

Apéndice A. Soluciones del potencial eléctrico en presencia de una esfera

A.1. Solución exacta del potencial eléctrico para una inyección puntual de corriente

Aldridge y Oldenburg (1989) dan la solución del potencial eléctrico debido a una fuente puntual de corriente en un medio homogéneo que contiene dos esferas de radio y resistividad arbitrarios. Un caso particular es el de una esfera inmersa en un suelo homogéneo (semi-infinito) que se obtiene cuando el radio de una de las dos esferas tiende a infinito. La Figura A.1 muestra este último caso, con una esfera de radio a y resistividad ρ_2 inmersa en un suelo de resistividad ρ_1 . El origen de coordenadas está situado en la superficie ($z = 0$) sobre el centro de la esfera. La posición de la fuente de corriente (S) y del punto de medida del potencial (P) no están restringidos a ninguna zona del espacio.

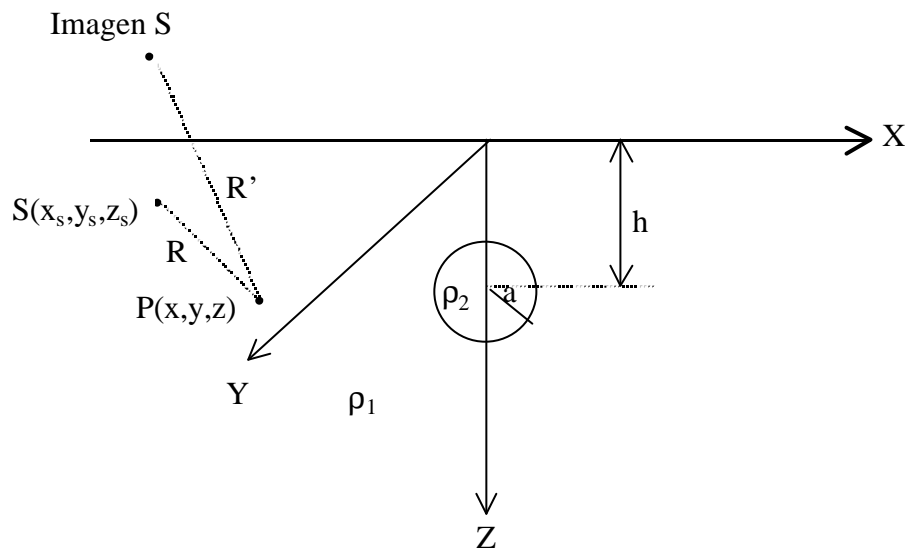


Figura A.1. Esfera inmersa en un suelo homogéneo

El potencial en un punto P viene dada por

$$V = \frac{r_s I}{4\pi} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) + 2F \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l d_m \cosh \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \mathbf{m} \right] \Re \{ A_{lm} Y_l^m(\mathbf{h}, \mathbf{f}) \} \quad (A1)$$

donde la solución viene expresada en función de las coordenadas bie esféricas $\mathbf{m}, \mathbf{h}, \mathbf{f}$ (Morse y Feshbach, 1953). La transformación de coordenadas rectangulares x, y, z , a coordenadas bie esféricas $\mathbf{m}, \mathbf{h}, \mathbf{f}$, es

$$\mathbf{m}(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 + y^2 + (z+b)^2}{x^2 + y^2 + (z-b)^2} \right] \quad (-\infty < \mathbf{m} < +\infty) \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{h}(x, y, z) = \tan^{-1} \left[\frac{2b\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} \right] \quad (0 \leq \mathbf{h} \leq \mathbf{p}) \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \tan^{-1} \left[\frac{y}{x} \right] \quad (0 \leq \mathbf{f} \leq 2\mathbf{p}) \quad (\text{A4})$$

donde $b^2 = h^2 - a^2$, siendo h la profundidad de la esfera. La transformación inversa es

$$x(\mathbf{m}, \mathbf{h}, \mathbf{f}) = \frac{b \operatorname{sen} \mathbf{h} \cos \mathbf{f}}{\cosh \mathbf{m} - \cos \mathbf{h}} \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (\text{A5})$$

$$y(\mathbf{m}, \mathbf{h}, \mathbf{f}) = \frac{b \operatorname{sen} \mathbf{h} \operatorname{sen} \mathbf{f}}{\cosh \mathbf{m} - \cos \mathbf{h}} \quad (-\infty < y < +\infty) \quad (\text{A6})$$

$$z(\mathbf{m}, \mathbf{h}, \mathbf{f}) = \frac{b \operatorname{senh} \mathbf{m}}{\cosh \mathbf{m} - \cos \mathbf{h}} \quad (-\infty < z < +\infty) \quad (\text{A7})$$

Y_l^m es el armónico esférico de grado l y orden m definido como

$$Y_l^m(\mathbf{h}, \mathbf{f}) = \mathbf{e}_m \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \mathbf{h}) \frac{e^{jm\mathbf{f}}}{\sqrt{2\mathbf{p}}} \quad (\text{A8})$$

con $l = 0, 1, 2, \dots$ y $m = 0, 1, \dots, l$. $\mathbf{e}_m = (-1)^m$ y P_l^m es el polinomio asociado de Legendre de grado l y orden m . \mathbf{r}_s es la resistividad del material en la posición S de la fuente de corriente I , R y R' son la distancia de la fuente y de su imagen al punto de potencial P respectivamente. $\hat{\mathbf{A}}\{ \}$ indica la parte real de $\{ \}$; $d_m = 1$ si $m = 0$ y $d_m = 2$ si $m > 0$. Los coeficientes A_{lm} satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones lineales

$$a_{l-1,m} A_{l-1,m} + b_l A_{l,m} + c_{l+1,m} A_{l+1,m} = d_{lm} \quad (\text{A9})$$

donde

$$a_{lm} = \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_2} - 1 \right) \mathbf{a}_{lm}(\mathbf{m}_2) + \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_2} + 1 \right) \mathbf{a}_{lm}(-\mathbf{m}_2) \quad (\text{A10})$$

$$b_l = \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_2} - 1 \right) \mathbf{b}_l(\mathbf{m}_2, 1) + \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_2} + 1 \right) \mathbf{b}_l(-\mathbf{m}_2, \mathbf{c}_{12}) \quad (\text{A11})$$

$$c_{lm} = \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_2} - 1 \right) \mathbf{g}_{lm}(\mathbf{m}_2) + \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_2} + 1 \right) \mathbf{g}_{lm}(-\mathbf{m}_2) \quad (\text{A12})$$

y si la fuente de corriente está localizada fuera de la esfera

$$d_{lm} = 2p \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \left[d_{lm}(\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_s; \mathbf{h}_s, \mathbf{f}_s) + d_{lm}(\mathbf{m}_2, -\mathbf{m}_s; \mathbf{h}_s, \mathbf{f}_s) \right] \quad (\text{A13})$$

siendo $\mathbf{m}_s, \mathbf{h}_s, \mathbf{f}_s$, las coordenadas bie esféricas de la fuente de corriente y \mathbf{m}_2 la coordenada bie esférica correspondiente a la superficie de la esfera. La constante c_{12} es

$$c_{12} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \quad (\text{A14})$$

y los coeficientes $\mathbf{a}_m, \mathbf{b}_l, \mathbf{g}_m, \mathbf{d}_m$, se pueden expresar como

$$\mathbf{a}_{lm}(\mathbf{m}) = \left(l + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \left[(l+1)^2 - m^2 \right]^{1/2} e^{-(l+1/2)m} \quad (\text{A15})$$

$$\mathbf{b}_l(\mathbf{m}, \mathbf{c}) = \left(l + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \left[\mathbf{c} \sinh \mathbf{m} - (2l+1) \cosh \mathbf{m} \right] e^{-(l+1/2)m} \quad (\text{A16})$$

$$\mathbf{g}_{lm}(\mathbf{m}) = \left(l + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \left[l^2 - m^2 \right]^{1/2} e^{-(l+1/2)m} \quad (\text{A17})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{lm}(\mathbf{m}, \mathbf{n}; \mathbf{h}_s, \mathbf{f}_s) &= \frac{1}{l - \frac{1}{2}} \mathbf{a}_{l-1, m}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) Y_{l-1}^m(\mathbf{h}_s, \mathbf{f}_s)^* + \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \mathbf{b}_l(\mathbf{m}) e^{-(l+1/2)m} Y_l^m(\mathbf{h}_s, \mathbf{f}_s)^* + \\ &+ \frac{1}{l + \frac{3}{2}} \mathbf{g}_{l+1, m}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) Y_{l+1}^m(\mathbf{h}_s, \mathbf{f}_s)^* \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

Finalmente, F es un factor multiplicativo con dimensiones de potencial eléctrico que viene dado por

$$F = \frac{r_s I}{4pb} \sqrt{\cosh \mathbf{m}_s - \cos \mathbf{h}_s} \sqrt{\cosh \mathbf{m} - \cos \mathbf{h}} \quad (\text{A19})$$

Los coeficientes a_{lm} y c_{lm} se pueden expresar de una forma más compacta como

$$a_{lm} = \left(l + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \left[(l+1)^2 - m^2 \right]^{1/2} 2 \left[\frac{r_1}{r_2} \cosh((l+1/2)\mathbf{m}_2) + \sinh((l+1/2)\mathbf{m}_2) \right] \quad (\text{A20})$$

$$c_{lm} = \left(l + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \left[l^2 - m^2 \right]^{1/2} 2 \left[\frac{r_1}{r_2} \cosh((l+1/2)\mathbf{m}_2) + \sinh((l+1/2)\mathbf{m}_2) \right] \quad (\text{A21})$$

Aldridge y Oldenburg (1989) argumentan que, aparte de dar una solución completamente general, sus expresiones ofrecen una ventaja computacional respecto a anteriores desarrollos (Large, 1971). La ventaja radica en que si sólo se varía la fuente de corriente los coeficientes a_{lm} , b_{lm} y c_{lm} no necesitan ser recalculados. Por tanto, el cálculo de los coeficientes A_{lm} es mucho más rápido.

Si la fuente de corriente y el punto de medida del potencial se hallan en la superficie tenemos $\mathbf{m} = \mathbf{m}_s = 0$, $R = R'$, y la expresión del potencial se simplifica quedando

$$V = \frac{r_1 I}{2p} \left(\frac{1}{R} + \frac{\sqrt{(1 - \cos \mathbf{h}_s)(1 - \cos \mathbf{h})}}{b} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l d_{lm} \Re\{A_{lm} Y_l^m(\mathbf{h}, \mathbf{f})\} \right) \quad (\text{A22})$$

donde el primer término del sumando (potencial primario) es la contribución del suelo homogéneo y el segundo término es debido a la esfera (potencial secundario). Además, los coeficientes d_{lm} se pueden expresar ahora como

$$d_{lm} = 4p \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \mathbf{d}_{lm}(\mathbf{m}_2, \mathbf{h}_s, \mathbf{f}_s) \quad (\text{A23})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{lm}(\mathbf{m}_2, \mathbf{h}_s, \mathbf{f}_s) = & \frac{1}{l - \frac{1}{2}} \mathbf{a}_{l-1,m}(\mathbf{m}_2) Y_{l-1}^m(\mathbf{h}_s, \mathbf{f}_s)^* + \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \mathbf{b}_l(\mathbf{m}_2, 1) Y_l^m(\mathbf{h}_s, \mathbf{f}_s)^* + \\ & + \frac{1}{l + \frac{3}{2}} \mathbf{g}_{l+1,m}(\mathbf{m}_2) Y_{l+1}^m(\mathbf{h}_s, \mathbf{f}_s)^* \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

La Figura A.2 muestra el potencial secundario medido en la superficie sobre la línea $y = z = 0$, directamente sobre una esfera conductora. La fuente de corriente está localizada en $x = y = z = 0$ y emite 1 A. Las gráficas corresponden a diferentes relaciones profundidad-radio (h/a). Las curvas de cada gráfica se han obtenido variando el parámetro l_{max} , que indica el valor máximo para l tomado en la expresión del potencial (A22). A medida que la relación h/a disminuye (la esfera se acerca a la superficie) el valor de l_{max} necesario para obtener una solución precisa aumenta. Aldridge y Oldenburg (1989) obtienen resultados similares si bien no especifican el valor de l_{max} escogido. Para relaciones $h/a \geq 2$ es suficiente con $l_{max} = 4$

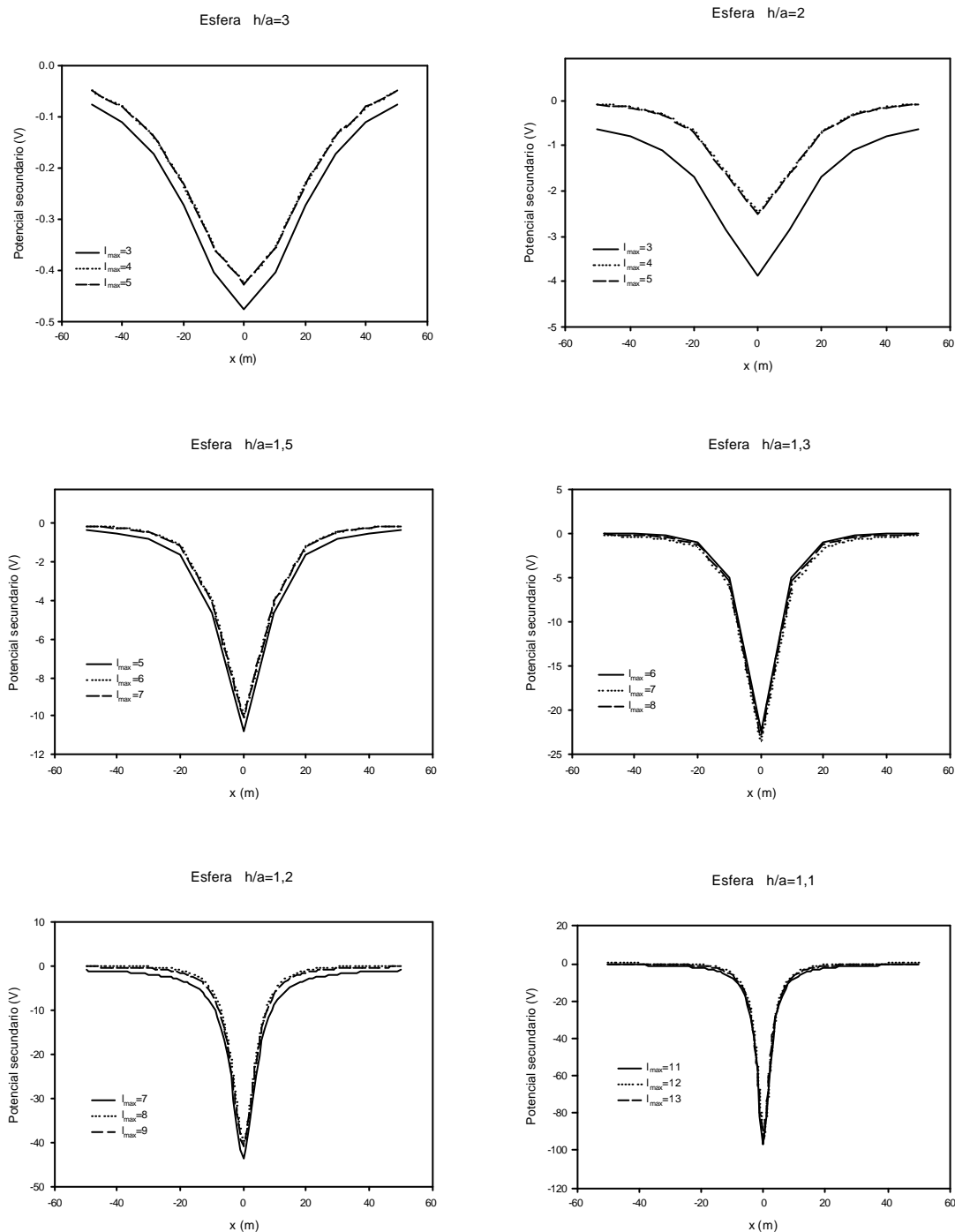


Figura A.2. Potencial secundario en la superficie directamente sobre una esfera de radio 10 m. h es la profundidad del centro de la esfera. $\rho_1 = 1000 \Omega\text{m}$; $\rho_2 = 100$. La fuente de corriente está localizada en $x = 0$ y emite 1 A.

La Figura A.3 muestra el caso de una esfera aislante de radio 1 m inmersa en un medio homogéneo de resistividad $1 \Omega\text{m}$. Para relaciones $h/a \geq 1,5$ es suficiente con $l_{max} = 4$.

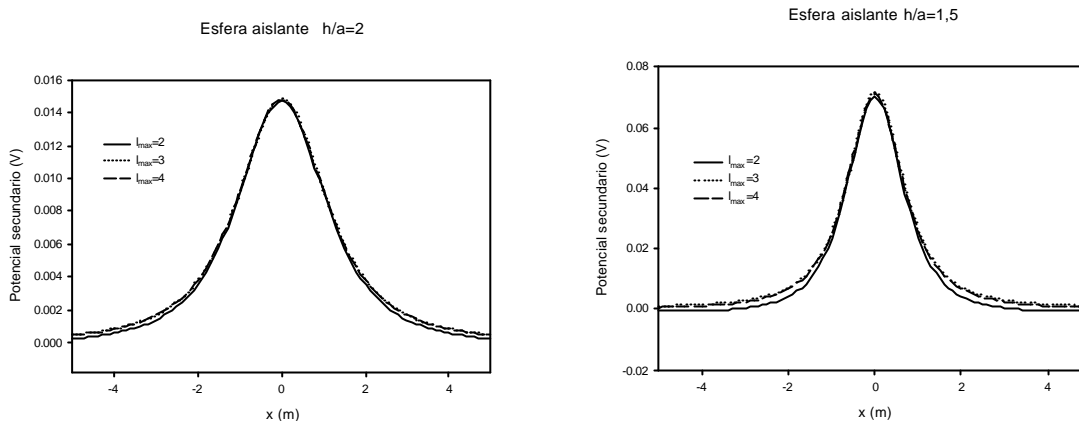


Figura A.3. Potencial secundario en la superficie directamente sobre una esfera aislante de radio 1 m inmersa en un medio homogéneo de resistividad 1 Wm . h es la profundidad del centro de la esfera. La fuente de corriente está localizada en $x = 0$ y emite 1 A.

En el caso de una esfera conductora, el valor de l_{max} necesario aumenta al incrementarse el contraste de resistividad r_1/r_2 . La Figura A.4 muestra los resultados para una esfera de profundidad 3 m con $r_1/r_2 = 10^{10}$ y $r_1/r_2 = 10^3$. En el primer caso necesitamos $l_{max} = 10$, lo que incrementa mucho el tiempo de cálculo, mientras que en el segundo caso es suficiente $l_{max} = 4$. Así pues, para obtener la solución de una esfera totalmente conductora utilizaremos un contraste $r_1/r_2 = 10^3$ ya que los resultados son muy similares a los obtenidos con la esfera totalmente conductora (Figura A.5)

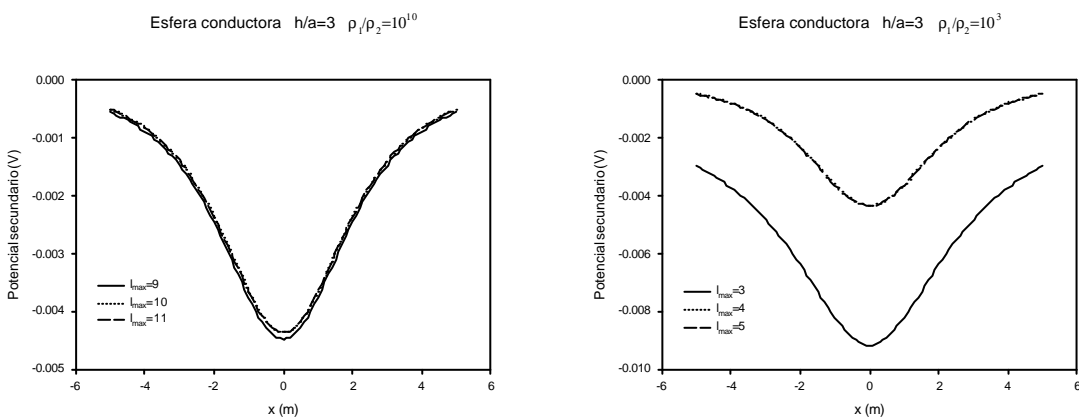


Figura A.4. Potencial secundario en la superficie directamente sobre una esfera conductora de radio 1 m y profundidad 3 m inmersa en un medio homogéneo de resistividad 1 Wm . La fuente de corriente está localizada en $x = 0$ y emite 1 A.

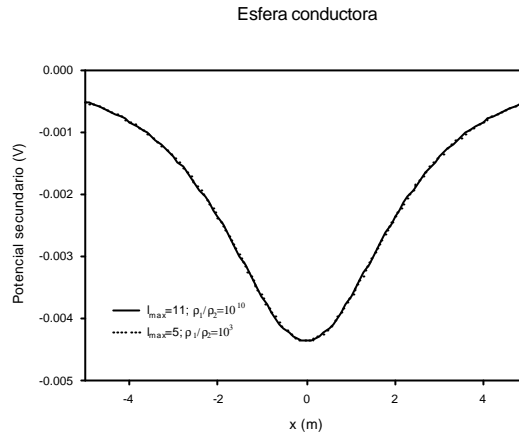


Figura A.5. Potencial secundario en la superficie directamente sobre una esfera conductora de radio 1 m y profundidad 3 m inmersa en un medio homogéneo de resistividad 1 Wm. La fuente de corriente está localizada en $x = 0$ y emite 1 A.

La Figura A.6 muestra que para la esfera conductora (se supone $\rho_1/\rho_2 = 10^3$) l_{max} ha de ser como mínimo 8 para profundidades $h/a \geq 1,5$

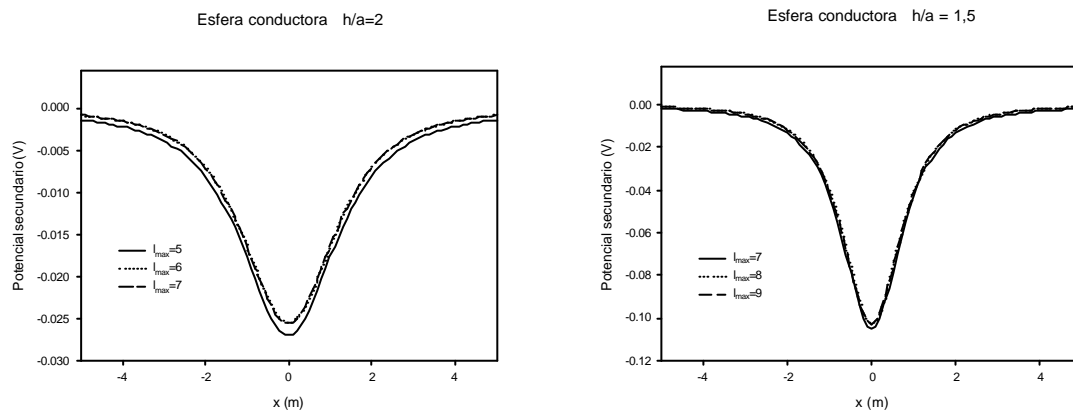


Figura A.6. Potencial secundario en la superficie directamente sobre una esfera conductora ($\rho_1/\rho_2 = 10^3$) de radio 1 m y profundidad 3 m inmersa en un medio homogéneo de resistividad 1 Wm. La fuente de corriente está localizada en $x = 0$ y emite 1 A.

Se han obtenido también las soluciones con la fuente de corriente situada en $x = 3, y = 0, z = 0$. Las conclusiones son similares y, por tanto, los resultados no se muestran aquí.

A.2. Solución aproximada del potencial eléctrico para una inyección puntual de corriente

La Figura A.7 muestra una esfera de radio a y resistividad r_2 inmersa en un medio homogéneo de resistividad r_1 . La distancia entre la fuente de corriente, de intensidad I , y el centro de la esfera es D .

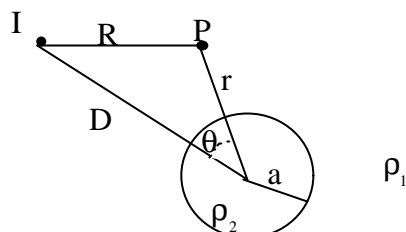


Figura A.7. Esfera inmersa en un medio infinito homogéneo

Para encontrar el potencial en un punto P utilizamos coordenadas esféricas con el origen en el centro de la esfera. Por simetría $dV/d\mathbf{j} = 0$ y, por tanto, la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$ se puede expresar como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{A.25})$$

La tensión en el punto P se puede expresar como (Wait, 1982)

$$V_1 = \frac{I r_1}{4 \pi R} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (\text{A.26})$$

Si $r < D$ la distancia R se puede expresar como

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{D} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad (\text{A.27})$$

El potencial dentro de la esfera, considerando que el potencial ha de ser finito, es

$$V_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (\text{A.28})$$

En $r = a$ se ha de cumplir

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{1}{r_1} \frac{\mathcal{V}V_1}{\mathcal{V}r} = \frac{1}{r_2} \frac{\mathcal{V}V_2}{\mathcal{V}r} \quad (\text{A.29})$$

Utilizando las expresiones (A.26) a (A.29) tenemos

$$A_n = \frac{I\mathbf{r}}{4\mathbf{p}} \frac{a^{2n+1}}{D^{n+1}} \frac{n(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(n+1)\mathbf{r}_2 + n\mathbf{r}_1}$$

$$B_n = \frac{I\mathbf{r}}{4\mathbf{p}} \frac{1}{D^{n+1}} \frac{(2n+1)\mathbf{r}_2}{(n+1)\mathbf{r}_2 + n\mathbf{r}_1} \quad (\text{A.30})$$

y la expresión (A.26) se puede reescribir, teniendo en cuenta que $A_0 = 0$, como

$$V_1 = \frac{I\mathbf{r}_1}{4\mathbf{p}} \left(\frac{1}{R} + \frac{a}{Dr} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^2}{Dr} \right)^n \frac{n(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(n+1)\mathbf{r}_2 + n\mathbf{r}_1} P_n(\cos \mathbf{q}) \right) \quad (\text{A.31})$$

donde el primer sumando es debido al medio homogéneo y el segundo es la contribución de la esfera.

Si consideramos un medio semi-infinito (Figura A.8) la corriente sólo fluye hacia el subsuelo. Esto implica que el término multiplicativo en la expresión (A.31) será ahora $I\mathbf{r}_1/2\mathbf{p}$. Además, el efecto de la esfera será el doble debido a la interfase suelo-aire (la esfera tendrá una imagen). Por tanto, el potencial en un punto P de la superficie queda ahora como

$$V_1 = \frac{I\mathbf{r}_1}{2\mathbf{p}} \left(\frac{1}{R} + 2 \frac{a}{Dr} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{Dr} \right)^n \frac{n(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(n+1)\mathbf{r}_2 + n\mathbf{r}_1} P_n(\cos \mathbf{q}) \right) \quad (\text{A.32})$$

Algunos autores (Orellana, 1982; Telford, Geldart y Sheriff, 1990) consideran correcta esta suposición si la relación $h/a > 1,3$.

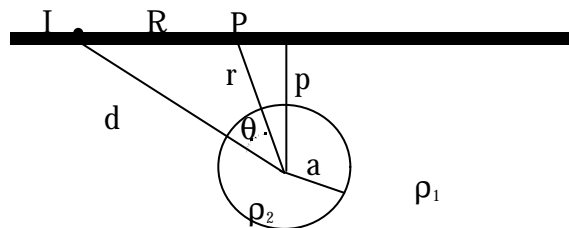
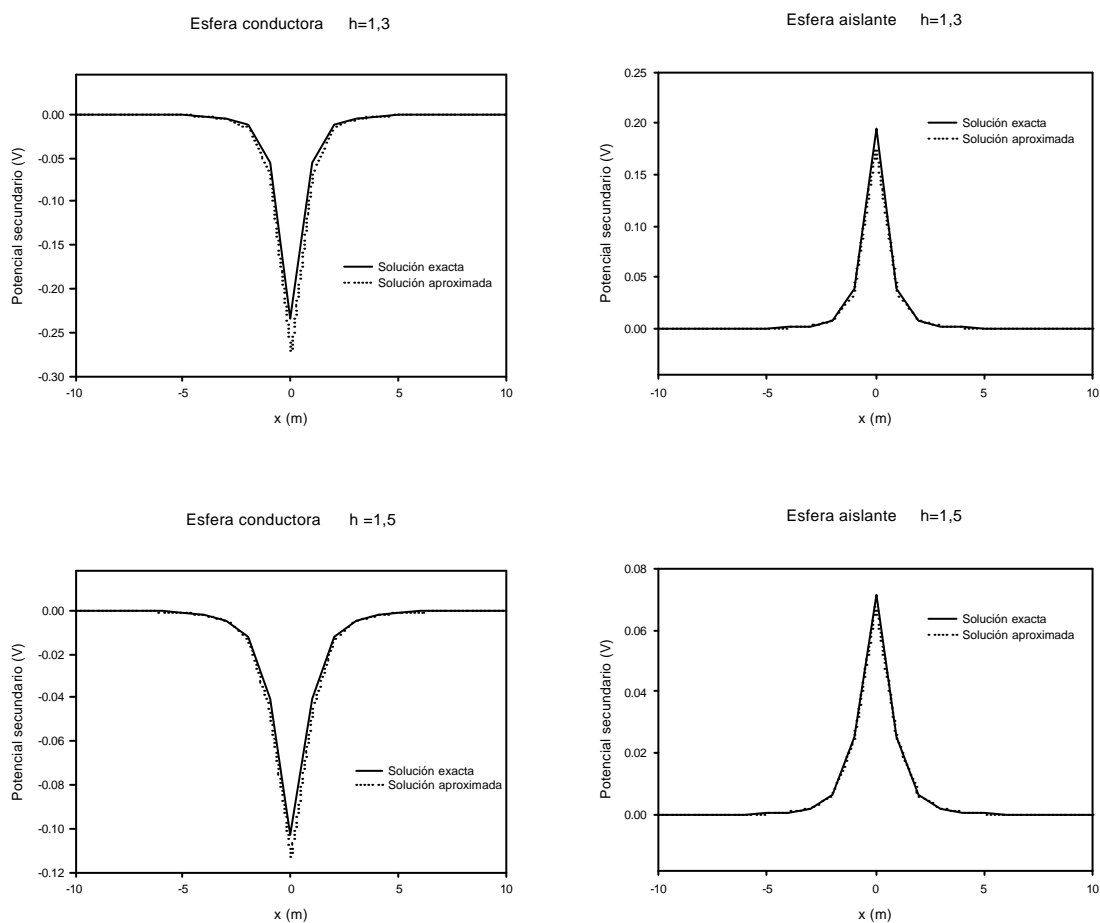


Figura A.8. Esfera inmersa en un medio semi-infinito homogéneo. La corriente I retorna por el infinito.

A.3. Comparación de las expresiones exacta y aproximada

A pesar de que la solución exacta no requiere muchos términos si $h/a > 2$ (Apéndice A.1), el tiempo requerido puede ser considerable si se quieren generar diferentes soluciones al variar parámetros como la posición, radio y resistividad de la esfera, o la posición de los electrodos inyector y detectores. Además, la solución aproximada es mucho más fácil de implementar. En esta sección comparamos la solución aproximada para el caso de la esfera conductora (3.8) y aislante (3.13) con la obtenida mediante la solución exacta (A.22).

La Figura A.9 muestra el potencial secundario de las soluciones exacta y aproximada medido en la superficie correspondiente a $y = z = 0$, directamente sobre una esfera conductora o aislante de radio 1 m a diferentes profundidades. La resistividad del medio es de $1 \Omega\text{m}$. En la solución exacta la resistividad de la esfera aislante es de $10^{10} \Omega\text{m}$ y la de la esfera conductora de $10^{-4} \Omega\text{m}$. La fuente de corriente está situada sobre el centro de la esfera y emite 1 A. Para relaciones $h/a = 1,3$ la diferencia entre ambas soluciones es notable. A medida que la relación h/a aumenta las dos soluciones convergen.



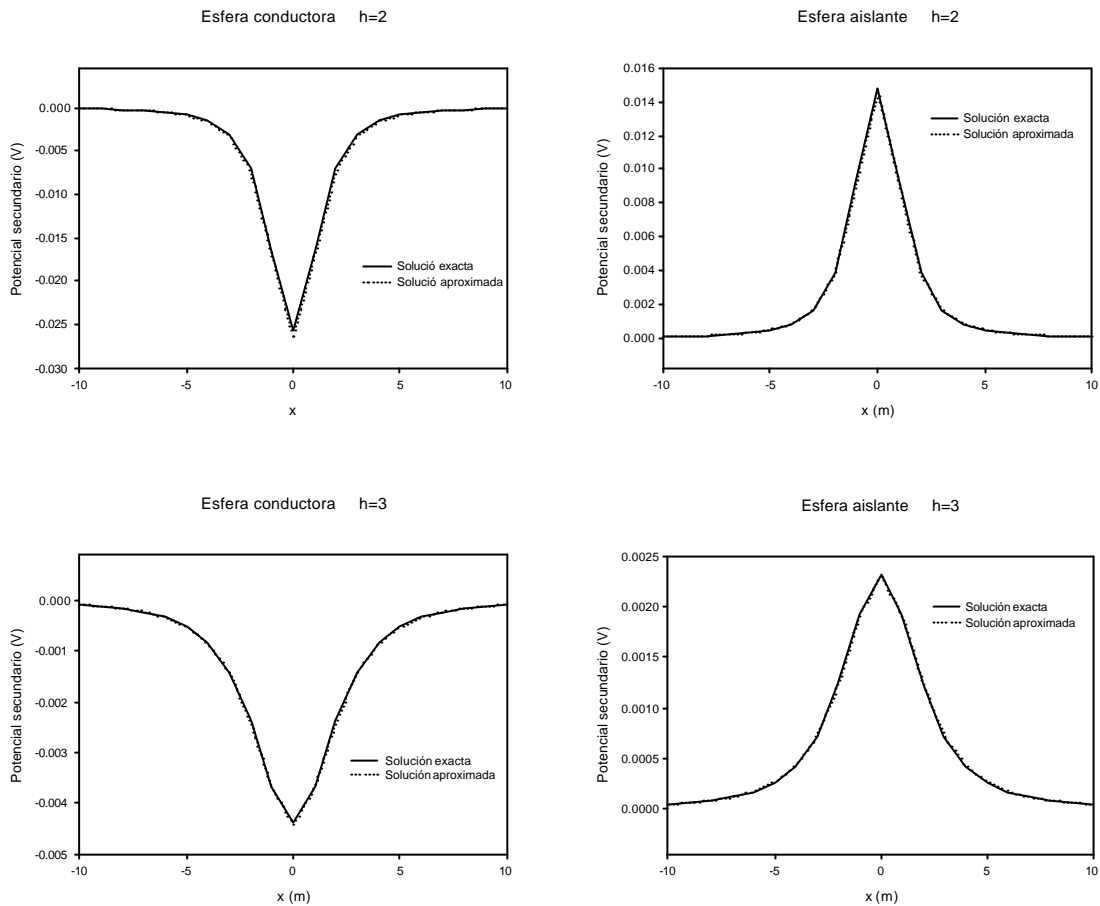


Figura A.9. Potencial secundario en la superficie directamente sobre una esfera de radio 1 m. h es la profundidad del centro de la esfera. $\mu_1 = 1 \text{ Wm}$. La fuente de corriente está localizada en $x = 0$ y emite 1 A.

La Figura A.10 muestra el error relativo entre las dos soluciones definido como

$$error(\%) = 100 \left| \frac{V_s^a - V_s^e}{V_s^e} \right| \tag{A.33}$$

donde V_s^a es el potencial secundario aproximado y V_s^e es el potencial secundario exacto. El error disminuye a medida que la relación h/a aumenta y es menor para la esfera aislante. Además se observa que el error relativo es prácticamente constante en todos los puntos. Una definición alternativa del error es

$$error(\%) = 100 \left| \frac{V_s^a - V_s^e}{V_s^e} \right| \tag{A.34}$$

donde V^e es el potencial total (primario más secundario) dado por (3.1). El error en $x = 0$ es cero debido a que el potencial total en esta posición es infinito. El error tiene un máximo alrededor del origen y disminuye gradualmente a cero para distancias mayores.

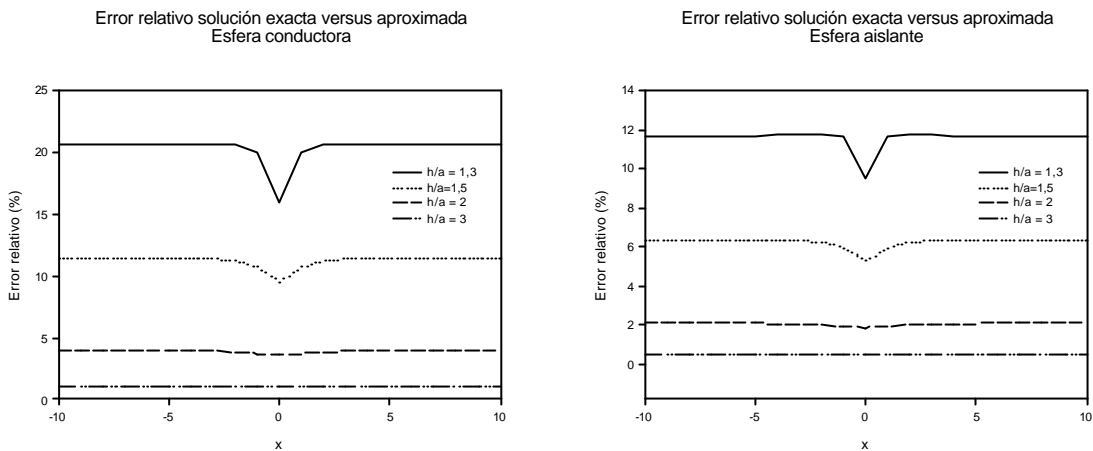


Figura A.10. Error relativo entre los potenciales secundarios de las expresiones exacta y aproximada (Figura A.9).

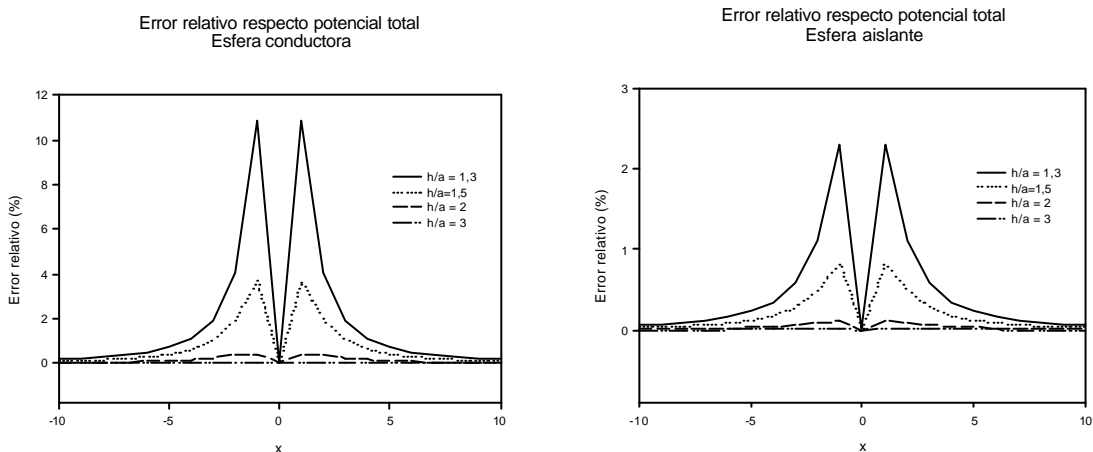


Figura A.11. Error relativo entre los potenciales secundarios respecto al potencial total.

Las gráficas presentadas no son en modo alguno generales, ya que las curvas de error pueden variar en función de la posición de los electrodos de corriente y de potencial. Sin embargo permiten afirmar que la solución aproximada es más exacta a medida que la relación h/a aumenta. Parece que una relación $h/a > 2$ es adecuada para poder utilizar la solución aproximada.