

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERS
DE CAMINS, CANALS I PORTS

**UN MODELO DE “DAÑO CONTINUO”
PARA MATERIALES FRICCIONALES**

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR:

SERGIO HORACIO OLLER MARTÍNEZ

DIRIGIDA POR:

EUGENIO OÑATE IBAÑEZ DE NAVARRA

Y

JAVIER OLIVER I OLIVELLA

BARCELONA – MAYO DE 1988.

– **PARTE AUXILIAR** –

APENDICE I

FUNDAMENTOS BASICOS DE LOS MODELOS ELASTO-PLASTICOS

Ap-I.1.- TEORIA DE LA PLASTICIDAD CLASICA:

“UN MODELO CONSTITUTIVO ELASTO-PLASTICO” GENERICO — INTRODUCCION

Se denomina **modelo constitutivo de un material**, a una *formulación matemático- numérica capaz de describir su comportamiento mecánico a un nivel macroscópico* [81].

Es muy complejo emular el comportamiento de un **sólido real**, dentro de su *rango total de aplicación*. Esto hace que sea muy costoso (casi imposible) obtener una perfecta simulación *matemático-numérica* del mismo. Además, en la naturaleza no hay dos sólidos con idénticas características mecánicas; sino solo similares. Por todo esto, los *modelos constitutivos* proveen una formulación teórica que *solo pretende aproximar*, tanto como sea posible, el comportamiento de los **sólidos ideales**. Estos representan a los **sólidos reales**, mediante hipótesis que simplifican su respuesta característica. Así, cada **sólido real** será estudiado por medio de un **sólido ideal**, que a su vez será simulado mediante un **modelo constitutivo numérico**. Algunos materiales tienen *comportamiento más claro y con menos dispersión que otros*; así los **materiales metálicos** han sido mejor descritos por estos *modelos matemáticos* que los **geomateriales** en general (incluyendo en este grupo los **hormigones pétreos**). En cualquier caso, los *modelos constitutivos* solo simulan *materiales ideales*, y por lo tanto deberán ser capaces de emular la respuesta de los mismos, *descomponiendo su comportamiento en dos procesos mecánicos* con características y rangos muy diversos, uno *elástico (lineal o no lineal)*, y el otro *inelástico*. A continuación se presentan brevemente ambos conceptos.

Ap-I.2.- SOLIDO ELASTICO IDEAL o SOLIDO HOOKEANO

En mayor o menor medida, *todos los sólidos* tienen un *período durante el proceso de deformación*, en el que su comportamiento es *elástico*, donde la *tensión* en un punto depende solamente del *valor actual* de su *deformación* y no de la historia seguida por ésta durante el proceso de aplicación de cargas. El **sólido elástico ideal** se caracteriza por tener deformaciones totalmente *recuperables* y tensiones obtenidas según el modelo constitutivo más simple, “**la ley de Hooke**”, que para procesos *uniaxiales lineales*, caso trivial, toma la siguiente forma:

$$\sigma = E_S \epsilon \quad , \quad (\text{Ap-I.1})$$

que expresa una relación *secante total* entre la *tensión* σ y la *deformación* ϵ , mediante el *módulo de elasticidad secante* E_S o *módulo de Young*. Esta ecuación constitutiva, para el caso de *corte puro* y simple, resulta:

$$\tau = G_S \gamma \quad , \quad (Ap-1.2)$$

siendo G_S el *módulo de corte secante*, τ la *tensión de corte*, y γ la *distorsión* en un punto del sólido.

La **teoría de la elasticidad clásica** adopta como *modelo constitutivo*, para procesos multiaxiales, la **ley de Hooke** en su versión generalizada; expresando cada componente del tensor de tensiones como una *combinación lineal* de las componentes del tensor de deformaciones. Esto es, en *notación indicial*:

$$\sigma_{ij} = [D_{ijkl}]_S \epsilon_{kl} \quad , \quad (Ap-1.3,a)$$

o en *notación tensorial*:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}}_S \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \quad (Ap-1.3,b)$$

Siendo σ_{ij} y ϵ_{ij} los *tensores de segundo orden de tensión y deformación* respectivamente (**anexo-E**); y $[D_{ijkl}]_S$ el *tensor de cuarto orden de rigidez secante del material* [81]. Las ec.(Ap-1.3) representan nueve ecuaciones que contienen un total de *ochenta y un* coeficientes del tensor de rigidez del material, siendo *inter-dependientes* entre sí en ciertos casos particulares. Así, cuando los tensores σ_{ij} y ϵ_{ij} son simétricos, se reduce a *treinta y seis* el número de *componentes independientes del tensor de rigidez secante del material* $[D_{ijkl}]_S$, llegando a depender solo de dos *parámetros independientes*, el *módulo de Young* E_S y el *coeficiente de Poisson* ν_S , para el caso más simple de *materiales isótropos*. En esta situación particular, se presenta una *total independencia* entre las componentes *extensionales del tensor de tensiones* y las *distorsionales del tensor de deformaciones*, y viceversa; quedando expresada las ecuaciones (Ap-1.3) como:

$$\sigma_{ij} = K_S^D \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G_S^D e_{ij} = p \delta_{ij} + s_{ij} \quad (Ap-1.4,a)$$

o bien:

$$\underline{\underline{\sigma}} = 3K_S^D \underline{\underline{\epsilon}}_{oct} + 2G_S^D (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}_{oct}) = \underline{\underline{\sigma}}_{oct} + \underline{\underline{\sigma}} \quad (Ap-1.4,b)$$

siendo :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{oct} = \begin{bmatrix} \sigma_{oct} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{oct} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{oct} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} ;$$

$$\underline{\epsilon}_{oct} = \begin{bmatrix} \epsilon_{oct} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{oct} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{oct} \end{bmatrix} ; \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \epsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} ;$$

$$p = K_S^D \epsilon_{kk} \delta_{ij} = K_S^D \epsilon_v = K_S^D (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \quad ;$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{oct} \delta_{ij} = 2G_S^D e_{ij} \quad ;$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_{oct} \delta_{ij} \quad ;$$

$$\delta_{ij} : \text{función de Kronecker} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j ; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$K_S^D : \text{módulo extensional secante o módulo volumétrico} = \frac{E_S}{3(1-2\nu_S)}$$

$$G_S^D : \text{módulo de corte secante o módulo distorsional} = \frac{E_S}{2(1+\nu_S)}$$

Las ecs.(Ap-1.4) describen bastante bien el comportamiento de algunos materiales cuando éstos están sometidos a *pequeñas deformaciones* [81]. Estas ecuaciones, también pueden escribirse en forma *matricial* del siguiente modo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_S \cdot \boldsymbol{\epsilon} \tag{Ap-1.5}$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\epsilon}$ matrices de una columna, *vectores* *, que solo contienen los coeficientes de la parte simétrica de los respectivos tensores de *tensión* σ_{ij} y *deformación* ϵ_{ij} , (**anexo-E**):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} ; \boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2 \epsilon_{12} \\ 2 \epsilon_{23} \\ 2 \epsilon_{31} \end{Bmatrix} ;$$

* Nota: En álgebra matricial se denomina vector a un conjunto de elementos ordenados en forma de matriz columna. Se utiliza esta notación, que para este caso particular de aplicación carece de sentido físico, como una forma algorítmica que simplifica el tratamiento de los problemas numéricos.

y \mathbf{D}_S la matriz de rigidez secante del material, que contiene los *treinta y seis* coeficientes del tensor de *rigidez secante* $[D_{ijkl}]_S$. Esto es :

$$\mathbf{D}_S = \frac{E_S}{(1 + \nu_S)(1 - 2\nu_S)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_S & \nu_S & \nu_S & 0 & 0 & 0 \\ & 1 - \nu_S & \nu_S & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 - \nu_S & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1 - 2\nu_S}{2} & 0 & 0 \\ & \mathbf{sim.} & & & \frac{1 - 2\nu_S}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1 - 2\nu_S}{2} \end{bmatrix},$$

o escrita en función de los módulos K_S^D y G_S^D , queda del siguiente modo:

$$\mathbf{D}_S = \begin{bmatrix} D_S^I & D_{II}^I & D_{II}^I & 0 & 0 & 0 \\ & D_S^I & D_{II}^I & 0 & 0 & 0 \\ & & D_S^I & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_S^D & 0 & 0 \\ & \mathbf{sim.} & & & G_S^D & 0 \\ & & & & & G_S^D \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} D_S^I &= K_S^D + \frac{4}{3}G_S^D \\ D_{II}^I &= K_S^D - \frac{2}{3}G_S^D \end{aligned}$$

esta *matriz de rigidez secante* se define para los casos particulares de: *tensión plana*, *deformación plana*, y *simetría axial*, como:

- **Tensión plana:** $\sigma_{33} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$ y $\epsilon_{33} \neq 0$, se tiene:

$$\mathbf{D}_S = \frac{E_S}{(1 - \nu_S^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_S & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & \frac{1 - \nu_S}{2} \end{bmatrix} \mathbf{sim.}$$

- **Deformación plana:** $\epsilon_{33} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$ y $\sigma_{33} \neq 0$, se tiene:

$$\mathbf{D}_S = \frac{E_S}{(1 + \nu_S)(1 - 2\nu_S)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_S & \nu_S & 0 \\ & 1 - \nu_S & 0 \\ & & \frac{1 - 2\nu_S}{2} \end{bmatrix} \mathbf{sim.}$$

- **Simetría axial:** $\tau_{3\theta} = \tau_{r\theta} = \gamma_{3\theta} = \gamma_{r\theta} = 0$ se tiene:

$$\mathbf{D}_S = \frac{E_S}{(1 + \nu_S)(1 - 2\nu_S)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_S & \nu_S & \nu_S & 0 \\ & 1 - \nu_S & \nu_S & 0 \\ & & 1 - \nu_S & 0 \\ & \mathbf{sim.} & & \frac{1 - 2\nu_S}{2} \end{bmatrix}$$

La ecuación constitutiva elástica lineal ec.(Ap-1.4) puede ser generalizada para procesos elásticos no lineales ^[29], independientes de la historia de deformaciones, si se define el módulo de rigidez extensional K_S^D y el módulo de rigidez cortante G_S^D como funciones del primer invariante I_1 del tensor de tensiones σ_{ij} y del segundo invariante J_2 del tensor desviador de tensiones s_{ij} , respectivamente (**anexo-E**). Esto es:

$$\begin{aligned} K_S^D &= K_S^D(I_1) = K_S^D(\sigma_{oct}) \\ G_S^D &= G_S^D(J_2) = G_S^D(\tau_{oct}) \end{aligned} \quad (\text{Ap-1.6,a})$$

o bien, a partir de la ec.(Ap-1.5), definiendo :

$$\begin{aligned} E_S &= \frac{9K_S^D(I_1) G_S^D(J_2)}{3K_S^D(I_1) + G_S^D(J_2)} \\ \nu_S &= \frac{3K_S^D(I_1) - G_S^D(J_2)}{2 [3K_S^D(I_1) + G_S^D(J_2)]} \end{aligned} \quad (\text{Ap-1.6,b})$$

Para mayores detalles sobre este tema, se recomienda consultar un tratado de *mecánica de los medios continuos* ^{[79] [81]}.

Ap-I.3.- SOLIDO INELASTICO IDEAL – TEORIA DE LA PLASTICIDAD CON PEQUEÑAS DEFORMACIONES.

Ap-I.3.a.- Introducción

Las teorías inelásticas emulan el comportamiento de los sólidos cargados, dentro de un rango de aplicación en el que no es factible hacerlo mediante el uso de la *teoría de la elasticidad*. Estas formulaciones matemáticas se caracterizan por contemplar el fenómeno de *irreversibilidad de las deformaciones*, que induce a un comportamiento energético *no-conservativo* dependiente del *camino recorrido*. Existen diversos fenómenos físicos que hacen que el sólido tenga una respuesta inelástica ^{[79][81][144]}; en este trabajo solo se estudia una forma de inelasticidad conocida como “**plasticidad**” ^{[33][43][58][79][81]} o *fluencia instantánea*, y se describirán brevemente sus fundamentos mediante la homónima **teoría matemática incremental**. Esta se basa en la *mecánica de los sólidos continuos* e intenta emular el *comportamiento físico macroscópico* de los *sólidos ideales* a partir de los siguientes rasgos característicos, que definen dos *estados de comportamiento mecánico*:

- Un *período inicial elástico*, lineal o no lineal.
- Un comportamiento, denominado *elasto-plástico*, que sigue al período inicial, donde el *campo de tensiones* no crece en forma proporcional al *campo de deformaciones*, y donde estas deformaciones resultan de la adición de una parte *recuperable* (cuota

elástica) y otra parte *irrecuperable* (cuota plástica). Esta parte inelástica de la deformación se manifiesta al iniciar un *proceso de descarga*, que por hipótesis será siempre *elástico*.

El límite que marca la separación entre estos dos estados mecánicos se lo conoce como “**límite de fluencia**” para los *materiales metálicos*, y como “**límite de discontinuidad**” [33] [34] para los *materiales friccionales*, quedando definido, en cualquiera de los casos, a través de una *función en el espacio de tensiones* que recibe el nombre de *función de fluencia plástica* o *función de discontinuidad*, respectivamente.

La **fig.(Ap-I.1)**, muestra en forma esquemática el *comportamiento uniaxial* de un punto correspondiente a un *material elasto-plástico ideal*. Al comenzar el proceso de carga presenta una zona *elástica lineal* que se mantiene hasta el punto **A** llamado *límite de proporcionalidad*. Seguidamente inicia un proceso *elástico no lineal* hasta alcanzar el punto **A'** llamado *límite de elasticidad*, a partir del cual comienza un proceso *elasto-plástico* caracterizado por un *decrecimiento sostenido del módulo de rigidez tangente* debido a la acción de los *mecanismos inelásticos irreversibles*. Si durante el comportamiento elasto-plástico del punto se inicia un *proceso de descarga*, se observa que solo se recupera la parte *elástica* ϵ^e del total de la *deformación* ϵ , sufrida durante el proceso de carga inelástico, quedando otra parte remanente no recuperable que recibe el nombre de *deformación plástica* ϵ^p .

fig.(Ap-I.1): Comportamiento uniaxial esquemático de un “material elasto-plástico ideal”

Dentro del período elasto-plástico se pueden distinguir tres regiones **fig.(Ap-I.1)**:

- Una donde hay crecimiento de la tensión, tramo (**A'-C**), que recibe el nombre de *zona elasto-plástica con endurecimiento*.
- Otra donde el punto que se analiza no experimenta cambio de tensión, tramo (**C-D**), y recibe el nombre de *zona elasto-plástica perfecta o de endurecimiento nulo*.
- Por último, una zona donde la tensión decrece bajo crecimiento sostenido de las deformación, tramo (**D-E**), *período elasto-plástico con ablandamiento*.

Este *material elasto-plástico ideal* permite representar, bastante bien, el comportamiento de distintos *materiales reales* (metálicos y no-metálicos), mediante una simple modificación de los límites definidos anteriormente.

De los conceptos detallados, se puede observar que hay *dos grandes aspectos* a tratar dentro de la **teoría matemática de la plasticidad**:

- El *criterio de fluencia o de discontinuidad*, que permite establecer, durante el proceso de carga, el comienzo del *proceso inelástico* y posterior evolución de las fronteras del dominio elástico dentro del espacio de tensiones.
- El comportamiento más allá del límite elástico, denominado *comportamiento elasto-plástico*, que queda definido a partir de la formulación de: (i) una *descomposición de deformaciones* en una parte elástica y otra plástica; (ii) una *regla de flujo* plástica; (iii) y unas variables internas * **q** (Se verá más adelante, que la deformación plástica puede también ser tratada como una *variable interna*, por lo tanto la *regla de flujo plástica* será entendida como su *regla de evolución explícita de esta variable interna*).

En los apartados subsiguientes se detallan estos dos concéptos básicos.

Ap-I.3.b.- Criterio de discontinuidad para materiales friccionales, o criterio de fluencia plástico para metales

El **criterio de discontinuidad inicial**, o **fluencia inicial** para materiales metálicos, establece un *límite de tensiones* para un punto del sólido, a partir del cual se inicia un proceso *tenso-deformacional* (**σ-ε**) inelástico en dicho punto, caracterizado por el desarrollo de deformaciones *irrecuperables*. En un *proceso uniaxial de tensión*, se reconoce fácilmente este **límite de**

* Nota: Las variables internas de un modelo elasto-plástico son escalares o tensores definidos internamente por el mismo proceso, en forma implícita, a partir de una regla de evolución explícita formulada según la siguiente ley general ^[79]:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{q}(t)) = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} H_c & (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \\ H_\phi & (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \\ H_\psi & (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \\ H_\kappa & (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \\ \mathbf{H}_{\boldsymbol{\epsilon}^p} & (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \end{Bmatrix}$$

discontinuidad inicial por tratarse de un *escalar* que adopta un valor equivalente a la *tensión en el límite elástico*; sin embargo para puntos sometidos a *estados multiaxiales de tensión* no resulta tan trivial la definición de ese límite. Para solucionar esta indefinición, se formula a partir de estudios experimentales una expresión matemática llamada **criterio límite de discontinuidad**, que entre otras variables, depende del estado tensional del punto. La “*misión*” de esta función es “*traducir*” el estado de tensión multiaxial a uno de característica uniaxial equivalente, comparable con los que resultan de estudios uniaxiales simples.

En forma general, se puede *definir* el **criterio límite de discontinuidad** como una *función escalar que depende del estado tensional actual del punto del sólido σ y de un grupo de variables internas \mathbf{q}* . Esto es:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\sigma(t), \mathbf{q}(t)) = 0 \quad (\text{Ap-I.7})$$

siendo:

$\sigma(t)$: tensor de tensiones en el estado actual;

$\mathbf{q}(t) = \{ \kappa(t), \boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\epsilon}^p(t) \}^T$: vector de variables internas en el estado actual

$\kappa(t)$: variable de endurecimiento plástico isotrópico;

$\boldsymbol{\eta}(t)$: variable de endurecimiento plástico cinemático;

$\boldsymbol{\epsilon}^p(t)$: tensor de deformación plástica.

Se ha visto que la **teoría incremental de la plasticidad** solo admite *dos estados de comportamiento mecánico* (*apart. Ap-I.3.a*) para cada punto de la masa del *sólido ideal*: –El estado elástico ó –El estado elasto-plástico. La situación de un punto cualquiera, en un determinado instante t del proceso de carga cuasi-estático, queda inequívocamente definido a partir de la **condición de consistencia plástica** ^{[44][79]} **fig.(Ap-I.2)**, o también llamada **condición de consistencia de Prager** (*apart. Ap-I.3.d*); esto es:

– El proceso de deformación de un punto es *elástico* *:

$$\text{si : } \mathcal{F}(\sigma(t), \mathbf{q}(t)) < 0 \quad \text{o bien : } \dot{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} < 0 \quad (\text{descarga}) \quad (\text{Ap-I.8,a})$$

– El proceso de deformación de un punto es *elasto-plástico*:

* Nota: Para mayor claridad en las expresiones matemáticas, en adelante se sustituirá $\sigma(t)$ y $\mathbf{q}(t)$ por $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{q} , respectivamente. Entendiéndose, a pesar de la omisión, que son variables que dependen de un pseudo-tiempo t que define un instante en la evolución de un proceso elasto-plástico cuasi-estático.

$$si : \quad \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{q}(t)) = 0 \quad y : \quad \dot{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (carga) \quad (Ap-1.8,b)$$

fig.(Ap-1.2): Representación genérica de la “condición general de consistencia plástica” de Prager.

Debido a que en *materiales isotropos ideales*, el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico, se puede formular un **criterio límite de discontinuidad inicial** simplificado. De esta manera la función (Ap-1.7) pasa a *representar, en el espacio de tensiones principales, una superficie simétrica e independiente del sistema inercial de referencia del sólido*, transformando al modelo elasto-plástico en una *ley constitutiva isotropa*. (sobre la conveniencia del uso de formulaciones isotropas para el hormigón, consultar la referencia [29]).

Estudios experimentales realizados por **Bridgeman** [81], prueban que la influencia de la *presión hidrostática* sobre la *deformación plástica* es despreciable en *sólidos no porosos* (materiales metálicos); y también muestra que esta deformación plástica depende fundamentalmente *de la tensión desviadora*. Esto asegura que la *deformación volumétrica será siempre elástica, (sólido incompresible)* [79]. Para este caso particular, de material *metálico e isotropo*, el **criterio de fluencia plástico** ec.(Ap-1.7) se reduce a :

fig.(Ap-I.3,a): Representación de un criterio de fluencia genérico en el espacio de tensiones principales, o espacio de Westergard.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, J_3, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{Ap-I.9})$$

siendo J_2 y J_3 el segundo y tercer invariante del tensor desviador de tensiones, respectivamente (**anexo-F**).

Para los *materiales friccionales*, es necesario tener en cuenta que las *fuerzas de rozamiento entre partículas* aumentan con la componente normal del tensor de tensiones σ_{ii} (ver también criterio de Mohr-Coulomb **apart. Ap-I.3.f**). Por ello la *resistencia* de estos materiales crece con el aumento de las fuerzas de rozamiento interno, que a su vez vienen influenciadas por la *tensión esférica o hidrostática* (primer invariante del tensor de tensiones I_1), que actúa en la masa del sólido [35]. Tanto el **hormigón** como los **geomateriales** presentan esta característica; por lo tanto deben ser tratados a través de un **criterio límite de discontinuidad** que tenga en cuenta la influencia de I_1 . Esto es :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(I_1, J_2, J_3, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{Ap-I.10})$$

La representación general de las funciones (Ap-I.9) y (Ap-I.10), se realiza mediante una superficie en el *espacio de tensiones*, donde las direcciones principales de éstas, configuran los ejes de referencia. A este espacio se lo denomina *espacio de tensiones de High-Westergard* [44][113]; **fig.(Ap-I.3)**. Otra forma de describir un *criterio de fluencia*, es mediante una descomposición en planos **fig.(Ap-I.3)**. Esto es:

- **Planos octaédricos:** Estos planos cortan en forma ortogonal al *espacio diagonal de tensiones* (recta definida por: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) y por lo tanto forman igual ángulo con los tres *ejes principales de tensión* ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) que definen el *octante de compresión o tracción total*. En estos planos, como es obvio, el *primer invariante del tensor de tensiones* se mantiene constante $I_1 = cte.$; por lo tanto, a través de este invariante se puede conocer *su posición* a partir del origen de tensiones: $\xi = \sqrt{3}\sigma_{oct} = \sqrt{3}(I_1/3) = I_1/\sqrt{3}$. Su forma depende de otros dos invariantes: del *radio octaédrico* $\rho = \sqrt{3}\tau_{oct} = \sqrt{2J_2}$; y del *ángulo de similaridad de Lode* $\theta = \frac{1}{3}\arcsin[(3\sqrt{3} J_3)/(2(J_2)^{3/2})]$. Se denomina plano π al *plano octaédrico* que pasa por el origen del *espacio diagonal* $\xi = 0$. La intersección de estos planos con la superficie de fluencia, define curvas en el espacio de tensiones, que se denominan *funciones de fluencia según planos octaédricos*.
- **Planos meridianos de compresión máxima:** Estos planos son ortogonales a los *planos octaédricos*, y quedan inequívocamente definidos por la recta que describe el *espacio diagonal* ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), y por cada recta que describe el *radio octaédrico* ρ , cuando $\theta = +\frac{1}{6}\pi; +\frac{5}{6}\pi; +\frac{9}{6}\pi$. Estos planos cortan a los ejes de tensiones principales σ_i , en puntos de valor igual al de la tensión de compresión uniaxial σ_C . La intersección de estos planos con la superficie de fluencia, define curvas en el espacio de tensiones, que se denominan *funciones de fluencia según planos meridianos de compresión*.
- **Planos meridianos de tracción máxima:** Estos planos son ortogonales a los *planos octaédricos*, y quedan inequívocamente definidos por la recta que describe el *espacio diagonal* ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), y por cada recta que describe el *radio octaédrico* ρ , cuando

fig.(Ap-I.3,b): Relaciones geométricas entre planos octaédricos, planos meridianos, y plano principal ($\sigma_1 - \sigma_2$); de un criterio de fluencia genérico definido en el espacio de tensiones principales, o espacio de Westergard.

fig.(Ap-I.3,c): Descomposición en planos de un criterio de fluencia genérico.

$\theta = -\frac{1}{6}\pi, -\frac{5}{6}\pi, -\frac{9}{6}\pi$. Dichos planos cortan a los ejes de tensiones principales σ_i , en puntos de valor igual al de la tensión de tracción uniaxial σ_T . La intersección de estos planos con la superficie de fluencia, define curvas en el espacio de tensiones, que se denominan *funciones de fluencia según planos meridianos de tracción*.

- **Planos principales:** Son aquellos que quedan definidos por la intersección de dos, de las tres direcciones de tensión principal. La intersección de estos planos con la superficie de fluencia, define curvas en el espacio de tensiones que se denominan *funciones de fluencia según planos de tensión principal*.

Ap-I.3.c.- Comportamiento más allá del límite de elasticidad – Comportamiento elasto-plástico

Teoría de Levy-Mises:

Una forma de modelar el comportamiento *elasto-plástico* de un punto del sólido es mediante la teoría de **Levy-Mises**. Esta admite, como *primera hipótesis*, que *el incremento temporal de deformación total es igual el incremento temporal de deformación plástica* durante el proceso elasto-plástico. Esta suposición considera que la deformación elástica es próxima a cero, o también que el módulo de Young se hace muy grande en este período ^{[44][58][81]}. Esto es :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \simeq 0 \quad \text{o} \quad E_S \rightarrow \infty \quad (\text{Ap-I.11})$$

Esta teoría también supone, como *segunda hipótesis*, que el *sólido ideal* que se modela es *plásticamente incompresible* $\dot{\epsilon}_v^p = 0$; resultando de aquí y de la hipótesis anterior, que el *incremento temporal del tensor desviador de deformación plástica*, es igual al *incremento temporal del tensor de deformación plástica total*. Esto es :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \dot{\epsilon}_{oct}^p \mathbf{1} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{oct}^p = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (\text{Ap-I.12})$$

con:

$$3\dot{\epsilon}_{oct}^p = \dot{\epsilon}_v^p = 0$$

$$\mathbf{1} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T \quad .$$

resultando de las ec.(Ap-I.11) y (Ap-I.12), para este caso particular:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \equiv \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \equiv \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (\text{Ap-I.13})$$

de esta última expresión se deduce que el sólido ideal de Levy-Mises tiene un *comportamiento elasto-plástico no influenciado por la presión hidrostática* (no depende de I_1).

Un sólido ideal con estas características, se identifica bastante bien con los materiales metálicos, y su comportamiento puede ser descrito por la relación tensión-deformación de Levy-Mises. Esta propone que *los ejes principales de deformación plástica coincidan con los ejes*

principales de tensión, lo que conduce a una proporción constante entre cada componente del *tensor desviador de tensiones* s_{ij} y el de *deformaciones* e_{ij} . Esta *nueva hipótesis* se conoce como *regla de flujo asociada al criterio de fluencia de Von Mises*, (*apart. Ap-I.3.f*). Esto es:

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\lambda} \mathbf{s} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{\epsilon}} = \dot{\lambda} \mathbf{s} \quad (\text{Ap-I.14})$$

siendo:

$\dot{\mathbf{e}}$: *incremento temporal del tensor de deformaciones* ;

$\dot{\mathbf{\epsilon}}$: *incremento temporal del tensor desviador de deformaciones* ;

\mathbf{s} : *tensor desviador de tensiones actualizado* ;

$\dot{\lambda}$: *escalar no negativo que varía a lo largo de la historia de carga.*

-*parámetro de consistencia plástica.*

Teoría de Prandtl-Reus

Otra forma de modelar el comportamiento *elasto-plástico* de un punto del sólido es a través de la teoría de **Prandtl-Reus**. Esta constituye una generalización de la teoría de Levy-Mises, a partir de la hipótesis que considera que el *incremento temporal de deformación total* $\dot{\mathbf{\epsilon}}$, resulta de la contribución de una cuota elástica $\dot{\mathbf{\epsilon}}^e$ más otra plástica $\dot{\mathbf{\epsilon}}^p$ (**ecuación de Prandtl-Reus**) [44][58][81]. Por esto, la ec.(Ap-I.11) quedará :

$$\dot{\mathbf{\epsilon}} = \dot{\mathbf{\epsilon}}^e + \dot{\mathbf{\epsilon}}^p \quad (\text{Ap-I.15})$$

donde el *incremento temporal de deformación elástica* $\dot{\mathbf{\epsilon}}^e$ será obtenido según las leyes de la teoría de la elasticidad (*apart. Ap-I.2.*); y el *incremento temporal del tensor de deformación plástica* $\dot{\mathbf{\epsilon}}^p$ se obtendrá como una *proporción del tensor desviador de tensiones* \mathbf{s} , en cada instante del proceso de cargas. Esta hipótesis se conoce como *regla de flujo de Prandtl-Reus*:

$$\dot{\mathbf{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{s} \quad (\text{Ap-I.16})$$

siendo:

$\dot{\mathbf{\epsilon}}^p$: *incremento temporal del tensor de deformaciones plásticas* ;

\mathbf{s} : *tensor desviador de tensiones actualizado* ;

$\dot{\lambda}$: *escalar no negativo que varía a lo largo de la historia de carga.*

-*parámetro de consistencia plástica.*

para este *material ideal*, (**sólido de Prandtl-Reus**), el parámetro de consistencia plástica $\dot{\lambda}$ tiene un valor particular, que puede ser obtenido en forma inmediata a partir de definir la ec.(Ap-I.16)

en el espacio de tensiones y deformaciones principales:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_1^p &= \dot{\lambda} s_1 \\ \dot{\epsilon}_2^p &= \dot{\lambda} s_2 \\ \dot{\epsilon}_3^p &= \dot{\lambda} s_3\end{aligned}\quad (\text{Ap-I.17})$$

que también puede escribirse como:

$$\begin{aligned}(\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_2^p) &= \dot{\lambda} (s_1 - s_2) \\ (\dot{\epsilon}_2^p - \dot{\epsilon}_3^p) &= \dot{\lambda} (s_2 - s_3) \\ (\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_3^p) &= \dot{\lambda} (s_1 - s_3)\end{aligned}$$

elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro, las ecuaciones anterior, se obtiene:

$$(\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_2^p)^2 + (\dot{\epsilon}_2^p - \dot{\epsilon}_3^p)^2 + (\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_3^p)^2 = \dot{\lambda}^2 [(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_1 - s_3)^2]$$

pero:

$$(s_i - s_j) = \left[\sigma_i - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) \right] - \left[\sigma_j - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) \right] = (\sigma_i - \sigma_j)$$

quedando:

$$(\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_2^p)^2 + (\dot{\epsilon}_2^p - \dot{\epsilon}_3^p)^2 + (\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_3^p)^2 = \dot{\lambda}^2 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$$

$$6 \dot{J}_2^p = \dot{\lambda}^2 6 J_2$$

resultando de aquí el *parámetro de consistencia plástica* buscado:

$$\dot{\lambda} = \sqrt{\frac{\dot{J}_2^p}{J_2}} \quad (\text{Ap-I.18})$$

siendo \dot{J}_2^p el segundo invariante del *incremento temporal del tensor desviador de deformaciones plásticas* $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$; y J_2 el segundo invariante del *tensor desviador de tensiones* \mathbf{s} . De esta forma, la ec. (Ap-I.16) resulta escrita:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{s} = \sqrt{\frac{\dot{J}_2^p}{J_2}} \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{J_2}} \quad (\text{Ap-I.19})$$

La ec.(Ap-1.16) y (Ap-1.19) son una generalización de la ec.(Ap-1.14), pero constituyen en ambos casos, debido a las hipótesis de partida, una particularización de la *regla de flujo generalizada* que será tratada en el apartado siguiente.

Teoría de la plasticidad clásica: Descomposición de la deformación total – Regla de flujo generalizada

Cuando el estado tensional de un punto del sólido ideal alcanza el *criterio de discontinuidad inicial*: $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$, y a la vez cumple con la condición de consistencia plástica: $\dot{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = 0$; se admite, por hipótesis, que este punto se encuentra en estado elasto-plástico. El estudio del comportamiento elasto-plástico, mediante la formulación *clásica general* de la **teoría incremental de la plasticidad** sin degradación de rigidez, comienza por adoptar como válida la hipótesis de **Prandtl-Reus** respecto a la descomposición de la deformación total $\boldsymbol{\epsilon}$,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}_S^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\epsilon}^p = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \quad , \quad (\text{Ap-1.20})$$

y luego define una *regla de flujo generalizada* que considera el *incremento temporal de deformación plástica* $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$, como una *variable interna* tensorial, cuya regla de evolución establece la proporcionalidad entre las componentes de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ y las componentes del **tensor de flujo plástico** \mathbf{g} definido en el espacio de tensiones. Esto es:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{H}_{\boldsymbol{\epsilon}^p}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{g} \quad (\text{Ap-1.21})$$

esta expresión, que también recibe el nombre de **regla de normalidad** (normal a la superficie de potencial plástico $\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$), es una generalización de la ec.(Ap-1.19). En la ec.(Ap-1.21) $\dot{\lambda}$ es un escalar no negativo llamado **parámetro de consistencia plástica** que se determina a partir de la propia *condición de consistencia de Prager* (**apart. Ap-I.3.d**) y que da la *magnitud* del incremento temporal de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$. La *función de potencial plástico* \mathcal{G} se formula a partir de estudios experimentales ^[1] y es la que define la *dirección* del incremento temporal de deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$.

La teoría de la plasticidad considera un caso particular de flujo plástico, cuando por hipótesis se adopta a la *superficie de fluencia plástica* como *superficie de potencial plástico* $\mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$. En este caso particular la ec.(Ap-1.21) se reduce a :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{f} \quad (\text{Ap-1.22})$$

y se dice que se trata de una *regla de flujo asociada a la superficie de fluencia*. En caso contrario se dice que se trata de una *regla de flujo no-asociada a la superficie de fluencia*.

Los geomateriales y los hormigones en particular, necesitan normalmente ser considerados mediante una formulación plástica no-asociada para describir adecuadamente su comportamiento ^{[1][23]}.

Se presenta en el (**anexo-F**) una forma simple y apropiada de definir el tensor de flujo plástico **g** para ser tratada en el **cálculo numérico**. Esta formulación ha sido propuesta originalmente por Nayak-Zienkiewicz ^[88].

Teoría de la plasticidad clásica: Trabajo plástico unitario – Deformación plástica efectiva

El trabajo total desarrollado en una unidad de volumen de un sólido elasto-plástico ideal, durante un pseudo incremento de tiempo ($t \rightarrow t + dt$) ocurrido en un proceso de carga *cuasi-estático*, es conocido con el nombre de *incremento temporal de trabajo unitario o de trabajo específico*; y vale :

$$\dot{w} = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{Ap-1.23})$$

siendo:

$\boldsymbol{\sigma}$: tensor de tensiones actualizado ;

$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$: incremento temporal del tensor de deformaciones totales

La ec.(Ap-1.23) puede ser expresada según la hipótesis de descomposición de deformaciones, ec.(Ap-1.15), como:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \boldsymbol{\sigma}^T (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) , \\ \dot{w} &= \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p , \\ \dot{w} &= \dot{w}^e + \dot{w}^p , \end{aligned} \quad (\text{Ap-1.24})$$

donde \dot{w}^e representa el *incremento temporal de trabajo unitario elástico recuperable* y \dot{w}^p representa el *incremento temporal de trabajo unitario inelástico no-recuperable*, o energía específica disipada, que puede ser expresado como

$$\dot{w}^p = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \left(\frac{1}{3} I_1 \mathbf{1} + \mathbf{s} \right)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{w}_K^p + \dot{w}_G^p \quad (\text{Ap-1.25})$$

siendo:

$$\dot{w}_K^p = \sigma_{oct} \dot{\epsilon}_v^p = \left(\frac{1}{3} I_1 \mathbf{1}\right)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad \text{:incremento temporal}$$

de trabajo plástico unitario volumétrico ,

$$\dot{w}_G^p = \tau_{oct} \dot{\gamma}_{oct}^p = (\mathbf{s})^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad \text{:incremento temporal}$$

de trabajo plástico unitario distorsional ,

$$\mathbf{1} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T \quad .$$

A continuación se deduce para *sólidos metálicos ideales* * (o sólido de Prandtl-Reus) [43][79][81], la expresión del incremento temporal de trabajo unitario. Esto es:

$$\dot{w}^p = \mathbf{s}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{w}_G^p = \tau_{oct} \dot{\gamma}_{oct}^p \quad (Ap-I.26)$$

Sustituyendo la ec.(Ap-I.19) en la ec.(Ap-I.26), se tiene:

$$\dot{w}^p = \frac{1}{\lambda} (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pT} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \sqrt{\frac{J_2}{J_2^p}} (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pT} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \quad (Ap-I.27)$$

siendo :

$$j_2^p = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p) = \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pT} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) ,$$

$$\text{pero : } \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p - \underbrace{\frac{1}{3} \dot{\epsilon}_v^p \delta_{ij}}_{\substack{\text{hip} \\ =0}} ,$$

$$\text{quedando : } j_2^p = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p) = \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pT} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p). \quad (Ap-I.28)$$

* Nota: Características mecánicas más destacadas en los materiales metálicos ideales según las hipótesis de Prandtl-Reus:

–El flujo plástico viene dado por la regla de normalidad de Prandtl-Reus: $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} s_{ij}$.

–El incremento temporal de deformación inelástica volumétrica es nulo $\dot{\epsilon}_v^p = 0$, (material plástico incompresible).

–El incremento temporal de trabajo plástico específico realizado por la presión hidrostática es nulo

$$\dot{w}_K^p = \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \sigma_{oct} \dot{\epsilon}_v^p = 0.$$

Sustituyendo el segundo invariante del *incremento temporal del tensor desviador de deformaciones plásticas* J_2^p , en la ec.(Ap-1.27); resulta el *incremento temporal de trabajo plástico específico* \dot{w}^p , igual a:

$$\dot{w}^p = \sqrt{2J_2} \frac{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pT} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)}{\sqrt{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pT} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)}} = \sqrt{2J_2} \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pT} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)} \quad (\text{Ap-1.29})$$

que constituye una forma de expresar la ec.(Ap-1.25) para el caso particular de materiales metálicos del tipo de *Prandtl-Reus*. Para este material, también se puede presentar el *incremento de trabajo plástico específico* como el producto de una *tensión uniaxial equivalente* $\bar{\sigma}$, por el incremento temporal de una *deformación plástica uniaxial equivalente* $\dot{\bar{\epsilon}}^p$. Para ello conviene relacionar término a término la ec.(Ap-1.21) con la ec.(Ap-1.19), de donde surge para este caso particular el siguiente *tensor de flujo plástico*:

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{s} \quad (\text{Ap-1.30})$$

La *función potencial plástico* que cumple con esta particular relación de flujo, es conocida en la actualidad como la **función de Von Mises** (*apart. Ap-I.3.f*):

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = J_2(\boldsymbol{\sigma}) - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 \quad , \quad (\text{Ap-1.31})$$

donde :

$$\begin{aligned} \kappa &: \text{variable interna de endurecimiento plástico} \quad ; \\ \mathcal{K}(\kappa) &= \text{función de endurecimiento plástico} \\ J_2(\boldsymbol{\sigma}) &= \text{segundo invariante del tensor desviador de tensiones.} \end{aligned}$$

Como se ha visto en la ec.(Ap-1.30), la regla de flujo de Prandtl-Reus, lleva implícita la función potencial (Ap-1.31). Si multiplicamos ambos miembros de la ec.(Ap-1.31) por $\sqrt{3}$, se puede obtener:

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma})} - \sqrt{3} \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad , \quad (\text{Ap-1.32})$$

de donde surge la denominada **tensión efectiva**, o **tensión generalizada**, o **tensión uniaxial equivalente**:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma})} = \sqrt{3} \mathcal{K}(\kappa) \quad , \quad (\text{Ap-1.33})$$

Sustituyendo la ec.(Ap-1.33) en la ec.(Ap-1.29), resulta la siguiente expresión particular del *incremento temporal de trabajo plástico específico* \dot{w}^p , válida solamente para un material del tipo Prandtl-Reus:

$$\dot{w}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma} \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (\text{Ap-1.34})$$

de donde se puede obtener la expresión de la **deformación plástica efectiva**, o también denominada **deformación plástica generalizada**, o **deformación plástica uniaxial equivalente**, para un cierto instante t del proceso elasto-plástico. Esto es:

$$\bar{\epsilon}^p = \int_t \dot{\bar{\epsilon}}^p dt = \int_t \frac{\dot{w}^p}{\bar{\sigma}} dt = \int_t \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dt \quad (\text{Ap-1.35})$$

Conviene observar, que las expresiones (Ap-1.29) y (Ap-1.34) constituyen un caso particular de la ec.(Ap-1.25) para materiales del tipo de Prandtl-Reuss, o Von Mises (**apart. Ap-I.3.c**); por lo tanto la ec.(Ap-1.35) * es *válida solo para materiales ideales con estas características, no siendo generalizable a ningún material que utilice otra función de potencial plástico.*

Teoría de la plasticidad clásica: Superficie de carga plástica – Variable de endurecimiento plástico: κ .

En la **fig.(Ap-1.1)** se describe el comportamiento uniaxial esquemático de un sólido elasto-plástico ideal. En ella se reconocen *cuatro zonas de comportamiento* muy distinto, de las cuales una sigue estrictamente las leyes de la teoría de la elasticidad, y las otras tres se rigen por la teoría de la plasticidad. El límite entre la zona elástica y la plástica se establece mediante la **superficie de fluencia** o **superficie de discontinuidad**, y a partir de allí esta superficie adquiere movilidad en el espacio de tensiones, a medida que evoluciona el proceso plástico, transformandose en la denominada **superficie de carga plástica**. Esta función de carga no es otra cosa que la actualización de la función límite de discontinuidad (Ap-1.7) para cada valor de las variables internas $\mathbf{q}(t)$ correspondiente a cada instante de pseudo tiempo t del proceso elasto-plástico. El fenómeno que gobierna este cambio de posición en el espacio de tensiones, se lo conoce como **endurecimiento plástico**; que puede ser:

* Nota: En condiciones de "carga radial" o "carga proporcional", (o sea cuando se cumple durante todo el proceso de carga la relación $\frac{\sigma_{11}^0}{\sigma_{11}^0} = \frac{\tau_{12}^0}{\tau_{12}^0} = \dots = \frac{\sigma_{33}^0}{\sigma_{33}^0}$ entre las componentes del tensor de tensiones en el estado actual y el estado inicial, respectivamente), se tiene que la ec.(Ap-1.35) se puede escribir:

$$\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} (\boldsymbol{\epsilon}^p)^T \boldsymbol{\epsilon}^p$$

- **Isotrópico:** si hay movimiento homotético de la superficie de carga plástica. A su vez este movimiento puede ser:
 - o *positivo:* Cuando el movimiento homotético de la superficie de carga plástica es de expansión **fig.(Ap-I.4,b)**. En este caso se habla de un *proceso elasto-plástico con endurecimiento isotrópico*.
 - o *nulo:* Cuando la superficie de carga plástica no evoluciona durante el proceso elasto-plástico **fig.(Ap-I.4,a)**. En este caso se habla de un *proceso elasto-plástico perfecto*.
 - o *negativo:* Cuando el movimiento homotético de la superficie de carga plástica es de contracción. En este caso se habla de un *proceso elasto-plástico con ablandamiento isotrópico*.
- **Cinemático:** si hay movimiento de traslación de la superficie de carga plástica. Este comportamiento plástico tiene por objeto emular el fenómeno físico conocido como **efecto Baushinger** ^{[58][79][81]}.

fig.(Ap-I.4): Distintos tipos de endurecimientos considerados por la teoría de la plasticidad.

• El **endurecimiento isotrópico**, movimiento homotético de la función de carga plástica, queda controlado por la evolución de la *función de endurecimiento plástico* $\mathcal{K}(\kappa)$, que depende, de la *variable interna de endurecimiento plástico* κ . La evolución de esta variable interna depende del proceso mismo, y lo hace condicionada por una regla de evolución que se formula explícitamente (*apart. Ap-I.3.a*). Una manera simple de expresar la *función de carga plástica*, resulta de la siguiente particularización de la *ec.(Ap-I.7)*:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad (\text{Ap-I.36})$$

Esta función escalar, se caracteriza por ser homogénea de primer grado en las componentes del tensor de tensión *, y permite relacionar sin ambigüedad la *función de endurecimiento plástico* $\mathcal{K}(\kappa)$ con una *función de tensión uniaxial equivalente* $\bar{\sigma}(\kappa)$ [81] (la función (Ap-1.32) también goza de esta característica). Esta función de endurecimiento depende, durante el proceso de carga, de la *variable interna de endurecimiento plástico* κ , y de su ley de evolución, y puede ser expresada matemáticamente en forma general del siguiente modo:

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} H_{\kappa}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \equiv \dot{\lambda} \left[\mathbf{h}_{\kappa}^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] , \quad (\text{Ap-1.37})$$

$$\dot{\kappa} = \mathbf{h}_{\kappa}^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p .$$

donde $\mathbf{h}_{\kappa}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)$ es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones actualizado y de la variable de endurecimiento plástico también actualizada; que en el caso más simple de la teoría incremental de la plasticidad toma la forma del tensor de tensiones (para una definición más general de la función $\mathbf{h}_{\kappa}^T(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)$, vease (*apart. IV.4.a*)). Esto es:

$$\mathbf{h}_{\kappa}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \equiv \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{Ap-1.38})$$

en esta situación particular, resulta una *variable de endurecimiento plástico* igual al *incremento temporal de trabajo plástico específico*; llamandose por lo tanto **trabajo de endurecimiento plástico específico** ec.(Ap-1.25):

$$\dot{\kappa} = \dot{w}^p = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (\text{Ap-1.39,a})$$

Esta simple regla de endurecimiento puede simplificarse aún más si se modela un material metálico que cumple con las hipótesis de Prandtl-Reus; situación que permite formular en modo alternativo la ec.(Ap-1.39,a), como una *variable de endurecimiento basada en la deformación plástica efectiva*★ ec.(Ap-1.35). Para ello, igualando la ec.(Ap-1.39,a) con la ec.(Ap-1.34), se tiene:

* Nota: $f(\boldsymbol{\sigma})$ es una función homogénea de grado n en las componentes de tensión, siempre que se cumpla: $f(\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma}) \equiv \alpha^n \cdot f(\boldsymbol{\sigma})$

★ Nota: El teorema de Euler, aplicado a funciones $f(\boldsymbol{\sigma})$, homogéneas de grado n en $\boldsymbol{\sigma}$, permite obtener la siguiente transformación: $\{\partial f(\boldsymbol{\sigma})/\partial \boldsymbol{\sigma}\}^T \boldsymbol{\sigma} = n f(\boldsymbol{\sigma})$, y por ello, aplicada a una función homogénea de primer grado en las tensiones, del tipo de la ec.(Ap-1.36), permite escribir: $\{\partial f(\boldsymbol{\sigma})/\partial \boldsymbol{\sigma}\}^T \boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\sigma}) = \mathcal{K}(\kappa)$. Considerando en esta última la ec.(Ap-1.32) (función de Von-Mises tratada como superficie potencial), se obtiene la magnitud de la tensión efectiva: $\{\partial g(\boldsymbol{\sigma})/\partial \boldsymbol{\sigma}\}^T \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{3} \mathcal{K}(\kappa) = \bar{\sigma}$, tal que sustituida en la ec.(Ap-1.39,a), surge para este caso particular la siguiente simplificación en la expresión de la variable de endurecimiento plástico: $\dot{\kappa} = \dot{w}^p = \dot{\lambda} \bar{\sigma}$, donde el parámetro de consistencia plástica vale: $\dot{\lambda} = \dot{\bar{\epsilon}}^p$.

$$\dot{\kappa} = \dot{w}^p = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (\text{Ap-1.39,b})$$

resultando de aquí la nueva variable de endurecimiento, válida solamente para materiales del tipo de Prandtl-Reus:

$$\dot{\kappa}_\epsilon = \dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{\dot{w}^p}{\bar{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} \quad ; \quad (\text{Ap-1.40})$$

Esta regla de evolución de la variable de endurecimiento, formulada en deformaciones efectivas, se puede generalizar para cualquier material ideal, considerando una constante c_κ que se puede determinar a partir de la correspondiente función de potencial plástico \mathcal{G} . Así la ec.(Ap-1.40) queda:

$$\dot{\kappa}_\epsilon = \dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{c_\kappa} \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} \quad (\text{Ap-1.41})$$

• El **endurecimiento cinemático**, movimiento de traslación de la superficie de carga plástica, queda controlado por la *variable interna de endurecimiento plástico cinemático* $\boldsymbol{\eta}$, que define las coordenadas del *centro del dominio elástico* en el espacio de tensiones ^{[43][79][81]}. El continuo cambio de estas coordenadas, durante la evolución del proceso elasto-plástico, provoca un movimiento de traslación de la superficie de fluencia que puede o no combinarse con un movimiento isotrópico de expansión o contracción de la misma. En el caso más general se puede escribir la función de carga plástica ec.(Ap-1.36) como:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\eta}) - \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad (\text{Ap-1.42})$$

siendo:

$$\mathbf{q} = \{\kappa, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\epsilon}^p\}^T \quad : \text{vector de variables internas}$$

La ecuación de evolución de la variable interna $\boldsymbol{\eta}$, que define el centro del dominio elástico para cada instante del proceso cuasi-estático, puede escribirse como:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\beta} \dot{\kappa} \quad (\text{Ap-1.43})$$

Prager y Melan ^{[43][79][81]} propusieron otra ecuación de evolución de $\boldsymbol{\eta}$ más simple, que puede considerarse como un caso particular de la anterior, ya que hace la hipótesis de que esta variable es proporcional al incremento temporal de deformación plástica. Esta regla de evolución considera un *endurecimiento cinemático lineal* ^[81]. Esto es:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = c_\kappa \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (\text{Ap-1.44})$$

siendo en relación a la ec.(Ap-I.43):

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{c_\kappa}{\sqrt{c_\kappa} \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad ,$$

$$\dot{\kappa}_\epsilon = \dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{c_\kappa} \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} \quad ,$$

$c_\kappa =$ constante que depende de la función de potencial plástico.

Teoría de la plasticidad clásica: Relación tensión deformación generalizada

La ley constitutiva elasto-plástica tangente $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ y el parámetro de consistencia plástica $\dot{\lambda}$ pueden ser formulados a partir del criterio general de fluencia plástica o condición de consistencia de Prager (apart. Ap-I.3.d):

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad , \quad (\text{Ap-I.45,a})$$

$$\dot{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \kappa, \dot{\kappa}) = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (\text{Ap-I.45,b})$$

Sustituyendo la ec.(Ap-I.45,a) en la ec.(Ap-I.45,b), se tiene

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = \frac{\partial \mathcal{K}(\kappa)}{\partial \kappa} \dot{\kappa} \quad (\text{Ap-I.46})$$

Sustituyendo la ec.(Ap-I.37) en la ec.(Ap-I.46), resulta:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} (\mathbf{h}_\kappa^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \quad (\text{Ap-I.47})$$

y sustituyendo esta última en la regla de flujo generalizada ec.(Ap-I.21), se tiene:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (\text{Ap-I.48})$$

pero el incremento temporal de tensión, durante un proceso de carga plástica, puede ser escrito como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_S (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \mathbf{D}_S \left(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (\text{Ap-1.49})$$

siendo \mathbf{D}_S el *tensor de rigidez elástico secante del material* ec.(Ap-1.5).

Sustituyendo la ec.(Ap-1.49) en la ec.(Ap-1.48) resulta:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)$$

agrupando términos se obtiene el *parámetro de consistencia plástica*. Esto es:

$$\dot{\lambda} \left\{ \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] - \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] \right\} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{A + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]} \quad (\text{Ap-1.50})$$

siendo:

$\dot{\lambda} \geq 0$: *parámetro de consistencia plástica* ,

$$A = \left[-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} \underbrace{\left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)}_{\bar{\sigma}} \right] : \text{parámetro de endurecimiento plástico} , \quad (\text{Ap-1.51})$$

$\bar{\sigma}$ = *tensión uniaxial efectiva, definida para un genérico material.*

Sustituyendo la ec.(Ap-1.50) en la ec.(Ap-1.49), resulta la siguiente relación incremental de tensión-deformación:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_S \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\left[\mathbf{D}_S \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right] \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \right]}{A + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{Ap-1.52})$$

Pudiéndose escribir, finalmente a partir de esta última, la *ley constitutiva incremental tangente* para un proceso elasto-plástico no-asociado y sin degradación de rigidez. Esto es:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_T^{ep} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{Ap-I.53})$$

siendo \mathbf{D}_T^{ep} el *tensor de rigidez elasto-plástico tangente del material*:

$$\mathbf{D}_T^{ep} = \mathbf{D}_S - \frac{\left[\mathbf{D}_S \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right] \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \right]}{A + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]} \quad (\text{Ap-I.54})$$

este tensor de cuarto orden, escrito en forma de matriz, tiene validez en todo el proceso elasto-plástico. Así, para el caso particular de un proceso puramente elástico, se tiene

que: $-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} = \frac{\partial \mathcal{K}(\kappa)}{\partial \kappa} \rightarrow \infty$, entonces $A \rightarrow \infty$ y por lo tanto $\mathbf{D}_T^{ep} \rightarrow \mathbf{D}_S$.

Ap-I.3.d.- Postulados de estabilidad de DRUCKER – Condiciones de PRAGER

Las definiciones de *material plásticamente estable* dadas por *Drucker* no son más que una generalización al espacio n-dimensional de las conclusiones que se pueden extraer sobre el trabajo plástico desarrollado en un proceso uniaxial causado por un incremento de tensiones bajo la acción de un agente externo. Refiriéndose *exclusivamente a materiales con endurecimiento y flujo asociado* enuncia que un punto de un sólido cargado tiene un comportamiento estable si se cumple lo siguiente ^{[33][43][58][81]}:

Postulado (i): *El trabajo plástico realizado por un agente externo, durante la aplicación de un estado adicional de tensiones, es positivo.*

Postulado (ii): *El trabajo neto ejecutado por un agente externo, durante un ciclo de aplicación y remoción de un estado adicional de tensiones, es no negativo.*

Considerando un punto de un sólido sometido a un estado tensión-deformación previo $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\epsilon}$, que es alterado en $\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ por la acción de un agente externo, se tiene de acuerdo al *postulado(i)*, que la respuesta tensión-deformación del punto es estable si se cumple que el *incremento temporal de trabajo de segundo orden es positivo* **fig.(Ap-I.5,a)**:

$$\begin{aligned} & \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0 \quad , \\ \text{o si :} & \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p > 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{Ap-I.55})$$

fig.(Ap-I.5): Estabilidad e inestabilidad en un material plástico sometido a un proceso uniaxial

y por el *postulado(ii)*, se tiene estabilidad en la respuesta tensión-deformación plástica de un punto si se cumple que *el incremento temporal de trabajo plástico de segundo orden es no negativo* **fig.(Ap-I.5,a) y fig.(Ap-I.5,c)**:

$$\begin{aligned}
 & (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0 \quad , \\
 \text{o :} & \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{Ap-I.56}$$

donde:

$\boldsymbol{\sigma}^*$: Tensión en el punto al inicio del último incremento de carga.

Este estado satisizo en el instante previo la ec.(Ap-I.7) ;

$\boldsymbol{\sigma}$: Tensión en el punto en el estado actual del proceso de carga .

Este estado satisface en el instante actual la ec.(Ap-I.7) ;

$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$: Incremento de deformación plástica, desarrollada

durante el incremento de tiempo t (al concluir el ciclo de carga).

Además de estos dos postulados, *un material con endurecimiento plástico* debe satisfacer

también las *cuatro condiciones de Prager* para asegurar un apropiado comportamiento elasto-plástico. Estas son:

(i) **Condición de continuidad:** Se considera un punto de un sólido, sometido a un estado de tensión $\boldsymbol{\sigma}$ que está situado en la superficie de fluencia, sobre el que se aplica un incremento temporal de tensión $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, fig.(Ap-I.6), proveniente de un incremento en el estado de carga, descarga o carga neutra (según sea que el incremento de tensiones se dirija hacia el exterior, interior o sea tangente a la superficie de fluencia). Para evitar *discontinuidades en la respuesta tensión deformación* la **condición de continuidad** requiere que para estados de carga neutra, no se desarrollen deformaciones plásticas, lo que significa que en este caso particular el parámetro de consistencia plástica de la ec.(Ap-I.50) es nulo $\dot{\lambda} = 0$ ($\partial\mathcal{F}/\partial\boldsymbol{\sigma} \perp \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_S\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$). Situación que conduce a desarrollar un trabajo plástico nulo.

fig.(Ap-I.6): Camino de tensiones seguido durante un incremento de carga

(ii) **Condición de unicidad:** Si sobre un punto del sólido ideal, sometido a un estado previo de tensión-deformación, se aplica un incremento de tensión, resultará un incremento de deformación asociado al de tensión, (y viceversa), que será único. Esta condición queda cumplida siempre que se respeten los dos postulados de Drucker.

(iii) **Condición de irreversibilidad:** Esta exige que el trabajo plástico sea irrecuperable dado el carácter irreversible de las deformaciones plásticas. En otras palabras, esta condición exige que el *trabajo plástico de primer orden* ec.(Ap-I.39) sea siempre positivo cualquiera sea el proceso plástico desarrollado.

$$\dot{w}^p = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p > 0 \quad (\text{Ap-I.57})$$

Esta ecuación, es considerada como un caso particular del segundo principio de la termodinámica ^[104] .

(iv) **Condición de consistencia plástica:** Esta condición dice que bajo condiciones de carga ($\dot{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \geq 0$) , un punto del sólido que se encuentra en estado elasto-plástico, pasa necesariamente a otro estado elasto-plástico. Matemáticamente esto es:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad , \quad (\text{Ap-1.58,a})$$

$$\dot{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (\text{Ap-1.58,b})$$

Es importante notar, que si un punto del sólido tiene un comportamiento con endurecimiento negativo (ablandamiento), no cumple con el segundo postulado de Drucker, *ec.(Ap-1.56) fig.(Ap-1.6)*, por lo tanto, según este postulado se trataría de un comportamiento inestable a nivel del punto, o inestable localmente. No obstante, esto no implica que *necesariamente* se trate de un proceso inestable para todo el sólido (condición de estabilidad global, *apen. II*); por lo tanto el segundo postulado de Drucker será considerado solo como una *condición suficiente de estabilidad global*. Otros comentarios sobre la estabilidad de un proceso elasto-plástico pueden ser consultados en las referencias ^{[5][7][11][67][104][140]}.

Ap-I.3.e.- Condiciones de KUHN-TUCKER en plasticidad.

La *condición de carga-descarga* y la *condición de consistencia plástica de Prager*, se satisfacen simultáneamente mediante las tres *condiciones de Kuhn-Tucker* ^[131] , que es otra forma de presentar el axioma de la máxima disipación plástica MDP (*apart. IV.8.f*):

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (\text{Ap-1.58,c})$$

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (\text{Ap-1.58,d})$$

$$\dot{\lambda} \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{Ap-1.58,e})$$

De estas tres condiciones se deduce que:

- 1- Si $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0$, la *condición de fluencia plástica* no se satisface y se desarrolla un proceso puramente elástico, por lo tanto, de la tercera condición de Kuhn-Tucker *ec.(Ap-1.58,e)* se obtiene que $\dot{\lambda} = 0$, de donde se deduce que las *variables plásticas internas* no evolucionan $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{(t)}, \mathbf{q}_{(t)}) = \mathbf{0}$ (*apart. Ap-I.3.a*), (particularmente se tiene que $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \mathbf{0}$).
- 2- Si $\dot{\lambda} > 0$, se deduce a partir de la tercera condición de Kuhn-Tucker *ec.(Ap-1.58,e)* que el proceso debe satisfacer necesariamente la *condición de fluencia plástica* $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$, significando que se trata de un estado de *carga* elasto-plástico
- 3- Si $\dot{\lambda} = 0$, se deduce a partir de la tercera condición de Kuhn-Tucker *ec.(Ap-1.58,e)* que $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0$. Para este caso particular se pueden presentar dos situaciones distintas: Un proceso de *carga nula* donde $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$, o Un proceso de *descarga elástico* donde $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0$.

Ap-I.3.f.- Criterios clásicos de fluencia, o discontinuidad, plástica.

Se han formulado en los últimos años una gran cantidad de *criterios de fluencia, o discontinuidad plástica*, con el fin de mejorar la simulación del comportamiento mecánico de los sólidos ideales dentro de un cierto rango de trabajo. Hay criterios más aptos para reproducir el funcionamiento *tenso-deformacional* de los *materiales metálicos* y otros que funcionan mejor para los *geomateriales*. En general estos criterios deberían considerar las siguientes características básicas de comportamiento:

- Los **materiales metálicos** tienen una resistencia a tracción y compresión del mismo orden de magnitud. La presión hidrostática, (primer invariante del tensor de tensiones I_1), influye muy poco en la determinación del estado de fluencia plástica. Los cambios de volumen permanente son despreciables (incremento temporal de deformación volumétrica permanente, dilatancia, nula $\dot{\epsilon}_v^p = 0$); lo que significa que la forma y tamaño de una sección transversal de la superficie de fluencia (plano octaédrico), se mantiene inalterada tanto a bajas como altas tensiones (no depende del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3), (ej.: forma cilíndrica: superficie de *Von Mises* que será estudiada más adelante en este mismo apartado). El incremento temporal de deformación plástica $\dot{\epsilon}^p$ depende del tensor desviador de tensiones \mathbf{s} en cada instante del proceso de carga cuasi-estático; pudiéndose usar satisfactoriamente la regla de flujo de *Prandtl-Reus* ec.(Ap-1.16), que es lo mismo que utilizar la forma general de la regla de flujo ec.(Ap-1.21), con una función de potencial plástico del tipo de la de *Von Mises* ec.(Ap-1.31). En este caso particular, el tensor de flujo plástico $\mathbf{g} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$, es proporcional a \mathbf{s} .
- Los **materiales friccionales del tipo de los hormigones pétreos** tienen menor resistencia a tracción que a compresión. La presión hidrostática influye mucho en la *condición de fluencia plástica* para tensiones bajas y moderadas, en cambio comienza a perder importancia en altas tensiones hidrostáticas. El sólido sufre cambios de volumen irreversibles exhibiendo el fenómeno de dilatancia $\dot{\epsilon}_v^p \neq 0$. La forma y dimensiones de una sección transversal de la superficie de fluencia (plano octaédrico), es distinta a bajas que a altas tensiones, pasando de una forma casi triangular a otra circular, respectivamente (para bajas presiones hidrostáticas depende del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3 y se independiza de él en altas presiones). La deformación plástica tiene una dirección distinta a la que da el gradiente de la superficie de fluencia, siendo necesario formular una superficie de potencial plástico distinta a la de fluencia plástica (plasticidad no-asociada). En estos materiales, y a diferencia de los metales, el criterio de fluencia depende, entre otras, de tres variables: la *cohesión interna* entre partículas c , el *rozamiento interno* entre partículas ϕ y la *dilatancia interna* ψ . Estas pueden ser tratadas como variables internas del proceso mismo, o también expresadas como una función formulada en forma explícita que depende de la evolución de las variables internas $\dot{\mathbf{q}}$ (ej.: en la ec.(Ap-1.36) la *función de endurecimiento plástico* $\mathcal{K}(\kappa)$ está expresada como una función explícita que depende, entre otras, de la *variable interna de endurecimiento plástico* κ).

De esta breve descripción surge la necesidad de formular distintos criterios de fluencia y potencial plástico que permitan considerar los requisitos exigidos por cada tipo de material ideal. A continuación, se describen algunos criterios clásicos de fluencia plástica.

Criterio de fluencia plástica de Rankine – De máxima tensión de tracción.

Este criterio fué formulado por Rankine en 1876 y forma parte de los criterios que dependen de un solo parámetro, la máxima resistencia uniaxial de tracción σ_T^{max} . Incluye en su formulación el primer invariante del tensor de tensiones: I_1 y el segundo y tercer invariante del tensor desviador de tensiones: J_2 y J_3 , respectivamente.

Actualmente se lo suele utilizar en procesos de tracción para establecer el límite donde se inicia el fenómeno de fractura frágil en los hormigones; hipótesis que conduce a suponer que la fractura ocurre cuando la máxima tensión principal, en un punto, alcanza el valor de la máxima resistencia uniaxial a tracción $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}(\kappa_0) = \sigma_T^{max}$. La expresión matemática que describe esta función en el espacio de tensiones principales es:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_T^{max}) = \max. [\sigma_i] - \sigma_T^{max} = 0 \quad (\text{Ap-1.59})$$

o bien, en función de los invariantes del tensor de tensiones y de su desviador:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(I_1, J_2, \theta, \sigma_T^{max}) = 2 \sqrt{3} J_2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + I_1 - 3 \sigma_T^{max} = 0 \quad (\text{Ap-1.60})$$

o también, a partir de los invariantes definidos en el espacio de Westergard según las *coordenadas octaédricas* **fig.(Ap-1.7)**:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho, \xi, \theta, \sigma_T^{max}) = \sqrt{2} \rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \xi - \sqrt{3} \sigma_T^{max} = 0 \quad (\text{Ap-1.61})$$

Cualquiera de estas tres expresiones matemáticas describe en el *espacio de tensiones principales* una pirámide de base triangular **fig.(Ap-1.7,a)**. En el *plano octaédrico o desviador*, un triángulo equilátero **fig.(Ap-1.7,c)**. En el *plano meridiano de tracción máxima*, ($\theta = -\frac{\pi}{6}$), una recta de pendiente $1/\sqrt{2}$ y en el *plano meridiano de compresión máxima*, ($\theta = +\frac{\pi}{6}$), una recta de pendiente $\sqrt{2}$ **fig.(Ap-1.7,b)**; ambas rectas meridianas se encuentran en un punto del eje de tensiones hidrostáticas ξ a una distancia del origen: $\xi^0 = \sqrt{3} \sigma_T^{max}$, y cortan al eje de tensión octaédrica de corte ρ en: $\rho_T^0 = \sqrt{3/2} \sigma_T^{max}$ y en: $\rho_C^0 = -\sqrt{6} \sigma_T^{max}$ **fig.(Ap-1.7,b)**.

fig.(Ap-I.7): Criterio de fluencia de Rankine:

- a) En el espacio de tensiones principales o espacio de Westergard;
- b) Según los meridianos de tracción y compresión máxima.
- c) Según el plano octaédrico $I_1 = 0$ o plano π ;

fig.(Ap-I.7): Criterio de fluencia de Rankine:

d) Según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

Normalmente se utiliza el criterio de Rankine como un *criterio de barrera tensional*, para limitar la máxima tensión de tracción que puede soportar un punto del sólido **fig.(Ap-I.7,d)**. Combinado éste con otros criterios de discontinuidad que permiten simular mejor el comportamiento a compresión, puede ser utilizado para tratar materiales del tipo del hormigón.

Criterio de fluencia plástica de Tresca – De máxima tensión cortante.

Este criterio fué formulado por Tresca en 1864, y forma parte de los criterios de fluencia que dependen de un solo parámetro, la máxima resistencia al corte τ^{max} .

El criterio de Tresca incluye en su formulación el segundo y tercer invariante del tensor desviador de tensiones: J_2 y J_3 , respectivamente, e ignora la influencia del primer invariante del tensor de tensiones I_1 , permitiendo simular un comportamiento que se aproxima bastante al de los metales. De acuerdo con este criterio, se alcanza la fluencia plástica cuando el valor de la función de endurecimiento plástico $\mathcal{K}'_0 = \mathcal{K}'(\kappa_0)$, que tiene el significado de una tensión cortante escalada, alcanza la máxima tensión de corte puro τ^{max} .

La forma matemática de expresar el criterio de fluencia plástica de Tresca, en el espacio de tensiones principales, es:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{K}') = \max. \left[\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| \right] - \mathcal{K}'(\kappa) = 0 \quad (\text{Ap-1.62})$$

siendo $\mathcal{K}'(\kappa)$ una función de tensión de corte puro *. También puede expresarse la ec.(Ap-1.62) en función de los invariantes del tensor desviador de tensiones como:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, \theta, \mathcal{K}') = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \theta - \mathcal{K}'(\kappa) = 0 \quad (\text{Ap-1.63})$$

* Nota: Esto se puede ver expresando los tensores $\boldsymbol{\sigma}$ y \boldsymbol{s} , en el espacio de tensiones principales, para un estado plano de corte puro $\sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_1$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_1 \end{bmatrix}, \text{ pero: } I_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \sigma_1 \\ s_3 = -s_1 = \sigma_3 = -\sigma_1 \end{cases}$$

sustituyendo este estado de tensiones en la ec.(Ap-1.62), resulta

$$\mathcal{F} = \left[\frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| \right] - \mathcal{K}'(\kappa) = 0,$$

$$\mathcal{F} = \left[\frac{1}{2} |-s_1 - s_1| \right] - \mathcal{K}'(\kappa) = 0,$$

$$\mathcal{F} = |-s_1| - \mathcal{K}'(\kappa) = s_1 - \mathcal{K}'(\kappa) = 0.$$

fig.(Ap-I.8): Criterio de fluencia de Tresca:

- a) En el espacio de tensiones principales o espacio de Westergard;
- b) Según los meridianos de tracción y compresión máxima.

fig.(Ap-I.8): Criterio de fluencia de Tresca:
c) Según el plano octaédrico $I_1 = 0$ o plano π ;
d) Según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

Si multiplicamos por $2\sqrt{3}$ la ecuación anterior, se obtiene el criterio de Tresca expresado en valores de *tensión uniaxial efectiva* $\bar{\sigma}$, en vez de la tensión de corte puro \mathcal{K}' . Esto permite utilizar una función de endurecimiento plástico $\bar{\sigma}(\kappa)$ obtenida de un ensayo a tracción o compresión uniaxial:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, \theta, \mathcal{K}') = 2\sqrt{J_2} \cos \theta - \sqrt{3} \underbrace{[2\mathcal{K}'(\kappa)]}_{\mathcal{K}(\kappa)} = 0, \quad (\text{Ap-1.64})$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, \theta, \bar{\sigma}) = 2\sqrt{J_2} \cos \theta - \bar{\sigma}(\kappa) = 0.$$

o también puede ser expresada en función de los invariantes definidos en el espacio de *Westergard*, según las *coordenadas octaédricas*, como:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho, \theta, \bar{\sigma}) = \rho \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\sigma}(\kappa) = 0 \quad (\text{Ap-1.65})$$

Como se pudo ver, el primer invariante del tensor de tensiones no interviene en la formulación de las expresiones que definen este criterio de fluencia, por lo tanto el *plano octaédrico* se mantiene constante e igual al plano π cualquiera sea la tensión media: $\sigma_{oct} = \sigma_m = \frac{I_1}{3}$; describiendo en el *espacio de tensiones principales* un prisma de base hexagonal orientado según el eje de presiones hidrostáticas ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) **fig.(Ap-1.8,a)**. En el *plano octaédrico* o desviador representa un hexágono regular **fig.(Ap-1.8,c)**. De la intersección del *plano meridiano de tracción*, ($\theta = -\frac{\pi}{6}$), con la superficie de fluencia surge una recta de pendiente nula, paralela a la que resulta de la intersección del *plano meridiano de compresión*, ($\theta = +\frac{\pi}{6}$), con la superficie de fluencia; ambas rectas meridianas cortan al eje de tensión de

corte octaédrica en $\rho_C^0 = \rho_T^0 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma}(\kappa)$ **fig.(Ap-1.8,b)**. En el *plano* $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$ representa

un hexágono deformado según el eje de tensiones $\sigma_1 = \sigma_3$ **fig.(Ap-1.8,d)**.

El criterio de Tresca se utiliza normalmente para estudiar problemas de plasticidad en materiales metálicos.

Criterio de fluencia plástica de Von Mises – De tensión cortante octaédrica.

Este criterio fué formulado por Von Mises en 1913 y forma parte de los criterios que dependen de un solo parámetro, la máxima resistencia de corte octaédrica, τ_{oct} .

El criterio de Von Mises incluye en su formulación solamente el segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2 , y es independiente del primer invariante del tensor de tensiones I_1 y del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3 . De acuerdo con este criterio, un punto del sólido alcanza la situación de fluencia plástica cuando el valor de la función de endurecimiento plástico $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}(\kappa_0)$, que tiene el significado de una tensión

cortante escalada, alcanza la máxima tensión de corte octaédrica, τ_{oct} .

Este criterio puede escribirse matemáticamente como:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{K}) = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 \quad (\text{Ap-1.66})$$

siendo $\mathcal{K}(\kappa)$ una función de tensión cortante *. También a partir de esta última ecuación se puede deducir la relación que hay entre la *tensión uniaxial efectiva* $\bar{\sigma}$ y la tensión de corte \mathcal{K} . Para ello consideremos un estado de tracción simple y arbitrario en el espacio de tensiones principales: $\sigma_1 = \bar{\sigma}_T = \bar{\sigma}_C = \bar{\sigma}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, que sustituido en la ec.(Ap-1.66) da:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_1)^2 + (\sigma_1)^2 \right] - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 \quad , \\ \mathcal{F} &= \frac{1}{6} \left[2 (\bar{\sigma})^2 \right] - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 \quad , \quad (\text{Ap-1.68}) \\ \bar{\sigma}(\kappa) &= \sqrt{3} \mathcal{K}(\kappa) \end{aligned}$$

Sustituyendo la ec.(Ap-1.67) en esta última, resulta la conocida *tensión uniaxial efectiva*, o *tensión uniaxial generalizada*, o *tensión uniaxial equivalente*:

$$\bar{\sigma}(\kappa) = \sqrt{3} \mathcal{K}(\kappa) = \sqrt{3} s_1 \quad (\text{Ap-1.69})$$

Otra forma de expresar la función matemática que describe este criterio de fluencia plástica, resulta de formular la ec.(Ap-1.66) en función del segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2 . Esto es:

$$J_2 - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 \quad , \quad (\text{Ap-1.70})$$

* Nota: Considerando en el espacio de tensiones principales, un arbitrario estado plano de corte puro $\sigma_1, \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_1$ y sustituyendo este estado de tensiones en la ec.(Ap-1.66) y considerando que $s_1 = \sigma_1$; $s_3 = -s_1 = \sigma_3 = -\sigma_1$ (ver pié de pág. criterio de Tresca), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_1)^2 + (-\sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 \quad , \\ \mathcal{F} &= \frac{1}{6} \left[(s_1)^2 + (-s_1)^2 + (-s_1 - s_1)^2 \right] - \mathcal{K}^2(\kappa) = 0 \quad , \quad (\text{Ap-1.67}) \\ \mathcal{F} &= s_1 - \mathcal{K}(\kappa) = 0 \end{aligned}$$

siendo inmediato de aquí presentarla en su forma más conocida:

$$\sqrt{J_2} - \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad , \quad (\text{Ap-1.71})$$

o también, a partir de esta última ecuación se puede formular este criterio en función de la tensión cortante octaédrica, razón por la cual lleva el nombre de criterio de la máxima tensión de corte octaédrica. Esto es:

$$\tau_{oct} \equiv \sqrt{\frac{2}{3} J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{K}(\kappa) \quad (\text{Ap-1.72})$$

Otra manera de formular el criterio de fluencia de Von Mises, es en función de la *tensión uniaxial efectiva*. Sustituyendo la ec.(Ap-1.68) en la ec.(Ap-1.71) resulta:

$$\sqrt{3} J_2 - \bar{\sigma}(\kappa) = 0 \quad (\text{Ap-1.73})$$

A partir de la ec.(Ap-1.72) se puede representar también el criterio de Von Mises en función de los invariantes definidos en el espacio de Westergard según las *coordenadas octaédricas* como:

$$\frac{\rho}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \mathcal{K}(\kappa) = 0 \quad , \quad (\text{Ap-1.74})$$

o multiplicando ambos sumandos por $\sqrt{3}$, resulta:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \rho - \sqrt{2} \sqrt{3} \mathcal{K}(\kappa) &= 0 \quad , \\ \sqrt{3} \rho - \sqrt{2} \bar{\sigma}(\kappa) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Ap-1.75})$$

fig.(Ap-I.9): Criterio de fluencia de Von Mises:

- a) En el espacio de tensiones principales o espacio de Westergard;
- b) Según los meridianos de tracción y compresión máxima.

fig.(Ap-I.9): Criterio de fluencia de Von Mises:
c) Según el plano octaédrico $I_1 = 0$ o plano π ;
d) Según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

De las distintas formas de presentar el criterio de fluencia de Von Mises, se puede ver que en el *espacio de tensiones principales* dicho criterio representa un cilindro cuyo eje coincide con el eje de presión hidrostática ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) **fig.(Ap-I.9,a)**. Esto se debe a que en el *plano octaédrico* o desviador representa una circunferencia que mantiene constante su diámetro cualquiera sea el valor de I_1 , ya que es independiente de la influencia de la presión hidrostática **fig.(Ap-I.9,c)**. De la intersección del *plano meridiano de tracción máxima*, ($\theta = -\frac{\pi}{6}$), con la superficie de fluencia plástica se obtiene una recta, de pendiente nula, paralela a la que resulta de la intersección con el *plano meridiano de compresión máxima*, ($\theta = +\frac{\pi}{6}$); ambas rectas

cortan al eje de tensión de corte octaédrica en: $\rho_C^0 = \rho_T^0 = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma}(\kappa)$ **fig.(Ap-I.9,b)**. En el *plano* $\sigma_1, \sigma_2 = 0, \sigma_3$ representa una elipse que tiene su radio mayor orientado según el eje de tensiones $\sigma_1 = \sigma_3$ **fig.(Ap-I.9,d)**. La función de esta elipse surge de sustituir un estado de tensión plano $\sigma_1, \sigma_2 = 0, \sigma_3$ en la ec.(Ap-I.66). Esto es:

$$\left[(\sigma_1 - 0)^2 + (0 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = 6 \mathcal{K}^2(\kappa) \quad (\text{Ap-I.76})$$

sustituyendo en ésta la ec.(Ap-I.68) se tiene:

$$2 \sigma_1^2 - 2 \sigma_1 \sigma_3 + 2 \sigma_3^2 = 6 \mathcal{K}^2(\kappa) = 2 \bar{\sigma}^2 \quad (\text{Ap-I.77})$$

Reordenando esta última, se puede presentar la ecuación de la elipse de Von Mises como:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}} \right) \left(\frac{\sigma_3}{\bar{\sigma}} \right) + \left(\frac{\sigma_3}{\bar{\sigma}} \right)^2 = 1 \quad (\text{Ap-I.78})$$

La diferencia fundamental entre el criterio de Tresca y el de Von Mises, radica en la forma de considerar los estados tensionales de corte puro:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{de la ec.(Ap-I.65), para TRESCA: } \rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\sigma}(\kappa) \quad ; \text{ para } \theta = 0 \quad , \\ \text{de la ec.(Ap-I.75), para Von MISES: } \rho^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma}(\kappa) \quad ; \forall \quad \theta \quad , \end{array} \right. \quad (\text{Ap-I.79})$$

tal que la relación de proporción entre ambos *radios octaédricos* es de:

$$\frac{(\rho^0)_{Mises}}{(\rho^0)_{Tresca}} = 1.154700538 \dots \quad (\text{Ap-I.80})$$

siendo más acertado para los materiales metálicos el radio octaédrico previsto por Von Mises.

En estudios numéricos sobre hormigones, llevados a cabo por M. Suidan and W. Schnobrich [135], se utilizó el criterio de fluencia de Von Mises para tratar el material a compresión, combinado con el criterio de Rankine para considerar el comportamiento a tracción (Von Mises con disminución de la tensión límite de tracción). Sobre la combinación de criterios de fluencia plástica, ver (*apart. Ap-I.3.g*).

Criterio de fluencia plástica de Mohr-Coulomb – De tensión cortante octaédrica.

Este criterio, formulado por Coulomb en 1773 y desarrollado en profundidad por Mohr en 1882, forma parte de los criterios que dependen de dos parámetros, siendo éstos la *cohesión interna* entre partículas del sólido c y el *rozamiento interno* entre ellas, medido por el ángulo ϕ . Incluye en su expresión matemática el segundo y tercer invariante del tensor desviador de tensiones: J_2 y J_3 , respectivamente, y a diferencia de los criterios utilizados en materiales metálicos depende del primer invariante del tensor de tensiones I_1 . Esto se debe a que al ser un criterio de fluencia basado en el concepto del rozamiento entre partículas, la fuerza de rozamiento interna desarrollada entre ellas crece con el aumento de la presión en la masa del sólido. Esto es:

$$|\tau| = f(\sigma_m) \quad (\text{Ap-I.81})$$

siendo:

τ : Tensión cortante que se desarrolla en el plano de fallo ,

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} : \text{Tensión media u octaédrica.}$$

En el caso uniaxial representa la tensión normal al plano de fallo σ_n .

A partir de esta idea básica surge el criterio de fallo de Coulomb como:

$$|\tau| = c + \sigma_n \tan \phi \quad (\text{Ap-I.82})$$

siendo:

c : Cohesión interna entre partículas del sólido ,

ϕ : Ángulo de rozamiento interno entre partículas del sólido.

En el caso extremo en que el ángulo de rozamiento interno sea nulo, $\phi = 0$, este criterio de fluencia se transforma en el de Tresca: $\tau = c = \mathcal{K}'$ **fig.(Ap-I.11,d)**, y con ello se convierte en un criterio de máxima tensión de corte.

Representando la *ec.(Ap-1.82)* en el espacio $\tau-\sigma_n$ **fig.(Ap-1.10)**, resultan dos rectas tangentes a los círculos de máxima tensión principal de Mohr. De aquí se tiene que el estado de fluencia plástica se alcanza cuando el estado de tensiones hace que el círculo de Mohr toque las dos rectas envolventes descritas por la *ec.(Ap-1.82)*.

fig.(Ap-1.10): Relación entre las tensiones principales y el criterio de Mohr-Coulomb

A partir de la **fig.(Ap-1.10)** se puede reescribir la *ec.(Ap-1.82)* del siguiente modo:

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) \cos \phi = c + \left[-\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) \sin \phi \right] \tan \phi \quad (\text{Ap-1.83})$$

Reordenando algebraicamente esta ecuación, queda:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c, \phi) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (\text{Ap-1.84})$$

siendo:

- σ_1 : Tensión principal mayor ,
- σ_3 : Tensión principal menor ,
- c : Cohesión interna entre partículas del sólido ,
- ϕ : Ángulo de rozamiento interno entre partículas del sólido.

De la ec.(Ap-1.84) se deduce que el criterio de Mohr-Coulomb ignora el efecto de la tensión principal intermedia σ_2 , lo que es un inconveniente para la definición del criterio de fluencia en función de las tres tensiones principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. No obstante, este problema queda resuelto si se escribe su expresión matemática en función del primer invariante del tensor de tensiones I_1 , del segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2 y del ángulo θ que depende de J_2 y J_3 , definiendo así , en forma inequívoca, la posición del estado tensional en el espacio de tensiones principales. Esto es:

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \theta, c, \phi) = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_2} \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) - c \cos \phi = 0 \quad (\text{Ap-1.85})$$

o idénticamente, se puede presentar en función de los invariantes definidos en el espacio de Westergard:

$$\mathcal{F}(\rho, \xi, \theta, c, \phi) = \sqrt{2} \xi \sin \phi + \sqrt{3} \rho \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) - \sqrt{6} c \cos \phi = 0 \quad (\text{Ap-1.86})$$

Se puede ver en las ecs.(Ap-1.84), (Ap-1.85) y (Ap-1.86), que el criterio de Mohr-Coulomb representa en el *espacio de tensiones principales una pirámide de base hexagonal distorsionada*, con eje coincidente con el de presión hidrostática $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$ **fig.(Ap-1.11,a)**. Esto se debe a que en el *plano octaédrico* representa un hexágono deformado que crece a medida que se incrementa la presión hidrostática $\sigma_{oct} = \frac{I_1}{3}$ **fig.(Ap-1.11,c)**. De la intersección del *plano meridiano de tracción máxima*, $(\theta = -\frac{\pi}{6})$, con la superficie de fluencia resulta una recta de

pendiente: $\frac{2\sqrt{2} \sin \phi}{3 + \sin \phi}$, que corta el eje de tensión cortante octaédrica en: $\rho_T^0 = \frac{2c \sqrt{6} \cos \phi}{3 + \sin \phi}$ y

al eje de tensión normal octaédrica en: $\xi^0 = \sqrt{3} c \cot \phi$. De la intersección del *plano meridiano de compresión máxima*, $(\theta = +\frac{\pi}{6})$, con la superficie de fluencia resulta una recta de

pendiente mayor que el meridiano de tracción: $\frac{2\sqrt{2} \sin \phi}{3 - \sin \phi}$, que corta el eje de tensión cortante

octaédrica en: $\rho_C^0 = \frac{2c\sqrt{6}\cos\phi}{3-\sin\phi}$ y al eje de tensión normal octaédrica en el mismo punto que el meridiano de tracción **fig.(Ap-I.11,b)**. En el plano $\sigma_1, \sigma_2 = 0, \sigma_3$ representa un hexágono deformado que se orienta según el eje de tensiones $\sigma_1 = \sigma_3$ **fig.(Ap-I.11,d)**.

De las funciones que describen el criterio de fluencia de Mohr-Coulomb y de la **fig.(Ap-I.11)**, resulta claro que este criterio trata en forma diferenciada el comportamiento tensional a tracción y a compresión, admitiendo una relación entre resistencias uniaxiales $R_{Mohr} = |\sigma_C^0|/|\sigma_T^0|$, que solo depende de la magnitud del ángulo de rozamiento interno ϕ **fig.(Ap-I.11,d)**. Esto se puede comprobar escribiendo la *ec.(Ap-I.84)* a partir de la convención: $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$, por lo tanto $\sigma^{max} = \sigma_1$, y $\sigma^{min} = \sigma_3$:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \sigma_1 \frac{(1 + \sin\phi)}{(1 - \sin\phi)} - 2c \frac{\cos\phi}{(1 - \sin\phi)} \quad , \\ \sigma_3 &= \sigma_1 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) - 2c \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad , \quad (Ap-I.87) \\ \sigma^{min} &= \sigma^{max} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) - 2c \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad , \end{aligned}$$

pero haciendo:

$$R_{Mohr} = \frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad , \quad (Ap-I.88)$$

resulta la siguiente expresión del criterio de Mohr-Coulomb :

$$\sigma^{min} = \sigma^{max} R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \quad (Ap-I.89)$$

Puesto que las tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ pueden ir tomando, de una a la vez, los valores de σ^{max} y σ^{min} , resultan de la *ec.(Ap-I.89)* seis planos en el espacio de tensiones principales, que establecen las seis condiciones de fluencia plástica que delimitan el dominio piramidal del criterio de Mohr-Coulomb. Para expresar estas seis condiciones se estudiará el caso particular de un problema plano, con $\sigma_2 = 0$ **fig.(Ap-I.11,d)**, que permitirá obtener seis ecuaciones de rectas que demarquen el dominio de este criterio en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$. Esto es:

- o **Condición 1-(Tracción-Compresión)**. Para $\sigma_3 = \sigma^{min} \leq 0 \leq \sigma_1 = \sigma^{max}$, resulta de la *ec.(Ap-I.89)*:

$$-\sigma_3 = \sigma_1 R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Para: } \sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{2c}{\sqrt{R_{Mohr}}} \\ \text{Para: } \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = 2c \sqrt{R_{Mohr}} \end{cases} \quad (Ap-I.90)$$

fig.(Ap-I.11): Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb:

- a) En el espacio de tensiones principales o espacio de Westergard;
- b) Según los meridianos de tracción y compresión máxima.

- fig.(Ap-I.11): Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb:
- c) Según el plano octaédrico $I_1 = 0$ o plano π ;
 - d) Según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

- o **Condición 2**-(Compresión-Compresión). Para $\sigma_3 = \sigma^{min} \leq \sigma_1 = \sigma^{max} \leq 0$, resulta de la ec.(Ap-I.89):

$$-\sigma_3 = -\sigma_1 R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para: } \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = 2c\sqrt{R_{Mohr}} \end{array} \right. \quad (Ap-I.91)$$

- o **Condición 3**-(Compresión-Compresión). Para $\sigma_1 = \sigma^{min} \leq \sigma_3 = \sigma^{max} \leq 0$, resulta de la ec.(Ap-I.89):

$$-\sigma_1 = -\sigma_3 R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para: } \sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 2c\sqrt{R_{Mohr}} \end{array} \right. \quad (Ap-I.92)$$

- o **Condición 4**-(Compresión-Tracción). Para $\sigma_1 = \sigma^{min} \leq 0 \leq \sigma_3 = \sigma^{max}$, resulta de la ec.(Ap-I.89):

$$-\sigma_1 = \sigma_3 R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para: } \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = \frac{2c}{\sqrt{R_{Mohr}}} \\ \text{Para: } \sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 2c\sqrt{R_{Mohr}} \end{array} \right. \quad (Ap-I.93)$$

- o **Condición 5**-(Tracción-Tracción). Para $0 \leq \sigma_1 = \sigma^{min} \leq \sigma_3 = \sigma^{max}$, resulta de la ec.(Ap-I.89):

$$\sigma_1 = \sigma_3 R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para: } \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = \frac{2c}{\sqrt{R_{Mohr}}} \end{array} \right. \quad (Ap-I.94)$$

- o **Condición 6**-(Tracción-Tracción). Para $0 \leq \sigma_3 = \sigma^{min} \leq \sigma_1 = \sigma^{max}$, resulta de la ec.(Ap-I.89):

$$\sigma_3 = \sigma_1 R_{Mohr} - 2c \sqrt{R_{Mohr}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para: } \sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{2c}{\sqrt{R_{Mohr}}} \end{array} \right. \quad (Ap-I.95)$$

A partir de estas condiciones de fluencia, se puede verificar la relación entre resistencias uniaxiales a compresión y tracción ec.(Ap-I.88). Por ejemplo, a partir de la ec.(Ap-I.90) se tiene:

$$\sigma_1 = \sigma^{max} = \frac{2c}{\sqrt{R_{Mohr}}} ; \sigma_3 = \sigma^{min} = 2c\sqrt{R_{Mohr}} , \quad (Ap-1.96)$$

y de aquí resulta:

$$2c = \sigma^{max} \sqrt{R_{Mohr}} = \frac{\sigma^{min}}{\sqrt{R_{Mohr}}} \Rightarrow R_{Mohr} = \frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|} \quad (Ap-1.97)$$

Entre las principales desventajas que presenta el uso de este criterio de fluencia plástica, se pueden mencionar:

- No tiene en cuenta la influencia de la tensión principal intermedia σ_2 , resultando un material con igual resistencia para un estado de compresión biaxial simétrico, que para un estado de compresión uniaxial simple. Los ensayos físicos [74][136], muestran que para alcanzar la resistencia máxima en un estado de compresión biaxial simétrico, es necesario aplicar componentes de tensión algo mayor que la componente correspondiente a un estado de compresión uniaxial. (por ej.: en hormigones sometidos a compresión doble simétrica se alcanzan resistencias 1.16 veces mayor que a compresión uniaxial [74]).
- Los meridianos de tracción y compresión describen líneas rectas ya que son funciones lineales del primer invariante del tensor de tensiones I_1 . Esta aproximación resulta deficiente si se trabaja con estados de tensión hidrostática muy altos, siendo necesario para altas presiones que las curvas de los meridianos de tracción y compresión sean paralelas (Dentro del rango habitual de trabajo de los hormigones no se alcanzan presiones hidrostáticas que hagan necesario considerar esta situación, siendo bastante aproximado considerar meridianos rectos (*apart.IV.5*) [78]). Entre los criterios de fluencia que satisfacen esta condición se encuentra el conocido con el nombre de **cap-model** [43][131].
- La relación entre resistencias uniaxiales de compresión y tracción *ec.(Ap-1.88)* depende solamente del ángulo de rozamiento interno ϕ , lo que hace difícil adaptar este criterio a un gran número de materiales. En el caso particular de los hormigones se tiene una relación máxima de $R_{Mohr} = |\sigma_C^0|/|\sigma_T^0| \simeq 10.0$ con un ángulo de rozamiento interno $\phi \simeq 32^\circ$. Si se observa la **fig.(Ap-1.12)**, esta situación no puede ser satisfecha con el criterio estandar de Mohr-Coulomb. Entre las alternativas más utilizadas para solucionar este problema está la de usar Mohr-Coulomb en la zona de compresión, y en la zona de tracción un *límite de tensión* del tipo Rankine [33], pero la combinación de criterios de fluencia provoca serias singularidades en la zona de unión de ambas superficies si se pretende utilizar el criterio de fluencia como criterio de potencial plástico. Otra forma de resolver el problema es mediante la utilización de un ángulo de rozamiento interno ficticio muy alto $\phi \simeq 55^\circ$ que permita alcanzar una relación de resistencias uniaxiales $R_{Mohr} = |\sigma_C^0|/|\sigma_T^0| \simeq 10.0$. Esta última solución, en

fig.(Ap-I.12): Relación entre el ángulo de rozamiento interno y el parámetro $R_{Mohr} = |\sigma_C^0|/|\sigma_T^0|$

el caso de que se utilice la superficie de fluencia como función de potencial plástico, trae aparejado un excesivo efecto de dilatación **fig.(Ap-I.11,b)**, debido a que al crecer

el ángulo ϕ crece la componente de deformación plástica que provoca este efecto (crecimiento de ϵ_v^p) (*apart.IV.4.d*).

Criterio de fluencia plástica de Drucker-Prager.

Este criterio, formulado por Drucker y Prager en 1.952, es considerado como una aproximación alisada del criterio de Mohr-Coulomb para evitar sus aristas que producen problemas numéricos cuando se trabaja con plasticidad asociada (ver al final de este apéndice: regla de flujo en puntos singulares (*apart. Ap-I.3.h*)).

La formulación matemática de este criterio surge como una simple modificación del criterio de Von Mises, donde se incluye el efecto de la presión hidrostática influenciada por una función del ángulo de rozamiento interno $\bar{\alpha}(\phi)$. También depende del segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2 y es independiente de su tercer invariante J_3 . Es un criterio que depende de dos parámetros, siendo éstos la *cohesión interna* entre partículas del sólido c y el *rozamiento interno* entre ellas ϕ .

Su expresión matemática, en función de los invariantes del tensor de tensiones y su tensor desviador, es :

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, c, \phi) = \bar{\alpha} I_1 + \sqrt{J_2} - \bar{\mathcal{K}}(\kappa) = 0 \tag{Ap-I.98}$$

o idénticamente, se puede presentar en función de los invariantes definidos en el espacio de Westergard:

$$\mathcal{F}(\rho, \xi, c, \phi) = \bar{\alpha} \sqrt{6} \xi + \rho - \sqrt{2} \bar{\mathcal{K}}(\kappa) = 0 \tag{Ap-I.99}$$

donde $\bar{\alpha}(\phi)$ y $\bar{\mathcal{K}}(\kappa)$ son multiplicadores positivos que permiten ajustar este criterio de fluencia al de Mohr-Coulomb. En el caso particular que $\bar{\alpha} = 0$ se transforma en la teoría de Von Mises *ec.(Ap-I.75)*.

Este criterio de fluencia representa un cono de base circular en el *espacio de tensiones principales*, orientado según el eje de presiones hidrostáticas $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ **fig.(Ap-I.13,a)**. Esto se debe a que el plano octaédrico es una circunferencia que mantiene su geometría, pero cambia su dimensión en función lineal del primer invariante del tensor de tensiones I_1 **fig.(Ap-I.13,c)**. De la intersección del *plano meridiano de tracción máxima*, ($\theta = -\frac{\pi}{6}$), con la superficie de fluencia resulta una recta de pendiente: $\sqrt{\bar{\alpha}}$, que corta al eje de tensión cortante octaédrica en: $\rho_T^0 = \sqrt{2} \bar{\mathcal{K}}$ y al eje de tensión normal octaédrica en: $\xi^0 = \frac{\bar{\mathcal{K}}}{\sqrt{3} \bar{\alpha}}$. Debido a que este criterio no tiene en cuenta la influencia del tercer invariante del tensor desviador de tensiones, la intersección del *plano meridiano de compresión máxima*, ($\theta = +\frac{\pi}{6}$), con la superficie de fluencia da una recta de igual pendiente que la del meridiano de tracción, coincidiendo también en los puntos de intersección con los ejes octaédricos **fig.(Ap-I.13,b)**. En el *plano* $\sigma_1, \sigma_2 = 0, \sigma_3$ representa un elipse del tipo de la de Von Mises, pero desplazada de su centro por influencia del primer invariante del tensor de tensiones **fig.(Ap-I.13,d)**. Esto es, particularizando la *ec.(Ap-I.98)* en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$ resulta:

fig.(Ap-I.13): Criterio de fluencia de Drucker-Prager:

- a) En el espacio de tensiones principales o espacio de Westergard;
- b) Según los meridianos de tracción y compresión máxima.

- fig.(Ap-I.13): Criterio de fluencia de Drucker-Prager:
- c) Según el plano octaédrico $I_1 = 0$ o plano π ;
 - d) Según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

$$\sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3)} - r = 0 \quad (\text{Ap-I.100})$$

o que es lo mismo:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{3} r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{\sqrt{3} r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 \sigma_3}{3 r^2}\right) - 1 = 0 \quad (\text{Ap-I.101})$$

con:

$$r = \bar{K} - \bar{\alpha}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

Esta curva, que está en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$, corta los ejes coordenados en:

$$\text{para: } \sigma_1 = 0 \Rightarrow r = \bar{K} - \bar{\alpha} \sigma_3 \Rightarrow \sigma_3 = \frac{\sqrt{3} \bar{K}}{\bar{\alpha} \sqrt{3} \pm 1}, \quad (\text{Ap-I.102})$$

$$\text{para: } \sigma_3 = 0 \Rightarrow r = \bar{K} - \bar{\alpha} \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\sqrt{3} \bar{K}}{\bar{\alpha} \sqrt{3} \pm 1},$$

y al eje de presiones hidrostáticas en:

$$\text{para: } \sigma_1 = \sigma_3 = \sigma \Rightarrow r = \bar{K} - 2 \bar{\alpha} \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{3} \bar{K}}{2 \bar{\alpha} \sqrt{3} \pm 1} \quad (\text{Ap-I.103})$$

Resultando de éstas, las siguientes relaciones de resistencias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{uniaxial: } R_{Druck} = \frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|} = \frac{\frac{\sqrt{3} \bar{K}}{\bar{\alpha} \sqrt{3} - 1}}{\frac{\sqrt{3} \bar{K}}{\bar{\alpha} \sqrt{3} + 1}} = \frac{\bar{\alpha} \sqrt{3} + 1}{\bar{\alpha} \sqrt{3} - 1}, \\ \text{biaxial simétrica (45°): } R_{Druck}^{45^\circ} = \frac{|\sigma_C^{45^\circ}|}{|\sigma_T^{45^\circ}|} = \frac{2 \bar{\alpha} \sqrt{3} + 1}{2 \bar{\alpha} \sqrt{3} - 1}. \end{array} \right. \quad (\text{Ap-I.104})$$

Entre los distintos caminos que hay para obtener las magnitudes de las *constantes de ajuste* $\bar{\alpha}$ y \bar{K} , se han elegido aquellos que resultan de exigir la coincidencia del criterio de Drucker-Prager con el de Mohr-Coulomb en: **a.**-sus meridianos de tracción máxima y **b.**- en sus meridianos de compresión máxima.

- Constante de ajuste que resulta de exigir que el criterio de Drucker-Prager coincida con el de Mohr-Coulomb en sus meridianos de tracción máxima:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho_T^0)_{Mohr} = (\rho_T^0)_{Druck} \Rightarrow \frac{2 c \sqrt{6} \cos \phi}{3 + \sin \phi} = \sqrt{2} \bar{\mathcal{K}} , \\ (\xi^0)_{Mohr} = (\xi^0)_{Druck} \Rightarrow \sqrt{3} c \cot \phi = \frac{\bar{\mathcal{K}}}{\sqrt{3} \bar{\alpha}} . \end{array} \right. \quad (Ap-I.105)$$

resultando de este sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}} = \bar{\mathcal{K}}_{ins} &= \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} , \\ \bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{ins} &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} . \end{aligned} \quad (Ap-I.106)$$

Estas dos constantes sustituidas en las ecs. (Ap-I.98) y (Ap-I.99) describen un cono inscrito en la pirámide de Mohr-Coulomb, coincidiendo ambos criterios en los meridianos de tracción **fig.(Ap-I.14)**.

- Constante de ajuste que resulta de exigir que el criterio de Drucker-Prager coincida con el de Mohr-Coulomb en sus meridianos de compresión máxima:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho_C^0)_{Mohr} = (\rho_C^0)_{Druck} \Rightarrow \frac{2 c \sqrt{6} \cos \phi}{3 - \sin \phi} = \sqrt{2} \bar{\mathcal{K}} , \\ (\xi^0)_{Mohr} = (\xi^0)_{Druck} \Rightarrow \sqrt{3} c \cot \phi = \frac{\bar{\mathcal{K}}}{\sqrt{3} \bar{\alpha}} . \end{array} \right. \quad (Ap-I.107)$$

resultando de este sistema de ecuaciones:

fig.(Ap-I.14): Relación entre los criterios de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager:
a) En el espacio de tensiones principales o espacio de Westergard;
b) Según el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$.

fig.(Ap-I.14): Comparación entre los criterios de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager:
c) Según los meridianos de tracción y compresión máxima.
d) Según el plano octaédrico $I_1 = 0$ o plano π ;

$$\bar{K} = \bar{K}_{cir} = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} , \quad (Ap-1.108)$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{cir} = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} .$$

Estas dos constantes sustituidas en las *ecs.(Ap-1.98)* y *(Ap-1.99)* describen un cono que circunscribe la pirámide de Mohr-Coulomb, coincidiendo ambos criterios en los meridianos de tracción **fig.(Ap-1.14)**.

Entre las principales desventajas que presenta el uso de este criterio de fluencia plástica, se pueden mencionar:

- Al igual que en la superficie de Mohr-Coulomb, los meridianos de tracción y compresión máxima describen líneas rectas paralelas, (función lineal de I_1), resultando deficiente su utilización en problemas con grandes presiones hidrostáticas.
- No depende del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3 , incorporando mayores dificultades que el criterio de Mohr-Coulomb para ajustar el comportamiento de los geomateriales en su rango total de aplicación, (plano octaédrico circular: *para cada $\xi \Rightarrow [\rho = cte. \forall \theta]$*).
- La relación entre resistencias uniaxiales de compresión y tracción solamente depende de la magnitud del ángulo de rozamiento interno ϕ , lo que hace difícil su adaptación a las características de un gran número de materiales friccionales.

A continuación se detallarán las razones que llevaron a expresar estas dos últimas desventajas del criterio de Drucker-Prager. Sustituyendo en las *ec.(Ap-1.104)* las constantes de ajustes expresadas en las *ec.(Ap-1.106)* y *ec.(Ap-1.108)*, resultan cuatro relaciones tensionales: dos que corresponden a la superficie de fluencia de Drucker-Prager inscrita en la de Mohr-Coulomb y dos que corresponden a la superficie de Drucker-Prager que circunscribe a la de Mohr-Coulomb, respectivamente. Esto es:

$$\text{sustituyendo (Ap-1.106) } \mapsto \text{(Ap-1.104)} : \begin{cases} (R_{Druck})_{ins} = \frac{3 \sin \phi + 3}{\sin \phi - 3} \\ (R_{Druck}^{45^\circ})_{ins} = \frac{5 \sin \phi + 3}{3 \sin \phi - 3} \end{cases} \quad (Ap-1.109,a)$$

$$\text{sustituyendo (Ap-1.108) } \mapsto \text{(Ap-1.104)} : \begin{cases} (R_{Druck})_{cir} = \frac{\sin \phi + 3}{3 \sin \phi - 3} \\ (R_{Druck}^{45^\circ})_{cir} = \frac{3 \sin \phi + 3}{5 \sin \phi - 3} \end{cases} \quad (Ap-1.109,b)$$

fig.(Ap-I.15):Relación entre el ángulo de rozamiento interno y el prámetro $R_{Druck} = |\sigma_C^0|/|\sigma_T^0|$

fig.(Ap-I.16): Función de Drucker-Prager para las constantes de ajuste ec.(Ap-I.108), en el caso particular: $\sigma_1 = \sigma_3, \sigma_2 = 0$, $\phi = \arcsin(\frac{3}{5})$.

De analizar las ec.(Ap-I.109,a), para la *superficie inscrita* dentro de la de Mohr-Coulomb, resulta obvio que la función de Drucker-Prager se indetermina en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$, para tensiones $-\sigma_1 = -\sigma_3$, en $(R_{Druck}^{45^\circ})_{ins}$ con un ángulo de rozamiento interno de $\phi = \frac{\pi}{2}$ **fig.(Ap-I.15)**. Esto también ocurre en la superficie de Mohr-Coulomb, pero en el criterio de Drucker-Prager hay un problema adicional ya que ni aún para estos ángulos de rozamiento interno tan altos, del orden de $\phi \simeq \frac{\pi}{2}$, se pueden alcanzar relaciones de resistencias uniaxiales superiores a $|R_{Druck}|_{ins} \simeq 3$, magnitud que está muy lejos de la requerida por materiales como los hormigones. Además es necesario observar que estas situaciones extremas conducen a excesivos e irreales efectos de dilatación.

La superficie de Drucker-Prager que *circunscribe* a la de Mohr-Coulomb, permite lograr mayores relaciones de resistencias uniaxial, ec.(Ap-I.109,b) con ángulos de rozamiento más bajos, pero presenta una indeterminación en el plano $\sigma_1 - \sigma_3$, para tensiones $-\sigma_1 = -\sigma_3$, en $(R_{Druck}^{45^\circ})_{cir}$ con un ángulo de rozamiento interno de $\phi = \arcsin(\frac{3}{5}) \simeq 36.8698\dots^\circ$ (valor comprendido dentro de las características del hormigón) **fig.(Ap-I.15)**. Esta indeterminación se debe a un crecimiento desmedido de la superficie en la zona de compresión frente a la de tracción, tal que la curva contenida en el plano meridiano de tracción máxima no alcanza a cortar el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$ **fig.(Ap-I.3,a)**, o en otras palabras que el octante $-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3$ ha quedado totalmente contenido dentro de la superficie de fluencia plástica. Para este caso particular, la formulación del criterio de Drucker-Prager ec.(Ap-I.98) se reduce a la siguiente expresión matemática:

$$\bar{\alpha} 2 \sigma + \sqrt{\frac{\sigma^2}{3}} - \bar{K} = 0 \quad (\text{Ap-I.110})$$

$$\text{con: } \sigma = \sigma_1 = \sigma_3, \sigma_2 = 0$$

o bien escribiendo la ec.(Ap-I.110) de otro modo, resulta:

$$\sigma = \frac{\sqrt{3} \bar{K}}{2 \sqrt{3} \bar{\alpha} + \text{SIGN}(\sigma)} = \frac{6 c \cos \phi}{4 \sin \phi + \sqrt{3} (3 - \sin \phi) \text{SIGN}(\sigma)} \quad (\text{Ap-I.111})$$

Sustituyendo $\phi = \arcsin(\frac{3}{5})$ en la ec.(Ap-I.108), resulta: $\bar{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ y $\bar{K} = 4 \bar{\alpha} c \Rightarrow \bar{K} = \frac{2}{\sqrt{3}} c$ que reemplazados en la ec.(Ap-I.110) proveen la siguiente relación entre la tensión y la cohesión para este caso particular:

$$c = \frac{1}{2} (\sigma + |\sigma|) = \langle \sigma \rangle \quad (\text{Ap-I.112})$$

Esta particular expresión de la función de Drucker-Prager, representada en el plano $c - \sigma$, permite ver que solo se puede satisfacer la condición de fluencia plástica en el caso particular: $\sigma_1 = \sigma_3, \sigma_2 = 0$, $\phi = \arcsin(\frac{3}{5})$, si y solo si $\sigma \geq 0$, o sea para estados de tracción doble o de tensión nula, ya que en la zona de compresión exige que la cohesión sea nula, situación totalmente inadmisibles **fig.(Ap-I.16)**.

Del análisis de la función de Drucker-Prager que inscribe a la de Mohr-Coulomb, surge que solo es posible su uso con ángulos de rozamiento interno ϕ bastante más bajos que el crítico: $\phi \ll \arcsin(\frac{3}{5})$ y en tal caso se está muy lejos de poder aproximar las propiedades del hormigón.

Ap-I.3.g.- Comentarios sobre la combinación de criterios de fluencia plástica.

Los criterios de fluencia de *Tresca* y *Von Mises* fueron formulados para el tratamiento de los materiales metálicos, ajustándose bastante bien a su comportamiento mecánico. No se puede decir lo mismo de los criterios de *Mohr-Coulomb* y *Drucker-Prager*, formulados para el tratamiento de los materiales friccionales. Con el fin de solucionar los defectos que presentan estos dos últimos criterios clásicos, normalmente de han seguido tres caminos alternativos:

- 1- Modificar ligeramente un criterio clásico para solucionar un cierto problema puntual. Ver (**anexo-C**): *modificación del criterio de Mohr-Coulomb*. Ver también ref. [33].
- 2- Formular nuevos criterios de fluencia plástica, basados o no en los criterios clásicos, con el fin de mejorar la simulación del comportamiento de los sólidos ideales. Ver

(*apart IV.5.*): *criterio de fluencia propuesto* en esta tesis. Ver también las refs. [26][29][33][34][46][47][51][56][70][72][73][78][87][102][113][131] .

- 3- Utilizar distintos criterios de fluencia dentro de cada zona del espacio de tensiones principales (combinación de criterios). Se incluyen aquí los criterios de fluencia *con límite de tensión a tracción* [33][30][54][121][126] .

En este apartado solo se hará un comentario sobre la tercera opción para resolver el problema. En general este camino, desde el punto de vista de las técnicas de programación, constituye una opción simple y cómoda que permite considerar uno u otro criterio de fluencia plástica mediante decisiones lógicas . No obstante, esta solución trae problemas desde el punto de vista de *la mecánica*.

Entre las combinaciones posibles, se tratarán las siguientes:

-1- Criterio de Von Mises a compresión y Rankine (o disminución de tensión) a tracción.

Entre los muchos problemas que presenta esta combinación de criterios, los más serios son:

fig.(Ap-I.17): Combinación del criterio de fluencia plástica de Von Mises con el de Rankine en el espacio de Westergard.

- Debido a que la superficie de Von Mises es cilíndrica y la de Rankine una pirámide de base triangular, se presenta una discontinuidad funcional en el *plano o planos de combinación funcional* **fig.(Ap-I.17)**, quedando indefinido, el criterio de fluencia resultante, en esta región. Esto se agrava si se adopta una regla de flujo asociada al criterio de fluencia, ya que se presenta una definición múltiple del flujo plástico en la intersección de ambas superficies. Solamente en el plano $\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_2 = 0$ se presenta un caso particular de continuidad funcional con discontinuidad en el flujo plástico **fig.(Ap-I.17)**. Siendo esto último salvable utilizando el criterio de Köiter (*apart. Ap-I.3.h*).
- Los materiales friccionales presentan dilatación $\dot{\epsilon}_{ij}^p \neq 0$, y esta combinación de criterios de fluencia no tiene en cuenta este efecto en la zona de compresión pura, donde el fenómeno es más importante (desprecia la influencia de I_1), y lo tiene en cuenta en la zona de tracción donde es menos importante debido al bajo nivel de tensiones.
- En la zona de compresión pura desprecia la influencia del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3 .
- Si se utiliza una variable de endurecimiento simplificada, como la *deformación plástica efectiva* ec.(Ap-I.41), será necesario utilizar una constante c_κ para cada superficie de fluencia, esto es:

$$c_\kappa = \begin{cases} (c_\kappa)_{Mises} & \forall I_1 < cte. \\ (c_\kappa)_{Rankine} & \forall I_1 \geq cte. \end{cases} \quad (Ap-I.113)$$

Siendo en estos casos más conveniente trabajar con una variable de endurecimiento del tipo del *trabajo plástico específico* ec.(Ap-I.39).

-2- Criterio de Von Mises a compresión y Mohr-Coulomb a tracción.

Esta combinación, de un cilindro (Von Mises) en la zona de compresión con una pirámide de base exagonal (Mohr-Coulomb) en la zona de tracción, adolece de los mismos defectos que los mencionados en la combinación -1- **fig.(Ap-I.18)**.

-3- Criterio de Von Mises a compresión y Drucker-Prager a tracción.

Se trata de la combinación de un cilindro (Von Mises), en la zona de compresión, con un cono de base circular (Drucker-Prager), en la zona de tracción **fig.(Ap-I.19)**. Tiene una gran ventaja sobre los tratados en los dos apartados anteriores, ya que permite lograr continuidad funcional en los planos de combinación, aunque no en sus derivadas. Debido a esto si se utiliza este criterio de fluencia plástica como criterio de potencial, será necesario definir un flujo único sobre el *plano de combinación*.

fig.(Ap-I.18): Combinación del criterio de fluencia plástica de Von Mises con el de Mohr-Coulomb en el espacio de Westergard.

Entre los problemas más serios que presenta esta combinación, están:

- Falta total de dilatación en la zona de compresión, al igual que los tratados anteriormente, debido a que desprecia la influencia del primer invariante del tensor de tensiones en esta zona de trabajo, al igual que las dos combinaciones anteriores.
- Desprecia tanto a tracción como a compresión la influencia del tercer invariante del tensor desviador de tensiones.
- Es necesario trabajar con una variable de endurecimiento plástico del tipo del trabajo plástico específico *ec.*(Ap-I.30), en forma análoga que en las dos combinaciones anteriores.
- Y por último, aparece un problema adicional en la relación de resistencia uniaxial compresión-tracción, que hace que ésta no pueda ser mayor que dos en ningún caso.

fig.(Ap-I.19): Combinación del criterio de fluencia plástica de Von Mises con el de Drucker-Prager en el espacio de Westergard.

Para explicar este último problema, es conveniente definir previamente la función de fluencia resultante y la condición para que exista coincidencia entre ambas.

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \begin{cases} \sqrt{J_2} - \mathcal{K}(\kappa) = 0 & ; \quad \forall I_1 < 0 \quad , \\ \bar{\alpha}I_1 + \sqrt{J_2} - \bar{\mathcal{K}}(\kappa) = 0 & ; \quad \forall I_1 \geq 0 \quad . \end{cases} \quad (\text{Ap-I.114})$$

La función de endurecimiento de la ec.(Ap-I.114,a) debe coincidir con el de la ec.(Ap-I.114,b) en el *plano de coincidencia*, que por simplicidad elegiremos $I_1 = 0$. Para ello debe cumplirse que:

$$\mathcal{K}(\kappa) \equiv \overline{\mathcal{K}}(\kappa) \quad (\text{Ap-I.115})$$

siendo $\overline{\mathcal{K}}(\kappa)$ la constante de ajuste de Drucker-Prager, definida en las ec.(Ap-I.106) o ec.(Ap-I.108), según se elija un cono inscrito o circunscrito a la superficie de Mohr-Coulomb, respectivamente.

Definida la función de fluencia y la condición de coincidencia, se determinarán los límites de tensión uniaxial y biaxial, y a partir de éstos se obtendrán las relaciones de resistencia buscada. Estos límites de tensión resultarán de la función de Drucker-Prager para $I_1 \geq 0$, y de la de Von Mises para $I_1 < 0$.

- o **Tensión de compresión uniaxial:** sustituyendo $\sigma_3 = \sigma_C < 0, \sigma_2 = \sigma_1 = 0$ en la ec.(114,a) resulta:

$$\frac{|\sigma_C|}{\sqrt{3}} = \overline{\mathcal{K}}(\kappa) \quad (\text{Ap-I.116})$$

$$|\sigma_C| = |\sigma_3| = \sqrt{3} \overline{\mathcal{K}}(\kappa)$$

- o **Tensión de tracción uniaxial:** sustituyendo $\sigma_1 = \sigma_T > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ en la ec.(114,b), (ver también ec.(Ap-I.102)), resulta:

$$|\sigma_T| = |\sigma_1| = \frac{\sqrt{3} \overline{\mathcal{K}}(\kappa)}{\alpha \sqrt{3} + 1} \quad (\text{Ap-I.117})$$

- o **Tensión de compresión biaxial doble simétrica:** sustituyendo $\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_C^{45^\circ} < 0, \sigma_1 = 0$ en la ec.(114,a) resulta:

$$\frac{|\sigma_C^{45^\circ}|}{\sqrt{3}} = \overline{\mathcal{K}}(\kappa) \quad (\text{Ap-I.118})$$

$$\left| \sigma_C^{45^\circ} \right| = \sqrt{3} \overline{\mathcal{K}}(\kappa)$$

- o **Tensión de tracción biaxial doble simétrica:** sustituyendo $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_T^{45^\circ} > 0, \sigma_3 = 0$ en la ec.(114,b), (ver también ec.(Ap-I.103)), resulta:

$$\left| \sigma_T^{45^\circ} \right| = \frac{\sqrt{3} \overline{\mathcal{K}}(\kappa)}{2 \alpha \sqrt{3} + 1} \quad (\text{Ap-I.119})$$

De acuerdo a estos límites de tensiones, resultan las siguientes relaciones de tensión máxima:

- **relación de resistencia uniaxial :** de la ec.(Ap-I.116) y ec.(Ap-I.117) resulta:

$$|R^0| = \frac{|\sigma_C^0|}{|\sigma_T^0|} = \bar{\alpha} \sqrt{3} + 1 \quad (\text{Ap-I.120})$$

- Para el caso en que la superficie de Drucker-Prager esté inscrita a la de Mohr-Coulomb:
 $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{ins} = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)}$, Resulta de la ec.(Ap-I.120) $\Rightarrow |R^0| = \frac{3+3 \sin \phi}{3+\sin \phi}$; de donde surge que:

$$\text{para : } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \Rightarrow 1 \leq R^0 \leq 1.5 \quad (\text{Ap-I.121})$$

- Para el caso en que la superficie de Drucker-Prager circunscriba a la de Mohr-Coulomb:
 $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{cir} = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}$, Resulta de la ec.(Ap-I.120) $\Rightarrow |R^0| = \frac{3+\sin \phi}{3-\sin \phi}$; de donde surge que:

$$\text{para : } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \Rightarrow 1 \leq R^0 \leq 2 \quad (\text{Ap-I.122})$$

- **relación de resistencia biaxial doble simétrica:** de la ec.(Ap-I.118) y ec.(Ap-I.119) resulta:

$$|R^{45^\circ}| = \frac{|\sigma_C^{45^\circ}|}{|\sigma_T^{45^\circ}|} = 2 \bar{\alpha} \sqrt{3} + 1 \quad (\text{Ap-I.123})$$

- Para el caso en que la superficie de Drucker-Prager esté inscrita en la de Mohr-Coulomb: $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{ins} = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)}$, Resulta de la ec.(Ap-I.123) $\Rightarrow |R^{45^\circ}| =$

$\frac{3+5 \sin \phi}{3+\sin \phi}$; de donde surge que:

$$\text{para : } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \Rightarrow 1 \leq R^{45^\circ} \leq 2 \quad (\text{Ap-I.124})$$

- Para el caso en que la superficie de Drucker-Prager circunscriba a la de Mohr-Coulomb:
 $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{cir} = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}$, Resulta de la ec.(Ap-I.123) $\Rightarrow |R^{45^\circ}| = \frac{3+3 \sin \phi}{3-\sin \phi}$; de

donde surge que:

$$\text{para : } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \Rightarrow 1 \leq R^{45^\circ} \leq 2 \quad (\text{Ap-I.125})$$

De las ecs.(Ap-I.121), (Ap-I.122), (Ap-I.124) y (Ap-I.125) queda claro que esta combinación de criterios no admite relaciones de tensión superior a dos en ningún caso.

-4- Criterio de Mohr-Coulomb a compresión y Rankine a tracción.

La combinación de una pirámide de base exagonal (Mohr-Coulomb) en la zona de compresión, con una pirámide de base triangular (Rankine) en la zona de tracción, adolece de los mismos defectos que la combinación -1- fig.(Ap-I.18).

Se podría continuar mencionando criterios de fluencia plástica que surgen de la combinación de otros, pero en general esta solución adolece de los mismos problemas mencionados en los cuatro apartados anteriores. Por esta razón es más conveniente recurrir a la formulación de un criterio único.

Ap-I.3.h.- Regla de flujo en puntos singulares

Se pueden presentar funciones de *potencial plástico* \mathcal{G} con *puntos singulares*, donde la regla de flujo dada en la ec.(Ap-I.21) no tenga definición única. Esto significa que en ciertos puntos, la función \mathcal{G} no tiene derivadas continuas (ej.: las funciones de Mohr-Coulomb y Tresca para $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$).

Con el fin de establecer una definición única del flujo plástico, W. Köiter ^[71] propuso una generalización de la ec.(Ap-I.21), diciendo que: *el incremento temporal de deformación plástica puede ser obtenido como la suma de los subincrementos de deformación plástica que resultan de la contribución de cada una de las "n" superficies de potencial plástico que concurren al punto singular fig.(Ap-I.20)*. Esto es:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = p^{(1)} \dot{\lambda}^{(1)} \frac{\partial \mathcal{G}^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + p^{(2)} \dot{\lambda}^{(2)} \frac{\partial \mathcal{G}^{(2)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dots + p^{(i)} \dot{\lambda}^{(i)} \frac{\partial \mathcal{G}^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dots + p^{(n)} \dot{\lambda}^{(n)} \frac{\partial \mathcal{G}^{(n)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{Ap-I.126})$$

siendo $p^{(i)}$ un factor de peso del flujo plástico, correspondiente a la función de potencial $\mathcal{G}^{(i)}$, que varía entre $0 \leq p^{(i)} \leq 1$ y sirve para ajustar la regla de flujo tanto como sea necesario; y

$$\dot{\lambda}^{(i)} = \frac{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\left[-\frac{\partial \mathcal{F}(\kappa)}{\partial \kappa} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}^{(i)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]}, \quad (\text{Ap-I.127})$$

el parámetro de consistencia plástica correspondiente a la función de potencial $\mathcal{G}^{(i)}$. La definición de este parámetro de consistencia, ec.(Ap-I.127), es válido siempre que \mathcal{F} tenga primeras derivadas continuas, caso contrario se tendrá en cuenta en la ec.(Ap-I.127) la

fig.(Ap-1.20): Flujo plástico para una superficie de potencial que presenta puntos singulares

discontinuidad de las derivadas de \mathcal{F} . En el caso de plasticidad asociada $\mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$, se deberá también tener en cuenta en la ec.(Ap-1.127) que las derivadas de la función de fluencia plástica son discontinuas.

De esta forma se garantiza en los puntos singulares un flujo plástico único.

Existe otro método para lograr un flujo plástico único en los puntos singulares de la superficie de potencial, cumpliendo así con el requerimiento de Köiter. Éste es conocido como el *método de redondeo de aristas* y fué propuesto por Nayak y Zienkiewicz ^[88].

Para explicar el tratamiento que se da al flujo plástico en los puntos singulares, se presentarán, a modo de ejemplo, los criterios de fluencia de Tresca y Mohr-Coulomb tratados como superficies de potencial plástico. Para ello es necesario definir el criterio en el punto donde se presenta la discontinuidad de su primera derivada. Esto es:

- **Criterio de Tresca:** Haciendo $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$ en la ec.(Ap-1.63), resulta:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, \theta = \pm \frac{\pi}{6}, \mathcal{K}') = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right] - \mathcal{K}'(\kappa) = 0 ,$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, \theta = \pm \frac{\pi}{6}, \mathcal{K}') = \sqrt{J_2} - 2 \mathcal{K}'(\kappa) = 0 , \quad (\text{Ap-I.128})$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(J_2, \theta = \pm \frac{\pi}{6}, \mathcal{K}') = \sqrt{J_2} - \mathcal{K}(\kappa) = 0$$

Coincidiendo esta última con la expresión matemática de la superficie de Von Mises *ec.(Ap-I.71)*, la cual es continua incluída sus primeras derivadas en todos los puntos, por lo tanto permite definir una dirección única para el vector de flujo plástico en los puntos singulares de la superficie de Tresca **fig.(Ap-I.21)**. Esto se puede interpretar como un redondeo de aristas ^[63].

fig.(Ap-I.21): Criterio de Von Mises interpretado como redondeo de aristas del criterio de Tresca.

- **Criterio de Mohr-Coulomb – meridianos de compresión:** Haciendo $\theta = +\frac{\pi}{6}$ en la *ec.(Ap-I.85)*, resulta:

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \theta = +\frac{\pi}{6}, c, \phi) = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sin \phi}{2\sqrt{3}} \right) - c \cos \phi = 0 ,$$

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \theta = +\frac{\pi}{6}, c, \phi) = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_2} \left(\frac{3 - \sin \phi}{2\sqrt{3}} \right) - c \cos \phi = 0 , \quad (\text{Ap-1.129})$$

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \theta = +\frac{\pi}{6}, c, \phi) = I_1 \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} + \sqrt{J_2} - \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} = 0$$

Comparando esta expresión con la ec.(Ap-1.98), para $\bar{\alpha}$ y $\bar{\mathcal{K}}$ dados por la ec.(Ap-1.108), se deduce como conclusión que la superficie de Drucker-Prager (que es continuo incluídas sus derivadas primeras) circunscrita en la de Mohr-Coulomb, provee la dirección única del vector de flujo plástico en los puntos singulares de esta última superficie **fig.(Ap-1.22)**. Esto se puede interpretar como un redondeo de aristas ^[63].

fig.(Ap-1.22): Criterio de Drucker-Prager interpretado como redondeo de aristas del criterio de Mohr-Coulomb.

- **Criterio de Mohr-Coulomb – meridianos de tracción:** Haciendo $\theta = -\frac{\pi}{6}$ en la ec.(Ap-1.85), resulta:

$$\mathcal{F}(I_1, J_2, \theta = -\frac{\pi}{6}, c, \phi) = I_1 \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} + \sqrt{J_2} - \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} = 0 \quad (\text{Ap-1.130})$$

Comparando esta expresión con la *ec.(Ap-1.98)*, para $\bar{\alpha}$ y $\bar{\mathcal{K}}$ dados por la *ec.(Ap-1.106)*, se deduce como conclusión que la superficie de Drucker-Prager (que es continua incluídas sus derivadas primeras) inscrita en la de Mohr-Coulomb, provee la dirección única del vector de flujo plástico en los puntos singulares de esta última superficie **fig.(Ap-1.22)**. Esto, al igual que los casos anteriores se puede interpretar como un redondeo de aristas ^[63].

(APENDICE I) ANEXO E

TENSOR DE TENSIONES, DEFORMACIONES Y SUS INVARIANTES

An-E.1.- INTRODUCCION.

Los criterios de fluencia, potencial y daño plástico, se formulan a partir del estado de tensiones y/o deformaciones de un punto del sólido. La formulación de estos criterios se simplifica si se trabaja con los *invariantes del tensor de tensiones y deformaciones*. Estos *invariantes*, como su nombre lo expresa, son magnitudes que no sufren alteraciones cuando se cambia la posición de los ejes de referencia.

Se utilizará la siguiente convención de signos para las tensiones y deformaciones **fig.(An-E.1)**:

- **Tensiones:** *signo positivo* para estados de tracción.
- **Deformaciones:** *signo positivo* para estados de estiramiento o alargamiento.

An-E.2.- VECTOR DE TENSIONES: ρ_ℓ .

Este vector da la intensidad, dirección y sentido de la tensión en un punto, según un plano cualquiera cuya normal es $\vec{\ell}$ **fig.(An-E.2)**. Matemáticamente queda definido como:

$$\rho_\ell = \frac{d\mathbf{P}}{dA} \quad (\text{An-E.1})$$

siendo:

ρ_ℓ : Vector de tensiones que representa el estado tensional
de un punto según el plano Γ ;

$\vec{\ell}$: Versor normal al plano Γ ;

\mathbf{P} : Vector de fuerza actuante .

La no coincidencia de las direcciones del *vector de tensiones* ρ_ℓ con el *versor normal* $\vec{\ell}$, da lugar a dos vectores componentes del de tensiones, $\sigma_{\ell\ell}$ y $\tau_{\ell t}$ uno normal al plano Γ y otro contenido en dicho plano, respectivamente. Esto es:

fig.(An-E.1): Estado de tensiones y deformaciones positivas, en un punto del sólido

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_\ell &= \boldsymbol{\sigma}_{\ell\ell} + \boldsymbol{\tau}_{\ell t} \quad , \\ \boldsymbol{\rho}_\ell &= \|\sigma_{\ell\ell}\| \vec{\boldsymbol{\ell}} + \|\tau_{\ell t}\| \vec{\boldsymbol{t}} \quad , \end{aligned} \tag{An-E.2}$$

siendo:

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\ell\ell}\| &: \text{Módulo de la tensión normal al plano } \Gamma \quad , \\ \|\tau_{\ell t}\| &: \text{Módulo de la tensión contenida en el plano } \Gamma \quad , \\ \vec{\boldsymbol{t}} &: \text{Versor tangencial al plano } \Gamma \quad . \end{aligned}$$

An-E.3.- TENSOR DE TENSIONES: $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$.

El estado tensional de un punto puede ser representado mediante tres planos ortogonales **fig.(An-E.3)** que pasen por dicho punto. En cada plano, el correspondiente *vector de tensiones* puede ser descompuesto en una dirección normal y otra tangencial al mismo; esto es:

fig.(An-E.2): Vector de tensiones según un plano Γ .

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_1 = \{\boldsymbol{\sigma}_{11}, \boldsymbol{\tau}_{1t}\} = \{[\boldsymbol{\sigma}_{11}], [\boldsymbol{\tau}_{12}, \boldsymbol{\tau}_{13}]\} \\ \boldsymbol{\rho}_2 = \{\boldsymbol{\sigma}_{22}, \boldsymbol{\tau}_{2t}\} = \{[\boldsymbol{\sigma}_{22}], [\boldsymbol{\tau}_{21}, \boldsymbol{\tau}_{23}]\} \\ \boldsymbol{\rho}_3 = \{\boldsymbol{\sigma}_{33}, \boldsymbol{\tau}_{3t}\} = \{[\boldsymbol{\sigma}_{33}], [\boldsymbol{\tau}_{31}, \boldsymbol{\tau}_{32}]\} \end{cases}$$

resultando así nueve vectores componentes, asociados a los *tres vectores de tensiones* correspondientes a tres planos ortogonales entre sí **fig.(An-E.3)**. Estos tres vectores de tensiones dan lugar a un tensor denominado *tensor de tensiones*, de orden dos. Su expresión canónica es:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_1 = \sigma_{11} \vec{\mathbf{r}}_1 + \tau_{12} \vec{\mathbf{r}}_2 + \tau_{13} \vec{\mathbf{r}}_3 \\ \boldsymbol{\rho}_2 = \tau_{21} \vec{\mathbf{r}}_1 + \sigma_{22} \vec{\mathbf{r}}_2 + \tau_{23} \vec{\mathbf{r}}_3 \\ \boldsymbol{\rho}_3 = \tau_{31} \vec{\mathbf{r}}_1 + \tau_{32} \vec{\mathbf{r}}_2 + \sigma_{33} \vec{\mathbf{r}}_3 \end{cases} \quad (\text{An-E.3})$$

en forma indicial resulta:

$$\boldsymbol{\rho}_i = \sigma_{ij} \vec{\mathbf{r}}_j \quad ; \quad \forall i,j: 1,2,3 \quad , \quad (\text{An-E.4})$$

fig.(An-E.3): Representación del estado tensional de un punto según tres planos ortogonales.

o en forma tensorial, queda:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \mathbf{sim.} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \mathbf{sim.} & & \sigma_{33} \end{bmatrix} ;$$

(An-E.5)

$$\text{con: } \sigma_{ij} \equiv \sigma_{ji}$$

$$\text{y : } \sigma_{ij} \equiv \begin{cases} \sigma_{ij} & ; \quad \forall i = j \\ \tau_{ij} & ; \quad \forall i \neq j \end{cases}$$

y en forma matricial *, considerando solo la parte simétrica del tensor de tensiones:

* Nota: Cabe observar, que en álgebra matricial una matriz columna recibe el nombre de "vector de tensiones", pero no tiene el sentido físico dado en el apart. An-E.2., sino solamente el de un

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (\text{An-E.6})$$

An-E.4.- RELACION ENTRE EL VECTOR DE TENSIONES, CORRESPONDIENTE A UN PLANO CUALQUIERA, Y EL TENSOR DE TENSIONES – TETRAEDRO DE CAUCHY.

Para obtener la relación que hay entre un vector de tensiones correspondiente a un plano cualquiera y los tres vectores asociados a tres planos ortogonales entre sí , es necesario estudiar su estado de equilibrio. Es decir, estudiar el equilibrio entre $\boldsymbol{\rho}_\ell$ y $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ fig.(An-E.4). Esto es:

$$\boldsymbol{\rho}_\ell dA - \boldsymbol{\rho}_1 dA_{23} - \boldsymbol{\rho}_2 dA_{13} - \boldsymbol{\rho}_3 dA_{21} = \mathbf{0} \quad , \quad (\text{An-E.7})$$

que escrito en forma indicial resulta:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_\ell dA - \boldsymbol{\rho}_i dA_{jk} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\rho}_\ell dA - \boldsymbol{\rho}_i \ell_i dA &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\rho}_\ell - \boldsymbol{\rho}_i \ell_i &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{An-E.8})$$

siendo:

$$dA_{jk} = \ell_i dA : \quad \text{Area del plano } j-k \quad ;$$

$$\vec{\boldsymbol{\ell}}_i = \ell_i \vec{\boldsymbol{r}}_i : \quad \text{Versor normal al plano } j-k \quad ;$$

$$\ell_i = \begin{cases} \ell_1 = \cos(\angle AON) \quad , \\ \ell_2 = \cos(\angle BON) \quad , \\ \ell_3 = \cos(\angle CON) \quad . \end{cases}$$

Sustituyendo en ésta la ec.(An-E.4), resulta:

$$\boldsymbol{\rho}_\ell - \sigma_{ij} \vec{\boldsymbol{r}}_j \ell_i = \mathbf{0} \quad (\text{An-E.9})$$

conjunto ordenado de magnitudes. Se recurre a esta notación como una forma algorítmica que simplifica el tratamiento de los problemas numéricos.

fig.(An-E.4): Relación entre: $\boldsymbol{\rho}_\ell$ y $\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}$.

Siendo ésta, la **ecuación de Cauchy** (1822) que relaciona el *vector de tensiones*, según un plano cualquiera que pase por un punto, con el *tensor de tensiones*. Desarrollando la ec.(An-E.9), se tiene:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\rho}_\ell &= (\sigma_{11} \vec{\boldsymbol{r}}_1 \ell_1 + \tau_{12} \vec{\boldsymbol{r}}_2 \ell_1 + \tau_{13} \vec{\boldsymbol{r}}_3 \ell_1) + (\tau_{21} \vec{\boldsymbol{r}}_1 \ell_2 + \sigma_{22} \vec{\boldsymbol{r}}_2 \ell_2 + \tau_{23} \vec{\boldsymbol{r}}_3 \ell_2) + \\
 &\quad + (\tau_{31} \vec{\boldsymbol{r}}_1 \ell_3 + \tau_{32} \vec{\boldsymbol{r}}_2 \ell_3 + \sigma_{33} \vec{\boldsymbol{r}}_3 \ell_3) \quad , \\
 \boldsymbol{\rho}_\ell &= (\sigma_{11} \ell_1 + \tau_{21} \ell_2 + \tau_{31} \ell_3) \vec{\boldsymbol{r}}_1 + (\tau_{12} \ell_1 + \sigma_{22} \ell_2 + \tau_{32} \ell_3) \vec{\boldsymbol{r}}_2 + \\
 &\quad + (\tau_{13} \ell_1 + \tau_{23} \ell_2 + \sigma_{33} \ell_3) \vec{\boldsymbol{r}}_3 \quad , \\
 \boldsymbol{\rho}_\ell &= \rho_1 \vec{\boldsymbol{r}}_1 + \rho_2 \vec{\boldsymbol{r}}_2 + \rho_3 \vec{\boldsymbol{r}}_3
 \end{aligned}
 \tag{An-E.10}$$

También es habitual encontrar la ecuación de equilibrio de Cauchy, escrita componente a componente. Esto es:

$$\boldsymbol{\rho}_\ell = \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \vec{\boldsymbol{\ell}} \quad (\text{An-E.11})$$

con:

$$\begin{cases} \rho_1 = (\sigma_{11} \ell_1 + \tau_{21} \ell_2 + \tau_{31} \ell_3) \\ \rho_2 = (\tau_{12} \ell_1 + \sigma_{22} \ell_2 + \tau_{32} \ell_3) \\ \rho_3 = (\tau_{13} \ell_1 + \tau_{23} \ell_2 + \sigma_{33} \ell_3) \end{cases}$$

An-E.5.- DIRECCIONES PRINCIPALES DE TENSION – INVARIANTES DEL TENSOR DE TENSIONES.

Para cada punto del sólido hay infinitos vectores de tensiones, asociados a cada plano que pasa por dicho punto. Interesa encontrar los planos *principales*, que hacen que la tensión normal a él sea máxima. Estas tensiones reciben el nombre de *tensiones principales* y la dirección en que actúan se les llama *direcciones principales*.

El criterio de búsqueda se basa en encontrar un *plano principal*, donde el vector de tensiones coincida con la normal al plano, es decir que su componente tangencial sea nula (la proyección del vector de tensiones sobre el plano principal es nula). Para ello, se puede escribir la ecuación de Cauchy *ec.(An-E.11)* para un plano principal, como:

$$\boldsymbol{\rho}_\ell = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^* \cdot \vec{\boldsymbol{\ell}} = \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^* & 0 & 0 \\ \mathbf{sim.} & \sigma^* & 0 \\ & & \sigma^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{An-E.12})$$

siendo σ^* el valor de la tensión principal a determinar. La magnitud de cada tensión principal, (tensión principal máxima, intermedia o mínima) resulta de igualar la *ec.(An-E.12)* con la *ec.(An-E.11)*, vale decir que surge de exigir que uno de los infinitos planos que satisface la *ec.(An-E.11)* sea un plano principal. Esto es:

$$\boldsymbol{\rho}_\ell = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \vec{\boldsymbol{\ell}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^* \cdot \vec{\boldsymbol{\ell}} \quad (\text{An-E.13})$$

resultando de aquí :

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^*] \cdot \vec{\boldsymbol{\ell}} = \mathbf{0} \quad (\text{An-E.14})$$

siendo éste un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas, que son los tres cosenos directores de la normal a cada plano principal. Para que el sistema tenga solución distinta de la trivial ($\ell_1 \neq 0$; $\ell_2 \neq 0$; $\ell_3 \neq 0$), $[\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^*]$ debe resultar una matriz de determinante nulo.

Así , en este problema de autovalores y autovectores, se tiene para cada valor propio (tensión principal) un vector propio (dirección principal de tensión), o sea que para cada tensión principal habrá un plano normal a ésta, que viene determinado por el vector de cosenos directores \vec{l} .

La ecuación característica del tensor de tensiones, surge de anular el determinante de la matriz $[\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*]$. Esto es:

$$\det|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*| = \det|\underline{\underline{\sigma}} - \sigma^* \underline{\underline{I}}| = \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma^* & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} - \sigma^* & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} - \sigma^* \end{vmatrix} = 0$$

$$\det|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*| = (\sigma^*)^3 - I_1 (\sigma^*)^2 + I_2 (\sigma^*) - I_3 = 0 \quad (\text{An-E.15})$$

siendo:

- I_1, I_2, I_3 : INVARIANTES DEL TENSOR DE TENSIONES.

Escalares que no varían con la posición de los planos que pasan por el punto.

- $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$: TENSIONES PRINCIPALES.

Raíces de la ec.(An-E.15), que sustituidas en la ec.(An-E.14) permiten obtener los cosenos directores de la normal a cada plano principal:

$$\text{para: } \sigma_1 \Rightarrow \vec{l}_1 = \begin{Bmatrix} (\ell_1)_1 \\ (\ell_2)_1 \\ (\ell_3)_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow (\ell_1)_1^2 + (\ell_2)_1^2 + (\ell_3)_1^2 = 1$$

$$\text{para: } \sigma_2 \Rightarrow \vec{l}_2 = \begin{Bmatrix} (\ell_1)_2 \\ (\ell_2)_2 \\ (\ell_3)_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow (\ell_1)_2^2 + (\ell_2)_2^2 + (\ell_3)_2^2 = 1$$

$$\text{para: } \sigma_3 \Rightarrow \vec{l}_3 = \begin{Bmatrix} (\ell_1)_3 \\ (\ell_2)_3 \\ (\ell_3)_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow (\ell_1)_3^2 + (\ell_2)_3^2 + (\ell_3)_3^2 = 1$$

fig.(An-E.5): Coordenadas cilíndricas en el espacio de High-Westergard.

An-E.5.a- Expresiones de los invariantes del tensor de tensiones.

De la ec.(An-E.15), se obtiene en forma explícita la expresión matemática de los invariantes del tensor de tensiones:

- **Primer invariante del tensor de tensiones:** Es el invariante lineal, y es proporcional a la presión hidrostática en un punto. Su expresión matemática es:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (\text{An-E.16})$$

Seleccionando un sistema de referencia que coincida con las direcciones de las tensiones principales, se puede escribir este invariante, como la ecuación del plano desviador (normal al espacio diagonal):

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (\text{An-E.17})$$

La *tensión media u octaédrica* se relaciona con el primer invariante del tensor de tensiones, de la siguiente manera:

$$\sigma_m = \sigma_{oct} = \frac{I_1}{3} \quad (\text{An-E.18})$$

siendo σ_{oct} la tensión normal al plano octaédrico, que es aquel que forma igual ángulo con los tres ejes de tensiones principales **fig.(An-E.5)**. En función de esta tensión media se puede obtener la distancia que hay desde el origen del espacio de tensiones hasta el correspondiente plano octaédrico. Esta magnitud, medida sobre el espacio diagonal, vale:

$$\xi = \sqrt{3} \sigma_m = \sqrt{3} \sigma_{oct} = \sqrt{3} \frac{I_1}{3} = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \quad (\text{An-E.19})$$

– **Segundo invariante del tensor de tensiones:** Es el invariante cuadrático, y vale:

$$\begin{aligned} I_2 &= (\sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{11} \sigma_{33} + \sigma_{22} \sigma_{33}) - \tau_{12}^2 - \tau_{13}^2 - \tau_{31}^2 \\ I_2 &= (\alpha_m)_{11} + (\alpha_m)_{22} + (\alpha_m)_{33} \end{aligned} \quad (\text{An-E.20})$$

siendo $(\alpha_m)_{ii}$ el determinante del menor adjunto correspondiente al cofactor σ_{ii} , del tensor de tensiones.

Si los ejes de referencia coinciden con las tensiones principales, el segundo invariante del tensor de tensiones queda escrito como:

$$I_2 = (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \quad (\text{An-E.21})$$

– **Tercer invariante del tensor de tensiones:** Es el invariante cúbico, y vale:

$$I_3 = \det(\underline{\underline{\sigma}}) = (\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} + 2\tau_{12} \tau_{13} \tau_{23} - \tau_{12}^2 \sigma_{33} - \tau_{13}^2 \sigma_{22} - \tau_{23}^2 \sigma_{11}) \quad (\text{An-E.22})$$

Si los ejes de referencia coinciden con las tensiones principales, el tercer invariante del tensor de tensiones queda escrito como:

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (\text{An-E.23})$$

An-E.6.- COMPONENTE ESFERICA Y DESVIADORA DEL TENSOR DE TENSIONES.

Siendo el tensor de tensiones un tensor simétrico $\underline{\underline{\sigma}}$, puede ser descompuesto a su vez en dos tensores simétricos, uno que representa estados de corte puro denominado *tensor desviador de tensiones* $\underline{\underline{s}}$ y otro que representa un estado hidrostático de tensión denominado *tensor esférico de tensiones* o *tensor hidrostático de tensiones* $\underline{\underline{p}}$ o también llamado *tensor de tensiones*

octaédrico $\underline{\underline{\sigma}}_{oct}$. Esto es:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{p}} + \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}}_{oct} + \underline{\underline{s}} \quad (\text{An-E.24})$$

siendo:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} ;$$

$$\underline{\underline{s}} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} ;$$

$$\underline{\underline{p}} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} ;$$

$$p_{ij} = p \delta_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} = \sigma_{oct} \delta_{ij} = \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \right) \delta_{ij} = \frac{I_1}{3} \delta_{ij} ;$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{oct} \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} ;$$

$$\delta_{ij} : \text{función de Kronecker} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j ; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

An-E.6.a- Expresiones de los invariantes del tensor desviador de tensiones.

Procediendo en manera análoga al apartado (*apart. An-E.5*), se puede obtener la ecuación característica del tensor desviador de tensiones. Esta surge de anular el determinante de la matriz $[\underline{\underline{s}} - s^* \underline{\underline{I}}]$. Esto es:

$$\det |\underline{\underline{s}} - s^* \underline{\underline{I}}| = \det |\underline{\underline{s}} - s^* \underline{\underline{I}}| = \det \begin{vmatrix} s_{11} - s^* & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} - s^* & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} - s^* \end{vmatrix} = 0$$

$$\det |\underline{\underline{s}} - s^* \underline{\underline{I}}| = (s^*)^3 - J_1 (s^*)^2 + J_2 (s^*) - J_3 = 0 \quad (\text{An-E.25})$$

siendo:

- J_1, J_2, J_3 : INVARIANTES DEL TENSOR DESVIADOR DE TENSIONES.
Escalares que no varían con la posición de los planos que pasan por el punto.
- s^* : TENSION PRINCIPAL DESVIADORA: $s_3 \leq s_2 \leq s_1$.
Se obtienen como raíces de la ec.(An-E.25), que sustituidas en la ecuación :

$$[\underline{\underline{s}} - s^* \underline{\underline{I}}] \cdot \vec{\ell} = \mathbf{0} ,$$

permite obtener los cosenos directores de la normal $\vec{\ell}$ a cada plano principal desviador .

De la ec.(An-E.25), se obtiene en forma explícita la expresión matemática de los invariantes del tensor desviador de tensiones:

- **Primer invariante del tensor desviador de tensiones:** Este invariante es nulo, y su expresión matemática es:

$$J_1 = s_{11} + s_{22} + s_{33} = \text{tr} (\underline{\underline{s}}) = I_1 - 3 \sigma_m = 0 \quad (\text{An-E.26})$$

Seleccionando un sistema de referencia que coincida con las direcciones de las tensiones principales, se puede escribir este invariante como:

$$J_1 = s_1 + s_2 + s_3 = \text{tr} (\underline{\underline{s}}) \quad (\text{An-E.27})$$

- **Segundo invariante del tensor desviador de tensiones:** Es el promedio cuadrático de las desviaciones, y vale:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (\text{An-E.28})$$

Si los ejes de referencia coinciden con las tensiones principales, el segundo invariante del tensor desviador de tensiones queda escrito como:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \quad (\text{An-E.29})$$

También se puede escribir este invariante como el *radio vector* de la curva que delimita el dominio de la función de fluencia en el plano desviador u octaédrico **fig.(An-E.5)**:

$$\rho = \sqrt{3} \tau_{oct} = \sqrt{3} \left[\sqrt{\frac{2}{3} J_2} \right] = \sqrt{2 J_2} \quad (\text{An-E.30})$$

Por último, es importante mencionar que la *tensión uniaxial efectiva* o *tensión uniaxial equivalente* surge como una función de este segundo invariante del tensor desviador de tensiones (ver: *ec.(Ap-I.33)* y *ec.(Ap-I.69)*):

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3 J_2} \quad (\text{An-E.31})$$

– **Tercer invariante del tensor desviador de tensiones:** Es el invariante cúbico, y vale:

$$J_3 = \det(\underline{\underline{\mathbf{s}}}) \quad (\text{An-E.32})$$

Si los ejes de referencia coinciden con las tensiones principales, el tercer invariante del tensor desviador de tensiones queda escrito como:

$$J_3 = \frac{1}{3} (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) = s_1 s_2 s_3 \quad (\text{An-E.33})$$

Este invariante, junto a I_1 y J_2 , permite situar de modo inequívoco un punto de tensión en un cierto plano octaédrico **fig.(An-E.5)**; pues el primer invariante del tensor de tensiones I_1 sitúa la posición del plano octaédrico y el segundo invariante fija los contornos de este plano. Así, el tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3 , permite definir la tercera y última coordenada del sistema cilíndrico de High-Westergard, y suele representarse mediante el *ángulo de similaridad de Lode*:

$$3 \theta = \arcsin \left[\frac{\sqrt{2} J_3}{\tau_{oct}} \right] = \arcsin \left[\frac{3\sqrt{3} J_3}{2 (J_2)^{\frac{3}{2}}} \right] ; \quad (\text{An-E.34})$$

$$\text{con: } -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{6} ,$$

Debido a que este ángulo es función del segundo y tercer invariante del tensor desviador, permite junto al primer invariante determinar la magnitud de las tensiones principales [33][63]. De la ec.(An-E.24) se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{Bmatrix} , \\ \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} &= \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sin(\theta + 2\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\theta) \\ \sin(\theta + 4\frac{\pi}{3}) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (An-E.35) \\ \text{con: } \tau_{oct} &= \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

An-E.7.- TENSOR DE DEFORMACIONES: $\underline{\underline{\epsilon}}$.

Cuando un sólido está sometido a cargas externas experimenta una deformación respecto de su configuración original. Hay distintas maneras de definir las deformaciones en este trabajo se ha utilizado la definición de deformaciones dada por Cauchy, que por otro lado es muy apropiada para tratar problemas con deformaciones infinitesimales.

Para cada vector de tensiones existe uno de deformación asociado, o viceversa, de manera que los vectores de deformaciones correspondiente a tres planos ortogonales dan lugar a un tensor de deformaciones del siguiente tipo:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \epsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ & \epsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \mathbf{sim.} & & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \mathbf{sim.} & & \epsilon_{33} \end{bmatrix} ;$$

con: $\epsilon_{ij} \equiv \epsilon_{ji}$ (An-E.36)

$$y : \epsilon_{ij} \equiv \begin{cases} \epsilon_{ij} & ; \quad \forall i = j \\ \frac{1}{2}\gamma_{ij} & ; \quad \forall i \neq j \end{cases}$$

En notación indicial se puede expresar este tensor de deformaciones, del siguiente modo:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{An-E.37})$$

Escribiendo la parte simétrica del tensor de pequeñas deformaciones, como un conjunto ordenado de magnitudes al igual que en el problema tensional, se tiene el *vector de pequeñas deformaciones*:

$$\underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2 \epsilon_{12} \\ 2 \epsilon_{23} \\ 2 \epsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (\text{An-E.38})$$

An-E.8.- DIRECCIONES PRINCIPALES DE DEFORMACION – INVARIANTES DEL TENSOR DE DEFORMACIONES.

Procediendo en manera análoga al apartado (*apart. An-E.5*), se puede obtener la ecuación característica del tensor deformaciones. Esta surge de anular el determinante de la matriz $[\underline{\epsilon} - \epsilon^* \underline{\mathbf{I}}]$. Esto es:

$$\det |\underline{\epsilon} - \epsilon^* \underline{\mathbf{I}}| = \det |\underline{\epsilon} - \epsilon^* \underline{\mathbf{I}}| = \det \begin{vmatrix} \epsilon_{11} - \epsilon^* & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} - \epsilon^* & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} - \epsilon^* \end{vmatrix} = 0$$

$$\det |\underline{\epsilon} - \epsilon^* \underline{\mathbf{I}}| = (\epsilon^*)^3 - I'_1 (\epsilon^*)^2 + I'_2 (\epsilon^*) - I'_3 = 0 \quad (\text{An-E.39})$$

siendo:

- I'_1, I'_2, I'_3 : INVARIANTES DEL TENSOR DE DEFORMACIONES.

Escalares que no varían con la posición de los planos que pasan por el punto.

- ϵ^* : DEFORMACION PRINCIPAL: $\epsilon_3 \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_1$.

Se obtienen como raíces de la ec.(An-E.39), que sustituidas en la ecuación :

$$[\underline{\epsilon} - \epsilon^* \underline{\mathbf{I}}] \cdot \underline{\mathbf{n}} = \mathbf{0} ,$$

permite obtener los cosenos directores de la normal $\underline{\mathbf{n}}$ a cada plano de deformación principal. La proyección del vector de deformaciones sobre estos planos es nula.

De la ec. (An-E.39), se obtiene en forma explícita la expresión matemática de los invariantes del tensor de deformaciones:

- **Primer invariante del tensor de deformaciones:** Este invariante es lineal, y su expresión matemática es:

$$I'_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \quad (\text{An-E.40})$$

Seleccionando un sistema de referencia que coincida con las direcciones de las deformaciones principales, se puede escribir este invariante, como:

$$I'_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \quad (\text{An-E.41})$$

La *deformación volumétrica y la octaédrica* se relacionan con el primer invariante del tensor de deformaciones, a través de la siguiente expresión matemática:

$$\epsilon_{oct} = \frac{1}{3} \epsilon_v = \frac{I'_1}{3} \quad (\text{An-E.42})$$

- **Segundo invariante del tensor de deformaciones:** Es el invariante cuadrático, y vale:

$$\begin{aligned} I'_2 &= (\epsilon_{11} \epsilon_{22} + \epsilon_{11} \epsilon_{33} + \epsilon_{22} \epsilon_{33}) - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{13}^2 - \epsilon_{31}^2 \\ I'_2 &= (\alpha'_m)_{11} + (\alpha'_m)_{22} + (\alpha'_m)_{33} \end{aligned} \quad (\text{An-E.43})$$

siendo $(\alpha'_m)_{ii}$ el determinante del menor adjunto correspondiente al cofactor ϵ_{ii} , del tensor de deformaciones.

Si los ejes de referencia coinciden con las deformaciones principales, el segundo invariante del tensor de deformaciones resulta:

$$I'_2 = (\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3) \quad (\text{An-E.44})$$

- **Tercer invariante del tensor de deformaciones:** Es el invariante cúbico, y vale:

$$I'_3 = \det(\underline{\underline{\epsilon}}) = (\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33} + 2\epsilon_{12}\epsilon_{13}\epsilon_{23} - \epsilon_{12}^2\epsilon_{33} - \epsilon_{13}^2\epsilon_{22} - \epsilon_{23}^2\epsilon_{11}) \quad (\text{An-E.45})$$

Si los ejes de referencia coinciden con las deformaciones principales, el tercer invariante del tensor de deformaciones resulta:

$$I'_3 = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \quad (\text{An-E.46})$$

An-E.9.- COMPONENTE ESFERICA Y DESVIADORA DEL TENSOR DE DEFORMACIONES.

Siendo el tensor de pequeñas deformaciones un tensor simétrico $\underline{\underline{\epsilon}}$, puede ser descompuesto a su vez en dos tensores simétricos, uno que representa estados distorsionales denominado *tensor desviador de deformaciones* $\underline{\underline{e}}$ y otro que representa un estado volumétrico de deformación denominado *tensor esférico de deformaciones* o *tensor volumétrico de deformaciones* $\underline{\underline{p'}}$ o también llamado *tensor octaédrico de deformaciones* $\underline{\underline{\epsilon}}_{oct}$. Esto es:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{p'}} + \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\epsilon}}_{oct} + \underline{\underline{e}} \tag{An-E.47}$$

siendo:

$$p'_{ij} = p' \delta_{ij} = \frac{\epsilon_v}{3} \delta_{ij} = \epsilon_{oct} \delta_{ij} = \left(\frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}}{3} \right) \delta_{ij} = \frac{I'_1}{3} \delta_{ij} \quad ;$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_{oct} \delta_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{I'_1}{3} \delta_{ij} \quad ;$$

$$\delta_{ij} : \text{función de Kronecker} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j ; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

An-E.9.a- Expresiones de los invariantes del tensor desviador de deformaciones.

Los invariantes del tensor desviador de pequeñas deformaciones se obtienen, al igual que para el tensor desviador de tensiones, a partir de su ecuación característica, la que surge de anular el determinante de la matriz $[\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^*]$. Esto es:

$$\det |\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^*| = \det |\underline{\underline{e}} - e^* \underline{\underline{I}}| = \det \begin{vmatrix} e_{11} - e^* & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} - e^* & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} - e^* \end{vmatrix} = 0$$

$$\det |\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^*| = (e^*)^3 - J'_1 (e^*)^2 + J'_2 (e^*) - J'_3 = 0 \tag{An-E.48}$$

siendo:

- J'_1, J'_2, J'_3 : INVARIANTES DEL TENSOR DESVIADOR DE DEFORMACIONES.

Escalares que no varían con la posición de los planos que pasan por el punto.

- e^* : DEFORMACION PRINCIPAL DESVIADORA: $e_3 \leq e_2 \leq e_1$.

Se obtienen como raíces de la ec.(An-E.48), que sustituidas en la ecuación :

$$[\underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}}^*] \cdot \underline{\underline{n}}' = \mathbf{0} ,$$

permite obtener los cosenos directores de la normal $\underline{\underline{n}}'$ a cada plano principal desviador .

De la ec.(An-E.48), se obtiene en forma explícita la expresión matemática de los invariantes del tensor desviador de deformaciones:

- **Primer invariante del tensor desviador de deformaciones:** Este invariante es nulo, y su expresión matemática es:

$$J'_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33} = tr(\underline{\underline{e}}) = I'_1 - \epsilon_v = 0 \quad (An-E.49)$$

Seleccionando un sistema de referencia que coincida con las direcciones de las deformaciones principales, se puede escribir este invariante como:

$$J'_1 = e_1 + e_2 + e_3 = tr(\underline{\underline{e}}) \quad (An-E.50)$$

- **Segundo invariante del tensor desviador de deformaciones:** Es el promedio cuadrático de las desviaciones, y vale:

$$J'_2 = \frac{1}{6} [(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2] + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \quad (An-E.51)$$

Si los ejes de referencia coinciden con las tensiones principales, el segundo invariante del tensor desviador de deformaciones, resulta:

$$J'_2 = \frac{1}{6} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2] = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad (An-E.52)$$

También se puede escribir este invariante, como una distorsión octaédrica:

$$\gamma_{oct} = \sqrt{\frac{8}{3} J'_2} \quad (An-E.53)$$

- **Tercer invariante del tensor desviador de deformaciones:** Es el invariante cúbico, y vale:

$$J'_3 = \det(\underline{\underline{\mathbf{e}}}) \quad (\text{An-E.54})$$

Si los ejes de referencia coinciden con las deformaciones principales, el tercer invariante del tensor desviador de deformaciones queda escrito como:

$$J'_3 = \frac{1}{3} (e_1^3 + e_2^3 + e_3^3) = e_1 e_2 e_3 \quad (\text{An-E.55})$$

APENDICE II

ALGUNOS ASPECTOS SOBRE EL TRATAMIENTO NUMERICO DEL MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLASTICO

Ap-II.1.- EQUILIBRIO DEL SOLIDO CONTINUO – PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.

Ap-II.1.a.- Campos virtuales.

Se dice que el *campo de una variable es virtual*, cuando es *arbitrario, admisible con las condiciones de contorno forzadas del problema* y es *independiente* de cualquier otra variable.

El principio de los trabajos virtuales PTV puede formularse a través de variables definidas en dos campos virtuales diferentes e independientes entre sí :

- Variables de desplazamientos y deformaciones virtuales: $\delta \underline{\mathbf{u}}$, $\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$.
- Variables de fuerza y tensiones virtuales: $\delta \underline{\mathbf{f}}$, $\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$.

Dada la orientación que tiene la tesis, hacia una formulación en el *campo primal*, se adopta como campo virtual el correspondiente al espacio de *desplazamiento y deformaciones*, situación que conduce a que la ecuación fundamental del **PTV** se transforme en una *condición general de equilibrio del sólido continuo*.

Ap-II.1.b.- Campo de desplazamientos virtuales.

Dentro del campo de desplazamientos virtuales, se puede formular un *vector de desplazamientos hipotético (pero factible)*, arbitrario, no asociado a ningún sistema de cargas exteriores actuantes (independiente de ellas), y que satisface las *condiciones geométricas de contorno* (condiciones cinemáticas forzadas). Al vector que cumple con estas condiciones, se lo denomina *vector de desplazamiento virtual*.

Condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir $\delta \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$:

- Los *desplazamientos virtuales* $\delta \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, deben ser continuos en el dominio del sólido, y deben cumplir con la siguiente condición de compatibilidad:

$$\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(x_1, x_2, x_3) = \nabla_s(\delta \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)) \quad (Ap-II.1)$$
 donde $\nabla_s(\dots) = 1/2 [\nabla_s(\dots) + \nabla_s^T(\dots)]$ es el *operador gradiente simétrico*.
- Los *desplazamientos virtuales* $\delta \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, deben ser infinitesimales.
- Por último, deben cumplir las *condiciones de borde geométricas, o condiciones geométricas forzadas* (vinculación) $\delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$; siendo $\bar{\mathbf{u}}$ los desplazamientos prescritos. De acuerdo con éstas, los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, deben ser *funciones admisibles*.

Ap-II.1.c.- Ecuación general de los trabajos virtuales – Identidad fundamental.

La energía virtual interna acumulada en un sólido debido a la acción simultánea de las variables $\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ y $\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$, definidas en los dos campos virtuales diferentes e independientes entre sí , es igual a (trabajo virtual de segundo orden):

$$\delta^2 W_{int}(\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}) = \int_V \delta^2 w(\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}) dV \quad (Ap-II.2)$$

donde $\delta^2 w(\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}) = \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}. \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} = \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}. (\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^e + \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^p)$ es la energía específica virtual total. Sustituyendo la ecuación de compatibilidad geométrica (ec.(Ap-II.1)) en la ec.(Ap-II.2), se tiene:

$$\delta^2 W_{int}(\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}) = \int_V \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}. \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} dV = \int_V \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}. \nabla_s(\delta \mathbf{u}) dV \quad (Ap-II.3)$$

integrando por partes esta última, (teorema de Green), resulta la denominada *identidad fundamental de los trabajos virtuales*:

$$\left[\delta W_{int}^2 = \int_V \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \nabla_s (\delta \mathbf{u}) \, dV \right] \equiv \left[\int_V \text{div}(\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \oint_S \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \vec{\boldsymbol{\ell}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS = \delta W_{ext}^2 \right] \quad (\text{Ap-II.4})$$

donde:

$$\vec{\boldsymbol{\ell}} = \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{Bmatrix} : \text{Versor normal a la superficie del sólido ; con : } \ell_i = \cos(\vec{\boldsymbol{\ell}} \wedge x_i) .$$

$$\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}(x_1, x_2, x_3) = \nabla_s (\delta \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)) : \text{Ecuación de compatibilidad geométrica .}$$

$$\delta \mathbf{f}_V = \text{div}(\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) : \text{Ecuación de equilibrio en un volumen elemental. Siempre que } \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \text{ sea simétrico: } \delta \sigma_{ij} \equiv \delta \sigma_{ji} .$$

$$\delta \mathbf{f}_S = \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \vec{\boldsymbol{\ell}} : \text{Ecuación de las condiciones de contorno forzadas del tipo estático.}$$

o bien, sustituyendo esto último en la ec.(Ap-II.4), se tiene:

$$\delta^2 W_{int} - \delta^2 W_{ext} = 0$$

(Ap-II.5)

$$\int_V \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} \, dV - \int_V \delta \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \oint_S \delta \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{u} \, dS = 0$$

donde:

$$\delta^2 \rho_V = -\delta \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{u} : \text{Potencial específico de las fuerzas virtuales de volumen } \delta \mathbf{f}_V .$$

$$\delta^2 \rho_S = -\delta \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{u} : \text{Potencial específico de las fuerzas virtuales de superficie } \delta \mathbf{f}_S .$$

Ap-II.1.d.- Formulación del Principio de los trabajos virtuales a partir de las variables de desplazamientos y deformaciones virtuales – Principio de los desplazamientos virtuales.

Debido a que el *campo real* de una variable, es uno de los posibles *campos virtuales* que ésta puede adoptar, se puede considerar en la *identidad fundamental del PTV* ec.(Ap-II.5), un campo de deformaciones y desplazamientos *virtuales* ($\delta \mathbf{u}$, $\delta \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$), y un campo de tensión y fuerzas reales ($\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$, \mathbf{f}_V , \mathbf{f}_S). Esto es (trabajo virtual de primer orden):

$$\int_V \underline{\underline{\sigma}} \cdot \delta \underline{\underline{\epsilon}} dV - \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{u} dV - \oint_S \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad (Ap-II.6)$$

pero el trabajo virtual de las fuerzas de superficie, puede ser presentado como: $\oint_S \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS =$

$$\int_{S_F} \mathbf{f}_{S_F} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{S_D} \mathbf{f}_{S_D} \cdot \delta \mathbf{u} dS, \text{ donde } S_D \text{ es la superficie del sólido donde } \mathbf{u} = \mathbf{cte}. \text{ (zona}$$

vinculada), por lo tanto se cumple en esta zona que $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$; S_F es la superficie del sólido no vinculada, por lo tanto en ella el campo de desplazamientos \mathbf{u} es incógnita; y \mathbf{f}_{S_F} , \mathbf{f}_{S_D} , son las fuerzas superficiales aplicadas y sus correspondientes reacciones, respectivamente. De acuerdo a esto, el trabajo virtual de las fuerzas de superficie queda expresado por:

$$\oint_S \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS = \int_{S_F} \mathbf{f}_{S_F} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (Ap-II.7)$$

Sustituyendo ésta en la ec.(Ap-II.6), resulta la expresión de la energía potencial virtual total, desarrollada durante la acción de un desplazamiento virtual $\delta \mathbf{u}$:

$$\int_V \underline{\underline{\sigma}} \cdot \delta \underline{\underline{\epsilon}} dV - \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{S_F} \mathbf{f}_{S_F} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad (Ap-II.8)$$

donde:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \int_{t=0}^t \underline{\underline{\dot{\sigma}}} dt = \int_{t=0}^t \underline{\underline{\underline{D}}}^{ep} \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} dt \quad (Ap-II.9)$$

siendo $\underline{\underline{\underline{D}}}^{ep}$ el tensor de rigidez elasto-plástico tangente, de cuarto orden. De esta forma,

se desarrolla un *trabajo virtual*, por unas *tensiones y fuerzas reales*, durante la acción de unas *deformaciones y desplazamientos virtuales*, (recordar que son campos independientes entre sí).

Debido a que los desplazamientos son virtuales y la deformación es función de estos ec.(Ap-II.1), la ecuación de los trabajos virtuales ec.(Ap-II.8), constituye una *condición general de equilibrio para los sólidos continuos*, formulada de modo integral en el dominio V . De esto se deduce, que es una *forma débil* de la condición de equilibrio formulada a través de una ecuación diferencial aplicada a un volumen elemental, más dos condiciones forzadas, una estática y otra geométrica o cinemática. Su validez se extiende a problemas con *no linealidad en su ley constitutiva*.

Ap-II.1.e.- Criterio de energía para formular la condición de estabilidad en la solución.

Durante la aplicación de incrementos de fuerzas externas, suficientemente pequeños, se puede observar que la respuesta de un punto del sólido tiene distintas relaciones entre las tensiones y deformaciones. Inicialmente se presenta una relación lineal, que gradualmente se desvía de la linealidad hasta alcanzar un punto (tensión máxima), donde *la respuesta cesa de ser estable fig.(Ap-II.1)*, bajo ciertas condiciones de carga ^[145]. En este apartado se considera la formulación de la *condición de estabilidad en la solución*, a partir de un criterio de energía. Partiendo de una *configuración de equilibrio del sólido*, que se denomina en adelante **configuración de origen**, donde las variables que intervienen en el problema valen: $\mathbf{u}; \underline{\boldsymbol{\epsilon}}; \underline{\boldsymbol{\sigma}}; \mathbf{f}_V; \mathbf{f}_{S_F}$, y por lo tanto su energía potencial total vale: $\Pi = W_{int} + W_{ext}$. Dando un *desplazamiento virtual* $\delta \mathbf{u}$ (sin violar las condiciones de borde geométricas), se obtiene una **nueva configuración**, donde las variables que intervienen en el problema valen: $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \rightarrow \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^* = \underline{\boldsymbol{\epsilon}} + \delta \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \rightarrow \underline{\boldsymbol{\sigma}}^* = \underline{\boldsymbol{\sigma}} + \delta \underline{\boldsymbol{\sigma}}; \mathbf{f}_V^* = \mathbf{f}_V; \mathbf{f}_{S_F}^* = \mathbf{f}_{S_F}$, y por lo tanto su energía potencial total vale: $\Pi^* = W_{int}^* + W_{ext}^*$.

Si el incremento de trabajo virtual desarrollado por las fuerzas externas, durante la aplicación de un desplazamiento virtual, tiende a cero, no hay incremento en la energía almacenada, y se dice entonces que la *configuración de origen* es estable ^[145]. Por el contrario, si esto no se satisface, el exceso de energía aparece en forma de energía cinética, indicando una inestabilidad en la configuración original ^[145].

Estas consideraciones, conducen a la siguiente formulación matemática, donde la energía potencial en la *nueva configuración* puede ser aproximada por el siguiente desarrollo en serie de Taylor:

$$\Pi^* = \Pi + \delta \Pi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi + \frac{1}{3!} \delta^3 \Pi + \dots \tag{Ap-II.10}$$

donde $\frac{1}{i!} \delta^i \Pi$ representa la *i-ésima* variación de la energía potencial total. Despreciando la influencia de las variaciones de orden superior a dos, se puede obtener de la anterior el incremento de trabajo virtual total como:

$$\Delta \Pi = \Pi^* - \Pi \simeq \delta \Pi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi \tag{Ap-II.11}$$

A pesar de que en *plasticidad* no siempre se puede conocer la expresión del *funcional de energía potencial total* Π (sólo se puede conocer explícitamente su forma matemática en determinados casos simples – ver K. Washizu ^[145] –), es posible conocer su *primera variación* $\delta \Pi$ y su *segunda variación* $\delta^2 \Pi$, ya sea: — mediante una *formulación implícita factible de ser derivada** a través de la aplicación del *teorema de las funciones implícitas* ^[147]; — o bien, en este caso particular, se puede conocer su primera variación $\delta \Pi$ a través de la energía

* Nota: Si la primera variación del funcional de energía potencial total, vale:

$$\delta \Pi = \int_V \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \underline{\boldsymbol{\epsilon}} dV - \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{S_F} \mathbf{f}_{S_F} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0$$

potencial total que se desarrolla durante la aplicación de un desplazamiento virtual *ec.(Ap-II.8)*, y su segunda variación $\delta^2\Pi$ mediante la energía desarrollada durante la aplicación de un campo de fuerzas y desplazamientos virtuales *ec.(Ap-II.5)*. Esto es:

$$\delta\Pi = \int_V \underline{\underline{\mathbf{g}}}. \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} dV - \int_V \mathbf{f}_V. \delta\mathbf{u} dV - \int_{S_F} \mathbf{f}_{S_F}. \delta\mathbf{u} dS \quad (\text{Ap-II.12,a})$$

$$\delta^2\Pi = \int_V \delta\underline{\underline{\mathbf{g}}}. \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} dV - \int_V \delta\mathbf{f}_V. \delta\mathbf{u} dV - \oint_S \delta\mathbf{f}_S. \delta\mathbf{u} dS \quad (\text{Ap-II.12,b})$$

Pero debido a que el desplazamiento virtual $\delta\mathbf{u}$ configura un *campo admisible y arbitrario* que actúa sobre un sólido en equilibrio, se tiene que el trabajo virtual desarrollado es nulo, por lo tanto se puede decir que se trata de un proceso estacionario donde la *primera variación del funcional de energía potencial total* es nula $\delta\Pi = 0$ (Condición de equilibrio en la configuración original).

Sustituyendo la *condición de estacionaridad* en la *ec.(Ap-II.11)*, resulta que el incremento total de trabajo virtual es igual a la *segunda variación del funcional de energía potencial total*, que coincide en este caso con la energía desarrollada durante la aplicación de *dos campos virtuales ec.(Ap-II.12,b)* (trabajo virtual de segundo orden)

$$\Delta\Pi \simeq \underbrace{\delta\Pi}_{=0} + \frac{1}{2}\delta^2\Pi \Rightarrow \Delta\Pi \simeq \frac{1}{2}\delta^2\Pi \quad (\text{Ap-II.13})$$

Con las consideraciones realizadas, se puede concluir en que *la estabilidad de la configuración original* en las vecindades del punto de equilibrio, puede determinarse a través del signo de la segunda variación del funcional de energía potencial total. Esto es:

se puede escribir en forma implícita el funcional como:

$$\Pi = \int_V w dV + \int_V \rho_V dV - \int_{S_F} \rho_{S_F} dS$$

donde si se conocen las primeras variaciones de:

$$\delta w = \underline{\underline{\mathbf{g}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}).\delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}; \quad \delta\rho_V = -\mathbf{f}_V. \delta\mathbf{u}; \quad \delta\rho_S = -\mathbf{f}_S. \delta\mathbf{u}$$

$$\Delta\Pi \simeq \frac{1}{2}\delta^2\Pi \begin{cases} > 0 & \begin{array}{l} \text{La configuración original es estable} \\ \text{para cualquier desplazamiento} \\ \text{virtual.} \end{array} \\ < 0 & \begin{array}{l} \text{La configuración} \\ \text{original es inestable para al menos} \\ \text{un desplazamiento virtual.} \end{array} \end{cases} \quad (\text{Ap-II.14})$$

Si se introduce la ec.(Ap-II.12,b) en la ec.(Ap-II.14), y en la que resulte de aquí se sustituyen las variables virtuales por sus correspondientes valores ($\delta\mathbf{u} \rightarrow \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} = \nabla_s(\mathbf{u}) \rightarrow \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{ep}\delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}$; $\delta\mathbf{f}_V \equiv \mathbf{0}$; $\delta\mathbf{f}_{S_F} \equiv \mathbf{0}$), se obtiene la *expresión general explícita que estudia la estabilidad de la solución en la configuración original* ^[11] :

$$\Delta\Pi \simeq \frac{1}{2} \int_V \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} dV \quad (\text{Ap-II.15})$$

Según Bažant ^[11], esta condición aplicada a *materiales con ablandamiento*, permite definir un *tamaño de zona de localización de deformaciones plásticas*, donde se desarrolla un incremento de deformación positivo que junto al incremento de deformación negativo que se produce en la zona no plastificada, conduce a un *incremento de trabajo de segundo orden* positivo y máximo sobre todo el volumen del sólido. Así, a partir de la ec.(Ap-II.15), la solución será estable en un determinado instante del proceso de carga cuasi-estático, si se cumple que **fig.(Ap-II.1)**:

$$\Delta\Pi \simeq \frac{1}{2} \int_V \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} dV = \frac{1}{2} \left[\int_{V^0} \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} dV + \int_{V^p} \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} dV \right]^{max.} > 0 \quad (\text{Ap-II.16})$$

$$\Delta\Pi \simeq \{[\Delta\Pi]_{V^0} + [\Delta\Pi]_{V^p}\}^{max.} > 0$$

donde V^0 es el volumen de la zona no plastificada o elástica, V^p es el volumen de la zona plastificada con ablandamiento, $[\Delta\Pi]_{V^0} = \frac{1}{2} \int_{V^0} \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^e dV > 0$ es el trabajo de segundo orden desarrollado en la zona que no ha plastificado; y $[\Delta\Pi]_{V^p} = \frac{1}{2} \int_{V^p} \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^e dV + \frac{1}{2} \int_{V^p} \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^p dV > 0$ es el trabajo de segundo orden desarrollado en la zona que ha plastificado.

En la ec.(Ap-II.16), se observa claramente, que para que el trabajo global de segundo orden sea mayor que cero, el volumen de la zona dañada no debe superar de una cierta dimensión. Esto garantiza que se pueda cumplir durante todo el proceso elasto-plástico con ablandamiento, que: $|\int_{V^p} \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^p dV| \leq |\int_{V^0} \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^e dV| + |\int_{V^p} \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}^e dV|$

fig.(Ap-II.1): Respuesta esquemática uniaxial, para estados elasto-plásticos: a) Con endurecimiento.
b) Con ablandamiento.

Es importante observar la diferencia entre la condición de estabilidad global, dada por la ec.(Ap-II.16), y la de estabilidad local de Drucker (condición suficiente) dados por la ec.(Ap-I.55) y la ec.(Ap-I.56). De todo esto, se puede concluir que en un punto del sólido es posible que se viole la condición de estabilidad de Drucker, sin que la respuesta global sea inestable (consultar también [5][7][11][67][104][140][145])

Ap-II.1.f.- Criterio de energía para formular la condición de unicidad en la solución.

Si a partir de un estado de equilibrio de un punto del sólido (configuración de origen) $\underline{\epsilon}$, $\underline{\sigma}$, se consideran dos incrementos de desplazamientos virtuales (arbitrarios y cinemáticamente admisibles) $\delta \mathbf{u}_1$, $\delta \mathbf{u}_2$, se podría medir la *diferencia de energía potencial total* entre una y otra de estas dos *nuevas configuraciones* que ha adquirido el sólido, si se aplica sobre éste un único desplazamiento $\Delta(\delta \mathbf{u}) = \delta \mathbf{u}_2 - \delta \mathbf{u}_1$. Este nuevo desplazamiento será también virtual (arbitrario y cinemáticamente admisible), y dará lugar a una variación de deformación: $\Delta(\delta \underline{\epsilon})$ y a una tensión: $\Delta(\delta \underline{\sigma})$; de donde resulta un trabajo virtual de segundo orden igual a ec.(Ap-I.15):

$$\Delta(\delta^2\Pi) = \int_V \Delta(\delta\underline{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \Delta(\delta\underline{\boldsymbol{\epsilon}}) dV \quad (\text{Ap-II.17})$$

de donde se deduce que si la variación de tensión $\Delta(\delta\underline{\boldsymbol{\sigma}})$ producida por el desplazamiento virtual $\Delta(\delta\underline{\boldsymbol{u}})$ es nula ($\Delta(\delta\underline{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{0}$), se tiene para los dos estados de desplazamientos cinemáticamente admisibles e independientes $\delta\underline{\boldsymbol{u}}_2 \neq \delta\underline{\boldsymbol{u}}_1$, el mismo incremento de tensión $\delta\underline{\boldsymbol{\sigma}}_2 \equiv \delta\underline{\boldsymbol{\sigma}}_1$, por lo tanto la *solución no es única*, y resulta de la ec.(Ap-II.17) que:

$$\Delta(\delta^2\Pi) \equiv 0 \quad (\text{Ap-II.18})$$

y debe ser entendida como una bifurcación en la respuesta ^[18]; por lo tanto la ec.(Ap-II.18) será una *condición necesaria para que haya bifurcación en la respuesta*. De esto se deduce que la *unicidad en la solución* está garantizada ^[18] si se cumple:

$$\Delta(\delta^2\Pi) > 0 \quad (\text{Ap-II.19})$$

e incluso para $\Delta(\delta^2\Pi) < 0$. Pero en este caso es posible violar la condición de estabilidad dada por la ec.(Ap-II.14) ^[18].

Ap-II.2.- EQUILIBRIO DEL SOLIDO DISCRETO.

Para una región de dimensiones finitas $\Gamma^{(e)}$, que en adelante representará el dominio de un *elemento finito*, se puede aproximar en forma polinómica el campo de desplazamientos del sólido continuo $\mathbf{u}^{(e)}(x_1, x_2, x_3)$ mediante el campo de desplazamiento del sólido discreto $\mathbf{U}^{(e)}$, a través de la siguiente expresión:

$$\mathbf{u}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) \simeq \mathbf{N}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{U}^{(e)} \quad (\text{Ap-II.20})$$

donde $\mathbf{u}^{(e)}(x_1, x_2, x_3)$ representa el campo de desplazamiento del sólido continuo en la región de dominio $\Gamma^{(e)}$, $\mathbf{N}^{(e)}(x_1, x_2, x_3)$ una cierta función polinómica, denominada *función de forma*, que interpola el campo de desplazamiento del sólido discreto $\mathbf{U}^{(e)}$ en la misma región $\Gamma^{(e)}$.

Además, el campo de deformaciones del dominio continuo puede ser expresado mediante la siguiente ecuación de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) &\simeq \nabla_s(\mathbf{u}^{(e)}(x_1, x_2, x_3)) \\ \text{o en forma matricial} & \\ \boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) &\simeq \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (\text{Ap-II.21})$$

donde $\mathcal{D}^{(e)}$ es un operador diferencial en forma de matriz ^{[25][144]}, que para el caso de problemas geoméricamente lineales se mantiene constante e independiente de \mathbf{u} . Sustituyendo la ec.(Ap-II.20) en ec.(Ap-II.21), resulta el siguiente campo de deformaciones aproximado, para el sólido continuo, en la región elemental $\Gamma^{(e)}$:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) \simeq \underbrace{\mathcal{D}^{(e)} \mathbf{N}^{(e)}(x_1, x_2, x_3)}_{\mathbf{B}^{(e)}} \mathbf{U}^{(e)} \quad (\text{Ap-II.22})$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) \simeq \mathbf{B}^{(e)}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{U}^{(e)}$$

Sustituyendo las ecs.(Ap-II.22) y (Ap-II.20) en la ecuación de los *trabajos virtuales* ec.(Ap-II.8), resulta la *condición de equilibrio* para un sólido discretizado de dominio $\Gamma^{(e)}$ (por simplicidad operativa en el cálculo numérico, en lo sucesivo se utilizan matrices de una columna en lugar de los tensores simétricos de segundo orden, y matrices cuadradas en lugar de los tensores de cuarto orden (*anexo-E*)):

$$\left\{ \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV - \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{f}_V^{(e)} dV - \int_{S_F^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{f}_{S_F}^{(e)} dS \right\} \delta \mathbf{U}^{(e)} = 0 \quad (\text{Ap-II.23})$$

para que ésta tenga solución distinta de la *trivial*, debe ocurrir necesariamente que $\delta \mathbf{U}^{(e)} \neq \mathbf{0}$, situación que puede interpretarse como que la *condición* anterior debe cumplirse para cualquier *desplazamiento virtual* del sólido discretizado $\delta \mathbf{U}^{(e)}$. Quedando la *condición de equilibrio de la región* $\Gamma^{(e)}$ del sólido discretizado, como:

$$\mathbf{R}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV - \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{f}_V dV - \int_{S_F^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{f}_{S_F}^{(e)} dS = 0 \quad (\text{Ap-II.24})$$

$$\mathbf{R}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV - \mathbf{F}^{(e)} = 0$$

siendo $\mathbf{R}^{(e)}$ el *vector de fuerzas residuales*, y $\mathbf{F}^{(e)}$ las *fuerzas nodales equivalentes*.

La ec.(Ap-II.24) establece el equilibrio de una región elemental $\Gamma^{(e)}$ discretizada. Si ahora se propone discretizar el sólido con n regiones elementales, de dominio $\Gamma_n^{(e)}$ cada una, *el*

equilibrio global de todos estos sub-dominios *ensamblados*, que cubren todo el dominio del sólido, surge de una generalización del equilibrio elemental *ec.(Ap-II.24)*. Esto es:

$$\mathbf{R} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \left[\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV \right] - \mathbf{F} = 0 \quad (\text{Ap-II.25})$$

siendo una *operación sumatoria* especial la que se enuncia en la *ec.(Ap-II.25)*, denominada *ensamblaje*, pues se debe sumar respetando las *coincidencias nodales* ^{[25][144]}; así pues, el *vector de fuerzas residuales* surge: $\mathbf{R} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \mathbf{R}^{(e)}$ y el *vector global de fuerzas nodales*: $\mathbf{F} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \mathbf{F}^{(e)}$.

En problemas *no-lineales*, como el que presenta la teoría de la plasticidad, la *ec.(Ap-II.25)* debe ser resuelta en forma *iterativa* a través de *linealizaciones sucesivas* de la *ley constitutiva* dentro de *incrementos de cargas* muy pequeños. En la actualidad existe una gran cantidad de métodos que permiten la resolución no lineal del sistema de la *ec.(Ap-II.25)*, que pueden ser consultados en las referencias ^{[18][37][38][39][63][80][82][88][105][143]} (ver también la presentación sintética que se hace en el *apart. Ap-II.3*). Gran parte de estos métodos, utilizan la *denominada matriz de rigidez tangente* $\mathbf{K}_T^{(e)}$ del dominio elemental $\Gamma^{(e)}$. Esta se obtiene haciendo la hipótesis, de que dentro de un incremento de carga la ley constitutiva es lineal (la matriz elasto-plástica para cada punto del dominio $\Gamma^{(e)}$ no se actualiza $\mathbf{D}^{ep(e)} = \mathbf{cte.}$), por lo tanto la ecuación de equilibrio elemental *ec.(Ap-II.24)* puede ser *linealizada*, y en tal caso se puede obtener la derivada de las *fuerzas residuales* respecto al *campo de desplazamientos discreto*:

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \frac{\partial (\mathbf{R}^{(e)})}{\partial \mathbf{U}^{(e)}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}^{(e)}} \left[\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV - \mathbf{F}^{(e)} \right]$$

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \frac{\partial (\mathbf{R}^{(e)})}{\partial \mathbf{U}^{(e)}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}^{(e)}} \left[\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{ep(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} dV - \mathbf{F}^{(e)} \right]$$

(Ap-II.26)

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{ep(e)} \mathbf{B}^{(e)} dV$$

$$\mathbf{K}_T = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \mathbf{K}_T^{(e)} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{ep(e)} \mathbf{B}^{(e)} dV$$

entendiéndose nuevamente el sumatorio, como un *ensamblaje*. A continuación, se puede observar un diagrama de flujo esquemático, donde se muestra *muy someramente* el ordenamiento del programa de elementos finitos con el que se han resuelto los problemas presentado en el *cap. V*, y donde se puede ver el proceso de resolución no lineal del sistema de la *ec.(Ap-II.25)*

**Diagrama esquemático de un programa de Elementos Finitos
problemas con no-linealidad en su ecuación constitutiva**

INICIO



Definición e inicialización a cero de las variables del problema
Incremento de cargas $m = 1$. Iteración $n = 1$.



Definición de las *fuerzas nodales* :

\mathbf{F}



1 - Aplicación de una parte de las fuerzas nodales, como
incremento de carga:

$$\Delta \mathbf{F}_{i,m} = \mu_m \mathbf{F}$$



En la primera iteración $i = 1$ adopta como *fuerzas residuales*:

$$\Delta \mathbf{R}_{i,m}^{(e)} = -\Delta \mathbf{F}_{i,m}^{(e)}$$





2 - Obtención de los desplazamientos nodales, a *nivel global*, para el incremento de carga inpuesto:

$$\mathbf{K}_{T_{i,m}} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \mathbf{K}_{T_{i,m}}^{(e)} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{ep(e)} \mathbf{B}^{(e)} dV \Big|_{i,m}$$

$$\Delta \mathbf{R}_{i,m} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \Delta \mathbf{R}_{i,m}^{(e)}$$

$$\mathbf{K}_{T_{i,m}} \Delta \mathbf{U}_{i,m} = \Delta \mathbf{R}_{i,m}$$



Obtención de las deformaciones en cada punto de integración del elemento finito, y actualización de las variables de deformación y desplazamiento:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \Delta \mathbf{U}_{i,m}^{(e)}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{i+1,m}^{(e)} = \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)} + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)}$$

$$\mathbf{U}_{i+1,m}^{(e)} = \mathbf{U}_{i,m}^{(e)} + \Delta \mathbf{U}_{i,m}^{(e)}$$



Integración de la ecuación constitutiva (ver apart. Ap-II.4):

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} = \mathbf{D}_{i,m}^{ep(e)} \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)}$$

y actualización de las tensiones:

$$\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{(e)} = \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}$$





Obtención de las *fuerzas residuales elementales* para el nivel de carga impuesto:

$$\Delta \mathbf{R}_{i,m}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} dV - \Delta \mathbf{F}_{i,m}^{(e)}$$



Comprobación de la convergencia – Si el nivel de tensión obtenido no soluciona el problema, retorna a **2** y hace una nueva iteración:

$$\Delta \mathbf{R}_{i,m} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \Delta \mathbf{R}_{i,m}^{(e)}$$

$$\mathbf{si} \quad \Delta \mathbf{R}_{i,m} \geq \mathbf{0} \quad \implies \quad \Delta \mathbf{F}_{i,m} = -\Delta \mathbf{R}_{i,m}$$

($i = i + 1$) ←



Post-Procesamiento de los resultados, y obtención de la información sobre el *daño* en un punto del sólido. Ver anexo-D (capítulo IV). – SALIDA DE RESULTADOS



Si no se alcanzó el nivel total de fuerza aplicada se retorna a **1**

$$\mathbf{si} \quad \mathbf{F}_{i,m} + \Delta \mathbf{F}_{i,m} \leq \mathbf{F}$$

($m = m + 1$) ←



FIN

Ap-II.3.- RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO NO LINEAL – METODO DE CONTROL DE RESPUESTA – PROPUESTA DE UNA SIMPLE VARIANTE DE CONTROL A TRAVES DE UN CAMINO PLANO – PROPUESTA DE UN ALGORITMO DE CONTROL DE PLASTIFICACION.

Ap-II.3.a.- introducción.

Cuando la respuesta de un material no es lineal, como la que resulta de un comportamiento elasto-plástico, la resolución de las ecuaciones de equilibrio del sólido discretizado *ec.(Ap-II.25)*, constituye todavía un problema delicado y costoso dentro del uso del método de los elementos finitos. La solución de este sistema de ecuaciones viene dada a través de diversos procedimientos *iterativos* que *tienden a converger* hacia la solución del problema a medida que van disipando el *error residual*. En otras palabras, significa que es necesario ejecutar un cierto número de iteraciones, para cada *incremento de carga*, hasta que el *criterio de convergencia* indique que se satisface la *condición de equilibrio* dada por la *ec.(Ap-II.25)*. La convergencia se controla mediante distintos tipos de *normas residuales* ^{[63][82][105]}, que en general se pueden agrupar en: *normas en fuerzas*, *normas en desplazamiento* y *normas en energía*.

A continuación se citan en forma breve, algunas de las técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones no-lineales más utilizadas:

- **Iteración directa:** El desplazamiento correspondiente a la solución previa es usado para predecir el valor actual de la rigidez estructural.
- **Newton-Raphson :** También denominado de *rigidez tangente*, por que utiliza esta matriz actualizada, para predecir la siguiente solución.
- **Newton-Raphson modificado:** Para evitar el costo de cálculo que significa la evaluación de la matriz tangente en todas las iteraciones, se han propuesto distintas modificaciones del procedimiento original: – \mathbf{K}_0 Método de *rigidez inicial*, que como su nombre lo indica, utiliza la matriz de rigidez elástica inicial durante todo el proceso no-lineal. – \mathbf{K}_1 La matriz de rigidez tangente se calcula en la primera iteración de cada incremento de carga. – \mathbf{K}_2 La matriz de rigidez tangente se calcula en la segunda iteración de cada incremento de carga .
- **Newton Conjugado:** Produce una mejora en la búsqueda de la solución, corrigiendo los desplazamientos en una nueva dirección. Un caso particular de estos métodos, es el denominado *búsqueda direccional* (line search), el cual elige la dirección de búsqueda según aquella que signifique un mínimo en la energía potencial.
- **Cuasi Newton:** Constituye una nueva clase de técnica de solución no-lineal, basada en ejecutar en cada iteración una modificación de los elementos de la matriz de rigidez global, con el fin de satisfacer una condición *secante local*. Existen varios métodos que se basan en esta técnica, y que llevan el nombre de sus autores: – *actualización directa de Davidon* (Davidon direct update), – *Davidon, Fletcher, Powell* – *Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno* **BFGS**.
- **Newton Secante:** Esta técnica puede considerarse como otra versión de los *Cuasi Newton*. Fue presentada por Crisfield, y tiene cinco variantes de uso.

No se entrará en particularizaciones sobre cada una de estas técnicas enunciadas, ya que no es el objeto de esta tesis, pero sí es necesario advertir que bajo estados de carga sostenida en materiales dominados por el *ablandamiento* post-pico (pérdida de carga con crecimiento de desplazamientos), es posible que no se puede encontrar la solución de la *ec.(Ap-II.25)* usando simplemente cualquiera de los métodos antes mencionados. Para ello es necesario recurrir al uso de las técnicas citadas, conjuntamente con *técnicas de control de respuesta* como la propuesta inicialmente por E. Riks ^[120] . Estos procedimientos, conocidos con el nombre de *longitud de arco* (arc-length), han sido desarrollados para seguir el camino del equilibrio luego de superar puntos críticos de carga máxima, a partir de los cuales, la solución se encuentra siempre para un nivel de carga inferior al que se tenía en el paso anterior. El método fue propuesto originalmente por E. Riks ^[120] y por G.A. Wempner y modificado por M. Crisfield y E. Ramm ^[38] .

La idea original de Riks consiste en introducir una *ecuación de constricción* adicional a las ecuaciones de equilibrio. A partir de esta base, se han propuesto distintas *ecuaciones de constricción*, dando origen a distintas variantes del método de Riks.

Ap-II.3.b.- Método general de control de respuesta.

Se puede formular la ecuación de equilibrio global del sólido *ec.(Ap-II.25)*, para un cierto incremento de carga m , como:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_m, \mu_m) = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \left[\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV \right]_m - \mu_m \mathbf{F} = 0 \quad (\text{Ap-II.27})$$

A diferencia de cualquier procedimiento incremental, el multiplicador μ_m , que regula la intensidad del paso de cargas, *es una variable* que se ajusta en forma automática hasta encontrar el nivel de carga adecuado que satisface la *ec.(Ap-II.27)*. Este ajuste debe ser controlado a través de una *ecuación de constricción*, de cumplimiento necesario, del siguiente tipo:

$$f(\mathbf{U}_m, \mu_m) = 0 \quad (\text{Ap-II.28})$$

De acuerdo a la *ec.(Ap-II.27)* y la *ec.(Ap-II.28)*, la solución del problema, será la que cumpla con:

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{U}_m, \mu_m) = \mathbf{0} \\ f(\mathbf{U}_m, \mu_m) = 0 \end{cases} \quad (\text{Ap-II.29})$$

Para conocer el estado de desplazamiento, y el factor de carga que satisfacen estas expresiones, se desarrolla en serie de Taylor el vector de fuerzas residuales, con el fin de

aproximar la solución del problema. Truncando este desarrollo en la primera variación, se tiene para el incremento de carga m , iteración i :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{R}(\mathbf{U}_{i-1,m} + \delta\mathbf{U}_{i,m}, \mu_{i-1,m} + \delta\mu_{i,m}) \simeq \\ &\simeq \mathbf{R}(\mathbf{U}_{i-1,m}, \mu_{i-1,m}) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{i-1,m} \delta\mathbf{U}_{i,m} + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mu_m} \right|_{i-1,m} \delta\mu_{i,m} + \dots \end{aligned} \quad (Ap-II.30)$$

donde:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{i-1,m} = \mathbf{K}_T \quad : \quad \text{Rigidez tangente global.}$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mu} \right|_{i-1,m} = -\mathbf{F} \quad : \quad \text{Carga total en el sistema global.}$$

de esta forma la ec.(Ap-II.30) puede escribirse como:

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}(\mathbf{U}_{i-1,m}, \mu_{i-1,m}) + \mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) \delta\mathbf{U}_{i,m} - \mathbf{F} \delta\mu_{i,m}$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) \delta\mathbf{U}_{i,m} = -\mathbf{R}(\mathbf{U}_{i-1,m}, \mu_{i-1,m}) + \mathbf{F} \delta\mu_{i,m}$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) \delta\mathbf{U}_{i,m} = - \left[\sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \left[\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV \right]_{i-1,m} - \mu_{i-1,m} \mathbf{F} \right] + \mathbf{F} \delta\mu_{i,m}$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) \delta\mathbf{U}_{i,m} = - \left[\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) \delta\hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right] + \mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) [\mathbf{U}_i]_I \delta\mu_{i,m}$$

(Ap-II.31)

premultiplicando ambos miembros por \mathbf{K}_T^{-1} , se obtiene la variación del desplazamiento dentro de la iteración i , bajo las condiciones impuestas:

$$\delta\mathbf{U}_{i,m} = -\delta\hat{\mathbf{U}}_{i,m} + \delta\mu_{i,m} [\mathbf{U}_i]_I \quad (Ap-II.32)$$

el desplazamiento correspondiente al incremento de carga resultará:

$$\Delta\mathbf{U}_{i,m} = \Delta\mathbf{U}_{i-1,m} + \delta\mathbf{U}_{i,m} \quad (Ap-II.33)$$

sustituyendo la ec.(Ap-II.33) en la ecuación de constricción ec.(Ap-II.28) , resulta la variación del incremento de cargas, correspondiente a la iteración i y a partir de ésta se obtiene el factor de carga que satisface las ecs.(Ap-II.39)

$$\mu_{i,m} = \mu_{i-1,m} + \delta\mu_i \quad (\text{Ap-II.34})$$

El procedimiento operativo puede resumirse en los siguientes pasos:

- Obtención de la variación de desplazamiento para el nivel actual de fuerzas residuales:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} = \sum_{\Gamma^{(e)}=1}^n \left[\int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV \right]_{i-1,m} - \mu_{i-1,m} \mathbf{F}$$

- Obtención del desplazamiento total para el nivel de carga total:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{i-1,m}) [\mathbf{U}_i]_I = \mathbf{F}$$

- Obtención de las soluciones de la ecuación de constricción:

$$f(\mathbf{U}_{i,m}, \delta\mu_{i,m}) = 0 \longrightarrow \delta\mu_{i,m}$$

- Actualización de los desplazamientos, según las ecs.(Ap-II.32), (Ap-II.33), y del nivel de carga según la ec.(Ap-II.34).

Ap-II.3.c.- Método de control de respuesta, a través de un camino esférico ^[37]

La variante del método de control de respuesta, denominada de *camino esférico*, ha sido propuesta inicialmente por Riks ^[120] . Se fundamenta en expresar una ecuación de constricción en función del nivel de desplazamientos y carga a la vez. Esto es:

$$\Delta \mathbf{U}_{i,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i,m} + b^2 \delta \mu_{i,m}^2 \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \Delta l_{i,m}^2 \quad (\text{Ap-II.35})$$

donde:

$$\Delta \mathbf{U}_{i,m} = \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + \delta \mathbf{U}_{i,m} \quad : \quad \text{Incremento de desplazamientos} \\ \text{para el nivel de carga } m, \text{ iteración } i .$$

$$\delta \mathbf{U}_{i,m} = -\delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} + \delta \mu_{i,m} [\mathbf{U}_i]_I \quad : \quad \text{Variación del incremento de desplazamientos} \\ \text{en la iteración } i .$$

$$\mathbf{F} \quad : \quad \text{Nivel de carga total.}$$

$$\Delta l_{i,m}^2 \quad : \quad \text{Incremento de longitud de arco para el nivel de carga } m, \text{ iteración } i .$$

$$b \quad : \quad \text{Parámetro de escala de carga.}$$

Esta ecuación fué modificada por Crisfield [37], haciendo constante e igual a cero, el parámetro de escala de cargas $b = 0.0$ en la ec.(Ap-II.35). De esta forma, la ecuación de constricción queda totalmente definida en el espacio de los desplazamientos **fig.(Ap-II.2)**, y por lo tanto se transforma en una técnica de *control de desplazamientos*, quedando su ecuación de constricción, como:

$$\Delta \mathbf{U}_{i,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i,m} = \Delta l_{i,m}^2 \quad (\text{Ap-II.36})$$

Desarrollando esta ecuación, resulta la siguiente expresión cuadrática:

$$C_1 \delta \mu_{i,m}^2 + C_2 \delta \mu_{i,m} + C_3 = 0 \quad (\text{Ap-II.37})$$

con:

$$C_1 = [\mathbf{U}_i]_I^T [\mathbf{U}_i]_I$$

$$C_2 = 2 [\delta \mathbf{U}_{i,m} - \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m}]^T [\mathbf{U}_i]_I$$

$$C_3 = [\delta \mathbf{U}_{i,m} - \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m}]^T [\delta \mathbf{U}_{i,m} - \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m}] - \Delta l_{i,m}^2$$

resultando de la resolución de ésta, dos raíces, tal que una llevará a que el arco corte el camino del equilibrio en **A**, y la otra en **B fig.(Ap-II.2)**.

Se debe elegir la raíz de la ec.(Ap-II.37) $(\delta \mu_{i,m})_{1,2}$ que haga mínimo el ángulo $\varphi_{\Delta U}$ entre los desplazamientos $\Delta \mathbf{U}_{i,m}$ y $\Delta \mathbf{U}_{i-1,m}$. Esto es:

$$\cos \varphi_{\Delta U} \begin{cases} = [\Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + -\delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} + (\delta \mu_{i,m})_1 [\mathbf{U}_i]_I]^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} \\ = [\Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + -\delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} + (\delta \mu_{i,m})_2 [\mathbf{U}_i]_I]^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} \end{cases} \quad (\text{Ap-II.38})$$

siendo mínimo el ángulo, que da un coseno positivo. Si los dos cosenos son positivos, la raíz de la ec.(Ap-II.37) más apropiada es la que está más cerca de la solución lineal. Por lo tanto, será:

$$\delta \mu_{i,m} = -\frac{C_3}{C_2} \quad (\text{Ap-II.39})$$

Una vez conocida la variación del incremento de cargas, se obtiene el desplazamiento a través de la ec.(Ap-II.33), y el factor de carga de la ec.(Ap-II.34).

fig.(Ap-II.2): Procedimiento básico de control de desplazamiento, a través de un camino esférico (Crisfield ^[61]).

Ap-II.3.d.- Propuesta de una variante simple de control, a través de un camino plano.

Se trata de una variante simple que ha dado respuestas satisfactorias para distintos problemas

de esta tesis. Sólo encuentra la respuesta en procesos con ablandamiento y avance en los desplazamientos, y no puede encontrar el equilibrio cuando hay retrocesos de desplazamientos. Consiste en un control de desplazamientos a partir de una ecuación de constricción que involucra el estado de desplazamientos actual $\Delta \mathbf{U}_{i,m}$ y el correspondiente a la iteración anterior $\Delta \mathbf{U}_{i-1,m}$. Esto es:

$$\Delta \mathbf{U}_{i,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} = \Delta l_{i,m}^2 \quad (\text{Ap-II.40})$$

donde $\Delta l_{i,m}^2$ es el incremento de longitud de arco para el nivel de carga m , iteración i . Esta ecuación es una linealización de la ec.(Ap-II.36) y da origen a una familia de métodos que reciben el nombre de *plano normal actualizado*. Existen varias maneras de metodizar su uso, una es la que se propone en esta tesis a partir de la formulación de una ecuación lineal en $\delta \mu_{i,m}$:

$$C_1 + C_2 + \delta \mu_{i,m} C_3 = \Delta l_{i,m}^2 \quad (\text{Ap-II.41})$$

con:

$$C_1 = \Delta \mathbf{U}_{i-1,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m}$$

$$C_2 = -\delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m}$$

$$C_3 = [\mathbf{U}_i]_I^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m}$$

resultando de aquí una raíz única:

$$\delta \mu_{i,m} = \frac{\Delta l_{i,m}^2 - C_1 - C_2}{C_3} \quad (\text{Ap-II.42})$$

de donde se deduce que el plano normal cortará el camino de la respuesta sólo en el punto **B** fig.(Ap-II.3).

De esta manera, se puede calcular el desplazamiento a través de la ec.(Ap-II.33), y el factor de carga de la ec.(Ap-II.34).

Durante el procedimiento de solución, cabe observar que esta formulación presenta un indefinición en la primera iteración de cada incremento de carga ($i = 1$), pues $\Delta \mathbf{U}_{0,m} = \mathbf{0} \Rightarrow C_3 = 0$. En tal caso, se procede en la primera iteración con una técnica cualquiera de control de desplazamientos, y en las subsiguientes con el método propuesto.

fig.(Ap-II.3): Procedimiento básico de control de desplazamiento, a través de un camino plano.

Ap-II.3.e.- Algoritmo de control de plastificación – Cálculo automático de Δl .

La técnica anterior permite obtener el *equilibrio del sólido*, bajo cargas o desplazamientos impuestos, a partir de una *restricción en el campo de los desplazamientos*. Sin embargo, resulta también importante procurar que el incremento de carga sea tal, que en dicho incremento sólo plastifique un punto. Para ello se propone en este apartado, un concepto de *control de plastificación, dentro de la técnica de control de desplazamientos*, el cual consiste en obtener la longitud de arco Δl necesaria, que permita al punto más cercano a la superficie de fluencia, alcanzar su estado de plastificación. En otras palabras, esta técnica se basa en obtener para cada instante t del proceso cuasi estático, la *distancia* que hay entre la tensión de cada punto del sólido discreto y la superficie de fluencia, seleccionar la menor de ellas y con base en ésta calcular una *longitud de arco* que permita plastificar solamente al punto más cercano a la superficie de fluencia.

Indirectamente, esta técnica garantiza que el camino de la respuesta que sigue el sólido, corresponda al de la mínima energía.

- **Relación entre el arco del método del “camino esférico” y la distancia a la superficie de fluencia.**

Debido a que la plasticidad trata un *problema lineal de compatibilidad entre desplazamientos y deformaciones ec.(Ap-II.21)*, se puede definir un factor de *reducción de desplazamientos* r_{Δ} que permita obtener el desplazamiento necesario para que el punto de tensión más cercano a la superficie de fluencia llegue a situarse sobre ella. Así , a partir de este desplazamiento reducido, se obtiene una longitud de arco que puede ser considerada dentro de una técnica de control de desplazamiento. Esto es:

$$\Delta l_{i,m}^2 = f(r_{\Delta}) \tag{Ap-II.43}$$

siendo $f(r_{\Delta})$ una función que depende del tipo de ecuación de constricción, y del factor de reducción de desplazamientos. De esta forma, para una ecuación del tipo de la *ec.(Ap-II.36)*, se tiene:

$$\Delta l_{i,m}^2 = \Delta \mathbf{U}_{i,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i,m} \tag{Ap-II.44}$$

siendo $\Delta \mathbf{U}_{i,m} = \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + \delta \mathbf{U}_{i,m}$, donde el incremento de desplazamientos correspondiente a la iteración y el incremento de carga actual puede ser escrito como:

$$\delta \mathbf{U}_{i,m} = r_{\Delta} \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} \tag{Ap-II.45}$$

siendo $\delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m}$ el desplazamiento que resulta del incremento de carga impuesto, y $\delta \mathbf{U}_{i,m}$ el incremento de desplazamiento deseado para que sólo plastifique un punto. Considerando la *ec.(Ap-II.45)*, se puede escribir la *ec.(Ap-II.44)* como:

$$\Delta l_{i,m}^2 = \left(\Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + r_{\Delta} \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right)^T \left(\Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + r_{\Delta} \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right) \quad (Ap-II.46)$$

Operando algebraicamente con esta última, se puede escribir la ecuación de constricción de desplazamientos para el método de control de desplazamientos del *camino esférico*, como:

$$\Delta l_{i,m}^2 = \left(\Delta \mathbf{U}_{i-1,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} \right) + 2 r_{\Delta} \left(\Delta \mathbf{U}_{i-1,m}^T \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right) + r_{\Delta}^2 \left(\delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m}^T \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right) \quad (Ap-II.47)$$

Así, conociendo el *factor de reducción* r_{Δ} , se puede encontrar la longitud de arco Δl necesaria, para obtener un $\delta \mu_{i,m}$ que permita situar el punto del sólido más cercano a la superficie de fluencia, sobre ella.

- **Relación entre el arco del método del “camino plano” y la distancia a la superficie de fluencia.**

Este constituye un caso particular del anterior, por lo tanto se pueden hacer las mismas consideraciones para obtener la relación que hay entre la *distancia al plano* (longitud de arco en el caso anterior), y el factor de reducción de desplazamientos.

La ecuación de constricción que se toma en este caso es la *ec.(Ap-II.40)*:

$$\Delta l_{i,m}^2 = \Delta \mathbf{U}_{i,m}^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} \quad (Ap-II.48)$$

sustituyendo en ella el incremento de desplazamiento en función del *factor de reducción* $\Delta \mathbf{U}_{i,m} = \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + r_{\Delta} \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m}$ y operando algebraicamente, se puede obtener la expresión que relaciona este factor con la *distancia al plano normal*, que podrá ser considerada dentro de la técnica homónima de control de desplazamiento. Esto es:

$$\Delta l_{i,m}^2 = \Delta \mathbf{U}_{i,m} = \left[\Delta \mathbf{U}_{i-1,m} + r_{\Delta} \delta \hat{\mathbf{U}}_{i,m} \right]^T \Delta \mathbf{U}_{i-1,m} \quad (Ap-II.49)$$

- **Obtención del coeficiente de reducción r_{Δ} .**

Dada la linealidad que existe entre los desplazamientos y deformaciones y entre los incrementos de estas últimas y los incrementos de tensión para una iteración i dentro del incremento de carga m (linealización de un proceso no lineal mediante iteraciones sucesivas), se puede obtener el *factor de reducción de deformaciones*, como si fuese la *distancia del punto de tensión a la superficie de fluencia*, mediante una relación lineal formulada por Nayak-Zienkiewicz [88]. Esto es:

$$r_{\Delta} = - \frac{\mathcal{F}^0(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m})}{\mathcal{F}^1(\boldsymbol{\sigma}_{i,m}) - \mathcal{F}^0(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m})} = - \frac{\mathcal{F}^0(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m})}{\mathcal{F}^1(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m} + \mathbf{D}_S \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}) - \mathcal{F}^0(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m})} \quad (Ap-II.50)$$

Este factor de reducción es aproximado, y puede ser calculado con más exactitud a partir de la siguiente corrección [88] :

$$\delta r_{\Delta} = \frac{\mathcal{F}^2(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m} + r_{\Delta} \mathbf{D}_S \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m})}{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{i-1,m}^T \mathbf{D}_S \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}} \quad (Ap-II.51)$$

siendo \mathcal{F}^0 , \mathcal{F}^1 y \mathcal{F}^2 las funciones de fluencia evaluadas para los estados de tensión previo, actual y posterior a la primera corrección, respectivamente. Para mayor información sobre la expresión que da la distancia de un punto de tensión, a otro donde se intersecta con la superficie de fluencia, se recomienda consultar la referencia de origen [88] .

- **Implementación del algoritmo de control de plastificación.**

A continuación se presentan en forma breve, los pasos generales para la implementación del algoritmo de control de plastificación:

- a.– Cálculo de la función de fluencia para la iteración i , incremento de carga m , para todos los puntos de integración del sólido discreto:

$$\mathcal{F}^1(\boldsymbol{\sigma}_{i,m}) \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}_{i,m} = \boldsymbol{\sigma}_{i-1,m} + \mathbf{D}_S \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}$$

- b.– Identificación de los puntos que cumplan con la *condición de fluencia plástica*, o aquellos que la violen. En caso que no haya ningún punto en estas condiciones, el proceso es elástico y por lo tanto no es necesario el uso de este algoritmo.

$$\text{Puntos que cumplen con:} \quad \mathcal{F}^1(\boldsymbol{\sigma}_{i,m}) \geq 0$$

- c.– Determinación de los puntos que plastificaron durante esta iteración. Los restantes no entran en este proceso.

$$\text{Puntos que cumplen con:} \quad \begin{cases} \mathcal{F}^1(\boldsymbol{\sigma}_{i,m}) \geq 0 \\ \mathcal{F}^0(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}) < 0 \end{cases}$$

- d.– Selección del punto que cumple con las condiciones **c**, y que se encontraba, antes del incremento de tensión $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}$, más cerca de la superficie de fluencia plástica.

$$\text{Puntos que cumplen con:} \quad \mathcal{F}^1(\boldsymbol{\sigma}_{i,m}) \Big|^{max.}$$

e.- Obtención del factor de reducción de desplazamientos.

$$r_{\Delta} = - \frac{\mathcal{F}^0(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m})}{\mathcal{F}^1(\boldsymbol{\sigma}_{i,m})|^{max.} - \mathcal{F}^0(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m})}$$

f.- Obtención de la longitud de arco correspondiente.

$$\Delta l_{i,m}^2 = f(r_{\Delta})$$

g.- Continuación del cálculo, con una técnica de control de desplazamientos.

Ap-II.4.- INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA.

Ap-II.4.a.- introducción.

Existen diversos procedimientos numéricos para la integración de la ecuación constitutiva elasto-plástica:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_S (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_S \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{D}_S \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{Ap-II.52})$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_T^{ep} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

En general, las técnicas de integración de la ecuación constitutiva elasto-plástica, pueden clasificarse dentro de dos grupos:

a.- **Métodos de avance directo –Integración explícita–**. Basados en dividir el incremento de desplazamiento correspondiente a la iteración actual $\Delta \mathbf{U}_{i,m}$ en una gran cantidad de sub-incrementos para los cuales se calcula el sub-incremento de deformación. A partir de estos y la matriz elasto-plástica actualizada se obtiene el correspondiente sub-incremento de tensión *ec.*(Ap-II.52). En forma esquemática se tiene *para cada punto de integración* de un elemento finito $\Gamma^{(e)}$ (Ver la inserción en el programa general de elementos finitos *apart. Ap-II.2.*):



Dado el estado de tensión y deformación para la iteración previa: $\sigma_{i-1,m}^{(e)}$ y $\epsilon_{i-1,m}^{(e)}$, y los incrementos de desplazamiento y deformación: $\Delta U_{i,m}^{(e)}$ y $\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)}$, se calculan los sub incrementos de desplazamiento y deformación:

$$\left(\Delta U_{i,m}^{(e)} \right)_j = \frac{\Delta U_{i,m}^{(e)}}{n} \Rightarrow \left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)} \right)_j$$



1 - Cálculo de:

$$\left(D^{ep(e)}_T \right)_j$$



Cálculo de:

$$\left(\Delta \sigma_{i,m}^{(e)} \right)_j = \left(D^{ep(e)}_T \right)_j \left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)} \right)_j$$

$$\left(\Delta \epsilon_{i,m}^{e(e)} \right)_j = D_S^{-1} \left(\Delta \sigma_{i,m}^{(e)} \right)_j$$

$$\left(\Delta \epsilon_{i,m}^{p(e)} \right)_j = \left(\Delta \epsilon_{i,m}^{(e)} \right)_j - \left(\Delta \epsilon_{i,m}^{e(e)} \right)_j$$



Incremento del estado tensional:

$$\left(\sigma_{i,m}^{(e)} \right)_j = \left(\sigma_{i,m}^{(e)} \right)_{j-1} + \left(\Delta \sigma_{i,m}^{(e)} \right)_j$$



Obtención de:

$$\kappa^p \longrightarrow A$$

$(j = j + 1) \longleftarrow$



b.– Métodos de retorno radial de Euler –Integración implícita–. Debido al problema de *ablandamiento* que presenta la respuesta tensión deformación del hormigón, se ha utilizado para resolver la *ecuación constitutiva* de este modelo, una técnica de retorno radial propuesta por Zienkiewicz ^[146] para visco-plasticidad, y utilizada en plasticidad por De Borst and Vermeer ^{[19][24]}, con ligeras modificaciones en su implementación.

Sean $(i-1, m)$ e (i, m) los índices que simbolizan los estados correspondientes a la iteración anterior y actual dentro de un incremento de carga m , respectivamente **fig.(Ap-II.4)**. Se tiene para cada punto de integración de un elemento finito $\Gamma^{(e)}$:

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} &= \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} - \boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} \\ \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)} &= \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)} - \boldsymbol{\epsilon}_{i-1,m}^{(e)}\end{aligned}\tag{Ap-II.53}$$

donde el incremento de tensión vale:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} = \mathbf{D}_S \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)} = \mathbf{D}_S \left(\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)} - \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)} \right)\tag{Ap-II.54}$$

con:

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)} = \Delta\lambda_{i,m}^{(e)} \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{i,m}^{(e)}\tag{Ap-II.55}$$

$$\Delta\lambda_{i,m}^{(e)} = \frac{\langle \mathcal{F}^1(\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{e(e)}) \rangle}{A_{i-1,m}^{(e)} + \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{e(e)}}^T \mathbf{D}_S \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{e(e)}}}\tag{Ap-II.56}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{e(e)} = \boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} + \mathbf{D}_S \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)}\tag{Ap-II.57}$$

sustituyendo la *ec.(Ap-II.55)* en la *ec.(Ap-II.54)*, se tiene:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} = \mathbf{D}_S \left(\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)} - \Delta\lambda_{i,m}^{(e)} \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{i,m}^{(e)} \right)\tag{Ap-II.58}$$

y sustituyendo ésta en la *ec.(Ap-II.53)*, permite obtener la siguiente expresión para la tensión actual:

fig.(Ap-II.4): Esquema de integración de la ley tensión deformación: a) Para un caso uniaxial equivalente con endurecimiento b) Para un caso uniaxial equivalente con ablandamiento c) Para un caso biaxial con ablandamiento.

$$\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} = \boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} + \mathbf{D}_S \left(\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)} - \Delta \lambda_{i,m}^{(e)} \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{i,m}^{(e)} \right) \quad (\text{Ap-II.59})$$

La mayor ventaja de esta técnica para integrar la ecuación constitutiva, se basa en la forma de presentar el *factor de consistencia plástica* $\Delta \lambda_{i,m}^{(e)}$ (ec.(Ap-II.55)) [19][24], y en la evaluación

de $\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}}$ y $\left\{ \frac{\partial \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}}$ para el estado $\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} = \boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} + \mathbf{D}_S \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{(e)}$.

Ap-II.4.b.- Justificación y validez del factor de consistencia plástica adoptado.

En la ec.(Ap-I.50), se ha presentado el *factor de consistencia plástica* para un material sin degradación de rigidez, como:

$$\dot{\lambda} = \frac{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{A + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_S \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \right.} \quad (\text{Ap-II.60})$$

siendo:

$\dot{\lambda} \geq 0$: *parámetro de consistencia plástica* ,

$$A = \left[\underbrace{-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa}}_{h_c} \left(\mathbf{h}_\kappa^T \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right] : \text{parámetro de endurecimiento plástico} , \quad (\text{Ap-II.61})$$

donde las derivadas están evaluadas en el paso anterior $(i-1, m)$. Desarrollando en serie de Taylor la función de fluencia, para un estado de tensión $\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} = \boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} + \mathbf{D}_S \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{i,m}^{(e)}$, y truncando en el término de primer orden, se tiene:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i,m}^{(e)}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}) + \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i,m}^{(e)} + \dots \quad (\text{Ap-II.62})$$

de donde se puede aproximar:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i,m}^{e(e)} \simeq \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i,m}^{e(e)}) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}) \quad (\text{Ap-II.63})$$

Pero se supone que en el estado de tensiones previo se satisfizo la condición de fluencia plástica : $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}) = 0$. Por lo tanto, de la ec.(Ap-II.63) se obtiene:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i,m}^{e(e)} \simeq \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i,m}^{e(e)}) \quad (\text{Ap-II.64})$$

Sustituyendo esta última en la ec.(Ap-I.50), queda:

$$\dot{\lambda}_{i,m}^{(e)} = \frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{i,m}^{e(e)})}{A_{i-1,m}^{(e)} + \left[\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}}^T \mathbf{D}_S \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}_{\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}} \right]} \quad (\text{Ap-II.55})$$

la ventaja de utilizar este factor de consistencia plástica, consiste en que parte de la condición $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)}) = 0$, por lo tanto no es necesario encontrar el punto de intersección con la superficie

de fluencia durante la transición de un estado elástico a uno plástico ($\dot{\lambda}_{i,m}^{(e)}$ se mide a partir de la superficie de fluencia).

Ap-II.4.c.- Implementación del algoritmo de retorno radial.

Este método, permite un rápido acercamiento a la *nueva superficie de carga*, mediante un numero finito de iteraciones. Una vez obtenido el estado tensional $\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}$ mediante la ec.(Ap-

II.59), es necesario comprobar si satisface la condición de fluencia plástica $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}) = 0$. En caso de no cumplir con esta condición, es necesario realizar un número de iteraciones que tiendan a corregir el error remanente. A continuación se detallan los pasos básicos para la implementación de esta *técnica de integración implícita* de la ecuación constitutiva elásto plástica, *en un punto de integración de la región elemental* $\Gamma^{(e)}$:

a.– Magnitud del incremento de tensión y deformación al iniciar la integración de la

f.– Se calcula el incremento de deformación plástica:

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)} = \int_{t_{i-1,m}}^{t_{i,m}} \dot{\lambda}_t^{(e)} \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_t dt \simeq \delta \lambda_{i,m}^{(e)} \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{e(e)}}$$

g.– Se obtiene la magnitud de la tensión excedida:

$$\delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{p(e)} = \mathbf{D}_S \delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)}$$

h.– Se calcula el nuevo incremento de deformación plástica, el de tensión y la tensión actualizada:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)} = \left(\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)} \right)_0 + \delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)}$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} = \left(\Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} \right)_0 - \delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{p(e)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} = \boldsymbol{\sigma}_{i-1,m}^{(e)} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}$$

i.– Se calcula la deformación elástica, a partir del verdadero incremento de tensión:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{e(e)} = \mathbf{D}_S^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}$$

j.– Verificación del cumplimiento de la condición de consistencia plástica:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}) = 0$$

Si no la cumple, se transforma este estado último en un nuevo estado inicial:

$$\boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{e(e)} = \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} \quad , \quad \left(\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)} \right)_0 = \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{i,m}^{p(e)} \quad , \quad \left(\Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)} \right)_0 = \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i,m}^{(e)}$$

y se regresa al punto e.

k.– Fin del proceso de integración de la ecuación constitutiva del punto.