

Capítulo 3

MODELO NUMÉRICO

3.1.- INTRODUCCIÓN.

La existencia actualmente de potentes modelos de análisis basados en el método de los elementos finitos permite reproducir comportamientos estructurales complejos con ecuaciones constitutivas no lineales e incluyendo no linealidad geométrica.

La utilización de dichos modelos permite realizar estudios preliminares previos a la realización de una campaña experimental para analizar el problema a investigar y conocer los parámetros que van a gobernar dicho problema. Permiten obtener de forma aproximada los resultados previsible en el ensayo (cargas máximas, flechas, deformaciones, reacciones o estados tensionales singulares) y poder adoptar el esquema de instrumentación más adecuado en cada experimento. Dicho estudio preliminar solamente puede realizarse mediante la utilización de un modelo numérico que tenga en cuenta todas las variables que intervienen en el problema.

El modelo numérico permite a posteriori, comparando los resultados del modelo con los resultados experimentales, verificar la adaptación de dicho modelo y proporcionar valores de variables no medidas experimentalmente. Se utiliza además para la posterior realización de estudios paramétricos derivados del análisis de los resultados experimentales, de manera que permita reproducir la experimentación de manera sistemática, con una amplia variación de los parámetros más importantes.

En este estudio, el modelo numérico utilizado es el código de análisis estructural (Abaqus) basado en el método de los elementos finitos (Hibbit et al., 1996).

El modelo numérico tiene en cuenta los efectos de la no linealidad del material debidos al complejo comportamiento del acero inoxidable considerando la ecuación constitutiva real del acero inoxidable utilizado y tiene en cuenta los efectos de la no linealidad geométrica debidos a la influencia de los grandes desplazamientos en el equilibrio de la estructura.

3.2.- ELEMENTOS ESTRUCTURALES ANALIZADOS.

Para poder obtener, mediante el modelo numérico, resultados fiables y comparables con la experimentación, es necesario modelizar los ensayos de la manera más rigurosa posible. En este trabajo se han realizado dos estudios estructuralmente distintos, de modo que los elementos estructurales analizados son también distintos.

En primer lugar se estudia el comportamiento de vigas sometidas a flexión, centrando dicho estudio en el cálculo de las deformaciones máximas. Para la campaña experimental y para el análisis paramétrico derivado de esta primera campaña experimental se estudian vigas biapoyadas y continuas con secciones rectangulares y cuadradas conformadas en frío y secciones en H laminadas. Las longitudes de las vigas y las dimensiones de las secciones transversales se han determinado de manera que se reproduzcan comportamientos de viga en todos los casos.

La segunda campaña experimental se centra en el estudio del comportamiento de estructuras formadas por chapas de acero inoxidable integradas en vigas armadas sometidas esencialmente a solicitaciones de cortante hasta llegar a desencadenar, en algunos casos, fenómenos de abolladura.

El modelo numérico se utilizó en este caso para determinar las geometrías de las vigas a ensayar de forma que cubriesen un amplio rango de posibilidades dentro del comportamiento a cortante, permitiendo estudiar varias esbelteces y distintas relaciones de aspecto. Asimismo, se analizó con profundidad el comportamiento de las vigas ensayadas y se realizaron estudios paramétricos del comportamiento de placas simplemente apoyadas e integradas en vigas.

3.3.- MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

Con excepción de las estructuras de barras, la mayor parte de las estructuras en ingeniería son de naturaleza continua y, por tanto, su comportamiento no puede expresarse en forma precisa en función de un número pequeño de variables discretas (Oñate, 1992).

A nivel conceptual, el método de los elementos finitos (MEF) consiste en la descomposición de un elemento físico continuo (estructura) en un número discreto de partes o elementos que se hallan conectados entre sí por un número discreto de puntos denominados nodos. Los movimientos de estos nodos constituyen las incógnitas fundamentales del problema. Dentro de cada elemento, los movimientos de cualquier punto se obtienen a partir de los movimientos de los nodos del elemento.

Conocido el movimiento de un punto dentro de un elemento, estableciendo las condiciones de equilibrio y compatibilidad y dadas las relaciones constitutivas de los materiales, pueden obtenerse las deformaciones, tensiones y esfuerzos en cualquier punto del elemento.

A continuación se describe de manera breve la formulación del método de los elementos finitos. Esta explicación no pretende ser detallada, pudiéndose encontrar tratamientos más amplios en libros escritos sobre el tema (Zienkiewicz, 1980) y (Oñate, 1992).

El método, de manera simplificada, es el siguiente:

- 1.- El continuo se divide mediante líneas o superficies imaginarias en un número de "elementos finitos".
- 2.- Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos denominados "nodos". Los desplazamientos de estos nodos serán las incógnitas fundamentales del problema.
- 3.- Campo de desplazamientos. Se definen los desplazamientos de un punto cualquiera del elemento en función de los desplazamientos de los nodos del mismo, de manera única, a través de un conjunto de funciones polinómicas, llamadas "funciones de forma".

$$\underline{u}^e = \underline{N}^e \underline{a}^e \quad [3-1]$$

donde \underline{u}^e son los desplazamientos en cualquier punto del elemento e, \underline{a}^e los desplazamientos nodales del elemento y \underline{N}^e las funciones de forma.

- 4.- Campo de deformaciones. Las funciones de forma definirán de manera única el estado de deformación dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales. Una vez conocidos los desplazamientos para todos los puntos del elemento, pueden determinarse las deformaciones en cualquier punto. Estas darán siempre por resultado una relación que podrá escribirse en forma matricial, como

$$\underline{\epsilon}^e = \underline{L}^e \underline{u}^e \Rightarrow \underline{\epsilon}^e = \underline{L}^e \underline{N}^e \underline{a}^e \Rightarrow \underline{\epsilon}^e = \underline{B}^e \underline{a}^e \quad [3-2]$$

donde L es un operador diferencial lineal.

- 5.- Campo de tensiones. Conocidas las deformaciones, a partir de las ecuaciones constitutivas, pueden determinarse las tensiones.

Para un material elástico lineal, la relación entre tensiones y deformaciones viene dada por la matriz \underline{D}^e que es la matriz constitutiva del material.

$$\underline{\sigma}^e = \underline{D}^e \underline{\epsilon}^e \quad [3-3]$$

Utilizando [3-2] se tiene que

$$\underline{\sigma}^e = \underline{D}^e \underline{B}^e \underline{a}^e \quad [3-4]$$

- 6.- Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, tal que equilibre las tensiones y las cargas repartidas que actúan en el elemento. El procedimiento más usual para establecer dicho equilibrio y relacionar las fuerzas actuantes en los nudos con los desplazamientos en dichos nudos se basa en la aplicación del "Principio de los Trabajos Virtuales (PTV)". Dicho principio establece que una estructura está en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores si al imponer a la misma unos desplazamientos arbitrarios (virtuales) compatibles con las condiciones en los apoyos, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores sobre los desplazamientos

virtuales es igual al trabajo que realizan las tensiones sobre las deformaciones producidas por los desplazamientos virtuales. Y puede escribirse como

$$\iiint_V \underline{\delta \varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \iiint_V \underline{\delta u}^T \underline{b} dV + \oint_S \underline{\delta u}^T \underline{t} dS + \underline{\delta a}^T \underline{q} \quad [3-5]$$

siendo \underline{q} , \underline{b} y \underline{t} los vectores de fuerzas nodales, fuerzas por unidad de volumen y fuerzas por unidad de superficie respectivamente.

En esta expresión $\underline{\delta u}^T = \underline{\delta a}^T \underline{N}^T$ y $\underline{\delta \varepsilon}^T = \underline{\delta a}^T \underline{B}^T$, con lo que, simplificando $\underline{\delta a}^T$ puede reescribirse el PTV en el elemento como

$$\iiint_V \underline{B}^T \underline{DB} \underline{a} dV = \iiint_V \underline{N}^T \underline{b} dV + \oint_S \underline{N}^T \underline{t} dS + \underline{q} \quad [3-6]$$

Finalmente se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento

$$\underline{q}^e = \underline{K}^e \underline{a}^e - \underline{f}^e \quad [3-7]$$

donde \underline{K}^e es la matriz de rigidez del elemento

$$\underline{K}^e = \iiint_V \underline{B}^T \underline{DB} dV \quad [3-8]$$

y \underline{f}^e es el vector de fuerzas de volumen y superficie

$$\underline{f}^e = \iiint_V \underline{N}^T \underline{b} dV + \oint_S \underline{N}^T \underline{t} dS \quad [3-9]$$

7.- La ecuación de equilibrio global de la estructura se obtiene estableciendo que la suma de las fuerzas nodales debe ser igual a la fuerza nodal exterior.

Tras el ensamblaje de todas las partes, se llega a la ecuación matricial global de la estructura.

$$\underline{Ka} = \underline{f} \quad [3-10]$$

En esta ecuación \underline{K} , \underline{a} y \underline{f} son, respectivamente, la matriz de rigidez, el vector de desplazamientos nodales y el vector de fuerzas nodales equivalentes de toda la estructura.

Al resolver este sistema y hallar los desplazamientos nodales, podemos determinar las tensiones y deformaciones en cualquier punto del elemento a partir de las expresiones anteriormente definidas.

Cabe destacar en este apartado la importancia que tienen en el desarrollo del método de los elementos finitos aspectos como el tipo de problema a resolver (unidimensional-vigas, bidimensional-tensión plana, deformación plana, placas, láminas), las funciones de forma utilizadas para la interpolación en cada caso, la linealidad o no linealidad del problema (no linealidad de material, no linealidad geométrica), el método de resolución del sistema de ecuaciones resultante y la integración numérica utilizada, entre otras cosas.

En el siguiente apartado, en el que se analizan los tipos de elementos finitos utilizados en este trabajo, se verán con más detalle algunos de estos aspectos, relacionándolos directamente con el tipo de elemento. Más adelante se plantean los métodos de resolución utilizados en cada caso.

3.4.- TIPOS DE ELEMENTOS FINITOS.

3.4.1.- Introducción.

Tal y como se ha comentado anteriormente, en este trabajo se han realizado dos estudios estructuralmente distintos, de modo que el tipo de elemento utilizado en cada caso será también distinto.

Para el estudio del comportamiento a flexión de vigas de acero inoxidable se han empleado elementos tipo viga. Para la discretización de la geometría de las vigas armadas, del análisis a cortante, se han usado elementos finitos tipo lámina. Los elementos de lámina se utilizan para modelizar estructuras en las que una dimensión (el espesor) es mucho menor que las otras, y las tensiones normales en la dirección del espesor son despreciables. Además su capacidad resistente viene dada por la combinación de esfuerzos de flexión y de membrana.

A continuación se describen las características más importantes de los dos tipos de elementos utilizados. Una explicación más detallada del tratamiento de estos elementos puede encontrarse en los manuales de Abaqus (Hibbit et al., 1996).

3.4.2.- Elementos tipo viga.

La teoría de vigas es una aproximación unidimensional del continuo en tres dimensiones. Esta reducción dimensional es resultado directo de que la sección transversal de la viga es mucho más pequeña que la dimensión a lo largo del eje de la misma. La principal ventaja de los elementos de viga es que son geoméricamente simples y tienen pocos grados de libertad, con lo que el estudio del comportamiento de una estructura con este tipo de elementos puede resultar más sencillo que realizando una modelización tridimensional.

Se han utilizado elementos de viga esbeltos (Teoría de Euler-Bernouilli) cúbicos de 2 nodos y con interpolación cúbica (Figura 3-1).

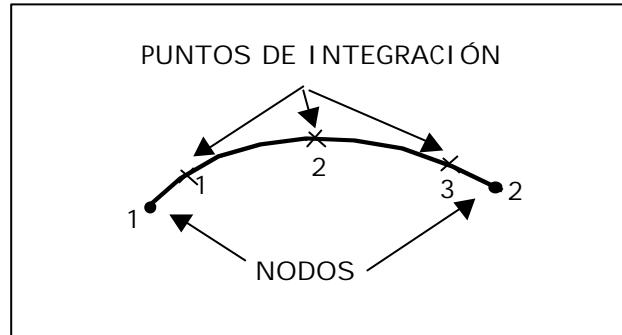


Figura 3-1. Elemento de viga de Euler-Bernouilli con interpolación cúbica.

Las vigas de Euler-Bernouilli no tienen en cuenta la deformación transversal por cortante, es decir, asumen que las secciones planas perpendiculares al eje de la viga permanecen planas y perpendiculares a dicho eje después de la deformación. Deben emplearse solamente para modelizar el comportamiento de vigas esbeltas, en las que las dimensiones de la sección transversal son pequeñas comparadas con la dimensión longitudinal (para vigas normales esto puede ser del orden de 1/15). Estos elementos utilizan funciones de interpolación cúbicas, y deben usarse para análisis de pequeñas deformaciones y grandes giros.

En estos elementos la integración longitudinal se realiza con una cuadratura de Gauss-Legendre con tres puntos de integración a lo largo del eje del elemento y la integración seccional se realiza mediante la regla de integración de Simpson con cinco puntos de integración a través de la sección.

Cabe comentar en este punto, que el hecho de emplear elementos tipo viga para la modelización hace que no se evalúe el fenómeno de la abolladura de la sección transversal en el análisis. Circunstancia ésta que se puede dar por válida si se tiene en cuenta que el objetivo esencial que persigue dicho estudio es la determinación de flechas en vigas de acero inoxidable considerando principalmente la no linealidad del material.

3.4.3.- Elementos de lámina.

Tipológicamente las láminas pueden considerarse una generalización de las placas al caso de superficie media no plana. Es precisamente esta no coplanariedad la que confiere el carácter resistente de las láminas al permitir la aparición de esfuerzos axiales (esfuerzos de membrana) que, juntamente con los de flexión, contribuyen a dotar a las láminas de una capacidad portante muy superior a la de las placas.

Un elemento laminar se caracteriza por su capacidad de poder combinar un estado resistente típico de "flexión" con otro en el que aparecen esfuerzos axiales contenidos en su superficie media y que denominamos "estado de membrana".

El elemento de lámina utilizado ha sido un elemento cuadrático de nueve nodos con integración reducida y que asume la teoría de placas delgadas de Kirchhoff, denominado S9R5 en la librería de Abaqus (Figura 3-2) que sirve para grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones y tiene cinco grados de libertad (tres componentes en desplazamiento y dos giros en el plano).

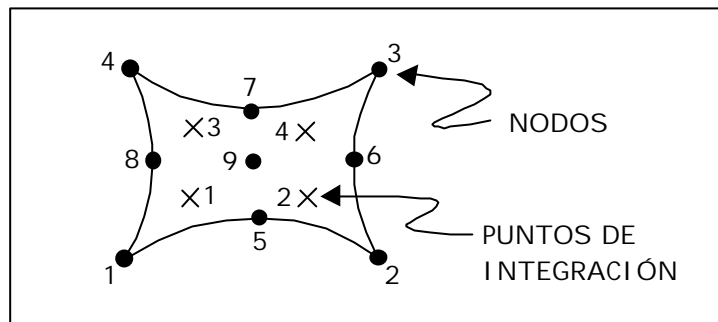


Figura 3-2. Elemento de lámina de 9 nodos con integración reducida, S9R5.

Para modelizar fenómenos de abolladura es recomendable usar un elemento de 9 nodos, ya que el nodo intermedio puede ser posicionado en la geometría deformada y proporcionar entonces resultados más exactos que un elemento sin dicho nodo intermedio.

Generalmente el orden de interpolación se determina a partir del número de nodos usados en el elemento. Los elementos que tienen nodos intermedios usan interpolación cuadrática y se llaman elementos cuadráticos o de segundo orden. Las funciones de forma utilizadas para este elemento son productos de polinomios de Lagrange, con lo que se está en presencia de un elemento lagrangiano. Por otro lado, la formulación utilizada en Abaqus para este elemento se basa en la teoría Lagrangiana o de descripción del material que considera que el elemento se deforma con el material.

Los problemas de láminas se dividen en dos grandes categorías: láminas delgadas y láminas gruesas. Los problemas de láminas gruesas, basados en la teoría de Reissner-Mindlin, consideran que el efecto de la deformación transversal por cortante es importante e influye en los cambios de espesor. Los problemas de láminas delgadas, basados en la teoría de Kirchhoff, asumen que la deformación transversal por cortante es tan pequeña que puede ser despreciada.

Los elementos delgados se usan cuando se han de modelizar problemas en los que puede despreciarse la deformación transversal por cortante y la normal a la lámina se mantiene ortogonal a la superficie de referencia, es decir en problemas en los que se satisface la restricción de Kirchhoff de manera precisa. Para láminas homogéneas esto ocurre cuando el espesor es menor que aproximadamente 1/15 de la dimensión característica en la superficie de la lámina.

De todos modos, es posible formular elementos delgados haciendo uso de la teoría de Reissner-Mindlin y converger a placas delgadas a medida que disminuye el espesor. Este es el caso del elemento S9R5 utilizado para el análisis. Es conocido que aparecen dificultades numéricas en la aplicación de este método a placas de pequeño espesor, obteniéndose soluciones mucho más rígidas debidas a la influencia excesiva de los términos de cortante transversal a medida que disminuye el espesor. Dichas dificultades pueden resolverse con técnicas de integración reducida y/o utilizando campos de deformaciones de cortante transversal impuestas.

La integración reducida de los términos de cortante elimina en muchos casos el problema, e incluso simplifica los cálculos, aunque puede generar en el elemento mecanismos de distorsión de la solución. El método más potente para formular elementos libres de estos defectos es utilizar campos de deformaciones impuestas de cortante, compatibles con la solución límite de placa delgada.

Abaqus resuelve el problema imponiendo, en los puntos de integración, una rigidez transversal a cortante de manera que no exista deformación transversal en dichos puntos, con lo que se cumple la restricción de Kirchhoff de manera discreta.

A pesar de ello, algunos elementos en Abaqus usan además integración reducida (lower order) para formar la rigidez del elemento. La integración reducida, generalmente, proporciona resultados más exactos y reduce de forma significativa el tiempo del proceso, especialmente en tres dimensiones.

Los elementos con integración reducida tienen un punto menos de integración en cada dirección que los elementos de integración completa. En este caso, el número de puntos de integración es suficiente para integrar exactamente las contribuciones del campo de deformaciones que son de un orden menor que el orden de interpolación. Las contribuciones de mayor orden del campo de deformaciones en estos elementos no se integran. En los elementos de segundo orden con integración reducida (S9R5) se usa la cuadratura 2x2 de Gauss (Figura 3-2).

Para calcular el comportamiento de la sección transversal de una lámina puede usarse la regla de integración de Simpson o la cuadratura de Gauss. El método de integración usado por defecto es la regla de integración de Simpson con 5 puntos a través del espesor (5 puntos son suficientes para resolver problemas no lineales). La cuadratura de Gauss proporciona mayor exactitud que la regla de Simpson cuando se usa el mismo número de puntos de integración. Por lo tanto, para un mismo nivel de exactitud la cuadratura de Gauss necesita menos puntos de integración que la regla de Simpson y requiere un menor coste computacional. A pesar de ello, la regla de integración de Simpson debe usarse cuando se requieren resultados en la superficie de la lámina (Figura 3-3), ya que la cuadratura de Gauss no tiene puntos de integración en la superficie.

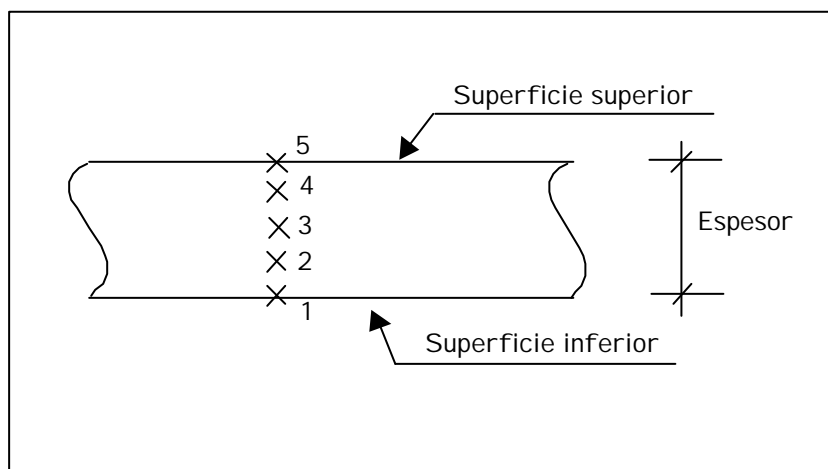


Figura 3-3. Puntos de integración de la regla de Simpson a través del espesor de la lámina en los puntos de integración.

3.5.- ECUACIÓN CONSTITUTIVA. MODELIZACIÓN DE LA ROTURA.

3.5.1.- Modelos constitutivos elásticos y plásticos.

En problemas de análisis tensional podemos encontrarnos con una amplia variedad de materiales, y para cada uno de estos materiales existen varios modelos constitutivos disponibles capaces de definir su comportamiento.

Muchos materiales en ingeniería responden de forma elástica a bajos niveles de tensión, de modo que la deformación se recupera totalmente cuando se retira la carga. Si la carga supera un límite ("límite elástico") la deformación no es del todo recuperable y una parte de ella permanece después de retirar la carga. Las teorías de plasticidad, desarrolladas más intensamente para metales, modelan este comportamiento.

Los modelos constitutivos que proporciona Abaqus a menudo consideran respuestas elásticas e inelásticas. La respuesta inelástica se modeliza generalmente con modelos plásticos en los que se distingue de forma separada entre la parte recuperable de la deformación (elástica) y la parte no recuperable (plástica). Esta separación se basa en asumir que existe una relación aditiva entre las velocidades de deformación

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{el} + \dot{\epsilon}_{pl} \quad [3-11]$$

donde $\dot{\epsilon}$ es la velocidad total de deformación, $\dot{\epsilon}_{el}$ la velocidad de cambio de la deformación elástica y $\dot{\epsilon}_{pl}$ es la velocidad de cambio de la deformación plástica. En problemas de pequeñas deformaciones, como los que se estudian en esta tesis, la aproximación anterior es siempre consistente.

El código Abaqus proporciona varios modelos de respuesta elástica, el más simple de los cuales es el de elasticidad lineal y la tensión total se define a partir de la deformación elástica total como

$$\sigma = D^{el} \epsilon^{el} \quad [3-12]$$

donde σ es la tensión total, D^{el} es el tensor de elasticidad de cuarto orden y ϵ^{el} es la deformación total elástica.

Las propiedades elásticas quedan totalmente definidas a partir del módulo de deformación longitudinal E , y el coeficiente de Poisson, ν . El módulo de deformación transversal G puede ser expresado en términos de E y ν como $G = E/2(1+\nu)$.

La teoría incremental de plasticidad se basa en unos pocos postulados fundamentales, lo que significa que todos los modelos de respuesta elastoplástica que proporciona Abaqus tienen la misma forma general. Los modelos pueden ser dependientes o independientes de la velocidad de deformación. Los modelos de plasticidad independientes de la velocidad de deformación del código Abaqus tienen una región de respuesta elástica pura cuyo límite queda definido por la función de fluencia.

En el modelo plástico más sencillo (plasticidad perfecta) la función de fluencia actúa como superficie límite y no existen parámetros de endurecimiento. Los modelos plásticos más complejos a menudo incluyen un gran número de parámetros de endurecimiento. Los modelos proporcionados por Abaqus no son los más complejos y sólo usan algunos de estos parámetros, pudiendo definir endurecimientos isotrópicos o cinemáticos ("isotropic hardening" o "kinematic hardening").

Los modelos plásticos se formulan en términos de:

- Superficie de fluencia que generaliza el concepto de límite elástico.
- Regla de flujo, que define la deformación inelástica que tiene un punto que no responde elásticamente.
- Leyes de evolución que definen el endurecimiento. El camino que deben seguir la superficie de fluencia y/o el flujo a medida que aparece la deformación elástica.

Los modelos de plasticidad clásicos para metales usan superficies de fluencia de Mises o Hill asociadas a un flujo plástico, que permite plastificación isotrópica o anisotrópica respectivamente, con plasticidad perfecta o endurecimiento isotrópico.

3.5.2.- Modelo constitutivo para el acero inoxidable.

La principal diferencia entre el acero al carbono y el acero inoxidable radica la relación tensión-deformación. El acero inoxidable es un material anisótropo, con una ecuación constitutiva no lineal y sin límite elástico diferenciado. La relación tensión-deformación del acero inoxidable puede representarse analíticamente a través de la ecuación de Ramberg-Osgood.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + 0.002 \left(\frac{\sigma}{f_y} \right)^n \quad [3-13]$$

Hasta la actualidad se han estado utilizando relaciones constitutivas sencillas para definir el comportamiento del acero inoxidable dado que no existían suficientes resultados experimentales como para poder definir modelos de comportamiento más complejos.

Uno de los trabajos realizados en el Proyecto Europeo (ECSC, 2000), llevado a cabo en la Universidad de Lulea, ha consistido en desarrollar un modelo constitutivo para definir el comportamiento del acero inoxidable, en base a un amplio estudio experimental de las propiedades mecánicas de dicho acero. El modelo propuesto es un modelo complejo con dos superficies de fluencia y en el que se define un endurecimiento mixto isotrópico y cinemático que permite por tanto tener en cuenta la expansión isotrópica de la superficie de von Mises y el efecto Bauschinger (Olsson, 1998a).

Los aceros inoxidables austeníticos, analizados principalmente en esta tesis, presentan un grado de anisotropía menor que los dúplex y además se ha demostrado que el efecto de la velocidad de deformación en la respuesta del acero inoxidable es muy pequeña (Olsson, 1998a) con lo que en este caso se puede recurrir a un modelo constitutivo más sencillo, con endurecimiento isotrópico, aunque suficientemente preciso, disponible en las librerías de Abaqus (Hibbit et al., 1996) para modelizar el comportamiento del material.

Para la descripción de la fase plástica, se emplea en este caso la superficie de fluencia de Mises con endurecimiento isotrópico. En plasticidad perfecta el límite elástico no varía con la deformación plástica y el endurecimiento isotrópico significa que la superficie de fluencia varía de tamaño de manera uniforme en todas las direcciones a medida que aumenta (o disminuye) el límite elástico del material conforme aparece la deformación plástica.

El endurecimiento isotrópico se define dando el límite elástico del material como función de la deformación plástica equivalente. En este caso, la relación uniaxial tensión-deformación se calcula mediante la parte plástica de la ecuación de Ramberg-Osgood.

$$\varepsilon_p = 0.002 \left(\frac{\sigma}{f_y} \right)^n \quad [3-14]$$

El inconveniente más importante de los modelos de endurecimiento isotrópico es que no pueden describir el efecto Bauschinger. En tal caso sería necesario definir un modelo con endurecimiento cinemático para modelizar cargas cíclicas en metales.

La ley de evolución del modelo de endurecimiento cinemático lineal consiste en una componente de endurecimiento que describe la traslación de la superficie de fluencia en el espacio de tensiones. Dicho endurecimiento debe ser constante, y por tanto no puede ser usado para definir el comportamiento plástico del acero inoxidable, cuyo endurecimiento no es constante y debería definirse mediante una ley de un endurecimiento mixto isotrópico y cinemático.

3.6- ESTRATEGIAS DE ANÁLISIS NO LINEAL. NO LINEALIDAD DEL MATERIAL Y NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA.

3.6.1.- Introducción.

Tal y como se ha comentado en el apartado anterior, el material que nos ocupa es un material cuyo comportamiento tenso-deformacional es complejo y responde a relaciones constitutivas no lineales, de modo que las relaciones entre tensiones y deformaciones planteadas en el método de los elementos finitos (eq. [3-3]) son también no lineales.

Por otro lado, para investigar el comportamiento real de placas hasta el colapso, teniendo en cuenta la posible aparición de fenómenos de inestabilidad como la abolladura, es necesario considerar los efectos de la no linealidad geométrica debidos a la influencia de los grandes desplazamientos, que no son despreciables en comparación con el espesor de las placas, en el equilibrio de la estructura. Dicha consideración comporta que las relaciones entre deformaciones y desplazamientos planteadas en el apartado 3.3 (eq. [3-2]) sean también no lineales.

En este apartado veremos cómo plantear y resolver los sistemas resultantes de los problemas no lineales que aparecen en el estudio. Para configuraciones estables con no linealidad del material, se utiliza el método de Newton-Raphson. Para resolver los problemas de estabilidad que aparecen al considerar los efectos de la no linealidad geométrica se utilizan dos métodos distintos, el primero es un análisis de autovalores que soluciona la estabilidad instantánea y en

casos de comportamiento "postbuckling" posteriores a los fenómenos de abolladura deben utilizarse los métodos de longitud de arco.

3.6.2.- Método de Newton-Rapshon. Solución de problemas no lineales.

Un problema no lineal es aquél en el que la rigidez de la estructura va cambiando a medida que ésta se deforma. Todas las estructuras reales se comportan de manera no lineal, aunque a veces es suficiente con realizar un análisis lineal del problema para estudiar su comportamiento. Existen muchos problemas de importancia en los que no se preserva tal linealidad, y es por tanto necesario incluir todas las no linealidades presentes para estudiar el problema.

Una vez discretizado el problema no lineal, éste puede plantearse, al igual que en el apartado 3.3, como un sistema de ecuaciones de la forma:

$$Ka = f \tag{3-15}$$

donde ahora la matriz de rigidez K puede depender del campo de desplazamientos incógnita del problema.

El problema puede escribirse de la forma:

$$\psi(a) = \underbrace{K(a)a}_{I(a)} - \underbrace{f}_{E} = 0 \tag{3-16}$$

Donde, K(a)a, representa las fuerzas internas, f las fuerzas externas, y ψ(a) el vector residual entre fuerzas internas y externas. La solución del problema será aquella que haga que exista equilibrio entre fuerzas externas y fuerzas internas, con lo que ψ(a)= I(a)-E=0.

Al ser el problema no lineal, no puede resolverse directamente, con lo que la solución se obtiene de forma incremental.

El método de Newton-Raphson, para la resolución del sistema no lineal [3-16] se basa en suponer que si se conoce una solución aproximada del problema a=aⁿ, se puede obtener una solución mejorada a=aⁿ⁺¹=aⁿ + Δaⁿ aproximando la función residual ψ(aⁿ⁺¹) por otra definida a partir de un desarrollo en serie de Taylor de dos términos.

$$\psi(a^{n+1}) = \psi(a^n) + \left(\frac{d\psi}{da} \right) \Delta a^n = 0 \tag{3-17}$$

$$\Delta a^n = - \left(\frac{d\psi}{da} \right)_n^{-1} \psi(a^n) \tag{3-18}$$

siendo $\left. \frac{d\psi}{da} \right|_n = \left. \frac{dI(a)}{da} \right|_n = K_t^n$ la matriz de rigidez tangente.

Se quiere que $\psi(a^i)$ sea prácticamente nulo, de modo que hay que seguir iterando hasta obtener un valor suficientemente cercano a cero.

En la Figura 3-4 puede verse una representación gráfica del método y cómo en cada paso es preciso resolver un nuevo sistema de ecuaciones lineales para Δa^n .

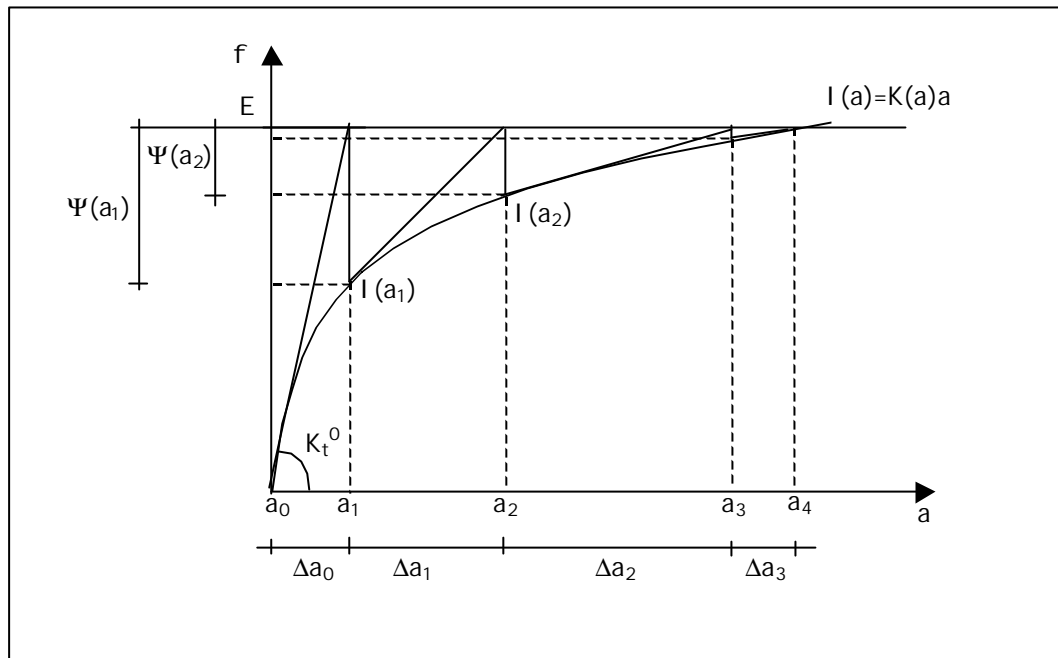


Figura 3-4. Método de Newton-Raphson.

En el caso de los problemas no lineales, se debe obtener una solución convergente con un mínimo coste. El procedimiento no lineal de Abaqus permite, para reducir el coste computacional, un control directo del tamaño de los incrementos. No obstante, para utilizar esta opción es necesario un conocimiento exacto del comportamiento de la estructura estudiada. En nuestro caso, al tener que cambiar constantemente la geometría de las vigas se utiliza un control automático del tamaño de los incrementos de modo que se define el tamaño del primer incremento y una horquilla de valores para el resto de los saltos. De este modo se puede producir un incremento del coste computacional, pero resulta más sencillo para el usuario.

A continuación se estudia cuál es la expresión de la matriz tangente K_t cuando la única no linealidad presente en el problema es la no linealidad del material y como varía dicha matriz tangente cuando aparece además no linealidad geométrica.

3.6.3.- No linealidad del material.

Tal y como se ha comentado en el apartado anterior, el acero inoxidable tiene un comportamiento tenso-deformacional complejo en el que las relaciones entre tensiones y deformaciones no son lineales, de modo que la ecuación de equilibrio general, que puede escribirse como

$$\psi(a) = \int_v B^T \sigma dV - f = 0 \quad [3-19]$$

se resuelve mediante el método de Newton-Raphson a través de la definición de una matriz de rigidez tangente K_T .

Si el material es elástico no lineal $\sigma = \sigma(\epsilon)$, y en este caso

$$K_T = \frac{d\psi}{da} = \int_v B^T \frac{d\sigma}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{da} dV = \int_v B^T D_T B dV \quad [3-20]$$

donde $D_T = \frac{d\sigma}{d\epsilon}$ es la matriz elástica tangente.

Se ha observado también que el acero inoxidable, además de tener un comportamiento no lineal, es un material plástico con endurecimiento por deformación, de modo que aparecen deformaciones remanentes una vez que dejan de actuar las fuerzas exteriores en el elemento.

Este comportamiento se traduce en la existencia de una superficie de fluencia que define el límite tensional en función de un parámetro de endurecimiento y que permite definir una ley de fluencia plástica que relaciona los incrementos de deformación plástica en función de la superficie de fluencia. En nuestro caso, la superficie de fluencia utilizada para definir el comportamiento del acero inoxidable es la de von Mises con un parámetro de endurecimiento isotrópico correspondiente a una expansión o contracción de dicha superficie de fluencia. En este caso debe calcularse la matriz elastoplástica tangente correspondiente al problema estudiado.

3.6.4.- No linealidad geométrica.

Para investigar el comportamiento real de estructuras formadas por paneles metálicos en el rango postcrítico, es decir, una vez la pieza ya ha abollado, es necesario considerar los efectos de la no linealidad geométrica, teniendo en cuenta que los desplazamientos no son despreciables en comparación con el espesor del panel y que la geometría de los elementos varía durante la actuación de las fuerzas exteriores de modo que las deformaciones no pueden aproximarse de forma lineal a infinitesimales de primer orden. Esto supone tener en cuenta los términos de segundo orden en las relaciones entre deformaciones y desplazamientos y plantear el equilibrio de la estructura en la configuración deformada de la misma.

El problema debe replantearse de la siguiente manera: (Equilibrio con PTV)

$$\psi(a) = \underbrace{\int_v \bar{B}^T}_{I(a)} \sigma \underbrace{dV}_{E} - f = 0 \quad [3-21]$$

En este caso \bar{B} se deduce de la definición de las deformaciones

$$d\epsilon = \bar{B} da \quad [3-22]$$

Y ahora \bar{B} se distingue con una barra porque para grandes desplazamientos las deformaciones son una función no lineal de los desplazamientos y la matriz \bar{B} depende de a .

En el caso de láminas, la relación entre las deformaciones $\epsilon = (\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ y desplazamientos $a=(u, v, w, \theta_x=\frac{\partial w}{\partial x}, \theta_y=\frac{\partial w}{\partial y})$ cuando se consideran grandes desplazamientos es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{bmatrix} \quad [3-23]$$

Estas deformaciones pueden entonces definirse como suma de dos términos $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_L$, uno de los cuales corresponde a las componentes de pequeños desplazamientos ϵ_0 y el otro a las componentes de grandes desplazamientos ϵ_L .

En base a esta descomposición de la deformación, es fácil demostrar que la matriz \bar{B} se puede descomponer también en dos partes, de manera que:

$$\bar{B} = B_0 + B_L(a) \quad [3-24]$$

donde B_0 es la misma matriz de en pequeñas deformaciones y B_L es una matriz que depende linealmente de los desplazamientos.

Se ha obtenido una expresión general del equilibrio de la forma: $Ka=f$, que puede escribirse como $\psi(a) = \int_v \bar{B}^T \sigma dV - f = 0$, y se resuelve mediante el método de Newton-Raphson a través de la definición de una matriz de rigidez tangente K_T .

$$\frac{d\psi}{da} = K_T \quad [3-25]$$

$$d\psi = \int_v d\bar{B}^T \sigma dV + \int_v \bar{B}^T d\sigma dV = (1) + (2) \quad [3-26]$$

$$(1) = \int_v d\bar{B}^T \sigma dV = \int_v dB_L^T \sigma dV = K_\sigma da \quad [3-27]$$

$$d\bar{B} = dB_L$$

Puede demostrarse en Zienkiewicz (1980).

$$d\sigma = Dd\varepsilon = D\bar{B}da \quad [3-28]$$

$$(2) = \int_v \bar{B}^T d\sigma dV = \int_v \bar{B}^T D\bar{B}dadV = \left[\int_v (B_0 + B_L)^T D(B_0 + B_L)dV \right] da =$$

$$(2) = \int \left[\int_v B_0^T DB_0 dV + \int_v (B_0^T DB_L + B_L^T DB_L + B_L^T DB_0) dV \right] da =$$

$$(2) = (K_0 + K_L)da \quad [3-29]$$

Con lo que finalmente queda que

$$d\psi = (K_\sigma + K_0 + K_L)da = K_T da \quad [3-30]$$

donde K_T , K_0 , K_L y K_σ son, respectivamente, las matrices de rigidez tangente total, del material (pequeños desplazamientos), del material (grandes desplazamientos) o matriz de desplazamientos iniciales y la matriz de rigidez de tensiones iniciales proporcional a las tensiones actuantes.

Conocida la matriz tangente, se puede resolver el sistema no lineal con el método de Newton-Raphson.

3.6.5.- Estabilidad. Analisis de autovalores y comportamiento postcrítico.

Los problemas estáticos con no linealidad geométrica involucran frecuentemente comportamientos de pandeo o colapso en los que la respuesta carga-desplazamiento muestra rigidez negativa y la estructura debe liberar energía para mantenerse en equilibrio. Una vez ha pandeado la estructura el cambio de geometría es muy brusco y en estos casos el método de Newton-Raphson no es capaz de converger a una solución estable y se para en cuanto se alcanza una carga máxima. Es por ello que resulta conveniente introducir una imperfección en la geometría de la estructura de manera que la evolución de la curva carga-desplazamiento sea más suave.

De todos modos puede realizarse un análisis clásico de valores propios de inestabilidad para estimar la carga crítica de colapso de la estructura así como su modo de colapso. Ello es especialmente eficaz en las estructuras que se cargan primero por axil o membrana antes que por flexión. Su respuesta generalmente involucra pequeñas deformaciones antes de pandear. Sin embargo, incluso cuando la respuesta de la estructura es no lineal antes del colapso, como en el caso del acero inoxidable, realizar un análisis de autovalores (inestabilidad) puede proporcionar formas de colapso que resultaran muy útiles para entender el fenómeno posterior.

Los problemas de estabilidad de estructuras, que ocurren principalmente en vigas y en estructuras laminares esbeltas, necesitan por tanto dos tipos de análisis: Un primer análisis de autovalores y posteriormente un análisis de no linealidad geométrica para analizar el comportamiento de la estructura una vez se ha producido la inestabilidad (comportamiento postcrítico).

Análisis de autovalores

El análisis de autovalores se usa para determinar la carga crítica de bifurcación de la estructura, asumiendo que la respuesta antes de la deformación es esencialmente lineal e ignorando por tanto en el análisis todas las no linealidades y las propiedades inelásticas.

Este método es útil para aquellas estructuras que se deforman muy poco antes de pandear (estructuras rígidas), aunque en muchos casos nos encontramos con respuestas inelásticas antes del colapso.

La respuesta del modelo se define a partir de su rigidez elástica en el estado base, de modo que en este caso, asumiendo una respuesta lineal de la estructura, sometida a una carga exterior P , podemos obtener una matriz de rigidez tangente:

$$K_T = (K_0 + K_\sigma) \quad [3-31]$$

Si se multiplica la carga exterior P por un factor λ la matriz de rigidez tangente varía proporcionalmente a λ .

$$K_T = (K_0 + \lambda K_\sigma) \quad [3-32]$$

El problema de autovalores requiere hallar los valores de λ que proporcionan singularidad en la matriz de rigidez tangente K_T y para ello se resuelve:

$$[K_0 + \lambda K_\sigma] a = 0 \quad [3-33]$$

Los valores propios λ nos darán las cargas críticas ($P_{\text{crít}} = \lambda P$) y los vectores propios (a) nos darán los modos de pandeo.

Colapso inestable y análisis postcrítico

En estructuras en las que se quiera estudiar el comportamiento postcrítico y la respuesta de la misma sea inestable, no podrá utilizarse el método de resolución de sistemas no lineales de Newton-Raphson porque dicho método no es capaz de converger a una solución estable del problema.

El modelo numérico utiliza en estos casos un procedimiento de análisis no lineal en el que los estados de equilibrio durante las fases inestables de respuesta se hallan usando el método "Riks modificado" (Hibbit et al., 1996), útil en el análisis de estructuras que presentan comportamiento no lineal geométrico y del material (comportamiento postcrítico, reblandecimiento del material y agotamiento). El método obtiene soluciones de equilibrio, controlando en cada incremento la curva carga-desplazamiento incluso en casos de respuestas complejas e inestables como las mostradas en la figura siguiente:

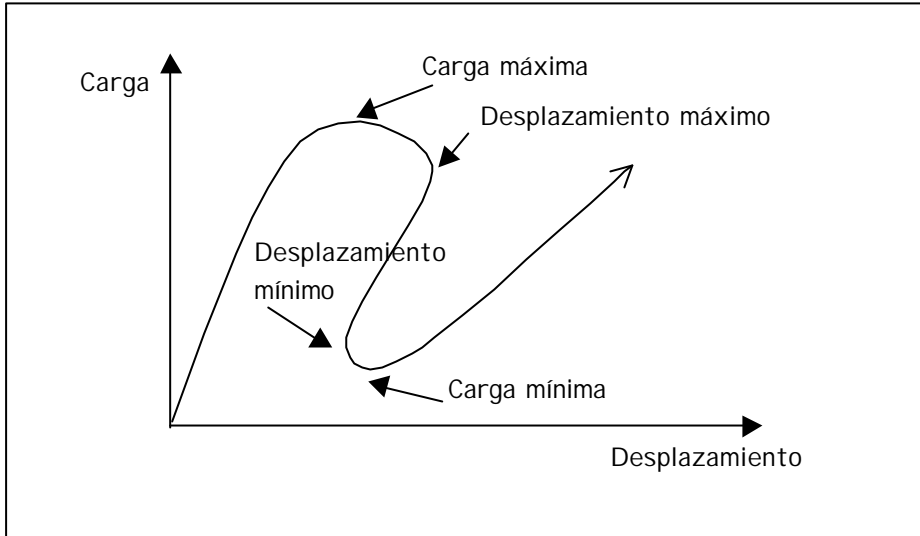


Figura 3-5. Respuesta estática inestable.

El método de Riks usa la magnitud de carga como una incógnita más del problema, obteniendo simultáneamente cargas y desplazamientos. Por lo tanto debe usarse otra cantidad para medir el progreso de la solución (al añadir una incógnita más al problema es necesario añadir otra ecuación); Abaqus usa la longitud de arco ("arc length"), a lo largo de la trayectoria de equilibrio de la curva carga-desplazamiento. Esta aproximación permite obtener soluciones en las que se puede ver si la respuesta de la estructura es estable o inestable.

Dentro de un incremento de carga λP el vector de fuerzas residuales vale:

$$\psi(a, \lambda) = \int B^T \sigma dV - \lambda f \quad [3-34]$$

En lugar de resolver $\psi(a, \lambda) = 0$ para cada valor de λ lo que hace es plantear λ como incógnita del problema y añadir una nueva función auxiliar que establezca que se siga la trayectoria de equilibrio estática.

Tal y como se ha comentado anteriormente, el comportamiento de la estructura una vez producido el pandeo (respuesta postcrítica) no puede analizarse directamente debido a la respuesta discontinua del problema en el momento de la inestabilidad. Para analizar el comportamiento de una estructura en fase postcrítica, el problema de bifurcación de equilibrio debe transformarse en un problema de respuesta continua. Este efecto puede conseguirse introduciendo una imperfección inicial en la geometría perfecta de la estructura con lo que se consigue una respuesta en el modo de pandeo antes de que se alcance la carga crítica. Las imperfecciones se introducen con perturbaciones de la geometría inicial como superposición de los modos de pandeo determinados anteriormente mediante un análisis de autovalores.

De este modo, el método de Riks puede usarse para estudiar el comportamiento postcrítico de estructuras mediante análisis carga-desplazamiento, en las que aparecen otros efectos no lineales como la no linealidad del material.

3.7- VERIFICACIÓN DE RESULTADOS.

La validación del modelo numérico está ampliamente contrastada con la utilización del mismo a nivel mundial. Los resultados se han verificado con ejemplos sencillos de los que se conoce una solución analítica y comparándolos en cualquier caso con los resultados experimentales.

Para el caso de las flechas de vigas de acero inoxidable, se han comparado los resultados derivados del código Abaqus con los de flechas calculadas analíticamente y con flechas obtenidas de la aplicación de otros programas adoptando modelos constitutivos lineales y no lineales por el material.

Para el estudio de abolladura a cortante de vigas armadas, se ha comparado la carga crítica obtenida mediante Abaqus, adoptando un modelo constitutivo lineal para el material, con la derivada de la teoría lineal clásica. La introducción de la no linealidad del material en el fenómeno de la abolladura por cortante hace que no sea fácilmente validable la modelización a través de conceptos puramente analíticos; sin embargo, los resultados derivados de la aplicación del modelo, se comparan más adelante con resultados experimentales observándose resultados muy parecidos.

