



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA**  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona  
Departamento de Ingeniería Mecánica

Tesis Doctoral

**APORTE AL DISEÑO DE ENGRANAJES NO CIRCULARES  
CILÍNDRICOS RECTOS**

Presentada por

**HÉCTOR FABIO QUINTERO RIAZA**

Directores

**Dr. Salvador Cardona Foix**  
**Dra. Lluïsa Jordi Nebot**

Barcelona, 2006

## **CAPÍTULO 8**

### **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

#### **8.1 CONCLUSIONES**

La presente investigación se centra en el diseño de engranajes no circulares utilizando un procedimiento analítico basado en la ley de desplazamiento que relaciona el ángulo de giro de la rueda conducida en función del ángulo de giro de la rueda conductora. Con este procedimiento de diseño, se utiliza el ángulo de giro de la rueda conducida como única variable independiente de entrada.

En el desarrollo del trabajo de investigación que ha dado lugar a la presente tesis se han alcanzado los objetivos inicialmente planteados en cuanto a:

- Dar un tratamiento analítico del proceso de generación de las curvas primitivas.
- Generar analíticamente el perfil del diente.
- Realizar el análisis cinemático y dinámico de un engranaje no circular.
- Estudiar las características de continuidad y periodicidad requeridas por las leyes de desplazamiento.
- Describir analíticamente las leyes de desplazamiento.
- Formular un tratamiento analítico a la generación del perfil del diente.
- Obtener una descripción del perfil del diente apta para el mecanizado con control numérico.

- Obtener la curva base de los flancos derecho e izquierdo del diente.
- Establecer la influencia del radio de curvatura de la curva primitiva sobre la geometría de la curva base.
- Obtener un método analítico que defina las regiones con menores alturas permisibles del pie del diente.
- Determinar el recubrimiento del engranaje en función del ángulo de giro de la rueda conductora.
- Establecer la influencia del ángulo de presión y del número de dientes sobre el recubrimiento.
- Determinar la máxima curvatura relativa y la máxima velocidad de deslizamiento en un par de dientes.
- Estudiar las reacciones en los apoyos y la fluctuación del par motor en los engranajes no circulares en un ciclo de rotación de la rueda conductora, comparar estos resultados con los de un mecanismo articulado con idéntica ley de desplazamiento y bajo las mismas condiciones de operación.
- Comparar analítica y experimentalmente el comportamiento dinámico, mediante el análisis de la fluctuación del par motor entre un mecanismo articulado y un engranaje no circular cinemáticamente equivalente y bajo iguales condiciones de carga.

De la revisión del estado del arte se concluye que existen nuevas aplicaciones para las ruedas no circulares que surgen tanto del desarrollo de la teoría del diseño del perfil del diente como de la aplicación de nuevos procesos de manufactura y adaptación de antiguos procesos que permiten obtener el perfil deseado con precisión. El desarrollo de herramientas de computo más potentes permite superar la gran cantidad de cálculos necesarios para su diseño, mientras que el desarrollo del CNC permite su fabricación.

En esta tesis se pone de manifiesto que es posible y eficiente diseñar una relación de transmisión entre ejes utilizando, ya sea, curvas propias del diseño geométrico, en este caso se utilizaron curvas de Bézier no paramétricas y curvas B-spline no paramétricas, o curvas tradicionales como las curvas armónicas, o bien definiendo la ley de desplazamiento para obtener engranajes con una geometría particular como las ruedas elípticas.

En cuanto al estudio de las leyes de desplazamiento, en este trabajo se concluye que las curvas de diseño geométrico, como las curvas de Bézier no paramétricas y las curvas B-spline no paramétricas, permiten la definición de una ley de desplazamiento con el grado de continuidad adecuado entre tramos adyacentes y satisfacer requerimientos cinemáticos preestablecidos mediante la adecuada selección de las ordenadas de sus puntos de control. Las propiedades de continuidad y de monotonía creciente exigidas para la ley de desplazamiento también se cumplen si se definen mediante una curva armónica ya que es continua e infinitamente derivable.

Con todas éstas curvas, se pueden definir leyes de desplazamiento de engranajes no circulares en los que las ruedas conductora y conducida tienen periodos de rotación racionales. La ley de desplazamiento requerida, en el caso en que se definen mediante curvas de Bézier o curvas B-spline, se obtienen mediante la adecuada selección de los nodos del polígono de control.

La posibilidad de elegir libremente las ordenadas de los puntos de control de una curva de Bézier no paramétrica y las abscisas y ordenadas de los nodos de control de la curva B-spline no paramétrica, permiten mayor libertad en el diseño de la ley de desplazamiento; en el caso de la ley de desplazamiento de la curva armónica y del engranaje elíptico, sólo se tienen, respectivamente, uno o dos parámetros de diseño con lo que se limita la obtención de una ley de desplazamiento o una relación de transmisión requeridas.

En la obtención de las curvas primitivas de las ruedas dentadas que satisfacen una ley de desplazamiento preestablecida, se concluye que el grado de continuidad entre tramos adyacentes de la ley de desplazamiento del engranaje, afecta la continuidad del radio de curvatura de las curvas primitivas. Si la ley de desplazamiento presenta un grado de continuidad  $C^2$  o menor, se obtienen discontinuidades en los radios de curvatura; la adecuada continuidad en el radio de curvatura de la curva primitiva se obtiene si la ley de desplazamiento tiene continuidad  $C^3$  o mayor en todo el rango de definición.

En relación al proceso de manufactura, en esta tesis se comprobó que es posible definir el perfil de las ruedas dentadas mediante un conjunto de puntos listo para su introducción en un máquina de control numérico, tal como una fresadora o una máquina de electroerosión. El tamaño de los dientes influye en la selección del proceso de corte de los dientes. En el proceso de fresado por control numérico, se requiere que el espacio entre los dientes sea mayor al diámetro de la herramienta de corte de tal forma que permita la adecuada trayectoria de la herramienta de corte sin producir daños en el diente; si el tamaño de los dientes es muy pequeño, es preferible cortar los dientes en una máquina de electroerosión por hilo o por láser.

El radio de curvatura de la curva primitiva influye en el proceso de generación del dentado, curvas primitivas con cambios de concavidad generalmente requieren aumentar ya sea el número de dientes o el ángulo de presión para obtener dientes sin irregularidades en el pie del diente.

El radio de curvatura de la curva primitiva influye en la geometría de la curva base. En las curvas primitivas con tramos planos, que se corresponden con radios de curvatura muy altos o infinitos, se presentan cambios bruscos en la geometría de la curva base en ambos flancos.

Del análisis de la metodología propuesta en esta tesis para la obtención de la curva base, se concluye que existen tramos de la curva primitiva, generalmente en aquellos en que el radio de curvatura es muy grande o infinito, que no generan puntos de la curva base. Esta característica es la que produce grandes irregularidades de la curva base si se genera por métodos gráficos como los propuestos por Litvin en [1] o por Dooner en [46].

La altura permisible del pie del diente en ambos flancos de una rueda dentada, presenta un comportamiento similar al del radio de curvatura de la curva primitiva. Comparado con el radio de curvatura, la altura permisible del diente del flanco derecho presenta un desplazamiento hacia la derecha y la del flanco izquierdo hacia la izquierda. Este desplazamiento se debe a que el punto de la curva primitiva con el que se genera el punto singular de un flanco se encuentra desplazado con respecto al punto sobre la curva primitiva que se utiliza como referencia en la generación del flanco del diente.

La mínima altura permisible del pie del diente en cada flanco, se obtienen en el tramo de la curva primitiva con menor radio de curvatura. Si alrededor de la región de la curva primitiva

con menor radio de curvatura ocurren grandes variaciones del radio de curvatura, la altura permisible de los dientes que se generen en esta región puede disminuir significativamente.

De manera similar que en los engranajes circulares, un mayor ángulo de presión influye en la disminución del recubrimiento; con un incremento en el número de dientes aumenta el recubrimiento.

El radio de curvatura de las curvas primitivas influye en los máximos valores de la velocidad de deslizamiento, la curvatura relativa y el recubrimiento. La variación de estas variables presenta un comportamiento similar a la variación del radio de curvatura de la curva primitiva.

De acuerdo con los resultados teóricos del estudio cinetoestático del mecanismo articulado y del engranaje no circular con la misma ley de desplazamiento y bajo idénticas condiciones de carga, la componente oscilante de las reacciones en los apoyos fijos en el mecanismo articulado son de mayor valor eficaz que la componente oscilante de las reacciones del engranaje no circular. La justificación radica en que las fuerzas de transmisión del engranaje no circular varían menos en magnitud, punto de aplicación y dirección.

Los resultados experimentales del par motor están acorde con los resultados del estudio teórico, tanto en el caso del mecanismo articulado como en el engranaje no circular. Mediante la evaluación del par debido a las resistencias pasivas en el conjunto motor reductor, se obtiene una alta concordancia entre el modelo establecido con su contraparte experimental.

Los mecanismos de eslabones articulados sólo disponen de un número limitado de parámetros ajustables para definir la ley de desplazamiento, por ello sólo pueden definirse un número finito de puntos de precisión de esta ley. La posibilidad de definir de manera continua la curva primitiva en los engranajes no circulares permite una mayor libertad en la selección de la ley de desplazamiento. De esta forma, se pueden diseñar mecanismos con dicha ley totalmente adecuada a la tarea requerida.

## 8.2 APORTACIONES DE LA TESIS

En esta tesis se recopilan las publicaciones mas relevantes relacionadas con los engranajes no circulares considerando sus aplicaciones, las principales teorías de diseño propuestas y los procesos de manufactura. Esta recopilación sirve como soporte a posibles investigaciones futuras relacionadas con los engranajes no circulares.

Se propone un procedimiento de diseño de los engranajes no circulares, obtención de las curvas primitivas y del dentado, basado en la ley de desplazamiento del engranaje no circular en el que se utiliza como única variable independiente de entrada al ángulo de giro de la rueda conductora. Todos los cálculos presentados en este trabajo son una extensión de este procedimiento.

Se estudia el radio de curvatura de la curva primitiva de la rueda conductora y conducida de un engranaje no circular en función de la ley de desplazamiento del engranaje y de las tres primeras derivadas de la ley de desplazamiento.

Se define el termino *condición de curvatura* con el que se determina las regiones en que se presenta radios de curvatura infinitos o negativos de la curva primitiva en función de la ley de desplazamiento y de sus derivadas.

Se propone un nuevo procedimiento para obtener el perfil del diente basado en la simulación del proceso de corte utilizando como herramienta de corte dos cremalleras de dientes rectos simétricas conjugadas. Conceptualmente, cada cremallera engrana con una de las ruedas de modo que se mantiene la tangencia entre las cuatro curvas primitivas y cada cremallera corta el diente de la respectiva rueda conjugada.

Se define la curva base como el lugar geométrico de los puntos singulares del pie del diente en el que se forma un segundo ramal en el perfil del diente. Se propone un nuevo procedimiento para obtener la curva base en cada flanco estudiando la velocidad de deslizamiento de la cremallera con respecto a la rueda y analizando el proceso de generación del diente.

Con la metodología propuesta para la determinación de las condiciones en que se genera el punto singular, se eliminan las irregularidades de la curva base que se obtienen por métodos

propuestos por otros autores, ya que en la metodología propuesta se utiliza un punto de la curva primitiva como punto de referencia y se genera el flanco del diente hasta que se obtiene el primer punto singular del pie del diente, obteniendo así el punto que realmente pertenece a la curva base. En esta tesis se justificaron las irregularidades de la curva base que se obtienen mediante los métodos propuestos por otros autores.

Se establece la influencia del radio de curvatura de la curva primitiva con respecto a las características de la geometría de la curva base y a la variación de la altura permisible del pie del diente en cada uno de los flancos. En la bibliografía consultada, no se encontró un estudio similar.

Se define el término *altura permisible del pie del diente* como la distancia desde el punto singular del pie del diente en el que se forma un segundo ramal hasta la curva primitiva medida en la dirección del vector normal de la curva primitiva que pasa por el punto singular.

En esta tesis, para un par de dientes en contacto, que se generan en una posición angular de referencia dada, se determina su intervalo de contacto y se calcula su recubrimiento mediante una extensión del proceso de generación del perfil del diente en el que se toma como única variable de entrada independiente, al ángulo de giro de la rueda conductora.

En esta tesis se comprueba la bondad de los algoritmos genéticos en la síntesis de la ley de desplazamiento del engranaje no circular tal que obtuviera la misma ley de desplazamiento de un mecanismo articulado. A partir de las curvas de posición, velocidad y aceleración angular del eslabón conducido del mecanismo articulado, se diseñó la ley de desplazamiento del engranaje no circular tal que los eslabones conducidos de ambos mecanismos tuvieran similar comportamiento bajo las mismas condiciones cinemáticas del eslabón conductor, aunque los eslabones conducidos de ambos mecanismos giren en sentido contrario.

Se comprueba la flexibilidad de las curvas de Bézier no paramétricas para satisfacer condiciones de posición, velocidad, aceleración y continuidad en los tramos adyacentes de una ley de desplazamiento. Esta flexibilidad facilitó el proceso de optimización con el que se obtuvo la ley de desplazamiento del engranaje no circular mediante algoritmos genéticos.

Se compara teóricamente el par motor y las reacciones en los apoyos fijos entre un mecanismo articulado y un engranaje no circular con idéntica ley de desplazamiento. Se



justificaron las ventajas del engranaje no circular con respecto al mecanismo articulado estudiando los ángulos de transmisión de las fuerzas entre los eslabones, y la variación de la dirección y magnitud de las fuerzas entre los eslabones.

### 8.3 RECOMENDACIONES

Una vez concluida la tesis, se considera interesante investigar otros aspectos relacionados con los engranajes no circulares aquí estudiados y se propone:

- Comprobar la utilidad de los engranajes no circulares en diversas aplicaciones como en el equilibrado de mecanismos articulados o en la reducción de las fluctuaciones del par en el eslabón conductor de un mecanismo en combinación con volantes de inercia o la modificación del comportamiento de los mecanismos de barras para adecuar movimientos del eslabón conducido sin necesidad de tener velocidad angular variable en el eslabón conductor.
- Estudiar un procedimiento analítico en la definición de la ley de desplazamiento de los engranajes circulares excéntricos tomando como parámetros de entrada el radio y la excentricidad de la rueda. Por el momento solo se tienen soluciones numéricas para la ley de desplazamiento del engranaje circular excéntrico.
- Estudiar las tensiones de Hertz en el contacto entre los dientes.
- Extender la formulación presentada al caso de los engranajes no circulares cilíndricos helicoidales.
- Aplicar las perturbaciones de geometría propuestas para los engranajes circulares en los engranajes no circulares.