  $t_0$ , en el instante  $t_1$  la tensión habrá variado como consecuencia de la relajación ( $\Delta\sigma_{pr1}$ ) y de las deformaciones seccionales. Mediante la ec. (3.15) puede calcularse la tensión ficticia  $\sigma_{p01}$  que si se hubiera aplicado en  $t_0$  habría conducido a  $\sigma_{p1}$  en  $t_1$ . Usando  $\sigma_{p01}$  puede hallarse la pérdida por relajación en el periodo ( $t_1, t_2$ ). Esta secuencia puede aplicarse a cualquier intervalo de tiempo en un método paso a paso.

Por lo tanto, teniendo en cuenta la relajación, el incremento de deformación en el acero en un intervalo de tiempo ( $t_{i+}, t_{(i-1)+}$ ) podrá tomarse como

$$\Delta\varepsilon_s(t_{i+}, t_{(i-1)+}) = \frac{\Delta\sigma_s(t_i) + \Delta\sigma_{prc}}{E_s} \quad (3.16)$$

siendo  $\Delta\sigma_s$  la variación de tensión en el acero (activo o pasivo) exceptuando la debida propiamente a la relajación y  $\Delta\sigma_{prc}$  la relajación corregida según el método indicado.

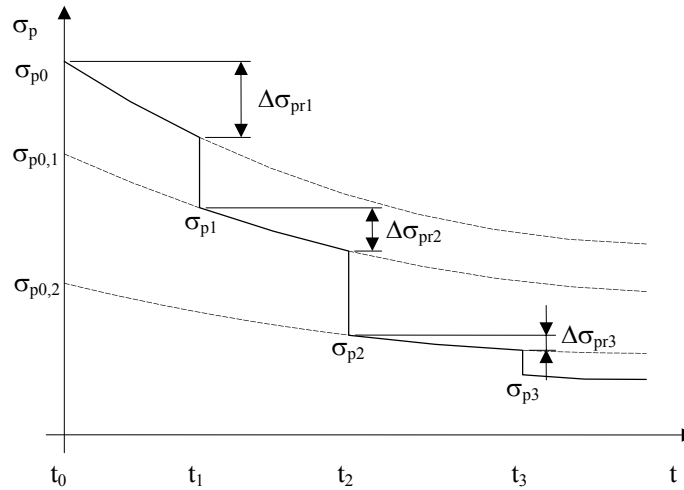


Figura 3.3 – Relajación con deformación variable

El estado actual de implementación del modelo se limita a elementos pretensados con trazado recto de las armaduras, aunque el diseño del mismo permite la incorporación futura del postesado o el trazado curvo. En este caso deberán considerarse otros tipos de pérdidas asociadas a las armaduras activas como pueden ser las debidas a rozamientos con las vainas y las pérdidas por penetración de cuñas, para cuya evaluación existen expresiones desarrolladas [6,57].

Asimismo debe tenerse en cuenta que en el caso de secciones con armaduras activas hay que considerar la transferencia de la fuerza de tesado a la estructura y la adherencia entre armaduras y hormigón en los instantes en que ello ocurra. Cuando los elementos son pretensados los dos instantes coinciden, mientras que en los postesados la contribución de las armaduras a la rigidez seccional debe introducirse en el momento de la inyección de las vainas.

### 3.4. DISCRETIZACIÓN DEL TIEMPO

La discretización del tiempo se ha llevado a cabo definiendo una serie de etapas, cada una de las cuales a su vez se ha dividido en subetapas o intervalos de cálculo propiamente dichos. Las etapas quedan delimitadas por aquellos instantes en los que se producen variaciones en las cargas exteriores, se efectúan cambios en las características resistentes o se modifican las condiciones de contorno.

Para proceder a la determinación de la duración de los intervalos es deseable que la deformación diferida que se produzca en cada uno de ellos sea similar. Ello conduce a la obtención de períodos de magnitud creciente.

Existen diversas propuestas de expresiones que permiten efectuar la discretización para un método paso a paso. Así, por ejemplo, en el Boletín 142 del CEB [58] se propone la siguiente ecuación

$$t_{i+} - t_0 = 10^{1/m} (t_{(i-1)+} - t_0) \quad (3.17)$$

en la que se obtiene el valor final de cada intervalo  $t_{i+}$  con respecto al instante de aplicación de la carga  $t_0$ , habiendo determinado previamente el valor que define el intervalo anterior  $t_{(i-1)+}$ . En cada etapa debe reiniciarse la discretización tomando el tiempo al principio de la misma como  $t_0$ .

Una expresión parecida usada por Kawano y Warner [143] tomada de Bazant [151] es la siguiente

$$t_{i+} - t_{(i-1)+} = 10^{1/m} (t_{(i-1)+} - t_{(i-2)+}) \quad (3.18)$$

En ambos casos debe escogerse un valor para  $m$  y para el intervalo inicial  $t_1 - t_0$ . En la bibliografía consultada aparecen distintas propuestas para el caso de la ecuación (3.17), así por ejemplo en [58] se recomienda  $m = 16$  y  $t_1 - t_0 = 0.1$  y en [53,111] se usan  $m = 8$  y  $t_1 - t_0 = 0.01$ , respectivamente. Por lo que respecta a la ec. (3.18), en [143] se toman valores de  $m$  entre 2 y 8. En los casos analizados hasta el momento, mediante los modelos desarrollados en este trabajo, se ha observado que los resultados son poco sensibles a los parámetros escogidos para la discretización del tiempo, habiéndose usado diversos valores de  $m$  comprendidos entre 8 y 16 para (3.17) y entre 8 y 12 para (3.18) sin apreciarse variaciones de mención en los resultados finales.

### 3.5. CONVENIO DE SIGNOS. IDEALIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA.

El modelo permite el análisis de estructuras de barras en dos dimensiones y cargadas en este plano. Las secciones pueden estar formadas por diversos materiales y deben tener un eje de simetría contenido en el plano de carga.

Cada sección tipo se descompone en una serie de trapecios, los cuales se discretizan en capas paralelas entre sí y perpendiculares al eje de simetría. Las capas están compuestas exclusivamente de un solo material, aunque se pueden superponer diversas capas para representar distintos materiales situados en la misma ordenada. Existe la posibilidad de modelizar armaduras y refuerzos externos como capas sin grosor situadas en la coordenada correspondiente a su baricentro. La sección se analiza tomando como eje de referencia cualquier recta perpendicular al eje de simetría, independizándose así el análisis de la posible variación del baricentro con el tiempo. Todo ello permite simular la construcción de secciones por fases y de estructuras mixtas de acero y hormigón. Se pueden incorporar diversos tipos de hormigones u otros materiales y también suprimir la colaboración de determinadas capas de la sección.

En la Figura 3.4 se muestran ejemplos de la discretización de secciones constituidas por diversos materiales.

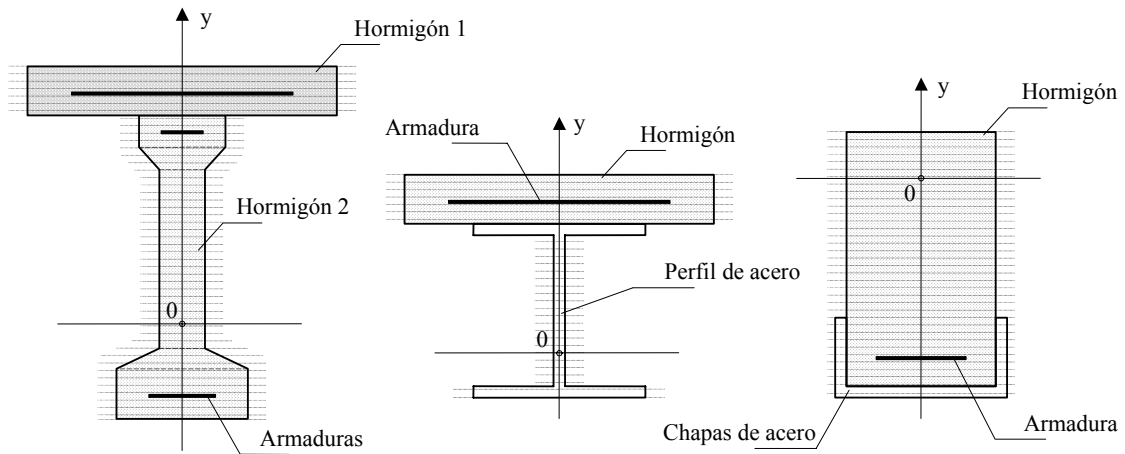


Figura 3.4 – Secciones discretizadas.

En la Figura 3.5 se indica el convenio de signos utilizado para coordenadas, esfuerzos, deformaciones y tensiones seccionales. El esfuerzo axial  $N$  se considera positivo cuando es de tracción, el momento flector  $M$  es positivo cuando produce tracción en la parte inferior de la sección y es positiva la curvatura  $C$  correspondiente; las deformaciones unitarias  $\epsilon$  son positivas para los alargamientos y las tensiones  $\sigma$  son positivas para las tracciones. El valor  $\epsilon_0$  corresponde a la deformación de la fibra de referencia y las tensiones  $\sigma_s$  y  $\sigma'_s$  son las de las armaduras.

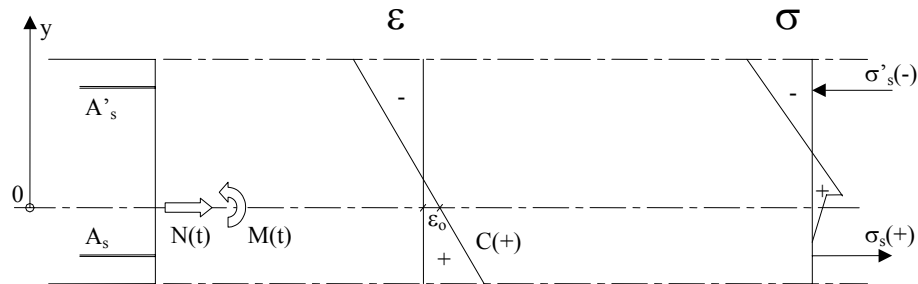


Figura 3.5 – Secciones: convenio de signos

La estructura se supone formada por una serie de barras que se cortan en los nudos. Las barras se representan por su eje que coincide con el de referencia de todas las secciones que las componen. Cada nudo tiene tres grados de libertad: desplazamiento horizontal, desplazamiento vertical y ángulo de rotación. Para cada elemento se define un sistema local de coordenadas y para el conjunto de la estructura un sistema de ejes globales. Se contemplan diversos tipos de acciones: cargas concentradas, cargas distribuidas y desplazamientos de apoyos.

El convenio de signos para esfuerzos, desplazamientos y cargas queda definido en la Figura 3.6.

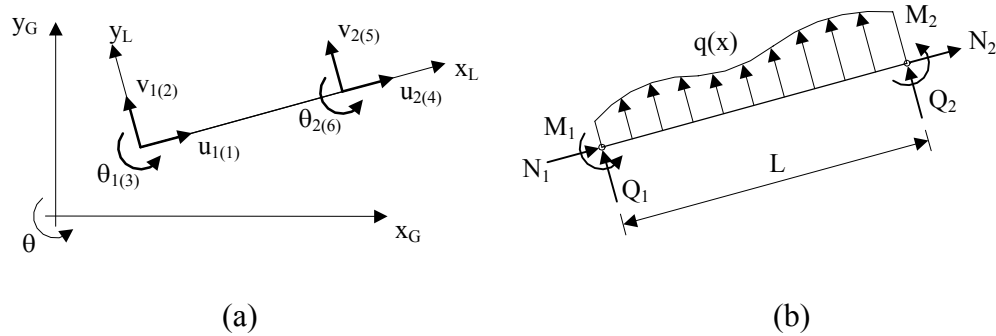


Figura 3.6 – (a) Desplazamientos en nudos; (b) Cargas y fuerzas en extremos de barra

### 3.6. ANÁLISIS SECCIONAL

#### 3.6.1. Ecuaciones fundamentales

Se plantea un análisis en el tiempo para una sección sometida a esfuerzos y a deformaciones impuestas.

#### Compatibilidad de deformaciones en la sección

Aceptando la hipótesis de deformación plana para las deformaciones totales y atendiendo al convenio de signos indicado en la Figura 3.5, el incremento de deformación  $\Delta\varepsilon$  para un intervalo de tiempo determinado, en una fibra cualquiera de la sección situada en la ordenada  $y$  viene dado por

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_0 - y\Delta C \quad (3.19)$$

#### Equilibrio

En una sección sometida a la acción de un esfuerzo axial y un momento flector, deben generarse unas tensiones en los materiales cuya resultante debe estar en equilibrio con las fuerzas aplicadas.

$$\Delta N = \int \Delta\sigma \, dA \quad \Delta M = -\int \Delta\sigma \, y \, dA \quad (3.20)$$

#### Ecuaciones constitutivas

La relación constitutiva de un material en el que existan deformaciones y tensiones iniciales puede expresarse mediante las siguientes expresiones

$$\Delta\sigma = E \Delta\varepsilon^m + \Delta\sigma^0 \quad (3.21)$$

si se introducen las deformaciones no mecánicas, teniendo en cuenta la ec. (3.1) se obtiene

$$\Delta\sigma = E (\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{nm}) + \Delta\sigma^0 = E \Delta\varepsilon - E \Delta\varepsilon^{nm} + \Delta\sigma^0 \quad (3.22)$$

donde  $E$  es el módulo de deformación (dependiente de  $\varepsilon$  en el caso de relación no lineal),  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^m$ ,  $\varepsilon^{nm}$ , la deformación total, mecánica y no mecánica y  $\sigma^0$  la tensión inicial.

Sustituyendo (3.22) en (3.20) y teniendo en cuenta (3.19), se obtiene la relación matricial entre esfuerzos, deformaciones y tensiones iniciales

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int E dA & -\int E y dA \\ -\int E y dA & \int E y^2 dA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_0 \\ \Delta C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta N^0 \\ \Delta M^0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

siendo  $N^0$  y  $M^0$  unos esfuerzos ficticios capaces de generar las deformaciones no mecánicas y las tensiones iniciales, de tal forma que

$$\Delta N^0 = \int E \Delta\varepsilon^{nm} dA + \int \Delta\sigma^0 dA \quad \Delta M^0 = -\int E y \Delta\varepsilon^{nm} dA - \int y \Delta\sigma^0 dA \quad (3.24)$$

estando las integrales extendidas a aquellas partes de la sección que sufren deformaciones no mecánicas (p.e. el hormigón) o a aquellas en las que se producen variaciones de tensiones iniciales (p.e. relajación de las armaduras activas). Asimismo se incluirán en el vector de esfuerzos iniciales los esfuerzos residuales en el caso de un cálculo no lineal.

La ec. (3.2) puede escribirse de forma compacta según la siguiente notación vectorial

$$\sigma = \mathbf{K}_s \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (3.25)$$

donde  $\mathbf{K}_s$  es la matriz de rigidez de la sección;  $\boldsymbol{\sigma} (N, M)^T$  es el vector de esfuerzos seccionales,  $\boldsymbol{\varepsilon} (\varepsilon_0, C)^T$  el vector de deformaciones totales y  $\boldsymbol{\sigma}^0 (N^0, M^0)^T$  un vector que engloba los esfuerzos debidos a las tensiones y a las deformaciones iniciales.

Se observa que el planteamiento del análisis tomando como referencia un eje cualquiera provoca la aparición de coeficientes distintos de cero para los términos que no están en la diagonal de la matriz de rigidez seccional, habiendo interacción entre esfuerzo normal y curvatura y entre momento flector y deformación de la fibra de referencia.

### 3.6.2. Procedimiento de análisis seccional no lineal en el tiempo

Como consecuencia de la fisuración del hormigón, las ecuaciones (3.23) constituyen un sistema no lineal. Para su resolución se plantean de forma incremental en cada intervalo de cálculo, aplicando un procedimiento iterativo basado en el método de *Newton-Raphson*.

Conocido el estado tensodeformacional al final de un intervalo (subetapa) se sigue el procedimiento que se indica a continuación:

- Se halla la matriz de rigidez seccional tangente  $\mathbf{K}_s$  cuyos términos se han definido en la ec. (3.23), teniendo en cuenta el estado de fisuración previo.
- Se determina el vector incremento de deformaciones  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i = (\Delta \varepsilon_{0i}, \Delta C_i)^T$  resolviendo (3.23), o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_0 &= F_1 \Delta N + F_2 \Delta M \\ \Delta C &= F_3 \Delta N + F_4 \Delta M \end{aligned} \quad (3.26)$$

siendo  $F$  los coeficientes de flexibilidad cuyos valores pueden obtenerse según

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\int E y^2 dA}{\int_s E dA \int E y^2 dA - \left[ \int E y dA \right]^2} \\ F_2 &= F_3 = \frac{\int E y dA}{\int_s E dA \int E y^2 dA - \left[ \int E y dA \right]^2} \\ F_4 &= \frac{\int E dA}{\int_s E dA \int E y^2 dA - \left[ \int E y dA \right]^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

- Se obtienen los incrementos de deformación  $\Delta \varepsilon_i$  en cada capa a partir de la ec. (3.19), en forma incremental y se actualizan las deformaciones

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} + \Delta \varepsilon_i \quad (3.28)$$

- Se hallan las variaciones de tensión  $\Delta \sigma_i$  en cada capa según las ecuaciones constitutivas del material y se actualizan las tensiones

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} + \Delta \sigma_i \quad (3.29)$$

- Se determina el vector de esfuerzos seccionales  $\boldsymbol{\sigma}_i = (N_i, M_i)$  (correspondientes al estado tensional anterior haciendo uso de las ecuaciones (3.20).



- f. Se hallan los esfuerzos residuales  $N_i^r$ ,  $M_i^r$  como diferencia de los calculados en el paso anterior y de los esfuerzos aplicados en la sección en la subetapa considerada.
- g. Mediante un esquema iterativo se repiten los pasos desde (a) a (f) haciendo, en la ec. (3.23),  $\Delta N_{i+1}^0 = N_i^r$ ,  $\Delta M_{i+1}^0 = M_i^r$ ,  $\Delta N_{i+1} = 0$ ,  $\Delta M_{i+1} = 0$ , hasta llegar a la convergencia.
- h. Se considera que el proceso ha convergido cuando se cumplen simultáneamente

$$|N_i^r| \leq t_N \quad |M_i^r| \leq t_M \quad (3.30)$$

$$|\Delta \varepsilon_i| \leq t_\varepsilon \quad |\Delta C_i| \leq t_C \quad (3.31)$$

siendo  $t_N$ ,  $t_M$ ,  $t_\varepsilon$ ,  $t_C$ , las tolerancias admitidas para el esfuerzo axil, el momento flector, la deformación en la fibra de referencia y la curvatura, respectivamente.  $\Delta \varepsilon_i$  e  $\Delta C_i$  son los incrementos de deformación en la iteración.

Cuando deban considerarse los efectos diferidos, se hallarán  $\Delta N^0$ ,  $\Delta M^0$ , utilizando la ec. (3.24), se introducirán en (3.23) y se seguirá el mismo proceso indicado.

### 3.6.3. Implementación del modelo de análisis seccional

#### Aspectos generales

El modelo desarrollado ha sido implementado en el programa de cálculo SECSER, en código FORTRAN, apto para su utilización en ordenadores personales. En la Figura 3.7 se muestra un diagrama de flujo del mencionado programa en el que queda reflejado de forma resumida el proceso de cálculo.

El análisis en el tiempo se realiza por etapas, divididas a su vez en subetapas. El primer intervalo de cualquier etapa se supone de duración nula ( $t_{i+} = t_{(i-1)+} = t_i$ ) y en él se efectúa el cálculo de los efectos instantáneos. En las siguientes subetapas se consideran los efectos diferidos.

Las cargas exteriores o los esfuerzos de tesado, así como las variaciones de las propiedades resistentes de una sección como consecuencia de añadir o sustituir materiales en casos de reparación o rehabilitación o suprimir partes de la sección debido a daños o corrosiones deben incluirse al inicio de una etapa. El procedimiento de análisis se efectúa de acuerdo con lo descrito en 3.6, teniendo en cuenta que para las capas "nuevas", el proceso acumulativo de cálculo de tensiones y deformaciones debe partir de un valor inicial nulo para el instante en que se han introducido y que la aportación de esas capas a la capacidad resistente de la sección debe contabilizarse a partir de ese momento. Cuando se suprime un grupo de capas, éstas dejan de contabilizarse en los cálculos a desde el instante en que no están presentes. En todos los casos el proceso iterativo de cálculo hasta la convergencia conduce al estado final de tensiones y deformaciones.

En las aplicaciones realizadas hasta el momento el programa ha convergido de manera satisfactoria. En la implementación del proceso iterativo de solución del problema no lineal se ha utilizado la matriz de rigidez tangente, calculada, en primera

aproximación, haciendo uso de la expresión (3.23) y del valor de  $E$  tangente en cada fibra. La utilización de la rigidez tangente frente a la secante ha reducido de manera significativa el número de iteraciones.

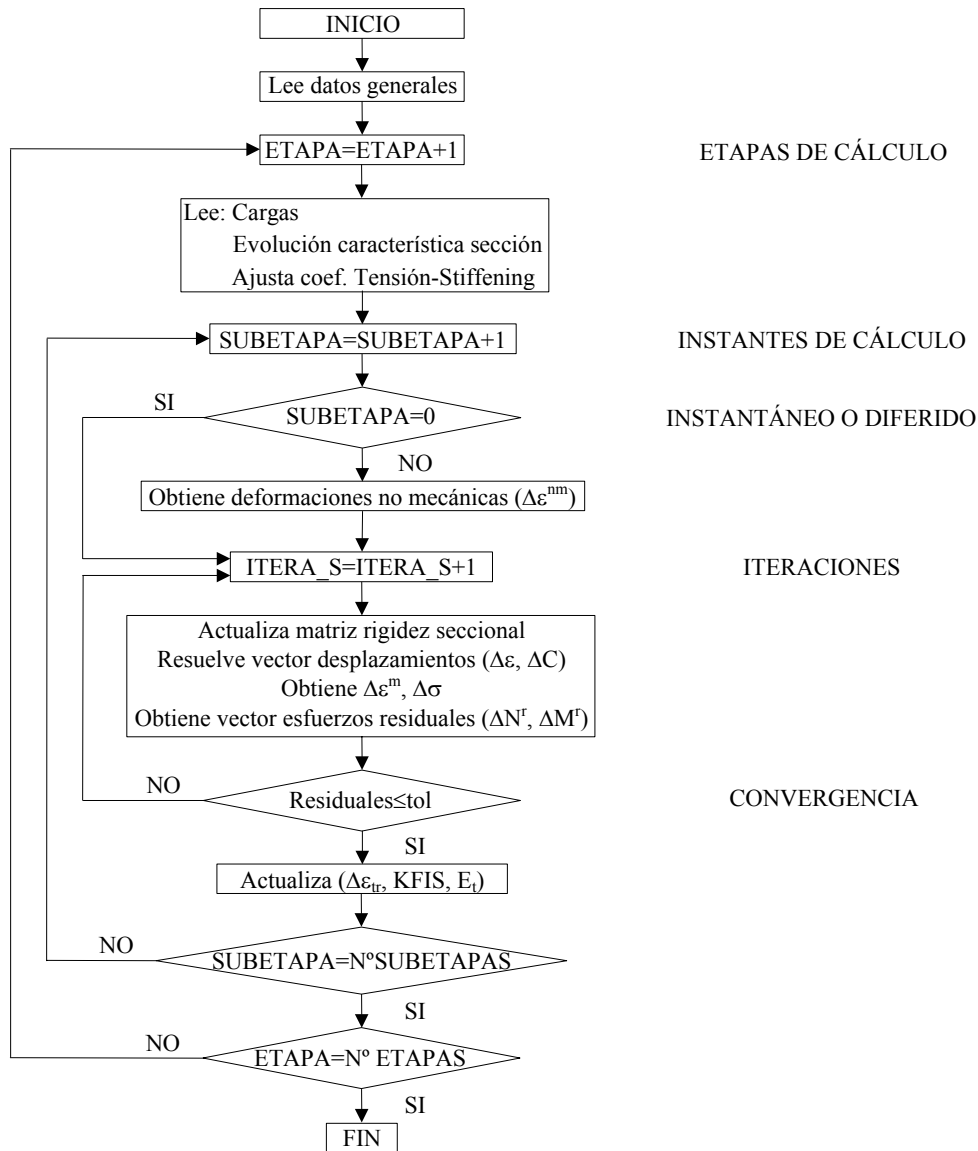


Figura 3.7 – Diagrama de flujo del programa de análisis seccional SECSER

La característica más relevante del modelo descrito consiste en que se trata de un método general que presenta una gran potencialidad para poder simular la mayoría de los fenómenos que influyen en el comportamiento de las secciones de hormigón armado, pretensado o mixtas. En el caso que nos ocupa, la implementación ha permitido conseguir un programa cuyas principales prestaciones estriban en que es capaz de tener en cuenta los efectos diferidos, la fisuración, la historia de cargas, la construcción evolutiva, las variaciones de las propiedades de los materiales con el tiempo y el uso de diferentes leyes para el comportamiento de los materiales.

La utilización del algoritmo seccional posibilita la obtención de diagramas Momento-Curvatura en cualquier tipo de sección según las prestaciones indicadas anteriormente [228]. Asimismo, la determinación de las deformaciones seccionales permite el cálculo de desplazamientos en barras isostáticas mediante su integración numérica.

**Características específicas de la implementación numérica del comportamiento del hormigón.**

Una contribución significativa de la presente tesis es la incorporación del efecto de *tension stiffening* mediante una metodología general y actualizada y su ajuste y contrastación con otros métodos comúnmente aceptados como válidos, tanto para comportamiento instantáneo como diferido. Por ello, y para cubrir aspectos no puntualizados en otros trabajos se ha considerado oportuno incluir detalles sobre su implementación en un programa de cálculo no lineal y diferido con un modelo como el indicado en la Figura 3.1. Posteriormente en el Capítulo 4 se procederá al estudio de las variables que intervienen en la modelización de dicho fenómeno.

**Análisis instantáneo**

Para cada capa se ha definido y almacenado una variable denominada *KFIS* que indica el estado de fisuración de la misma. Los valores 0, 1 ó 2, denotan una situación de capa no fisurada hasta ese instante, capa parcialmente fisurada (se ha sobrepasado el valor de  $\epsilon_{ct}$ , pero no se ha llegado a  $\alpha_2 \cdot \epsilon_{ct}$ ) y capa totalmente fisurada (se ha sobrepasado  $\alpha_2 \cdot \epsilon_{ct}$  y ya no es posible ninguna colaboración del hormigón traccionado).

En la Figura 3.8 se muestra el diagrama constitutivo para una capa de hormigón con *KFIS* = 0 (se parte de un estado de no fisuración). Se definen tres zonas (a, b, c) que obedecen a las distintas pendientes de las rectas que lo constituyen. Para un determinado incremento de deformación mecánica  $\Delta\epsilon^m = \Delta\epsilon$  (siendo  $\Delta\epsilon^{nm} = 0$ ) se obtendrá la tensión aplicando la ecuación  $\sigma$ - $\epsilon$  correspondiente a la zona de trabajo. La situación de paso de zona de tracción a compresión para procesos de inversión de cargas se controla mediante la variable  $\epsilon_{tr}$ .

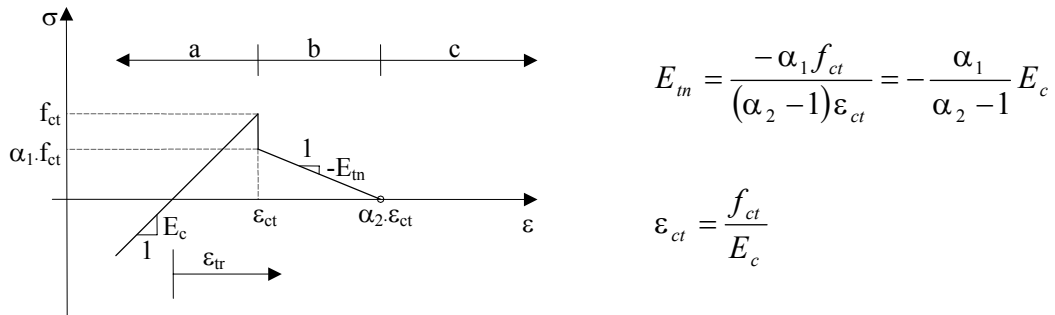


Figura 3.8 – Diagrama tensión-deformación para capa de hormigón (*KFIS* = 0)

Una vez alcanzada la convergencia se actualizan los valores de  $KFIS$ ,  $\varepsilon_{tr}$  y  $E_t$  (pendiente en la zona de tracción), con objeto de usarlos en la siguiente subetapa de cálculo.

La Figura 3.9 muestra el diagrama que seguirán las capas que se encuentren en una situación de “fisuración parcial”, con  $KFIS = 1$ .

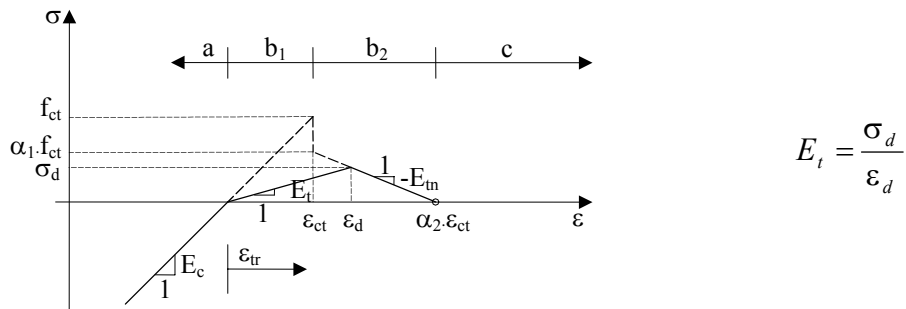


Figura 3.9 – Diagrama tensión-deformación para capa de hormigón ( $KFIS = 1$ )

En este caso se delimitan cuatro zonas (a,b<sub>1</sub>,b<sub>2</sub>,c). La ley constitutiva se define mediante las coordenadas  $\sigma_d$ ,  $\varepsilon_d$ , que determinan la pendiente  $E_t$ . Cuando se llega a la convergencia deben actualizarse los valores de  $KFIS$ ,  $\varepsilon_{tr}$  y  $E_t$ .

Para una capa totalmente fisurada, con  $KFIS = 2$ , se seguirá el mismo procedimiento que en el caso anterior, pasando a anularse el valor de  $E_t$ , desapareciendo del diagrama de la Figura 3.9 las zonas b<sub>1</sub> y b<sub>2</sub>. Los valores de  $KFIS$  y de  $E_t$  se mantienen en dos y cero respectivamente, de manera que no debe procederse a ninguna actualización de los mismos una vez que el proceso ha convergido.

En resumen, por tanto, según el valor que tenga  $KFIS$  para la capa analizada se utilizará el esquema correspondiente hasta llegar a la convergencia, momento en que se procederá a actualizar y almacenar dicho valor, el de  $E_t$  y el de  $\varepsilon_{tr}$ . A la vista de lo expuesto, se puede apreciar que siguiendo la metodología indicada se simulan para cada capa los fenómenos de fisuración progresiva, cargas y descargas.

### **Análisis diferido**

Para la resolución del algoritmo en el análisis diferido se usa una estrategia similar a la indicada en el apartado anterior, con la única diferencia de la aparición de las deformaciones no mecánicas  $\varepsilon^{nm}$ , que suponen un desplazamiento del diagrama tensión-deformación del hormigón.

En efecto, si suponemos una sección de hormigón armado sometida a un esfuerzo axial centrado y constante, con un estado tensodeformacional inicial definido por  $\sigma_A$ ,  $\varepsilon_A$  (Figura 3.10), aplicando las ecuaciones (3.23) y (3.24), suponiendo que se desarrolla una deformación no mecánica  $\Delta\varepsilon^{nm}$ , se obtiene el punto de trabajo  $\sigma_B, \varepsilon_B$ , sobre el diagrama desplazado.

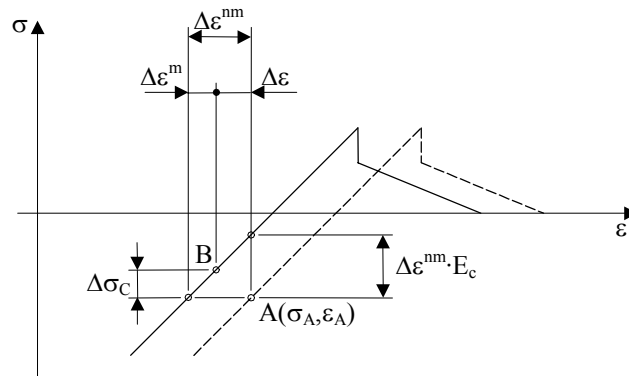


Figura 3.10 – Esquema del proceso de cálculo para el análisis diferido

Para la inclusión de los efectos diferidos en aquellas capas con una situación de fisuración parcial o total, trabajando en la zona de tracción (zonas b, b<sub>1</sub>, c, en la Figura 3.10), la deformación no mecánica de fluencia se determina mediante la ec. (3.10). Igualmente que allí se emplea  $E_c$ , en lugar de  $E_t$ , ya que solamente fluye el hormigón entre fisuras, sometido a una tensión media de  $\Delta\sigma_c(t_j)$ , siendo en cambio  $E_t$  un valor medio que incluye el alargamiento del acero en las secciones totalmente fisuradas. En la determinación de  $N^0$ , se toma  $E_t$ , con lo que se pretende modelizar la pérdida de adherencia gradual entre acero y hormigón a medida que aumenta el grado de fisuración.

$$\Delta N^0 = \Delta\epsilon_c^{nm} E_t A_c \tag{3.33}$$

donde  $\Delta\epsilon_c^{nm}$  incluye la retracción. Véase que  $E_t$  varía entre  $E_c$  y cero para capa no fisurada y totalmente fisurada, respectivamente. Ello representa una pérdida de la compatibilidad, no transmitiéndose toda la deformación no mecánica al acero. La relación  $E_t/E_c$ , viene a ser un indicativo del daño en la determinación de  $N^0$ , de manera que se tendría el valor máximo para  $E_t = E_c$  y el mínimo para  $E_t = 0$ .

Con este planteamiento, cuando la sección está totalmente fisurada, la posible deformación no mecánica sigue contribuyendo al valor de  $\epsilon_{tr}$  (y por tanto podrá influir en la inversión de cargas) pero no tiene el efecto de una deformación impuesta sobre la sección.

En la Figura 3.11 se muestra un ejemplo para un  $\Delta\epsilon^{nm}$  negativo (p.e. retracción) en una capa en la que la deformación total  $\Delta\epsilon$  sea positiva (debido al efecto del resto de la sección sobre ella). Se ocasiona un  $\Delta\epsilon_{tr}$  positivo lo cual un incremento de la deformación necesaria para que la capa trabaje a compresión en un proceso de inversión de cargas.

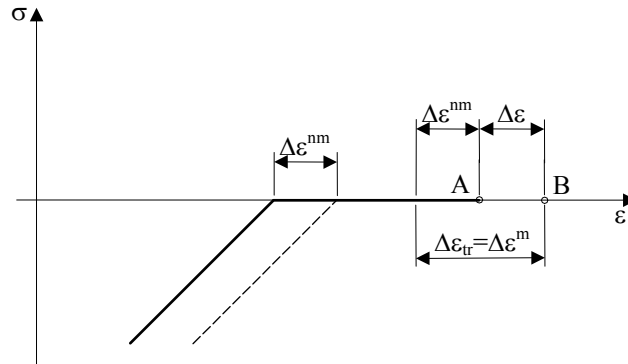


Figura 3.11 – Modelización de efecto  $\varepsilon^{nm}$  en capa totalmente fisurada

### Estimación del ancho medio de fisura

La estimación del ancho medio de fisura  $w_m$  al nivel de las armaduras, mediante el modelo presentado, puede obtenerse aplicando las siguientes relaciones

$$w_m = s_m \varepsilon_{sm,r} \quad (3.34)$$

$$\varepsilon_{sm,r} = \varepsilon_{sm} - \frac{\sigma_{cm}}{E_c} \quad (3.35)$$

donde  $\varepsilon_{sm,r}$  es la deformación unitaria media relativa de las armaduras respecto del hormigón circundante,  $s_m$  la separación media entre fisuras, que puede ser determinada mediante expresiones empíricas [59, 82],  $\varepsilon_{sm}$  es la deformación media del acero,  $\sigma_{cm}$  es la tensión media de la capa de hormigón situada al nivel del acero y  $E_c$  el módulo de deformación del hormigón.

## 3.7. ANÁLISIS ESTRUCTURAL

### 3.7.1. Método empleado

El procedimiento operativo está basado en una extensión de la formulación matricial clásica para el cálculo de estructuras de barras, aplicada a elementos de inercia variable, con un eje de referencia no necesariamente coincidente con el baricentro de la sección. Tal como han sido indicado previamente por Ghali y Elbadry [108], Carol y Murcia [44], Marí [162] o Molins y Roca [174], entre otros, en esta metodología no se presupone ninguna forma predeterminada de la deformada de la pieza, planteándose la compatibilidad cinemática a partir de métodos “exactos” como pueden ser las ecuaciones de Navier-Bresse. Conociendo las cargas y las fuerzas en los extremos de la barra se podrá establecer la ecuación de equilibrio que se cumplirá para cualquier punto interior. Esta metodología presentada de manera general para estructuras espaciales de directriz recta o curva se ha denominado en algunos trabajos Formulación Matricial Generalizada [162,175], pudiéndose entender como una formulación híbrida del método

de los elementos finitos en la que, a través de la condición de equilibrio, es posible una interpolación “exacta” para los esfuerzos seccionales a partir de las fuerzas nodales.

En el presente trabajo se ha desarrollado un modelo basado en este tipo de procedimientos, que incorpora las leyes constitutivas de los materiales definidas con anterioridad y las prestaciones indicadas en 3.6. Las expresiones se han definido atendiendo a los conceptos básicos de cálculo matricial, aplicados a estructuras en dos dimensiones. De esta forma, deberá cumplirse la siguiente relación entre fuerzas y desplazamientos

$$\mathbf{f} = \mathbf{Kd} + (\mathbf{f}^e + \mathbf{f}^0) \tag{3.36}$$

donde  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas aplicadas directamente a los nudos,  $\mathbf{d}$  es el vector de desplazamientos nodales,  $\mathbf{f}^e$  y  $\mathbf{f}^0$  son, respectivamente, los vectores de fuerzas de empotramiento perfecto debidas a las cargas aplicadas sobre la barra y debidos a las tensiones iniciales y  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez global. Asimismo, para cada elemento el vector de fuerzas en los extremos  $\mathbf{f}_{el}$  viene dado por

$$\mathbf{f}_{el} = \mathbf{K}_{el}\mathbf{d}_{el} + (\mathbf{f}_{el}^e + \mathbf{f}_{el}^0) \tag{3.37}$$

siendo el subíndice “*el*”, indicativo de que el vector o matriz está referido a un elemento.

### 3.7.2. Matriz de rigidez del elemento

Sea una barra (1,2), de directriz inicial recta, como la de la Figura 3.14, sometida a un conjunto de cargas y con una cierta configuración deformada (1',2')

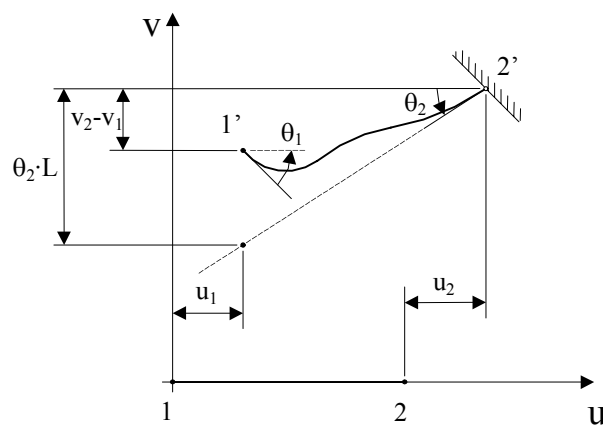


Figura 3.12 – Barra deformada

Aplicando las ecuaciones de compatibilidad cinemática se tiene

$$u_2 - u_1 = \int \varepsilon_0 dx \quad \theta_2 L - (v_2 - v_1) = \int C x dx \quad \theta_2 - \theta_1 = -\int C dx \quad (3.38)$$

donde  $\varepsilon_0$ ,  $C$  son la deformación de la fibra de referencia y la curvatura seccionales.

La matriz de rigidez del elemento es simétrica, está formada por 6 filas y 6 columnas, y en general sus términos no serán nulos, debido a que el análisis no se realiza en el baricentro de las secciones.

Si se permite el desplazamiento unitario alternativo de cada uno de los grados de libertad nodales, manteniendo fijos los demás, las fuerzas en los nudos corresponderán a los coeficientes de la matriz de rigidez. Por ejemplo, para el caso del nodo 1 se tendrá el esquema de la Figura 3.13.

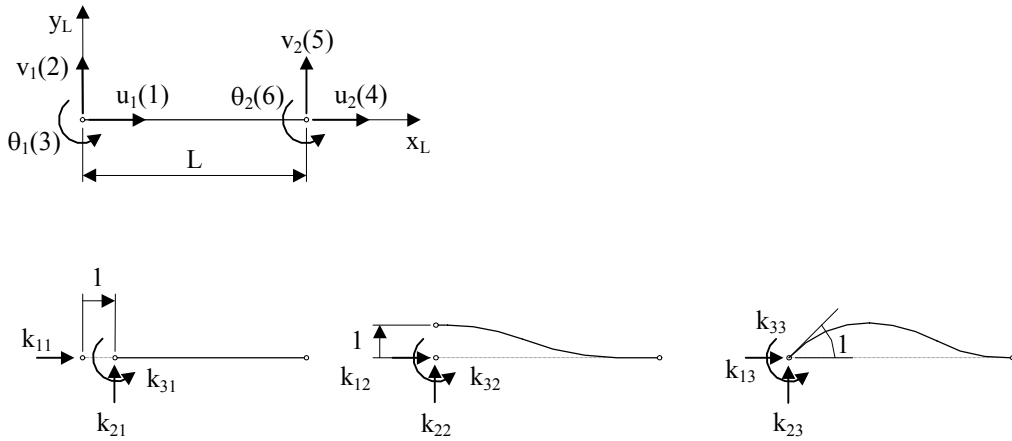


Figura 3.13 – Coeficientes de rigidez nodo 1

Asimismo, como ejemplo para  $u_1=1$  (Figura 3.13.b) con los convenios de signos definidos, las ecuaciones son las siguientes

$$\begin{aligned} \Delta u_1 = 1 &= \int_0^L \Delta \varepsilon_{0(k_{11})} dx - \int_0^L \Delta \varepsilon_{0(k_{21})} dx + \int_0^L \Delta \varepsilon_{0(k_{31})} dx \\ \Delta v_1 = 0 &= -\int_0^L \Delta C_{(k_{11})} x dx + \int_0^L \Delta C_{(k_{21})} x dx - \int_0^L \Delta C_{(k_{31})} x dx \\ \Delta \theta_1 = 0 &= \int_0^L \Delta C_{(k_{11})} dx - \int_0^L \Delta C_{(k_{21})} dx + \int_0^L \Delta C_{(k_{31})} dx \\ \Delta u_1 = 1 &= k_{11} \int_0^L F_1 dx - k_{21} \int_0^L F_2 x dx + k_{31} \int_0^L F_2 dx \\ \Delta v_1 = 0 &= k_{11} \int_0^L F_3 x dx + k_{21} \int_0^L F_4 x^2 dx + k_{31} \int_0^L F_4 x dx \\ \Delta \theta_1 = 0 &= k_{11} \int_0^L F_3 dx - k_{21} \int_0^L F_4 x dx + k_{31} \int_0^L F_4 dx \end{aligned} \quad (3.39)$$



donde  $\Delta\varepsilon_{0(Ki1)}$ ,  $\Delta C_{(Ki1)}$  son, respectivamente, la deformación y la curvatura debidos a la aplicación de la fuerza de extremo de barra  $K_{i1}$  en la fibra de referencia y  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , son los coeficientes de flexibilidad de cada sección de acuerdo con la ec. (3.27). Las integrales se calculan numéricamente (mediante los procedimientos de Gauss-Legendre o Simpson) correspondiendo los puntos de integración con las secciones de control en las que se efectúan los cálculos.

De la misma forma pueden ser determinados los coeficientes  $K_{i2}$  y  $K_{i3}$  ( $i = 1,2,3$ ). Debido a la simetría de la matriz, y por tanto a la coincidencia entre algunos de los coeficientes, en realidad se tienen seis incógnitas. Resolviendo un sistema de seis ecuaciones se obtiene la submatriz  $K_{I-I}$  de  $3 \times 3$  (ec. 3.40), a partir de la cual, por consideraciones de simetría y de equilibrio en las barras pueden hallarse los otros coeficientes (fuerzas) de la matriz total  $6 \times 6$ . Este proceso puede hacerse empleando una matriz de transformación  $C$  de la siguiente manera

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{I-I} & K_{I-II} \\ K_{II-I} & K_{II-II} \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}^T \mathbf{K}_{I-I} \mathbf{C} \tag{3.40}$$

Siguiendo el procedimiento descrito se halla la matriz de rigidez del elemento (tangente, secante) a partir de las propiedades seccionales de cada instante de cálculo.

### 3.7.3. Fuerzas desequilibradas.

Si las diferencias de desplazamientos en extremos de barra no cumplen las ec. (3.38) existirán unos desplazamientos desequilibrados (residuales)  $\mathbf{d}^r = (u^r, v^r, \theta^r)^T$  dados por

$$\begin{aligned} u^r &= (u_2 - u_1) - \int \varepsilon_0 \, dx \\ v^r &= \theta_2 L - (v_2 - v_1) - \int C x \, dx \\ \theta^r &= \theta_2 - \theta_1 + \int C \, dx \end{aligned} \tag{3.41}$$

de modo que para restablecer la compatibilidad se requieren unas fuerzas adicionales en el extremo 1 de la barra de valor

$$\mathbf{f}_1^r = \mathbf{K}_{I-I} \mathbf{d}^r \tag{3.42}$$

donde  $\mathbf{K}_{I-I}$  sigue la nomenclatura de la ec. (3.40). Los incrementos de fuerzas en el extremo 2 se obtienen imponiendo el equilibrio de la barra.

Cuando se introduzca en el cálculo el efecto de las cargas externas el vector  $\mathbf{f}$  se corresponde con las fuerzas de empotramiento perfecto y en las fases intermedias de un proceso iterativo es el vector de fuerzas residuales.

#### 3.7.4. Inclusión de las no linealidades geométricas

Aun cuando en la mayoría de los casos de estructuras de hormigón, en servicio, el análisis en primer orden será suficiente, se ha considerado oportuno contemplar la opción de tener en cuenta el efecto de las no linealidades de origen geométrico. Su incorporación hace que este tipo de análisis pueda ser aplicado a casos específicos en los que se considere oportuno y dota al modelo de una mayor generalidad, tanto para la implementación actual como para futuras mejoras.

La inclusión de los efectos debidos a la consideración de esta situación se ha realizado estableciendo el equilibrio sobre la geometría deformada o segundo orden. Se ha mantenido la hipótesis de pequeñas deformaciones, lo cual permite conservar la validez de las ecuaciones (3.38) sin necesidad de reformular la condición de compatibilidad. Así, en un planteamiento general, la matriz de rigidez se va actualizando de acuerdo con la deformación de la estructura y se tiene en cuenta la influencia de los desplazamientos sobre los esfuerzos seccionales.

#### 3.7.5. Apoyos no lineales

Dentro de esta clasificación se incluyen los puntales o cimbras utilizados en el proceso constructivo. Dichos elementos se han modelizado como barras articuladas en sus extremos con comportamiento lineal y elástico para la compresión y con rigidez nula para la tracción, tal como se indica en la Figura 3.15. Ello equivale a no considerar la existencia del puntal cuando se vea sometido a una carga axil de tracción.

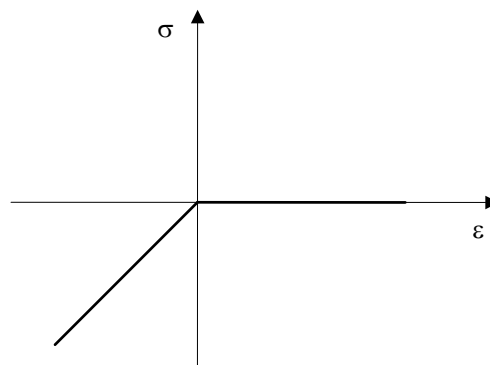


Figura 3.15 – Modelización de las cimbras

### 3.7.6. Procedimiento de análisis no lineal en el tiempo

Como consecuencia del comportamiento seccional ya descrito y de la inclusión de los otros efectos no lineales citados, de (3.36) se deriva un sistema no lineal de ecuaciones. Siguiendo el esquema indicado para el análisis seccional, el problema se resolverá para los intervalos de tiempo previamente definidos.

Conocido el estado tensodeformacional en una determinada subetapa se resuelve la siguiente según un procedimiento iterativo, en el que la ecuación (3.36) considerada en forma incremental y agrupando las fuerzas en el vector  $\mathbf{f}$ , adopta la forma

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{d} \quad (3.43)$$

La secuencia de operaciones es la que se indica a continuación:

- a. Para una determinada iteración  $i$  se resuelve la ecuación (3.43) de acuerdo con

$$\Delta \mathbf{d}_i = [\mathbf{K}_{i-1}]^{-1} \Delta \mathbf{f}_{i-1} \quad (3.44)$$

- b. Se actualizan los desplazamientos nodales y de extremo de barra

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_{i-1} + \Delta \mathbf{d}_i \quad \mathbf{d}_{el,i} = \mathbf{d}_{el,i-1} + \Delta \mathbf{d}_{el,i} \quad (3.45)$$

- c. Se hallan los incrementos de esfuerzos de extremo de barra  $\Delta \mathbf{f}_{el}$  de acuerdo con la ec. (3.37) expresada en forma incremental y se actualizan sus valores

$$\Delta \mathbf{f}_{el,i} = \mathbf{K}_{el} \Delta \mathbf{d}_{el,i} + \mathbf{f}_i^r \quad \mathbf{f}_{el,i} = \mathbf{f}_{el,i-1} + \Delta \mathbf{f}_{el,i} \quad (3.46)$$

- d. Se efectúa el análisis en las secciones de control de acuerdo con 3.6.2, sometidas a los esfuerzos que actúan sobre ellas calculados mediante las ecuaciones de equilibrio aplicadas a cada barra.

- e. Para cada elemento con desplazamientos  $\mathbf{d}_{el,i}$ , se determina la matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_{el,i}$  según 3.7.2 a partir de las características seccionales.

- f. Se hallan los desplazamientos desequilibrados  $\mathbf{d}_i^r$  y las fuerzas necesarias para restablecer la compatibilidad cinemática en cada elemento según 3.7.3. Si se trata de la primera iteración de una etapa se corresponden con las fuerzas de empotramiento perfecto. En general se trata de las fuerzas residuales o desequilibradas en la iteración  $\mathbf{f}_i^r$  para un desplazamiento  $\mathbf{d}_{el,i}$ .

- g. Se procede al ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura  $\mathbf{K}_i$ .

- h. Se ensambla el vector de incrementos de fuerzas nodales  $\Delta \mathbf{f}_i$  a partir de  $\mathbf{f}_i^r$ .

- i. Mediante un esquema iterativo se repiten los pasos desde (a) a (h), hasta alcanzar la convergencia.

- i. Para determinar la convergencia del proceso puede aplicarse un criterio de norma en desplazamientos o en fuerzas, acompañado con una limitación de los incrementos calculados en la última iteración.

$$\|\mathbf{d}_{k,i}^r\| \leq t_k \quad k = 1,2,3 \quad \|\Delta \mathbf{f}_{el,j,i}\| \leq t_j \quad j = 1,2,3 \quad (3.47)$$

$$\|\mathbf{f}_{j,i}^r\| \leq t_j \quad j = 1,2,3 \quad \|\Delta \mathbf{d}_{k,i}\| \leq t_k \quad k = 1,2,3 \quad (3.48)$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclídea,  $\mathbf{d}_k^r$  es el vector de desplazamientos residuales para el grado de libertad  $k$ ,  $\mathbf{f}_{j,i}^r$  es el vector de esfuerzos residuales para el tipo de fuerza  $j$ ,  $\Delta \mathbf{f}_{el,j,i}$  es el vector de incrementos de fuerzas tipo  $j$  en extremo de barras para la

iteración  $i$ ,  $\Delta \mathbf{d}_{k,i}$  es el vector de incrementos del grado de libertad  $k$ , para la iteración  $i$  y  $t_k$ ,  $t_i$  son las correspondientes tolerancias.

Mediante este procedimiento los efectos diferidos se incluyen a nivel seccional y se trasladan a la estructura al calcular las fuerzas desequilibradas en extremo de barra.

El proceso incremental se aplica a cada intervalo  $(t_{i+}, t_{(i-1)+})$ , de manera que el valor de cualquier variable en un instante  $t_{i+}$  se obtiene por acumulación de los de los intervalos de tiempo previos.

### 3.7.7. Implementación del modelo de análisis estructural

El modelo de análisis estructural ha sido implementado en el programa de cálculo ANSER, en código FORTRAN, para utilización en ordenadores personales. Se ha seguido el esquema de un cálculo matricial de estructuras de barras, incorporando el análisis seccional (programa SECSEER descrito en 3.6.3), el cálculo de los coeficientes de la matriz de rigidez para barras de rigidez variable, la determinación de las fuerzas desequilibradas en extremo de barra y el proceso iterativo necesario para la resolución del problema no lineal.

En la Figura 3.16 se presenta un diagrama de flujo en el que se muestra el proceso realizado por dicho programa.

La metodología de análisis en el tiempo es idéntica a la descrita en 3.6.3. La implementación se ha efectuado aprovechando la subrutina preparada para el cálculo de secciones, de forma que existen dos esquemas iterativos, uno a nivel de secciones y otro a nivel estructural. De esta manera los procesos de construcción evolutiva seccional, o de variación en las propiedades de los materiales, etc. quedan incorporados de la forma ya descrita con anterioridad.

Siguiendo lo expuesto en 3.7.2 y 3.7.3 el modelo se ha implementado para estructuras de barras rectas en dos dimensiones, aun cuando la metodología permite su aplicación a barras curvas en el espacio, tal como ha sido indicado por Molins *et al.* [175]. El tratamiento de la variación de las características resistentes seccionales se ha efectuado descomponiendo la barra en tantos tramos de sección constante como sea necesario. La implementación de variaciones de las dimensiones de las secciones o de la situación de las armaduras siguiendo un perfil determinado a partir del esquema actual no presenta dificultades importantes.

En el análisis estructural se ha introducido la posibilidad de añadir o quitar barras, liberar o restringir los grados de libertad de los nudos o de los extremos de barra, y modelizar procesos de cimbrado o descimbrado. En el caso de añadir barras en un proceso constructivo por fases se parte de un valor inicial nulo de esfuerzos y desplazamientos en el instante en que se introduce y la aportación a la rigidez estructural se contabilizará a partir de ese momento. Cuando se suprimen barras dejan de tenerse en cuenta en los cálculos desde ese momento, debiéndose aplicar en los

nudos correspondientes unas fuerzas contrarias a las que estaban siendo soportadas por los elementos retirados.

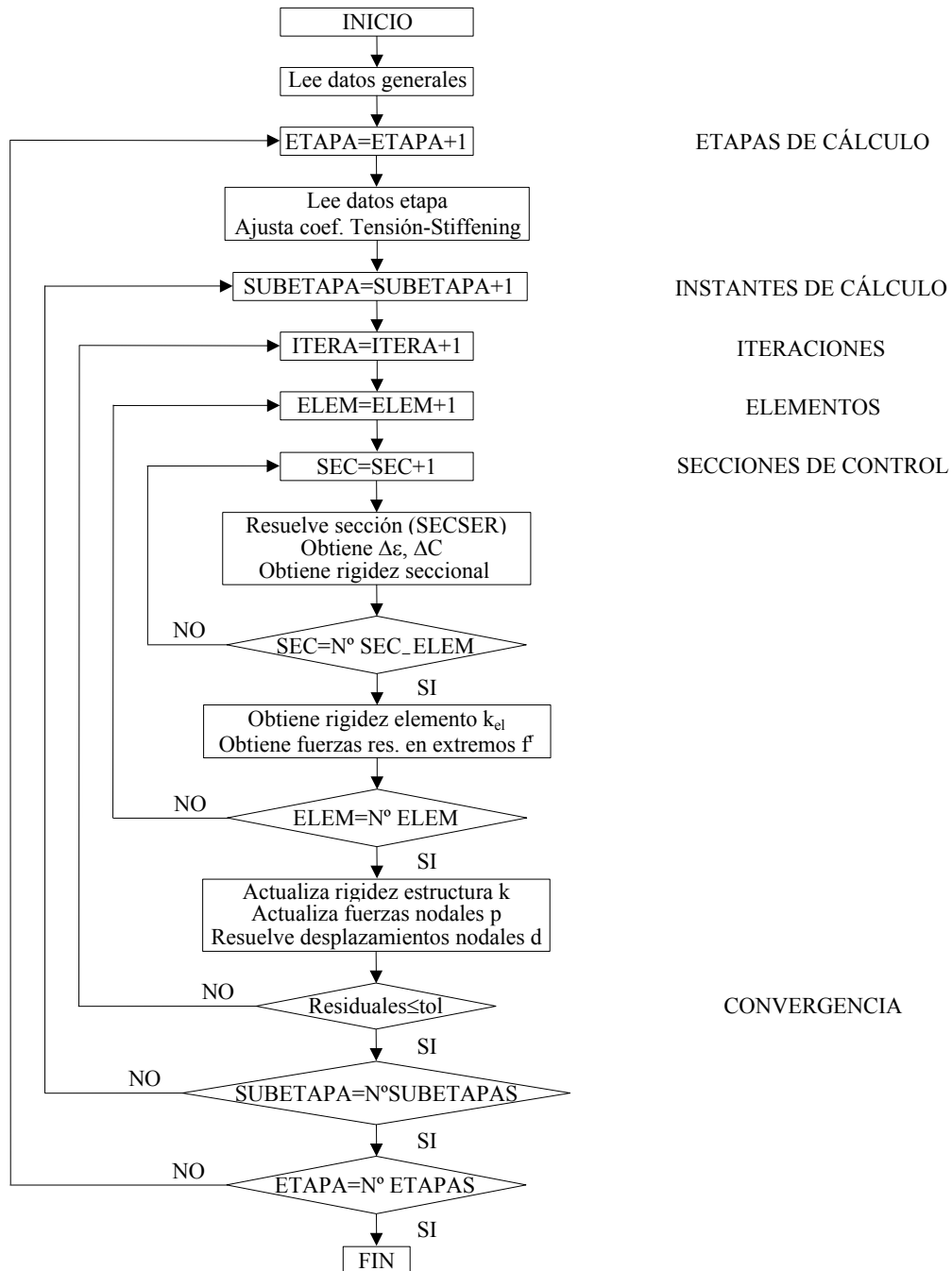


Figura 3.16 – Diagrama de flujo del programa de análisis estructural ANSER

El uso de la FMG permite trabajar con un reducido número de grados de libertad (más aún no incorporando los que estén restringidos) y por tanto del número de ecuaciones del sistema a resolver. El coste de tiempo de ordenador viene determinado

en su mayor parte por el número de secciones que intervienen en la integración y por las no linealidades introducidas en el problema.

Debido a que en el planteamiento de un análisis lineal en servicio de estructuras de barras no son de esperar problemas no lineales importantes (*softening*, *snap-through*, *snap-back*), el esquema de solución indicado en 3.7.6 se ha mostrado adecuado para las aplicaciones realizadas hasta el momento, alcanzándose la convergencia de manera satisfactoria. Se ha implementado un procedimiento de control del avance del proceso de resolución consistente en limitar el incremento de desplazamiento de un cierto grado de libertad, introduciendo un factor multiplicativo  $\lambda$  sobre el vector  $\mathbf{f}_i^r$  calculado en el paso (f) del apartado 3.7.6.

En el caso de extender la implementación incorporando leyes constitutivas de los materiales que contemplen situaciones cercanas al estado límite último, el esquema del modelo permite la incorporación de estrategias de análisis adecuadas para la resolución de situaciones no lineales complejas [203]. También es posible la introducción de un esquema iterativo complementario a nivel del elemento, de manera que las fuerzas  $\mathbf{f}_i^r$  halladas en (f) de 3.7.6 se correspondan realmente con la situación del elemento definida por  $\mathbf{d}_{el,i}$ , tal como indican Molins y Roca [173,174], los cuales han detectado que para estructuras de fábrica fisuradas, este sistema reduce considerablemente el número de iteraciones globales.

---