Apéndice E

APÉNDICE MATEMÁTICO

ÍNDICE

E.1. INTRODUCCIÓN

La razón de ser de este apéndice se encuadra en el contexto del tratamiento matemático del riesgo mediante el uso de matemática difusa introducido en el sistema IDS. En este marco de referencia, se plantea este apéndice como el conjunto de elementos y demostraciones matemáticas de las proposiciones y teoremas recogidos en el capítulo 3 de esta tesis. Según se explicaba en el capítulo 1, este, al igual que el resto de apéndices, tienen la finalidad de profundizar en el contenido de la tesis, imprimiéndole un mayor rigor teórico, a la vez que busca agilizar la exposición del cuerpo principal del trabajo, recogido en los ocho capítulos precedentes y servir de apoyo al lector durante la lectura.

E.2. CONCEPTOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA DIFUSA

E.2.1. Definición de conjunto difuso ("Fuzzy set")

Según Zimmermann (1996), en una colección de objetos X, denotados como x, un elemento difuso $\widetilde{A}$ en X se define como un conjunto de pares ordenados tal que,

$$\widetilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) \setminus x \in X\} \qquad \text{(E.1.)}$$

donde a $\mu_A(x)$:x→ [0,1] se le denomina “función de pertenencia" (“membership”) del conjunto difuso $\widetilde{A}$, y cuya representación general es la recogida en la figura E.2.

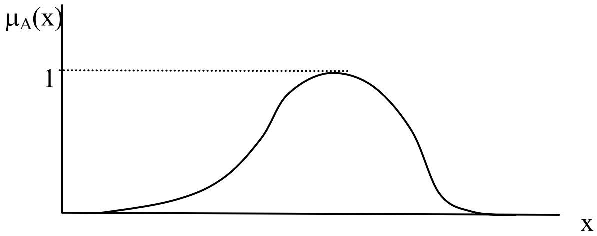

Figura E.1. Representación general de una función de pertenencia

Los trapecios definidos en el capítulo 3 son, por tanto, un caso particular de conjunto difuso, con una función de pertenencia de forma trapezoidal.

Definición: Los α-cuts (α-cortes) de un conjunto difuso

Cualquier elemento difuso se determina por sus α-cuts (α-cortes) definidos de la siguiente manera (Klir & Yuan, 1995):

> "Dado un conjunto difuso $\widetilde{A}$ definido en X y un número cualquiera $\alpha \in [0.1]$, el α-cut de ${}^{\alpha}A$ es el conjunto de elementos de X tales que: ${}^{\alpha}A = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$"

Definición: Los números difusos

Un número difuso se define como aquel conjunto difuso tal que todos sus *α-cortes* son intervalos cerrados en $\Re$ (Klir & Yuan, 1995). Por tanto, de la definición de los conjuntos difusos definidos en esta tesis, es decir, los trapecios pertenecientes a $\vartheta_{\Re}$, se concluye que estos son números difusos.

E.2.2. Operaciones básicas

Toda operación entre conjuntos difusos se define de la siguiente manera:

i) sea x*y una operación en $\Re$ (conjunto de números reales), como por ejemplo la suma, multiplicación, etc.

ii) sea [a,b]*[c,d] una operación entre intervalos cerrados en $\Re$ tal que,

$$[a,b]*[c,d] = \{ x*y, \quad x \in [a,b]; \qquad y \in [c,d] \} \tag{E.2.}$$

iii) sea A un conjunto difuso tal que su α-corte (α -cut) ${}^{\alpha}A$ es un intervalo cerrado [a,b] y B otro conjunto difuso tal que ${}^{\alpha}B$ es un intervalo cerrado [c,d]

Definición

Por definición, A*B es el conjunto difuso tal que,

$${}^{\alpha}(A*B) = {}^{\alpha}A * {}^{\alpha}B \tag{E.3.}$$

Según esta definición, pueden particularizarse las operaciones básicas utilizadas en esta tesis para el tipo de conjunto difuso definido y utilizado, es decir, los trapecios definidos en el capítulo 3.

a) Suma algebraica

En la representación y contexto adoptados para los propósitos de esta investigación, se demuestra que esta operación básica se concreta del siguiente modo:

$$T_{a_1,b_1,c_1,d_1} + T_{a_2,b_2,c_2,d_2} = T_{a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2} \qquad \text{(E.4.)}$$

b) Producto por escalar (o número real)

El producto de un conjunto difuso del conjunto de trapecios $\vartheta_{\Re}+$ y un escalar o número real se articula del siguiente modo:

$$\text{w}\cdot T_{a,b,c,d} = T_{w\cdot a,w\cdot b,w\cdot c,w\cdot d} \qquad \text{(E.5.)}$$

La demostración de estas dos proposiciones se realizará a continuación de forma conjunta y general, de manera que sirva así mismo para demostrar la articulación de la suma ponderada en términos de matemática difusa.

Por otro lado, la resta y la división por un escalar se definen de forma directa a partir de estas dos operaciones básicas.

E.3. LA SUMA PONDERADA EN $\vartheta_{-1,1}$

Proposición. Sean ω_i, i = 1,...,k los números positivos que cumplen

$$\text{i)} \sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$$

$$\text{ii)} \; T_{a_1,b_1,c_1,d_1},\ldots,T_{a_k,b_k,c_k,d_k} \in \vartheta_{-1,1};$$

entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i \, T_{a_i,b_i,c_i,d_i} = T_{\sum_{i=1}^{k}\omega_i a_i,\sum_{i=1}^{k}\omega_i b_i,\sum_{i=1}^{k}\omega_i c_i,\sum_{i=1}^{k}\omega_i d_i} \qquad \text{(E.6.)}$$

Demostración:

Considérense los correspondientes α-cuts y véase que son iguales. Si se tiene en cuenta que,

$$^{\alpha}T_{a_i,b_i,c_i,d_i} = [a_i+(b_i-a_i)\cdot(\alpha-1),\ b_i+(d_i-c_i)\,(1-\alpha)], \text{ y } \ ^{\alpha}\omega_i = \{\omega_i\} = [\omega_i, \omega_i] \qquad \text{(E.7.)}$$

se concluye que,

$$^{\alpha}(w_i \cdot T_{a_i,b_i,c_i,d_i}) = [\omega_i\, a_i+\omega_i\, (b_i-a_i)\, (\alpha-1),\ \omega_i b_i+\omega_i\, (d_i-c_i)\, (1-\alpha)], \qquad \text{(E.8.)}$$

que es el α-cut de $T_{\omega_i a_i, \omega_i b_i, \omega_i c_i, \omega_i d_i}$. Con lo que,

$$^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{k}\omega_i T_{a_i,b_i,c_i,d_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} {}^{\alpha}\left(\omega_i T_{a_i,b_i,c_i,d_i}\right) = \qquad \text{(E.9.)}$$

$$\sum_{i=1}^{k} [\omega_i\, a_i+\omega_i\, (b_i-a_i)\cdot(\alpha-1),\ \omega_i b_i+\omega_i\, (d_i-c_i)\, (1-\alpha)] =$$

$$= [(\sum_{i=1}^{k} \omega_i\, a_i)+(\sum_{i=1}^{k} \omega_i\, (b_i-a_i))(\alpha-1),\ (\sum_{i=1}^{k} \omega_i b_i)+(\sum_{i=1}^{k} \omega_i\, (d_i-c_i))(1-\alpha)],$$

que es el α-cut de $T_{\sum_{i=1}^{k}\omega_i a_i, \sum_{i=1}^{k}\omega_i b_i, \sum_{i=1}^{k}\omega_i c_i, \sum_{i=1}^{k}\omega_i d_i}$.

Este trapecio pertenece a $\vartheta_{-1,1}$ dado que todos los pesos ω_i son números positivos reales y se cumple la condición

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1 \qquad \text{(E.10.)}$$

Además, cada uno de los cuatro parámetros que determinan la suma ponderada de una colección de trapecios se encuadra entre el correspondiente mínimo y máximo de los valores iniciales. Este razonamiento en $\vartheta_{-1,1}$ es extensible de modo análogo a $\vartheta_{\Re}$

E.4. EL ORDEN DIFUSO (FUZZY) EN $\vartheta_{-1,1}$

La relación de orden considerada en $\vartheta_{-1,1}$ es la que usualmente se considera en el ámbito de la matemática difusa (G.J. Klir & E. Yuan, 1995):

Dos trapecios en $\vartheta_{-1,1}$ satisfacen

$$T_{a_1,b_1,c_1,d_1} \leq T_{a_2,b_2,c_2,d_2} \qquad \text{(E.11.)}$$

si y sólo si:

$$\min\,(T_{a_1,b_1,c_1,d_1}, T_{a_2,b_2,c_2,d_2}) = T_{a_1,b_1,c_1,d_1} \qquad \text{(E.12.)}$$

lo que equivale a decir que lo cumplen si y sólo si,

$$\min\,({}^{\alpha}T_{a_1,b_1,c_1,d_1}, {}^{\alpha}T_{a_2,b_2,c_2,d_2}) = {}^{\alpha}T_{a_1,b_1,c_1,d_1} \quad \forall\alpha\in(0,1] \qquad \text{(E.13.)}$$

Esta condición es equivalente a:

$$\begin{array}{ll} (1) & b_1+(b_1-a_1)(\alpha-1) \le b_2+(b_2-a_2)(\alpha-1) \\ (2) & c_1+(d_1-c_1)(1-\alpha) \le c_2+(d_2-c_2)(1-\alpha) \end{array} \quad \text{(E.14.)}$$

$$\forall \alpha \in (0,1]$$

Las condiciones (1) y (2) implican que $b_1 \le b_2$ y $c_1 \le c_2$ (tomando $\alpha = 1$). Por otro lado, la condición (1) es equivalente a:

$$\alpha((b_1-a_1)-(b_2-a_2)) + (b_1-b_2+(b_2-a_2)-(b_1-a_1)) \le 0 \text{ para todo } \alpha \in (0,1] \quad \text{(E.15.)}$$

lo cual, tomando el límite $\alpha \to 0$, implica que $b_1-b_2+(b_2-a_2)-(b_1-a_1) \le 0$.

Recíprocamente, $b_1-b_2+(b_2-a_2)-(b_1-a_1) \le 0$ junto con $b_1 \le b_2$ implica que para cada $\alpha \in (0,1]$:

$$\begin{array}{c} \alpha((b_1-a_1)-(b_2-a_2)) + (b_1-b_2+(b_2-a_2)-(b_1-a_1)) \le \\ (b_1-a_1)-(b_2-a_2)) + b_1-b_2 + (b_2-a_2)-(b_1-a_1)) = b_1-b_2 \le 0 \end{array} \quad \text{(E.16.)}$$

En consecuencia, combinando este resultado con el análogo correspondiente a la condición 2 se obtiene,

$$T_{a_1,b_1,c_1,d_1} \le T_{a_2,b_2,c_2,d_2} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \le a_2 \\ b_1 \le b_2 \\ c_1 \le c_2 \\ d_1 \le d_2 \end{cases} \quad \text{(E.17.)}$$

tal como se muestra en la figura adjunta,

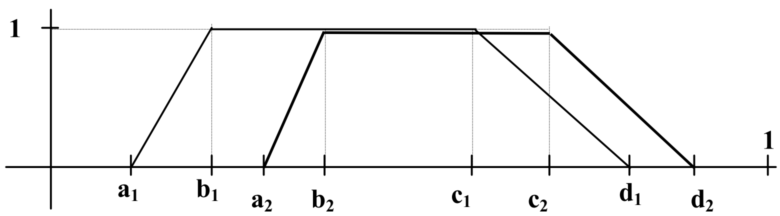

Figura E.2. Visualización del orden difuso

Debe observarse que este orden considerado entre pares de números reales "crisp" es el orden real usual definido en $\Re$. Además, mediante su utilización, la suma ponderada de trapecios en $\vartheta_{-1,1}$ con la suma de pesos igual a 1 estudiada anteriormente verifica,

$$T_{min\{a_i\},min\{b_i\},min\{c_i\},min\{d_i\}} \le T_{\sum_{i=1}^{k}\omega_i a_i,\sum_{i=1}^{k}\omega_i b_i,\sum_{i=1}^{k}\omega_i c_i,\sum_{i=1}^{k}\omega_i d_i} \le T_{max\{a_i\},max\{b_i\},max\{c_i\},max\{d_i\}} \quad \text{(E.18.)}$$

Este razonamiento en $\vartheta_{-1,1}$ es extensible de modo análogo a $\vartheta_{\Re}$

E.5. JUSTIFICACIÓN MATEMÁTICA DE LA ADOPCIÓN DE LA SUMA PONDERADA COMO MECANISMO DE AGREGACIÓN

Tal como se ha discutido en capítulos anteriores, se adopta la suma ponderada para la agregación de las diversas funciones de valor. Esta decisión, justificada anteriormente desde el punto de vista de la teoría de toma de decisiones, puede ser apoyado por una justificación matemática.

Según lo definido hasta el momento, la función de agregación necesaria considerada para sintetizar la información debe satisfacer las siguientes condiciones:

1) Cuando todas los valores de los diversos requerimientos adopten el número más bajo, el resultado debe ser el peor, y, por el contrario, en el caso de adoptar valores relativos a la máxima satisfacción el resultado debe ser el más alto.
2) Cuando todos los valores de los diversos requerimientos crezcan, el valor agregado debe aumentar.
3) Cuando todos los valores de los diversos requerimientos se incrementen, el valor agregado debe obtenerse añadiendo al valor agregado inicial el valor agregado de los incrementos.

Estas condiciones pueden ser formuladas de la forma siguiente:

Sea f: $\vartheta_{-1,1}\times\ldots\times\vartheta_{-1,1}\rightarrow\vartheta_{\Re^+}$ una función que satisface las condiciones:

(1) $f(0, \ldots ,0) = 0$ y $f(1, \ldots ,1) = 1$. (donde $0=T_{0,0,0,0}$ y $1=T_{1,1,1,1}$),
(2) $T_i \leq T'_i\ \forall i=1, \ldots ,k \Rightarrow f(T_1, \ldots ,T_k) \leq f(T'_1, \ldots ,T'_k)$,
(3) $f(T_1+\Delta T_1, \ldots ,T_k+\Delta T_k) = f(T_1, \ldots ,T_k)+ f(\Delta T_1, \ldots , \Delta T_k)$ cuando $T_i+\Delta T_i\in\vartheta_{-1,1}$ $\forall i=1, \ldots ,k$.

Se definen las funciones marginales f_i: $\vartheta_{-1,1}\rightarrow\vartheta_{\Re^+}$ como

$$f_i(T) = f(0, \ldots ,0, \overset{i}{T} ,0, \ldots ,0) \text{ para cada } i = 1, \ldots ,k. \qquad \text{(E.19.)}$$

Las condiciones (2) y(3) implican:

$$f_i(T) \leq f_i(T') \text{ cuando } T \leq T' \qquad \text{(E.20.)}$$
y
$$f_i(T+T')= f_i(T)+ f_i(T')\ \forall T,T'\in\vartheta_{-1,1} \text{ tal que } T+T'\in\vartheta_{-1,1},$$

Teorema

Bajo estas hipótesis, si las funciones marginales f_i pueden ser expresadas mediante n funciones reales h_i:$[0,1]\rightarrow\Re^+$, i=1, ..., k, tal que,

$$f_i(T_{a,b,c,d}) = T_{h_i(a),h_i(b),h_i(c),h_i(d)}\,. \qquad \text{(E.21.)}$$

entonces f es necesariamente una suma ponderada, lo que implica que existen números reales $\omega_i > 0$ para i=1, ..., k tal que:

$$f(T_{a_1,b_1,c_1,d_1},\ldots,T_{a_k,b_k,b_k,c_k}) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i \; T_{a_i,b_i,c_i,d_i} \tag{E.22.}$$

Gráficamente,

$$\begin{tikzcd}
\vartheta_{0,1} \arrow[r, "f_i"] & \vartheta_{\mathfrak{R}^+} \\
T_{a,b,c,d} \arrow[r] \arrow[d] & T_{h_i(a),h_i(b),h_i(c),h_i(d)} \\
{[0,1]^4} \arrow[r, "(h_i\text{,}h_i\text{,}h_i.h_i)"] & (\mathfrak{R}^+)^4 \arrow[u] \\
(a,b,c,d) \arrow[r] & (h_i(a),\ h_i(b),\ h_i(c),\ h_i(d))
\end{tikzcd}$$

Demostración.

Bastará con demostrar que las funciones h_i satisfacen la denominada “ecuación funcional de Cauchy”:

$$h_i(x+y) = h_i(x)+h_i(y) \tag{E.23.}$$

Para ello se considera,

$$\begin{aligned} T_{h_i(a+a'),h_i(b+b'),h_i(c+c'),h_i(d+d')} &= f_i(T_{a,d,c,d}+T_{a',b',c',d'}) = \\ = f_i(T_{a,b,c,d})+f_i(T_{a',b',c',d'}) &= T_{h_i(a),h_i(b),h_i(c),h_i(d)} + T_{h_i(a'),h_i(b'),h_i(c'),h_i(c')} = \\ &= T_{h_i(a)+h_i(a'),h_i(b)+h_i(b'),h_i(c)+h_i(c'),h_i(d)+h_i(d')} \end{aligned} \tag{E.24.}$$

En consecuencia, las funciones h_i satisfacen la ecuación funcional de Cauchy (expresión E.23.), lo cual, unido a la condición

$$x\leq y \Rightarrow h_i(x)\leq h_i(y) \tag{E.25.}$$

implica (Aczél, 1966) que existe algún $\omega_i > 0$ tal que $hi(x)=\omega_i x \ \forall i=1, \ldots ,k$. Por tanto, la hipótesis (3) implica:

$$\begin{aligned} f(T_{a_1,b_1,c_1,d_1},\ldots,T_{a_k,b_k,c_k,d_k}) &= \sum_{i=1}^{k} f_i(\, T_{a_i,b_i,c_i,d_i}) = \\ = \sum_{i=1}^{k} T_{h_i(a),h_i(b),h_i(c).h_i(d)} &= \sum_{i=1}^{k} \omega_i \; T_{a_i,b_i,c_i,d_i} \end{aligned} \tag{E.26.}$$

con lo que queda demostrado el teorema.

E.6. BIBLIOGRAFÍA

Aczél, (1966) “Lectures on Functional Equations and their Applications”. Ed. Academic Press.

Klir G.J. y Yuan B. (1995) “Fuzzy sets and fuzzy logic. Theory and Applications”. Ed. Prentice Hall.

Zimmermann, H.J. (1996) “Fuzzy theory and its applications”. Ed. Kluwer academic.