

Apéndice B. apendicePotencial eléctrico en presencia de un cilindro para una inyección puntual de corriente

Supongamos que tenemos el problema mostrado en la Figura B.1. Inyectamos una corriente puntual I en un medio homogéneo infinito de resistividad r_1 y queremos encontrar el potencial en un punto P en presencia de un objeto cilíndrico de resistividad r_2 , radio a y longitud infinita. El origen de coordenadas está situado en el eje del cilindro. La distancia entre la fuente de corriente y el origen es D .

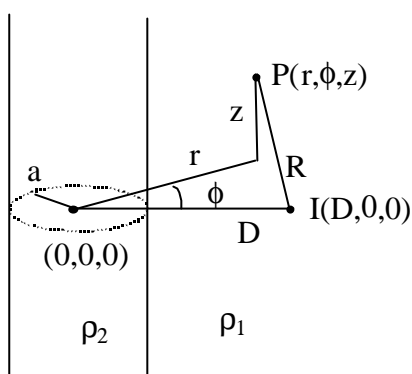


Figura B.1. Cilindro inmerso en un medio infinito homogéneo

Por la geometría del problema se escoge el sistema de coordenadas cilíndricas. La tensión en un punto P exterior al cilindro es (Wait, 1982)

$$V_1 = \frac{I r_1}{4p} \left\{ \frac{1}{R} + \Gamma[A_m(I)K_m(Ir)] \right\} \quad (\text{B.1})$$

y en el interior del cilindro es

$$V_2 = \frac{I r_1}{4p} \left\{ \frac{1}{R} + \Gamma[B_m(I)I_m(Ir)] \right\} \quad (\text{B.2})$$

donde K_m y I_m son las funciones modificadas de Bessel de orden m y

$$\Gamma(.) = \frac{2}{p} \int_0^\infty \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{e}_m(.) \cos m\mathbf{f} \cos I_z dI \quad (\text{B.3})$$

con $\mathbf{e}_m = 1$ para $m = 0$, $\mathbf{e}_m = 2$ para $m = 1, 2, \dots$. Si $r < D$, la distancia R se puede expresar como

$$\frac{1}{R} = \Gamma[K_m(ID)I_m(Ir)] \quad (\text{B.4})$$

En $r = a$ se ha de cumplir

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ \frac{1}{r_1} \int V_1 &= \frac{1}{r_2} \int V_2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Utilizando las expresiones (B.4) y (B.5) obtenemos

$$\begin{aligned} A_m(I) &= \frac{K_m(ID)I'_m(Ia)(r_2/r_1 - 1)}{\frac{I'_m(Ia)K_m(Ia)}{I_m(Ia)} - \frac{r_2}{r_1} K'_m(Ia)} \\ B_m(I) &= \frac{K_m(ID)I'_m(Ia)(r_2/r_1 - 1)}{I'_m(Ia) - \frac{r_2}{r_1} \frac{K'_m(Ia)I_m(Ia)}{K_m(Ia)}} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Parra y Owen (1986) obtienen la solución para dos cilindros concéntricos inmersos en un medio homogéneo. Si particularizamos el caso en que los dos cilindros tienen la misma resistividad los resultados coinciden con los expuestos anteriormente.

Si el cilindro es totalmente conductor ($r_2 = 0$) o totalmente aislante ($r_2 = \infty$) tenemos que

$$\begin{aligned} A_m(I) &= \frac{K_m(ID)}{K_m(Ia)} I_m(Ia) & r_2 &= 0 \\ A_m(I) &= \frac{K_m(ID)}{K'_m(Ia)} I'_m(Ia) & r_2 &= \infty \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Si consideramos un medio semi-infinito (Figura B.2), la corriente inyectada en la superficie sólo fluye hacia el subsuelo. Esto implica que el término multiplicativo en la expresión (B.2) será ahora $I\mathbf{r}_1/2\mathbf{p}$. Además, el efecto del cilindro será el doble debido a la interfase suelo-aire (el cilindro tendrá una imagen). El potencial en un punto P (situado también en el plano $z = 0$) de la superficie es ahora

$$V = \frac{I\mathbf{r}_1}{2\mathbf{p}} \left\{ \frac{1}{R} + \frac{4}{\mathbf{p}} \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty \mathbf{e}_m A_m(I) K_m(Ir) \cos(m\mathbf{f}) dI \right\} \quad (\text{B.8})$$

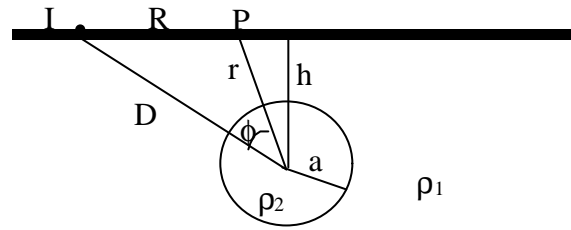


Figura B.2. Cilindro inmerso en un medio semi-infinito homogéneo con su eje paralelo a la superficie y perpendicular a la línea que la fuente de corriente con el punto P. La corriente I retorna por el infinito.