
Contribució al control fiable de sistemes interconnectats amb incerteses

Gisela Pujol Vázquez

Tesi Doctoral

Departament de Matemàtica Aplicada III
Universitat Politècnica de Catalunya

Programa de doctorat: Matemàtica Aplicada

Memòria presentada per Gisela Pujol Vazquez per optar al grau de
Doctor en Matemàtiques per la Universitat Politècnica de Catalunya.

Setembre 2004

Directors de Tesi

Dr. José Rodellar
Catedràtic de Universitat,
Departament de Matemàtica Aplicada III,
Universitat Politècnica de Catalunya.

Dr. Josep Maria Rossell
Catedràtic d'Escola Universitària,
Departament de Matemàtica Aplicada III,
Universitat Politècnica de Catalunya.

A la meva gran família.

Il y a quelque chose qui cloche là dedans
J'y retourne immédiatement!

Boris Vian
La java des bombes atomiques
1956

Agraïments

Als Dr. José Rodellar i Dr. Josep Maria Rossell per haver acceptat ser els meus directors de tesis. Els hi vull agrair llur dedicació, consells i temps, que m'han permès endinçar-me en la teoria de control. També els hi vull agrair el fet de proporcionar-me tots els mitjans al seu abast, mitjans que m'han servit per a dur a bon terme la tesis.

Als Dr. Antonio Huerta i Dr. Eusebi Jarauta per donar-me les condicions necessàries per a desenvolupar la meva recerca.

Al Dr. Ramón Oliver i al Professor Fernando García, per escollir, entre tants currículums vitae, el meu, i donar-me l'oportunitat de formar part de la comunitat universitària.

Al Dr. Pierre Apkarian, per la seva cordial acollida al centre ONERA de Toulouse i facilitar-me l'estada. També li vull agrair les estones en que compartí els seus coneixements amb mi.

A la Marga, per ser una gran germana gran. A l'Oriol i a l'Anna, per les seves rialles i sessions de cuarto oscuro. A la Gloria, pels seus savis consells. Al Josep, pel seu suport incondicional. A la Mari-Paz, pel campejano. Al David, per les converses metamatemàtiques i per les classes de malabarismes. A l'Ares, per compartir patiments. Al Francesc, inestimable company de recerca. I als que em deixo en el tinter, per totes les bones estones que m'heu fet passar aquests últims temps i que m'han ajudat a dur a bon port aquest treball. Una abraçada ben forta a tots.

Introducció

L'objectiu global de la tesi és contribuir al control descentralitzat d'una classe de sistemes interconnectats, que es descriuran en temps continu i amb una estructura lineal, on les matrius del sistema i de control inclouen incerteses que varien amb el temps. La metodologia que se seguirà per al disseny dels controladors serà la del control robust amb cost garantit, juntament amb les tècniques d'inequacions lineals matricials (LMI), per tal d'obtenir algorismes de control implementables. Es tractarà també la qüestió de la fiabilitat en diferents escenaris de fallades totals o parcials d'alguns dels controladors descentralitzats.

L'interès del control descentralitzat ve motivat pel fet que, a la pràctica, gran nombre de sistemes de gran escala estan composts per subsistemes interconnectats. Per exemple, tenim les centrals elèctriques, els sistemes econòmics, la planificació del trànsit, etc. Quan es vol dissenyar un controlador global centralitzat, és necessari definir la realimentació depenent de totes o la majoria de les variables d'estat. Aquest disseny es torna sovint impossible degut justament al gran nombre de variables o bé a la gran dimensió d'aquestes. A més a més, aquests sistemes poden tenir paràmetres desconeguts, dels quals només se'n coneix el seu rang. Aquestes incerteses no només apareixen en els subsistemes locals, sino també en les connexions entre ells.

En un esquema de control descentralitzat, cada subsistema és controlat de manera independent, amb un mínim intercanvi d'informació entre subsistemes. En combinar les solucions, cal assegurar-se que s'obté un rendiment satisfactori en el sistema global controlat. Les incerteses fan que es plantegi el problema del control robust: trobar un control que asseguri l'estabilitat del sistema malgrat les incerteses. A més a més, en tot disseny del control es demana que aquest no només estabilitzi el sistema, sino que també asseguri un cert nivell de rendiment o de cost. Per a sistemes lineals, el disseny clàssic del control amb cost garantit es basa

en la teoria de Lyapunov i en el concepte de control òptim lineal i quadràtic (LQ), que dóna una cota per a la funció de cost. Quan es tenen sistemes amb incerteses, el control òptim verifica una equació de Riccati algebraica parametritzada, difícil de resoldre. Aquesta dificultat es pot superar usant la teoria d'inequacions lineals matricials (LMI). L'avantatge de les tècniques LMI és que converteixen problemes de teoria de sistemes i teoria de control en problemes estàndards d'optimització convexa o quasiconvexa on apareixen inequacions matricials. I aquestes es poden resoldre de manera eficient per tècniques numèriques, com ho demostra la quantitat de resultats obtinguts en els últims anys.

Un altre aspecte important en un sistema de control descentralitzat és la qüestió de la fiabilitat (*reliable control*) quan falla algun dels controladors individuals. Es tracta de poder assegurar en quina mesura es manté l'estabilitat i el rendiment del sistema global. En aquest treball es plantegen tant el cas de fallada total (*outage*: la llei de control s'anul·la) com els casos de fallada parcial. En aquest últim cas, cal determinar, quin tant per cent de fallada presenta cada subsistema. Per això, caldrà definir un model de fallada que tingui l'estructura adequada per tenir presents tots aquests casos.

Finalment, també tractem sistemes amb perturbacions externes. En aquest cas, utilitzem la teoria H_∞ . Sota la seva forma més simple, el problema H_∞ és un problema de rebuig de perturbacions. Es tracta de minimitzar l'efecte produït per una perturbació sobre el comportament del sistema, i en particular sobre la sortida. Per això, caldrà sintetitzar una llei de control que estudiï l'impacte de la perturbació sobre la sortida, tot i mantenint estable el sistema. Aquest impacte es mesura fent-ne el quocient de les seves normes.

Objectius

El treball d'aquesta tesi se centra en l'estudi d'una classe de sistemes descomposats en N subsistemes interconnectats amb incerteses. La seva descripció general és de la següent manera:

$$\dot{x}_i = \Delta A_i x_i + \Delta B_i u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Delta G_{ij}(x_j) \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

on $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ representa el vector d'estat del sistema i , mentre que $u_i \in \mathbb{R}^{s_i}$ representa el vector de control del sistema i . La matriu $\Delta A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ representa la matriu d'estat, mentre que $\Delta B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times s_i}$ és la matriu de control. Les interconnexions entre els diferents sistemes venen representades pels vectors $\Delta G_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$. Totes aquestes matrius tenen incerteses, que depenen de la variable d'estat. Tindrem en compte tres models generals d'incerteses:

- (i) Normat. Es tracta de descomposar les matrius que contenen les incerteses en un producte de tres matrius, on només una conté les incerteses. La norma d'aquesta matriu és acotada.
- (ii) Politòpic. Aquest model descomposa les matrius d'incerteses en una combinació convexa d'un conjunt finit de matrius conegudes amb paràmetres incerts constants. Aquests paràmetres es troben definits en un símplex unitari.
- (iii) Multiconvex. Aquest és un model més general que l'anterior. També presenta una descomposició convexa de les matrius d'incerteses, però els paràmetres que defineixen aquesta combinació poden variar en el temps.

Es considera que els actuadors que realimenten el sistema poden patir fallades. Aquestes fallades poden ser totals, provocant una realimentació nul·la en el sistema, o parcials. També tenim present que cada actuator de cada subsistema pot

fallar de manera independent. Aquestes fallades ens portaran a tractar el concepte de fiabilitat.

L'objectiu principal de la tesi és el de dissenyar un conjunt de controladors descentralitzats amb realimentació d'estat, que verifiqui certes especificacions, per a la classe de sistemes interconnectats amb incerteses descrita per 6.1 i sota la presència de fallades en els actuadors. De fet, ens plantegem resoldre dos problemes:

1. El primer és el problema del control descentralitzat que asseguri l'estabilitat del sistema global tot i mantenint cert nivell de rendiment, tenint en compte les fallades dels actuadors. Aquest rendiment vindrà definit per una funció de cost quadràtica. Anomenarem aquest problema de control fiable amb cost garantit com problema del control RGC (*Reliable Guaranteed Cost*).
2. El segon problema tracta la síntesi del control descentralitzat per a sistemes sota la presència de perturbacions externes. Per això, utilitzem la teoria del control H_∞ per a dissenyar el control robust que mantingui estable el sistema i que minimitzi l'efecte de les perturbacions.

Per a resoldre ambdós problemes ens marquem els següents objectius específics:

1. Obtenir una caracterització general del conjunt de controladors descentralitzats, independent del model d'incerteses. Aquesta caracterització resultarà en forma d'una inequació matricial no lineal.
2. Traduir les inequacions matricials no lineals anteriors en termes de la teoria LMI, obtenint un problema lineal resoluble amb tècniques i algorismes ja existents.
3. Dissenyar, per a cada model d'incerteses, el conjunt de controladors descentralitzats.

Estructura de la tesi

La tesi s'estructura en 10 capítols i 2 annexos. En el primer capítol fem una presentació dels resultats teòrics principals relacionats amb els models d'incerteses, el cost garantit, els sistemes interconnectats, la fiabilitat i la teoria H_∞ , que formen els quatre pilars teòrics d'aquest treball. Aquest capítol té un complement en l'Annex A, on s'introdueixen les síntesi LQ i LQG. En el Capítol 2 presentem la teoria de les inequacions lineals matricials (LMI), particularitzant en el seu ús en la teoria de control. Aquest capítol es troba reforçat per l'annex B, que presenta els mètodes numèrics existents per a resoldre les inequacions lineals matricials.

A partir del Capítol 3, apareixen els resultats inèdits de la tesi. El Capítol 3 presenta una relació matricial entre inequacions lineals i no lineals, que tindran un paper fonamental en la deducció del disseny LMI per a controls descentralitzats i fiables amb cost garantit. El Capítol 4 tracta el problema del control descentralitzat i fiable amb cost garantit, per a sistemes interconnectats amb incerteses, sense especificar-ne el tipus.

En els Capítols 5, 6 i 7 presentem la síntesi del control descentralitzat i fiable amb cost garantit, per a sistemes interconnectats amb incerteses normades, politòpiques i multiconvexes, respectivament. En el Capítol 8 donem mètodes per a obtenir una cota del cost òptima i independent de les condicions inicials. En el Capítol 9 tractem el problema del disseny del control H_∞ , en el cas de control estàtic. Finalment, en el Capítol 10 presentem les conclusions de la tesi, així com algunes de les futures línies de treball.

Notació

- M^T indica la transposta de la matriu M .
- En matrius simètriques o expressions llargues de matrius, usem $*$ per a denotar els termes induïts per simetria, és a dir:

$$\begin{pmatrix} S + (*) & * \\ M & Q \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} S + S^T & M^T \\ M & Q \end{pmatrix}.$$

- $\text{diag}(M_1, \dots, M_L)$ és la matriu diagonal que té, com a blocs diagonals, les matrius M_i , $i = 1, \dots, L$ (no necessàriament quadrades).
- Usem la negreta per indicar que una matriu depèn del paràmetre α :

$$\mathbf{X} = X(\alpha).$$

- Id_n representa la matriu identitat de dimensió n .
- Id representa la matriu identitat de dimensió adient.
- $\text{tr}(A)$ correspon a la traça de la matriu A .
- $M < N$ indica que $N - M$ és definida positiva.
- $\text{co}(V)$: Conjunt de les combinacions convexes de V .

Acrònims

- AQS: Estabilitat quadràtica i afí (*Afine Quadratic Stability*)
- ARE: Equació algebraica de Riccati (*Algebraic Riccati Equation*)
- DME: Desigualtat Matricial Estàndard
- $\mathcal{E}(\cdot)$: Mitjana o esperança
- GCC: Control amb cost garantit (*Guaranteed Cost Control*)
- GCCP: Problema del control amb cost garantit
- LFT: Transformació lineal fraccional (*Linear Fractional Transformation*)

- LMI: Inequació lineal matricial
- LQR/LQ: Regulador lineal quadràtic (*Linear Quadratic Regulator*)
- LQG: Regulador lineal quadràtic gaussià (*Linear Quadratic Gaussian*)
- PLMI: Inequació matricial lineal paramètrica (*Parametric Linear Matrix Inequality*)
- PR: Lema real positiu (*Positive Real*)
- RGC: Fiabre amb cost quadràtic garantit (*Reliable Guaranteed Cost*)

Índex

Introducció	i
Objectius	iii
Estructura de la tesi	v
1 Marc Teòric	1
1.1 Models d'incerteses	1
1.1.1 Incerteses normades	2
1.1.2 Descripció multiconvexa	3
1.1.3 Descripció politòpica o convexa	4
1.2 Control òptim	5
1.2.1 Estabilitat en sentit Lyapunov	6
1.2.2 Control amb cost quadràtic garantit	10
1.3 Sistemes interconnectats	14
1.4 Fiabilitat	17
1.5 Teoria H_∞	22
2 Inequacions lineals matricials	25
2.1 Introducció	25
2.2 Definicions	28
2.3 Teoria del control i LMI	32
2.3.1 Inequació de Lyapunov	32
2.3.2 Inequació de Riccati	33
2.4 Classes de problemes LMI	34
2.5 Eines per a obtenir LMIs	35
2.5.1 Procediment S	36
2.5.2 Multiconvexitat	37

3	Caracterització LMI	41
3.1	Introducció	41
3.2	Resultats	45
4	Control fiable amb cost garantit	53
4.1	Introducció	53
4.2	Disseny del control RGC	55
5	Incerteses normades	63
5.1	Introducció	64
5.2	Disseny del control RGC	65
5.3	Independència en les condicions inicials	72
5.4	Aplicació numèrica	73
6	Model politòpic	81
6.1	Introducció	82
6.2	Estabilitat	83
6.3	Estabilitat i fiabilitat	86
6.4	Estabilitat, fiabilitat i cost garantit	89
6.5	Cas particular: interconnexions paramètriques	92
6.6	Aplicació numèrica	93
7	Model multiconvex	99
7.1	Introducció	99
7.2	Estabilitat i multiconvexitat	101
7.3	Estabilitat, fiabilitat i cost garantit	105
7.4	Disseny LMI	107
8	Optimització de la cota del cost	113
8.1	Minimització de la cota	113
8.2	Independència respecte les condicions inicials	114
8.2.1	Soroll blanc	114
8.2.2	Manera determinista	116
9	Control H_∞ estàtic	117
9.1	Introducció a la teoria H_∞	117
9.1.1	Definicions	119
9.1.2	Comportament H_∞ nominal	122

9.2	Caracterització del control fiable robust	124
9.3	Disseny LMI: Incerteses normades	132
9.4	Disseny LMI: Model politòpic	134
9.5	Realimentació per la sortida	136
10	Conclusions i treball futur	139
10.1	Conclusions	139
10.2	Línies de treball futur	142
A	Síntesi LQ/LQG	145
A.1	Síntesi LQ	145
A.2	Síntesi LQG	148
B	Mètodes del punt interior	151

Índex de figures

1.1	Politop convex \mathcal{P}_i	4
1.2	Estabilitat en sentit Lyapunov	8
1.3	Control centralitzat	15
1.4	Control descentralitzat	15
1.5	Subsistema interconnectat S_i	16
1.6	Fallada del control descentralitzat	19
1.7	Model de fiabilitat	21
5.1	Resposta temporal del sistema S_1	77
5.2	Resposta temporal del sistema S_2	78
5.3	Resposta temporal del sistema S_3	79
9.1	Problema H_∞ estàndard	118
9.2	Problema H_∞ en presència de fallades en el sistema S_i	125
10.1	Esquema de treball	140

Capítol 1

Marc Teòric

En aquest capítol presentem els fonaments teòrics utilitzats en aquest treball, així com les definicions i els resultats en els quals ens basem. Com tractem sistemes amb incerteses, primer presentem els models d'incerteses usats més habitualment en teoria de control. Degut a que l'objectiu principal que ens hem marcat és l'estudi de sistemes interconnectats que es mantinguin estables a pesar de les incerteses, assegurant un cert nivell de funcionament, passem a presentar la base teòrica del control òptim. Aquest tipus de llei de control es caracteritza per ser un control que, realimentat per l'estat, manté estable el sistema i assegura cert nivell de rendiment. Per això, ens caldrà la teoria d'estabilitat de Lyapunov. En el tercer apartat d'aquest capítol definim el tipus de sistema que tractem en aquest treball: sistema format per N subsistemes interconnectats. Però també demanem al nostre sistema que es mantingui estable en presència de fallades. En l'últim apartat, introduïm el concepte de fiabilitat i les seves diferents caracteritzacions, diferenciant entre fallada total (*outage*) i fallada parcial dels actuadors.

1.1 Models d'incerteses

Existeixen tres grans models d'incerteses. El primer model, anomenat d'incerteses normades o acotades, es basa en una descomposició de la matriu d'incerteses com el producte de tres matrius, on només una conté les incerteses. Aquesta matriu d'incerteses, anomenada $\Delta(t)$, ha de ser acotada. Aquest model permet obtenir molts resultats en la teoria del control (cost garantit, norma H_2 i H_∞ , control robust), però és rigid en la seva aplicació, ja que no tots els sistemes reals es poden caracteritzar per aquest model. Cal dir al seu favor que la descomposi-

ció no és única i per tant permet certa llibertat a l'hora d'escollir les matrius que defineixen les incerteses. El segon model, així com el tercer, es basa en una descomposició politòpica de les matrius d'incerteses. Aquesta descripció és molt general i permet aplicar resultats de la teoria d'optimització convexa o de la teoria de grafs que simplifiquen els resultats. Es basa en expressar les matrius com a combinació convexa d'un nombre de matrius constants donades.

Aquests tres models s'apliquen tant a les matrius d'estat com de control. En el cas de les matrius d'interconnexions, per operativitat i poder obtenir controls descentralitzats, les dotem d'un model especial, independent del model d'incerteses usat per les altres matrius. Es tracta de posar les incerteses en un vector desconegut que depèn del temps i de la variable d'estat de la resta de sistemes. És a dir, té l'estructura següent:

$$\Delta G_{ij}(x_j) = G_{ij} g_{ij}(t, x_j) ,$$

on les matrius d'interconnexions G_{ij} són conegudes. El vector incert $g_{ij}(t, x_j)$ ha de verificar certes especificacions, segons el problema tractat.

1.1.1 Incerteses normades

Les incerteses ΔA_i i ΔB_i verifiquen les anomenades condicions equivalents, que marquen la dependència afí en les incerteses

$$\begin{cases} \Delta A_i = A_i + D_i \Delta_i(t) E_{1i} \\ \Delta B_i = B_i + D_i \Delta_i(t) E_{2i} \end{cases} .$$

Les matrius D_i , E_{1i} i E_{2i} són definides convenientment per a cada problema i per tant són conegudes. La matriu d'incerteses $\Delta_i(t)$ és desconeguda però ha de verificar

$$\Delta_i^T(t) \Delta_i(t) \leq Id .$$

D'aquí ve el nom d'incerteses acotades o *norm-bounded*. Aquest tipus de descomposició també s'anomena descomposició en forma aditiva, que es pot considerar de forma més general com

$$\Delta_i^T(t) \Delta_i(t) \leq \rho_i Id , \quad \rho_i \geq 0 ,$$

que és equivalent a l'anterior caracterització. Quan es verifica aquesta acotació, es diu que les incerteses són admissibles. D'entrada, no hi ha cap restricció sobre les

matrius constants D_i , E_{1i} i E_{2i} i per tant la descomposició no és única. L'avantatge d'aquest model és que depèn del temps. Existeixen moltes raons per a assumir aquesta estructura per a les incerteses. Una és que la connexió lineal entre la planta i la incertesa $\Delta(t)$ és un cas inclòs en aquest model. A més a més, els sistemes físics satisfent les anomenades *matching-conditions* ([53], [24]) poden ser modelats segons aquest model. Aquestes condicions indiquen que el vector de control i les incerteses entren en el sistema via el mateix canal, ja que tots dos es veuen multiplicats per la matriu de control. L'inconvenient és la rigidesa de la seva estructura.

1.1.2 Descripció multiconvexa

Aquest és un model més flexible que el model d'incerteses normades. Té l'avantatge que permet obtenir, en teoria de control, resultats matemàtics menys conservadors que en el cas de l'anterior model. Es considera un model d'incerteses paramètric, on les matrius amb incerteses es representen com una combinació de matrius constants conegudes amb paràmetres que poden variar en el temps. Sigui doncs el model d'incerteses paramètric següent

$$\begin{cases} \Delta A_i = A_{i0} + \sum_{k=1}^{L_i} \alpha_{i_k} A_{i_k} \\ \Delta B_i = B_{i0} + \sum_{k=1}^{L_i} \alpha_{i_k} B_{i_k} \end{cases},$$

on les matrius A_{i_k} i B_{i_k} són conegudes i constants, per a $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, L_i$, mentre que el vector paramètric $\alpha_i \in \mathbb{R}^{L_i}$ depèn de t i verifica

$$\begin{cases} \alpha_{i_k} \in [\underline{\alpha}_{i_k}, \bar{\alpha}_{i_k}] \\ \dot{\alpha}_{i_k} \in [\underline{\sigma}_{i_k}, \bar{\sigma}_{i_k}]. \end{cases}$$

Considerem ara, per a cada $i = 1, \dots, N$, els vèrtexs d'aquests intervals

$$V_i = \left\{ \nu_i = \begin{pmatrix} \nu_{i1} \\ \vdots \\ \nu_{iL} \end{pmatrix}, \nu_{ik} \in \{\underline{\alpha}_{i_k}, \bar{\alpha}_{i_k}\}, k = 1, \dots, L_i \right\},$$

$$T_i = \left\{ \tau_i = \begin{pmatrix} \tau_{i1} \\ \vdots \\ \tau_{iL} \end{pmatrix}, \tau_{ik} \in \{\underline{\sigma}_{i_k}, \bar{\sigma}_{i_k}\} k = 1, \dots, L_i \right\}.$$

1.1.3 Descripció politòpica o convexa

Aquest és un cas particular de l'anterior model. Es consideren els paràmetres α_{i_k} independents del temps i que les matrius amb incerteses estan representades per una combinació convexa de matrius conegudes. Així doncs, les matrius d'incerteses pertanyen al domini politòpic d'incerteses \mathcal{P}_i (veure Figura 1.1). En aquest cas, qualsevol parella matricial $(A_i, B_i) \in \mathcal{P}_i$, $i = 1, \dots, N$, pot ser descrita de la següent manera:

$$\begin{cases} \Delta A_i = \sum_{k=1}^{L_i} \alpha_{i_k} A_{i_k} \\ \Delta B_i = \sum_{k=1}^{L_i} \alpha_{i_k} B_{i_k} . \end{cases}$$

Els paràmetres $\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{L_i}})$ es troben en el símplex

$$\Pi_i = \left\{ \sum_{k=1}^{L_i} \alpha_{i_k} = 1, \alpha_{i_k} \geq 0, k = 1, \dots, L_i \right\} .$$

Es pot considerar que les matrius $\Delta A_i(\cdot)$ i $\Delta B_i(\cdot)$ són funcions afins d'un cert paràmetre $\alpha_i \in \Pi_i$, descrites com a combinació convexa dels vèrtexs matricials (A_{i_k}, B_{i_k}) .

Aquest model també s'adapta al cas $\Delta A_i = A_{i_0} + \sum_{k=1}^{L_i} \alpha_{i_k} A_{i_k}$, ja que per la condició

de convexitat $\sum_{k=1}^{L_i} \alpha_{i_k} = 1$, tenim que

$$A_{i_0} + \sum_{k=1}^{L_i} \alpha_{i_k} A_{i_k} = \sum_{k=1}^{L_i} \alpha_{i_k} (A_{i_0} + A_{i_k}) .$$

La matriu $\Delta B_i(t)$ pot rebre la mateixa descomposició.

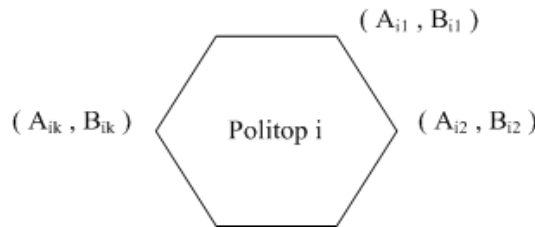


Figura 1.1: Politop convex \mathcal{P}_i

En aquest treball suposarem que $L_i := L$, per a tot $i = 1, \dots, N$. Si no així, es defineix $L := \max_i L_i$ i es consideren els coeficients per completació.

1.2 Control òptim

Els resultats sobre control garantit de sistemes a gran escala es basen en els obtinguts per a un sistema global ($N = 1$) amb incerteses. Per això, comencem l'estudi veient quins resultats s'han obtingut per a sistemes simples amb incerteses, així com donant les definicions bàsiques sobre cost garantit i estabilització quadràtica. El resultat principal és el teorema enunciat per Petersen en [42], on s'assegura que si certa equació matricial té solució, aleshores es pot dissenyar un control amb cost garantit que mantigui estable el sistema. Aquest resultat permet obtenir una caracterització per mitjà de les inequacions lineals matricials, que a la seva vegada permetrà obtenir un resultat molt semblant en el cas de sistemes interconnectats. A més a més, la seva demostració dóna una certa metodologia que permet enunciar resultats sobre control amb cost garantit, tant en sistemes simples com en sistemes interconnectats.

En els últims 20 anys, han aparegut nombroses maneres d'abordar el problema del disseny del control per a sistemes lineals amb incerteses. L'estabilització quadràtica de sistemes amb incerteses, en el context del problema del control amb cost garantit (GCCP), va ser vista per primer cop per Chang i Peng l'any 1972, en [8], trobant cotes superiors del cost quadràtic en sistemes lineals de llaç tancat. El GCCP ha estat revisat per molts autors, entre els quals destaca Petersen. En [39]–[40], els autors presenten una tècnica alternativa per a determinar controladors estabilitzadors que no necessita la satisfacció de les condicions donades en [8]. En aquests articles, es dona un procediment per a determinar un control realimentat per a sistemes amb incerteses d'un determinat tipus, expressats en termes de les variacions dels paràmetres de la planta. La resolució del GCCP implica en general resoldre una equació de Riccati matricial, contenint termes addicionals deguts a les incerteses. Per a sistemes sense incerteses ni perturbacions, es té que l'equació de Riccati dóna la matriu P simètrica i definida positiva que permet calcular la funció de Lyapunov i per tant assegurar l'estabilitat. D'altra banda, en aquest cas, la funció de cost J queda determinada per P i l'estat inicial x_0 : $J = x_0^T P x_0$. Al tractar sistemes amb incerteses, es perden les igualtats. És a dir, la igualtat en l'equació de Lyapunov es transforma en una desigualtat, obtenint aleshores una

cota de la funció de cost. A més a més, l'equació de Riccati aplicada al control òptim permet construir un mètode per a dissenyar un sistema de control que garanteix estabilitat robusta. En particular, en [42], es presenta un mètode per al disseny del control amb cost garantit que es basa en resoldre una equació de Riccati parametrizada. La resolució de la mateixa és molt feixuga, degut justament a la dependència paramètrica. A més a més, no s'obté exactament una solució del problema del control amb cost garantit, sinó una aproximació de la mateixa. Però assegura com trobar el control amb cost garantit. Se sap que quan es considera l'estabilització quadràtica de sistemes amb incerteses en el context del GCCP, la clau està en trobar cotes superiors del cost quadràtic. Donat un sistema d'aquest estil, un pas important és representar de manera adequada la matriu d'incerteses. En general, aquesta tria no és única i sovint implica un estudi per tria i error, fins arribar a una descomposició de les incerteses adequada.

Així doncs, en un sistema de control determinat, l'aspecte a determinar en primer lloc és l'estabilitat. Si el sistema és lineal i invariant, existeixen molts criteris d'estabilitat, entre ells el criteri de Nyquist o de Routh. Però quan el sistema no és lineal o presenta incerteses, aquests criteris no s'apliquen. En aquests casos, la teoria d'estabilitat de Lyapunov és la més adequada, ja que permet establir la base pel disseny del control òptim quadràtic. El segon mètode de Lyapunov, també conegut com mètode de Lyapunov directe, és el mètode més general per a determinar l'estabilitat d'un sistema qualsevol, encara que sovint cal l'experiència del dissenyador per a la seva aplicació.

1.2.1 Estabilitat en sentit Lyapunov

Presentem a continuació els resultats bàsics sobre la teoria de Lyapunov ([34], [45]). L'interès dels mètodes d'anàlisi dits de Lyapunov és degut a que permeten estudiar l'estabilitat d'un sistema sense haver d'integrar les equacions diferencials que descriuen el seu comportament. Aleksander Mikhailovich Lyapunov va ser company de'n Markov, i més endavant alumne de'n Chebyshev. Cap a 1890, va realitzar un estudi sistemàtic de l'expansió local i de les propietats contractives de la dinàmica al voltant d'un atractor. Va treballar amb la idea que un conjunt invariant d'equacions diferencials és estable en el sentit que atrau totes les solucions, si es pot trobar una funció acotada inferiorment i que decreix al llarg de les solucions externes a aquest conjunt invariant. En 1892 va publicar la seva tesi *The General Problem of the Stability of Motion* [28], on analitza la noció d'estabilitat

de sistemes mecànics. La idea intuïtiva es basa en usar certa funció, V , que pot ser entesa com una funció d'energia. Aleshores, un sistema és estable si és dissipatiu, en el sentit que aquesta funció V decreix.

Per tal de simplificar la notació, tractem el cas $N = 1$, ja que els conceptes són els mateixos per a N subsistemes interconnectats. En tot aquest apartat considerem les incerteses descrites de forma general per ΔA i ΔB .

Definició 1.1 (Estabilitat en sentit Lyapunov [34]). Sigui el sistema $\dot{x} = f(x, t)$, amb punt d'equilibri x_e ($f(x_e, t) = 0, \forall t$). Aleshores,

- L'estat x_e és **estable** en sentit Lyapunov si les trajectòries que surten d'un entorn $S(\delta)$ de x_e no s'allunyen i es queden en un entorn $S(\epsilon)$ de x_e , a mida que creix t . És a dir:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0.$$

- L'estat x_e és **asimptòticament estable** si és estable en sentit Lyapunov i totes les trajectòries que surten de $S(\delta)$ hi tornen, sense sortir de $S(\epsilon)$:

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que } \|x(t_0)\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e.$$

- Si x_e és estable asimptòticament i totes les trajectòries convergeixen a x_e , per a qualsevol estat inicial, es diu que l'estat d'equilibri és asimptòticament estable en sentit general o **estable globalment i asimptòticament** :

$$\forall x(t_0), \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e.$$

És a dir, quan l'origen és globalment asimptòticament estable, totes les trajectòries convergeixen a l'origen. L'estabilitat en sentit Lyapunov garanteix que la trajectòria es quedarà en una bola de radi ϵ si el seu punt de sortida pertany a una bola de radi δ , amb centre el punt fix x_e (veure Figura 1.2). L'estabilitat asimptòtica inclou aquesta propietat, però a més a més especifica que tota trajectòria iniciada en la bola de radi δ convergeix cap a x_e . Per un abús de llenguatge, es parla d'estabilitat del sistema en lloc d'estabilitat del punt fix. En aquest treball, quan parlem d'estabilitat ens referim sempre al cas d'estabilitat asimptòtica en general. Abans de presentar el segon mètode de Lyapunov, ens calen certes definicions.

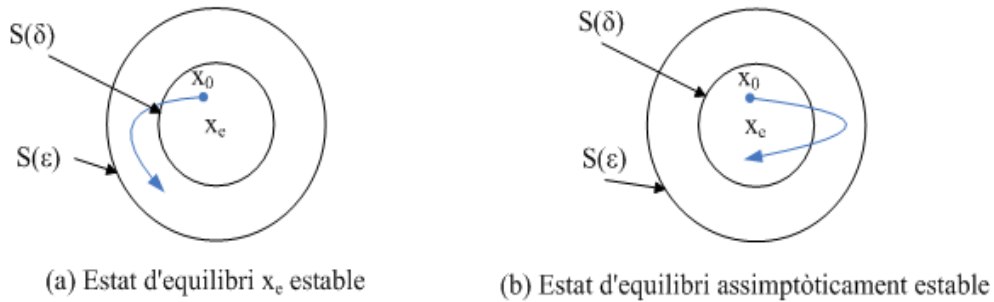


Figura 1.2: Estabilitat en sentit Lyapunov

Definició 1.2 (Funció definida positiva [34]). Una funció escalar $V(x)$ és definida positiva, i es denota per $V > 0$, en una regió Ω , si $V(x) > 0$ per a tots els estats no nuls d' Ω i $V(0) = 0$. És semidefinida positiva ($V \geq 0$) si és positiva en Ω , excepte en l'origen i en certs estats on s'anul·la.

Serà definida (semidefinida) negativa i es nota per $V(x) < 0$ si $-V(x)$ és definida (semidefinida) positiva. Quan la funció $V(x)$ és una forma quadràtica, es pot usar el criteri de Sylvester, que planteja que les condicions necessàries i suficients per tal que una forma quadràtica sigui definida positiva és que tots els seus menors principals successius siguin positius. Ho exposem en la següent definició.

Definició 1.3 (Funció quadràtica definida positiva [34]). La funció quadràtica $V(x) = x^T P x$, amb $P_{n \times n}$ matriu simètrica, és definida positiva si la part real dels valors propis de la matriu P són estrictament positius:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0, \forall \lambda_i \text{ valor propi de } P.$$

De la mateixa manera, una funció quadràtica és definida negativa si es verifica

$$\begin{aligned} P < 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i \\ &\Leftrightarrow x^T P x < 0, \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow S^T P S < 0, \forall S \text{ invertible}. \end{aligned}$$

Les funcions quadràtiques són usades sovint en l'anàlisi de sistemes dinàmics. En particular, en sistemes mecànics, l'energia cinètica, potencial i total són funcions quadràtiques de l'estat.

Segon mètode de Lyapunov

El segon mètode de Lyapunov es basa en el fet que si un sistema té un estat d'equilibri asimptòticament estable, aleshores l'energia emmagatzemada en el sistema es disipa a mida que transcorre el temps, fins que finalment adopta el seu valor mínim en el punt d'equilibri. Aleshores el sistema haurà tornat a un estat d'equilibri, sent estable. El mètode de Lyapunov es basa en generar una funció escalar de tipus energia que admeti una derivada temporal negativa. Per tal de generalitzar el concepte de funció energia, Lyapunov va introduir la funció de Lyapunov, que depèn de l'estat x i del temps t . Aquest fet es tradueix en el següent teorema.

Teorema 1.1 (Segon mètode de Lyapunov [34]). *Sigui el sistema $\dot{x} = f(x, t)$, amb $f(0, t) = 0, \forall t$. Si existeix una funció escalar $V(x, t)$ amb derivades parcials primeres contínues satisfent:*

1. $V(x, t)$ és definida positiva,
2. $\dot{V}(x, t)$ és definida negativa,

la funció $V(x, t)$ s'anomena funció de Lyapunov. Aleshores, l'estat d'equilibri en l'origen del sistema és uniforme i asimptòticament estable. Si a més a més $V(x, t) \rightarrow \infty$ quan $|x| \rightarrow \infty$, aleshores l'estat d'equilibri és uniforme i asimptòticament estable en general.

Per exemple, per a un sistema lineal $\dot{x} = Ax$, tenim que l'origen és asimptòticament si i només si els valors propis de A tenen part real negativa. En aquest cas, com a funció de Lyapunov considerem la funció quadràtica $V(x, t) = x^T P x$. Aleshores, pel Teorema 1.1, el sistema serà estable si es verifica l'anomenada inequació de Lyapunov:

$$A^T P + P A < 0 .$$

En aquest treball, tractarem sistemes controlats d'equació general $\dot{x} = Ax + Bu$. Volem dissenyar el control realimentat per l'estat $u(t) = Kx(t)$ tal que un cert índex quadràtic de funcionament o funció de cost es minimitzi. Aquest tipus de control s'anomena òptim, i el seu disseny es basa en la síntesi lineal quadràtica, denominada LQR (veure annex A). En general, l'estabilitat dels sistemes de control s'examina un cop dissenyats. No obstant, també és possible formular primer les condicions d'estabilitat i després dissenyar el sistema dins de les limitacions establertes. Si s'utilitza el segon mètode de Lyapunov per tal d'establir les bases de disseny del control òptim, es confirma que el sistema funcionarà, és a dir, la

sortida del sistema va cap al valor desitjat. Per tant, el sistema dissenyat té una configuració amb característiques d'estabilitat inherents. En la síntesi dels sistemes òptims, s'estableix una relació directa entre les funcions de Lyapunov i els índexos quadràtics de funcionament amb matrius de pes Q i R , que involucra una equació tipus Riccati.

Definició 1.4 (Equació de Riccati). La matriu simètrica P és solució de l'equació de Riccati si verifica

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 .$$

En l'annex A en presentem la resolució.

1.2.2 Control amb cost quadràtic garantit

En aquest apartat generalitzem el concepte de control òptim al cas de sistemes amb incerteses. Quan es vol dissenyar un controlador robust òptim per a sistemes amb incerteses, el model clàssic que s'usa és el d'estabilització quadràtica. Es tracta de trobar una funció de Lyapunov que garanteixi estabilitat asimptòtica del sistema amb incerteses en llaç tancat, per a totes les incerteses admissibles. Cal tenir present, doncs, que aquests tipus de sistemes en llaç tancat han de ser estables en sentit Lyapunov. Degut a aquest fet, veurem que es relacionen les condicions d'estabilitat quadràtica i de cost garantit mitjançant una inequació tipus Riccati. Considerem el sistema lineal amb incerteses

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \Delta A x(t) + \Delta B u(t) \\ x(t_0) = x_0 , \end{cases} \quad (1.1)$$

on $x \in \mathbb{R}^n$ és la variable d'estat, $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és la matriu d'estat, $u \in \mathbb{R}^s$ és la variable de control i $\Delta B \in \mathbb{R}^{n \times s}$ és la matriu de control. Per simplificar la notació, es fa una translació en t i es considera que $t_0 = 0$.

Sigui la funció de cost

$$J = \int_0^\infty (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt , \quad (1.2)$$

amb $Q \geq 0$ i $R > 0$ matrius simètriques.

Definició 1.5 (Estabilitat quadràtica [44]). El sistema amb incerteses (1.1) amb la llei de control $u(t) = 0$ s'anomena quadràticament estable si existeix una matriu P simètrica definida positiva i $\alpha > 0$ constant tals que, per a qualsevol incertesa ΔA admissible, la funció de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ satisfà:

$$\dot{V} = 2x^T P \Delta A x \leq -\alpha |x|^2 ,$$

per a tot parell $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Definició 1.6 (Estabilització quadràtica [44]). El sistema (1.1) és quadràticament estable via realimentació lineal d'estat si existeix un control $u(t) = Kx(t)$ tal que el sistema en llaç tancat és quadràticament estable.

En la següent definició, s'expressa això mateix en termes d'una inequació de Lyapunov matricial (veure [41]).

Definició 1.7 ([39]). El sistema amb incerteses (1.1) és quadràticament estable si existeix una matriu P simètrica definida positiva tal que

$$(\Delta A)^T P + P(\Delta A) < 0 ,$$

per a tota incertesa admissible.

Recíprocament, el sistema (1.1) és quadràticament estable via realimentació lineal $u(t) = Kx(t)$, si el sistema en llaç tancat és quadràticament estable.

Definim a continuació el concepte de cost garantit.

Definició 1.8 (Cost quadràtic garantit [36]). Sigui el sistema (1.1), amb la llei de control $u(t) = Kx(t)$ que el fa estable. Si existeix $J_0 > 0$ tal que per a tota matriu de guany K , $J(K) < J_0$, aleshores J_0 és el cost garantit.

Per tant, tant és com siguin les incerteses (sempre i quan siguin admissibles), el sistema en llaç tancat és de cost quadràtic garantit si el valor de la funció de cost (1.2) és sempre menor que J_0 .

Definició 1.9 (Matriu de cost quadràtic garantit [36]). Sigui el sistema (1.1) amb $u(t) = Kx(t)$ i funció de cost J (1.2). La matriu definida positiva P_c s'anomena matriu de cost quadràtic garantit si satisfà

$$Q + K^T R K + [\Delta A + \Delta B K]^T P_c + P_c [\Delta A + \Delta B K] < 0 . \quad (1.3)$$

Juntant aquestes dues definicions, tenim el següent lema. Recordem que el sistema és estable.

Lema 1.1. *La llei de control $u(t) = Kx(t)$ defineix un control amb cost quadràtic garantit, amb matriu de cost P definida positiva, per al sistema (1.1) amb funció de cost (1.2), si per a tot $x \neq 0$, es verifica*

$$x^T(Q + K^T RK)x + 2x^T P[\Delta A + \Delta BK]x < 0. \quad (1.4)$$

Així doncs, el concepte de control quadràticament estable requereix que existeixi una funció quadràtica de Lyapunov $V(x, t) = x(t)^T P x(t)$ fixada per a totes les incerteses admissibles. El següent teorema dóna una condició per tal que un control $u(t) = Kx(t)$ tingui cost quadràtic garantit, ajuntant el concepte d'estabilitat quadràtica amb el d'existència de cost garantit. En farem la demostració, ja que mostra un procediment emprat al llarg de la tesi i convé veure com s'usa a la pràctica.

Teorema 1.2 ([42]). *Sigui el sistema (1.1) amb la funció de cost (1.2). Sigui la llei de control $u(t) = Kx(t)$ amb cost garantit. Aleshores, el sistema és quadràticament estable. A més a més:*

$$J \leq x_0^T P x_0, \quad \text{per a tota incertesa admissible.} \quad (1.5)$$

Recíprocament, si existeix una llei de control $u(t) = Kx(t)$ tal que el sistema enllaç tancat corresponent és quadràticament estable, aleshores per a tota matriu $Q \geq 0$ i $R > 0$ simètrica, aquest control és de cost quadràtic garantit amb certa matriu de cost $\bar{P} > 0$.

Demostració. S'aplica el Lema 1.1 i cal veure si es verifica la desigualtat de la Definició 1.5 per a $u(t) = Kx(t)$. Es considera la funció de Lyapunov $V = x^T P x$, on P és la matriu de cost garantit. Per a simplificar la notació, treiem la dependència en t . Aleshores,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = \left(\Delta A x + (\Delta B) K x \right)^T P x + x^T P \left(\Delta A x + (\Delta B) K x \right) \\ &= \left(x^T (\Delta A)^T + x^T K^T (\Delta B)^T \right) P x + x^T P \left(\Delta A x + (\Delta B) K x \right) \\ &= x^T \left[\left(\Delta A + (\Delta B) K \right)^T P + P \left(\Delta A + (\Delta B) K \right) \right] x. \end{aligned}$$

Com que $u(t)$ defineix una llei de control amb cost garantit, es pot aplicar la desigualtat (1.4)

$$\dot{V} < -x^T (Q + K^T RK) x.$$

Cal veure ara que $-x^T (Q + K^T RK) x \leq -\alpha|x|^2$. És a dir, cal trobar $\alpha > 0$ tal que

$$x^T (Q + K^T RK) x \geq \alpha|x|^2 ,$$

o bé $Q + K^T RK \geq \alpha I$. Com que les matrius Q i R són donades i definides positives, sempre es pot trobar un valor d' α positiu tal que verifiqui aquesta desigualtat, per a cada matriu K . Usant la Definició 1.5, s'obté que el sistema és quadràticament estable ja que $\dot{V} < -\alpha|x|^2$. A més a més, per estabilitat tenim que $x(\infty) = 0$. Aleshores, en integrar $x^T Qx + u^T Ru \leq -\dot{V}$ entre 0 i ∞ , s'obté que $J \leq V(x_0)$.

Recíprocament, si existeix $u = Kx$ tal que el sistema és quadràticament estable, per definició s'obté

$$\exists P > 0 \text{ i } \delta > 0 \text{ tal que } 2x^T P[\Delta A + (\Delta B)K]x \leq -\delta|x|^2 .$$

Per a tenir la definició de cost quadràtic garantit, cal que existeixi $P > 0$ tal que

$$x^T(Q + K^T RK)x + 2x^T P[\Delta A + \Delta BK]x < 0 ,$$

per a tot $x \in R^n$ no nul i tota incertesa admissible. Per veure-ho, considerem σ com el valor propi major de la matriu $Q + K^T RK$. Com és definida positiva, resulta que $\sigma > 0$. Per tant,

$$x^T(Q + K^T RK)x \leq \sigma Id|x|^2 .$$

Com $-\delta|x|^2 = -\frac{\delta}{\sigma}\sigma|x|^2$, es té que

$$2x^T P[\Delta A + (\Delta B)K]x \leq -\delta|x|^2 < -\frac{\delta}{\sigma}x^T(Q + K^T RK)x ,$$

$$x^T(Q + K^T RK)x + 2\frac{\sigma}{\delta}x^T P[\Delta A + (\Delta B)K]x < 0 ,$$

que és el que volíem veure. Agafant $\bar{P} = \frac{\sigma}{\delta}P$ com a matriu de cost, u és el control amb cost quadràtic garantit i matriu de cost \bar{P} . \square

Definició 1.10 (Solució estabilitzadora). La matriu P^+ és una solució estabilitzadora de $A^T P + PA - PMP + N = 0$ si

1. Verifica l'equació de Riccati;
2. $(A - MP^+)$ és una matriu estable (tots els seus valors propis cauen en el semiplà esquerre obert complex).

1.3 Sistemes interconnectats

A la pràctica, gran nombre de sistemes de gran escala estan formats per un conjunt de subsistemes interconnectats. En general, no es poden incorporar moltes realimentacions en el disseny del controlador global, degut a les dimensions del problema. I quan es pot, és feixuc d'implementar. Aquestes dificultats fan que es desenvolupi l'estudi del control descentralitzat, on cada subsistema és controlat de manera independent usant la informació local disponible. Per altra banda, sovint porta molta feina, quan no és impossible, modelar de manera exacta sistemes físics, especialment per a sistemes de gran escala, degut a la seva complexitat. Per això és tant pràctic el disseny dels controls descentralitzats modelant, això sí, possibles incerteses. Aquestes incerteses apareixen no només en els subsistemes locals, sino també en les connexions entre ells.

A partir dels treballs fets per Siljak [48] en 1978, l'estudi de sistemes interconnectats de gran escala no ha parat de créixer. En els últims anys, s'ha estudiat amb profunditat el problema del control descentralitzat robust òptim per a sistemes de gran escala paramètrics, i s'han estudiat diferents maneres de solucionar aquest problema. Aquí ens interessa particularment l'ús del concepte de cost garantit i de les tècniques LMI. Per exemple, en [59] es tracta el cas de sistemes amb incerteses en les matrius d'interconnexions i en [60] se'n veu una aplicació a una central elèctrica, mentre que [29] presenta una aplicació del control descentralitzat per el tractament d'estructura Benchmark. L'article [25] tracta el cost quadràtic per a sistemes no lineals. En [16], es tracta el problema quan les incerteses no verifiquen les condicions anomenades *matching-conditions* i es dóna un control descentralitzat no lineal usant l'equació algebraica de Riccati. De fet, també es tracta el problema de trobar el control òptim lineal descentralitzat. Evidentment, el control lineal és més fàcil d'implementar, ja que té una estructura més senzilla. Quan s'usa l'equació de Riccati i es volen imposar certes condicions addicionals com ara la minimització de la cota del cost, es compliquen els càlculs degut als paràmetres que apareixen en aquesta equació.

Les dues estructures bàsiques de control són el control centralitzat (Figura 1.3) i el control descentralitzat (Figura 1.4, amb C_i control, P_i planta i S_i sistema i). En la configuració centralitzada, un controlador monitoriza N plantes separades però interconnectades, que representen les N parts d'una mateixa planta. Quan s'usa l'estructura descentralitzada per a la mateixa planta, tots els subsistemes tenen un

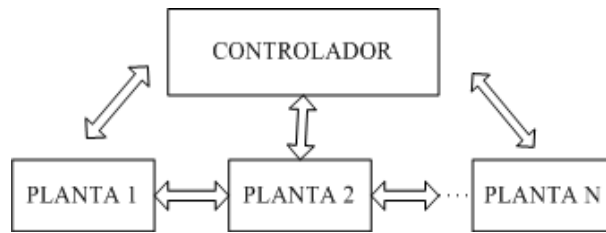


Figura 1.3: Control centralitzat

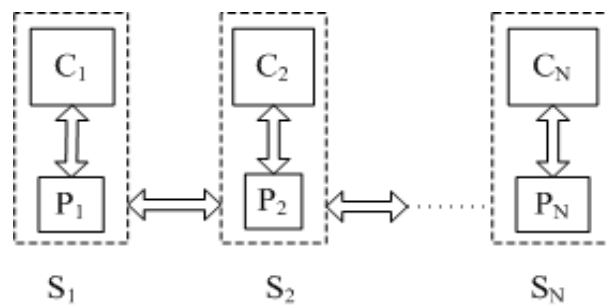


Figura 1.4: Control descentralitzat

controlador particular. La subplanta i el seu controlador formen un subsistema. Una pregunta que un es fa de manera natural és perquè usar un control per a cada subsistema i no un de general per a tot el sistema. La resposta no és senzilla i depèn de les dimensions i de l'estructura interna de la planta. La idea bàsica és que l'ús de controls descentralitzats minva la complexitat del problema, ja que s'obté una resposta ràpida a problemes locals de la planta. Per exemple, un avantatge de l'ús de controls descentralitzats és el següent. Quan el control és central i té una fallada, falla tot el sistema. Mentre que si el control és descentralitzat i falla un d'aquests controls, només deixa de funcionar (o funciona incorrectament) aquest subsistema. Quan un subsistema es desconnecta, en el cas centralitzat el control general deixa de funcionar, mentre que si és descentralitzat el sistema total pot continuar funcionant.

En aquest apartat considerem el problema del control descentralitzat amb cost garantit per al cas de sistemes de gran escala amb incerteses acotades. En el següent apartat tractarem el problema de fiabilitat, en el sentit de conservar l'estabilitat a pesar que falli un controlador o part d'un subsistema. Els conceptes que

s'exposen a continuació són trets del llibre de Siljak [48] (conceptes bàsics) i de l'article [30]. En primer lloc, adaptarem els conceptes i resultats presentats en els dos apartats anteriors.

Sigui el sistema format per N subsistemes, definit per

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \Delta A_i x_i(t) + \Delta B_i u_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G_{ij} g_{ij}(t, x_j) \\ x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.6)$$

on $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ és el vector d'estat del subsistema i , $u_i \in \mathbb{R}^{s_i}$ és el control del subsistema i . Les matrius $\Delta A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $\Delta B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times s_i}$ són les matrius d'estat i de control, mentre que la matriu constant $G_{ij} \in \mathbb{R}^{l_i \times n_j}$ és la matriu de connexió entre el subsistema i i la resta de subsistemes (veure Figura 1.5).

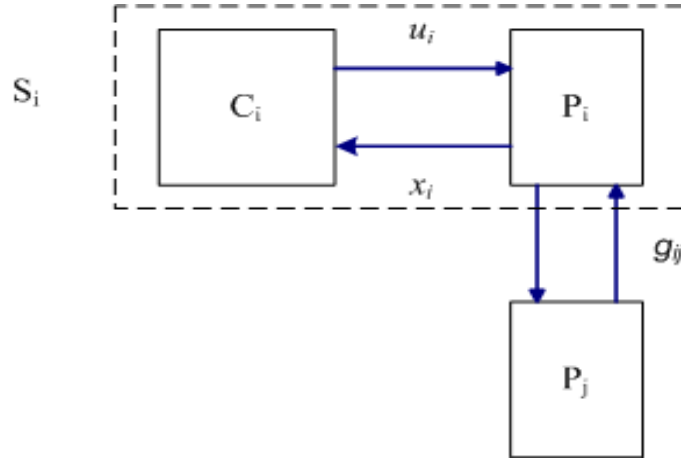


Figura 1.5: Subsistema interconnectat S_i

El vector d'incerteses en les relacions entre sistemes ve donat per $g_{ij}(t, x_j) \in \mathbb{R}^{l_i}$, que suposem continu i suficientment diferenciable en x_j i continu a trossos en t . És necessari imposar certa estructura en les interconnexions, per tal de simplificar la presentació dels resultats. La primera condició indica que és necessari dotar al vector d'interconnexions $g_{ij}(t, x_j)$ de certa estructura lineal.

Condicció 1.1. Existeixen matrius constants W_{ij} tals que $\forall x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ es verifica que

$$\|g_{ij}(t, x_j)\| \leq \|W_{ij} x_j\|, \quad \forall i, j \quad \text{amb } t \geq 0. \quad (1.7)$$

La següent condició és necessària per a simplificar la notació i poder assegurar estabilitat.

Condicció 1.2. Per a tot i , $W_i := \sum_{j=1}^N W_{ji}^T W_{ji} > 0$.

La funció de cost que es considera és la suma de les funcions de cost de cada subsistema

$$J = \sum_{i=1}^N \int_0^\infty (x_i^T(t) Q_i x_i(t) + u_i^T(t) R_i u_i(t)) dt, \quad (1.8)$$

on $Q_i = Q_i^T \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ i $R_i = R_i^T \in \mathbb{R}^{s_i \times s_i}$ són matrius constants semidefinides i definides positives, respectivament. A continuació donem la definició de control amb cost garantit (GCC) per a un sistema format per N subsistemes interconnectats amb incerteses.

Definició 1.11 (GCC [30]). Els controls $u_i(t) = K_i x_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ formen un conjunt de control amb cost quadràtic garantit \bar{J} i matrius de cost $P_i > 0$ per al sistema (1.6) i funció de cost (1.8) si el sistema en llaç tancat és quadràticament estable. És a dir,

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} x_i^T(t) P_i x_i(t) + x_i^T(t) (Q_i + K_i^T R_i K_i) x_i(t) \right) < 0, \quad (1.9)$$

i per a totes les incerteses admissibles es té que $J \leq \bar{J}$.

1.4 Fiabilitat

Sempre és interessant dissenyar un control realimentat per l'estat que garanteixi cert nivell de funcionament a pesar de fallades locals dels actuadors o controladors. Un control dissenyat per a tolerar fallades, mentre es conserven certes propietats del sistema, s'anomena control fiable. En l'àrea del disseny del control fiable, s'han desenvolupat diferents mètodes per tal que el sistema resultant en llaç tancat toleri fallades i verifiqui certes imposicions. La fiabilitat és un tema tractat en un gran ventall de problemes. Per exemple, en [65], es tracta usant controls redundants, en [57] en el problema del cost garantit, en [14] en el cas d'optimització de la norma H_2 . D'altra banda, en [58] l'autor utilitza l'equació algebraica

de Riccati per tal de desenvolupar un procediment per a dissenyar els controls realimentats per l'estat, que poden tolerar la fallada total (*outage*) en un subconjunt donat d'actuadors o controladors, mentre es manté l'estabilitat i una cota coneguda del cost. Pel cas del disseny del control fiable centralitzat, en [63] els autors cobreixen els casos de funcionament normal, fallada parcial i fallada total. La fiabilitat està tractada en tot un ventall de sistemes de control. En [19], els autors tracten la fiabilitat per a sistemes simètrics, mentre que en [25] es tracten sistemes no lineals, però el model de fiabilitat emprat és el d'*outage*. En l'article [18], els autors tracten el problema del control fiable amb saturació en els actuadors. Un article on es presenta una classificació dels diferents tipus de fallada és [52], on l'autor fa una sistematització força exhaustiva i clara de l'estudi de la fiabilitat en el camp de la teoria de control.

Una definició àmpliament acceptada del terme fiabilitat (*reliability*) és la següent, treta del IEEE Dictionary of Electrical and Electronic Terms:

"Reliability is the probability of a device performing its purpose adequately for the period of time intended under the operating conditions encountered."

És una definició donada en termes probabilístics, on s'equipara fiabilitat a la probabilitat que tot funcioni segons les condicions establertes i complint certes especificacions imposades pel disseny del sistema. El terme *period of time* correspon a la mitjana de temps abans que es detecti una fallada. Si considerem $F(t)$ com la probabilitat que el control funcioni a l'instant t , la mitjana de temps fins fallar (MTTF: Mean Time To Failure) és una mesura de fiabilitat

$$\text{MMTF} = \int_0^{\infty} F(t) dt .$$

En l'Apartat 1.3 hem presentat dues maneres per a controlar un sistema de gran escala format per subsistemes. O bé es dissenya un únic control global per a tot el sistema, o bé es genera un control específic per a cada subsistema de tal manera que les interaccions l'afectin el menys possible. Ja hem justificat que aquesta última manera és la que ens sembla més eficaç quan hi ha incerteses en els subsistemes. Ara cal plantejar-se el cas on hi hagin errades o fallades en la planta, o en la interconnexió entre les subplantes o que tingui lloc una desconexió total d'un subsistema respecte de la resta. També poden haver-hi fallades en el controlador, ja siguin parcials o totals (*outage*). És a dir, poden fallar algunes connexions entre

el controlador i la planta o és possible que tot el controlador quedi desconectat de la subplanta (Figura 1.6). Majoritàriament, s'entén per fallada una fallada total, és a dir, una desconexió on no funciona el control ($u(t) \equiv 0$). En aquest treball, considerem tant fallades parcials com totals en l'actuador.

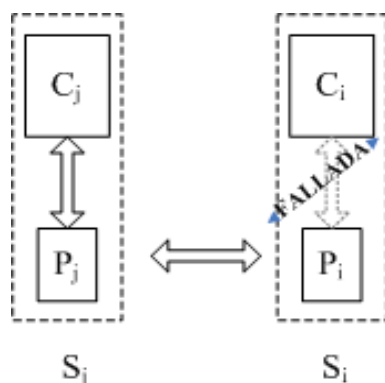


Figura 1.6: Fallada del control descentralitzat

Cal resoldre el problema de fer que el sistema en llaç tancat sigui estable sota les incerteses admissibles en el sistema i respecte el funcionament del controlador. Per tant, cal que el sistema sigui asimptòticament estable no només quan el control funciona, sino també quan no. Hi ha el cas, però, de subsistemes en els quals no està permès que falli el controlador. Quan això passi, caldrà tenir una eina de suport: un altre control que suporti el primari. En aquests casos es parla de redundància ([49]).

És necessari fer un estudi de com ha de ser el model de fallades i com serà aleshores el control que mantingui l'estabilitat, obtenint així controls fiables, és a dir, que mantenen estable el sistema sota perturbacions, en el sentit més ampli d'aquest terme. El mètode tradicional només té en compte el cas de fallada total. Aquest model assigna un nombre binari a cada controlador, donant una estructura dicotòmica al control (veure [26], [50]). Per a $i = 1, \dots, N$, es considera la funció

$$c_i = \begin{cases} 1, & \text{el control } i \text{ funciona} \\ 0, & \text{el control } i \text{ falla.} \end{cases}$$

Cal aclarir el concepte de funcionament: s'entén que el control u_i funciona quan cap part del subsistema i queda sense controlar, és a dir, es controlen tots els estats

del subsistema. El vector $c = (c_1, \dots, c_N)^T$ determina l'estat de tots els controladors, i per tant la fiabilitat de tot el sistema. S'assumeix que els controladors funcionen o fallen de manera aleatòria i independent. L'estat c_i del control i és una variable aleatòria amb llei de probabilitat

$$P(c_i = 1) = p_i = E(c_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

El valor p_i s'anomena fiabilitat del controlador i . Aquesta probabilitat segueix una llei de Bernouilli de paràmetre p_i . Si es considera que cada component del control u_i pot fallar de manera independent, obtenim un model més complex. Per a cada control u_i , considerem

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{la component } j \text{ del control } u_i \text{ funciona} \\ 0, & \text{la component } j \text{ del control } u_i \text{ falla,} \end{cases}$$

per a cada $j = 1, \dots, s_i$. Considerant la matriu de fallades $C_{s_i}^i = \text{diag}(c_{i1}, \dots, c_{is_i})$, s'adopta el model següent

$$u_i^F(t) = C_{s_i}^i u_i(t).$$

El vector $u_i^F(t)$ és el control després que hagin tingut lloc les fallades. Aleshores, es considera el sistema (1.6) i es treballa amb

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \Delta A_i x_i(t) + \Delta B_i u_i^F(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G_{ij} g_{ij}(t, x_j) \\ x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

El problema que es planteja és el de dissenyar un control tal que el sistema sigui estable per a tota matriu aleatòria C_{s_i} i per a qualsevol pertorbació admissible. Però aquest model només té en compte el cas *outage*. Per tal de considerar també els casos de fallada parcial, presentem un nou model de fallada que té en compte totes les possibilitats.

Model general de fallada

El model general que adoptem es basa en el donat en l'article [63], on es considera tant el cas de fallada total com parcial. Es defineix el control després de fallada com la suma de dos factors. El primer correspon a un escalar pel control u , que permet plantejar les fallades parcials. El segon terme és una funció desconeguda

però acotada, que depèn de la variable de control u , i fa possible considerar el cas d'*outage*.

En el nostre cas, com tractem sistemes interconnectats, tenim que els actuadors poden fallar de manera independent. Per tant, considerem aquest mateix model per a cada subsistema. Però encara més: tenim en compte la possibilitat que, per a un determinat subsistema S_i , fallin les components de l'actuador de manera independent, de manera parcial o total. Per tant, el model presentat en [63] és aplicat per a cada component j del vector u_{ij} , adaptant-ne les condicions al nostre cas, tal com mostra la Figura 1.7.

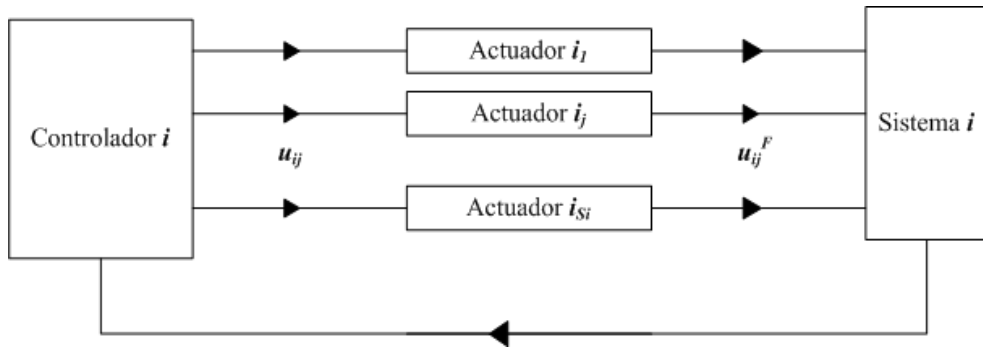


Figura 1.7: Model de fiabilitat

Considerem que el control, després de fallada, es troba en un entorn de fiabilitat, al voltant del valor exacte. Per això, expremem el control com un factor de u_i més un cert error. Per a $i = 1, \dots, N$, sigui doncs u_i^F el control després que l'actuador del sistema S_i hagi fallat:

$$u_i^F = \Lambda_i u_i + \phi_i(u_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.10)$$

sent la matriu $\Lambda_i = \text{diag}(\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{is_i}) \in \mathbb{R}^{s_i \times s_i}$ diagonal i definida positiva, és a dir,

$$\lambda_{ij} > 0, \quad \forall j = 1, \dots, s_i.$$

Aquest factor representa el percentatge de fallada de l'actuador j del controlador del sistema S_i , on cada component del control u_i falla independentment. D'atra banda, cada component de la funció $\phi_i(u_i) = (\phi_{i1}(u_{i1}), \dots, \phi_{is_i}(u_{is_i}))$ satisfà:

$$\phi_{ij}(u_{ij})^2 \leq \gamma_{ij}^2 u_{ij}^2, \quad (1.11)$$

on $\gamma_{ij} \geq 0$. D'aquesta relació obtenim la següent propietat sobre la funció $\phi_i(u_i)$:

$$\|\phi_i(u_i)\|^2 \leq \|\Gamma_i u_i\|^2, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.12)$$

on $\Gamma_i = \text{diag}(\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{is_i}) \in \mathbb{R}^{s_i \times s_i}$ és una matriu semidefinida positiva.

El factor λ_{ij} indica el percentatge de fallada permès en la realimentació del control, considerant que cada component del control u_i pot ser realimentada erròniament. Anem a veure que efectivament es contemplen tots els possibles casos de fallada:

- Si $\lambda_{ij} = 1$ i $\gamma_{ij} = 0$, obtenim que l'actuador j del sistema i no es troba modificat i per tant correspon al funcionament normal: $u_{ij}^F = u_{ij}$. Si aquest fet és cert per a tot j , resulta que $\Lambda_i = I_{s_i}$ i $\Gamma_i = 0$, i correspon al funcionament correcte de tot el controlador i ($u_i^F = u_i$).
- El cas de fallada total s'obté si $\gamma_{ij} = \lambda_{ij}$, ja que aleshores és possible que $\phi_{ij} = -\lambda_{ij}u_{ij}$ i aleshores $u_{ij}^F = 0$ i obtenim el cas d'*outage*. La Condició (1.11) contempla aquesta possibilitat. En general, quan $\phi_i(u_i) = -\Lambda_i u_i$, s'obté el cas de fallada total ($u_i^F = 0$) per l'actuador i .
- Pels altres valors de λ_{ij} i γ_{ij} , s'obtenen els casos de fallada parcial, tant a nivell de cada component j com a nivell de tot el canal i .

En les equacions (1.10)–(1.12), acabem de definir el model de fiabilitat o de fallada que usarem al llarg d'aquest treball.

1.5 Teoria H_∞

Sota la seva forma més simple, el problema H_∞ és un problema de reduït d'una pertorbació w . Se suposa que el senyal w és d'energia finita. El fet de tractar aquest tipus de problema, i no el problema H_2 , que sembla el més natural en el desenvolupament d'aquest treball, és degut a que el problema H_∞ tracta amb un tipus més general de pertorbació, plantejant-se el pitjor cas. En canvi, el problema H_2 tracta el cas de pertorbació tipus soroll blanc, amb covariància coneguda, fet que no és prou general. El problema H_∞ tracta el problema de minimitzar l'efecte produït per una pertorbació w sobre el comportament del sistema, i en particular sobre la sortida z . Per això, caldrà sintetitzar una llei de control que estudiï l'impacte de w sobre z , tot i mantenint estable el sistema. Aquest impacte es medeix

fent-ne el quocient de les seves normes. Per això cal definir aquesta norma, anomenada norma H_∞ , que representa l'increment màxim en energia, entre l'entrada i la sortida del sistema.

El control robust ha estat tractat en molt treballs, per exemple en [9], [22], [35]. En [11], es dona una sistematització del tractament del control robust sota tècniques LMI. Per exemple, en [38], s'apliquen les tècniques LMI per a resoldre un problema de control H_∞ per a una classe determinada de sistemes, mentre que en [27] es tracten els sistemes de transformació lineal fraccional (LFT). En el Capítol 9 fem una presentació més extensa d'aquesta teoria.

Aquí acabem el capítol introductori, on hem presentat els tres models diferents d'incerteses que contemplarem, el model de fiabilitat adoptat i els dos tipus de problema que considerarem: el problema del control descentralitzat fiable amb cost quadràtic garantit (control RGC) i el problema de comportament H_∞ .

Capítol 2

Inequacions lineals matricials

En aquest capítol presentem les tècniques anomenades en anglès *Linear Matrix Inequalities* (LMI) o inequacions matricials lineals. La utilitat de les tècniques LMI és la de convertir problemes de teoria de sistemes i teoria de control en problemes estàndards d'optimització convexa o quasiconvexa, on surten inequacions matricials lineals. L'avantatge és que aquests problemes es poden resoldre fàcilment per tècniques numèriques, en particular utilitzant el LMI Control Toolbox del programa Matlab. Aquest fet en fa la seva importància en sistemes amb incerteses. Primer farem una breu ressenya històrica, per passar després a presentar els resultats bàsics de la teoria LMI i com s'aplica en la teoria de control, en particular en sistemes interconnectats.

2.1 Introducció

L'aparició de les LMI en l'anàlisi de sistemes dinàmics es remonta a finals del segle XIX. La seva història comença en 1890, quan Lyapunov publica el seu treball on introdueix el que actualment s'anomena la teoria de Lyapunov. Se sap que per a sistemes determinats, Lyapunov va demostrar que l'equació diferencial

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) , \quad (2.1)$$

és estable en sentit Lyapunov si i només si existeix una matriu P , definida positiva, tal que es verifica la inequació de Lyapunov

$$A^T P + P A < 0 . \quad (2.2)$$

Lyapunov també va demostrar que aquesta LMI es pot resoldre de manera explícita. Ho va fer considerant una matriu $Q > 0$ simètrica i resolent l'equació

lineal en P : $A^T P + PA = -Q$. Aquesta matriu P serà definida positiva si el sistema (2.1) és estable. Per tant, la primera LMI usada per a estudiar l'estabilitat d'un sistema dinàmic va ser l'inequació de Lyapunov (2.2), que pot ser resolta analíticament mitjançant un conjunt d'equacions lineals.

En 1940 es va produir el següent resultat crucial. Lur'e, Postnikov, i altres investigadors de la Unió Soviètica, van aplicar els mètodes de Lyapunov a problemes pràctics específics de la teoria control en enginyeria. Es van dedicar especialment al problema d'estabilitat en sistemes de control sense linealitat en l'actuador. Encara que no van obtenir LMIs de manera explícita, els seus criteris d'estabilitat tenen la forma de LMIs. Aquestes inequacions van ser reduïdes a inequacions polinomials, que van resoldre a mà (per a dimensions petites). A pesar de tot, van entusiasmar-se en veure que es podia aplicar la teoria de Lyapunov a casos complexos i aplicats a l'enginyeria. Es considera que Lur'e i seu equip van ser els primers en aplicar els mètodes de Lyapunov a problemes pràctics de control en enginyeria. Les LMI resultants són resoltes analíticament, a mà, limitant la seva aplicació a sistemes d'ordre petit (segon o tercer ordre).

El següent resultat important va sorgir a principis de 1960. En aquells anys, Yakubovich, Popov i Kalman van aconseguir reduir la solució de les LMI del problema de Lur'e en un criteri gràfic, usant el que ara es coneix com el Lema real positiu (PR). Aquest resultat té altres noms: criteri de Popov, criteri del cercle, criteri de Tsykin. Aquest criteri es pot aplicar a sistemes d'ordre major, però no pot ser extès de manera útil a sistemes que continguin no linealitats. El Lema PR i corollaris van ser estudiats de manera exhaustiva en la segona meitat dels anys 60. Se'n va veure la seva relació amb el criteri de guany petit (introduït per Zames i Sandberg) i control òptim quadràtic, que és justament el tema d'aquest treball. Va ser sobretot Yakubovich ([62]) qui va veure la importància de les tècniques LMI en teoria del control. Cap a 1970, se sabia que les LMI que surten en el Lema PR poden ser resoltes no només gràficament, sino també resolent una certa equació algebraica de Riccati (ARE). En 1971, Willems presenta un treball on estudia la LMI següent

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB + C^T \\ B^T P + C & R \end{bmatrix} \geq 0 ,$$

i apunta que es pot solucionar estudiant les solucions simètriques de l'ARE:

$$A^T P + PA - (PB + C^T)R^{-1}(B^T P + C) + Q = 0 ,$$

que, a la seva vegada, es pot resoldre fent una descomposició segons els valors propis de certa matriu hamiltoniana. Aquesta connexió, però, ja va ser trobada en l'Unió Soviètica anys abans, on l'equació ARE era anomenada equació resolvent de Lur'e.

Als voltants de 1971, els investigadors coneixien diversos mètodes per a resoldre tipus determinats de LMI: mètodes directes (dimensió petita), mètodes gràfics o bé resolent les equacions de Lyapunov o de Riccati. Aquests mètodes són considerats mètodes analítics o propers a analítics que es poden usar per a determinades LMI. En aquest sentit, molts investigadors i enginyers consideren que l'equació de Riccati té solució analítica, ja que els algorismes estàndards que la solucionen són robustos. L'esforç per a solucionar Riccati depèn quasi per complet de la dimensió del problema i no tant de les dades particulars del problema en concret. Però si el sistema és de dimensió 5 o major, no pot resoldre's de manera exacta en un nombre finit de passos.

El resultat que marca un punt d'inflexió en l'ús de les LMIs es pot resumir en la següent observació: les inequacions lineals matricials que apareixen en la teoria de sistemes i de control poden ser formulades com un problema d'optimització convexa, que a la seva vegada pot ser abordat numèricament. Molts autors van observar que aquesta afirmació permet resoldre LMIs de les quals no es pot trobar una solució analítica, en el sentit anterior. Pyatnitskii i Srodinskii van ser possiblement els primers en adonar-se'n. Van reduir el problema original de Lur'e (extès al cas de no linealitats múltiples) a un problema d'optimització convexa involucrant LMIs, que es poden resoldre aleshores usant l'algorisme el·líptic (aquest problema ja va ser tractat abans, però les solucions involucraven matrius escalars arbitràries). Pyatnitskii i Skorodinskii van ser els primers, que se sàpiga, en formular la cerca de la funció de Lyapunov com un problema d'optimització convexa i aplicar aleshores un algorisme que garanteixi la resolució del problema. També s'han de mencionar altres precursors. En 1976, Horisberger i Belanger ([17]) van escriure un article on veien que l'existència d'una funció quadràtica de Lyapunov, que dóna l'estabilitat de sistemes lineals, és un problema convex on apareixen LMIs. De fet, la idea de trobar una solució numèrica de la funció de Lyapunov ja va ser tractada en 1965 per Schultz.

L'últim capítol d'aquesta història és relativament recent i de gran aplicació: el desenvolupament dels mètodes del punt interior per a resoldre LMIs que sorten

en teoria de sistemes i de control (veure annex B). En 1984, Karmarkar [21] va introduir un nou algorisme lineal que resol program lineals, com el mètode el·líptic, molt més eficient a la pràctica. Essencialment, el seu treball de recerca se centra en algorismes per a program lineals i quadràtics (convexos). En 1988, Nesterov i Nemirovsky [32], van desenvolupar el mètode del punt interior que van aplicar directament a problemes convexos on intervenien LMIs, i en particular, a problemes que treballarem en aquest treball. Van demostrar que els mètodes del punt interior per a programació lineal podien ser extesos a problemes d'optimització convexa. L'element clau és el coneixement de la funció barrera verificant la propietat anomenada *self-concordance*. Les inequacions lineals matricials són una classe important de restriccions convexes, per a les quals aquestes funcions són conegudes. El treball de Nesterov i Nemirovsky ofereix un mètode simple per a resoldre força problemes d'optimització convexa (veure [33], [56]).

Aquests últims anys, la teoria LMI ha aparegut en molts camps de la teoria de control. Per exemple, en [31] es treballen les tècniques LMIs en el context de sistemes amb retard i pertorbacions en la matriu de guany. En [37], s'usen les LMIs per a resoldre el problema del filtre robust per a sistemes neurals amb incerteses. Finalment, en [61], es fa un ús de les LMIs per a dissenyar el control amb cost garantit per a sistemes amb retard i incerteses. El problema de cost garantit també es tracta en sistemes discrets, així com les tècniques LMI ([43], [66], [64]). En els últims anys, també es treballen amb tècniques de xarxes neuronals ([20]).

Es pot dir que Yakubovich és el pare d'aquest camp d'investigació, mentre que Lyapunov n'és l'avi.

2.2 Definicions

En aquest apartat fem una introducció general a la teoria de les inequacions lineals matricials. Els resultats i definicions exposats a continuació es troben en [7], [13] i [47]. D'entre les definicions, cal destacar els complements de Schur, que permeten relacionar una equació matricial quadràtica (per exemple, de tipus Riccati) amb una LMI. Els algorismes usats habitualment són els mètodes del punt interior, el mètode dual del punt interior i els mètodes no diferenciables (veure annex B). El software existent és ampli, però en aquest treball utilitzem el paquet LMI Control Toolbox del programari Matlab (veure [13]).

Definició 2.1 (LMI [47]). Una inequació matricial lineal té la forma següent:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (2.3)$$

on $x \in \mathbb{R}^m$ és la variable. Per a cada $i = 1, \dots, m$, $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ són matrius simètriques.

Recordem que la matriu $F(x)$ és definida positiva si per a tot $u \neq 0$, $u^T F(x)u > 0$, o bé si els menors principals de $F(x)$ són positius (veure Definició 1.2). També es considera LMI si la inequació (2.3) no és estricta.

La inequació (2.3) s'entén com un sistema de n inequacions polinomials en x . El conjunt $F_c = \{x \in \mathbb{R}^n | F(x) > 0\}$ és convex ja que verifica que, per a qualsevol $x, y \in F_c$, i qualsevol $\theta \in [0, 1]$, es té que $\theta x + (1 - \theta)y \in F_c$. En efecte,

$$\begin{aligned} F(\theta x + (1 - \theta)y) &= \\ &= F_0 + \sum_{i=1}^m (\theta x_i + (1 - \theta)y_i) F_i \\ &= F_0 + \theta \sum_{i=1}^m x_i F_i + (1 - \theta) \sum_{i=1}^m y_i F_i \\ &= \theta(F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i) + (1 - \theta)(F_0 + \sum_{i=1}^m y_i F_i) > 0, \end{aligned}$$

ja que $\theta > 0$, $1 - \theta > 0$ i $F_0 = \theta F_0 + (1 - \theta)F_0$.

Definició 2.2 (Sistema LMI [47]). Un sistema de inequacions matricials lineals és un conjunt format per p inequacions lineals matricials:

$$F^{(1)}(x) > 0, \dots, F^{(p)}(x) > 0.$$

De fet, si considerem la matriu $\text{diag}(F^{(1)}(x), \dots, F^{(p)}(x)) > 0$, s'obté una única LMI. Un altre tipus de LMI és el format per una combinació paramètrica de LMIs (PLMIs). Considerem el símplex Π definit en l'Apartat 1.1.3:

$$\Pi = \left\{ \sum_{k=1}^L \alpha_k = 1, \alpha_k \geq 0, k = 1, \dots, L \right\}.$$

Definim a continuació la combinació politòpica de LMIs (PLMI).

Definició 2.3 (PLMI [4]). Sigui $\mathcal{L}_k(P)$ una LMI respecte P . Aleshores,

$$\sum_{k=1}^L \alpha_k \mathcal{L}_k(P) < 0, \forall \alpha \in \Pi \Leftrightarrow \mathcal{L}_k(P) < 0, k = 1, \dots, L.$$

Una propietat important de les inequacions lineals és que es poden incorporar restriccions afins. Considerem el subconjunt afí de \mathbb{R}^m definit per $\mathcal{M} = x_0 + \mathcal{M}_0$. El problema de trobar $x \in \mathcal{M}$ solució de $F(x) > 0$, és equivalent a resoldre $\bar{F}(\bar{x}) > 0$, on $\bar{x} = x - x_0$. Per tant, en afegir una restricció de tipus afí en la LMI, seguim tenint una LMI.

Una altra propietat és que les inequacions no lineals convexes es converteixen en una LMI usant els complements de Schur.

Lema 2.1 (Complements de Schur). Considerem la matriu simètrica

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{pmatrix}.$$

Si P_1 és invertible, el complement de Schur de P_1 en P és $S = P_3 - P_2^T P_1^{-1} P_2$. Aleshores,

1. $P > 0 \Leftrightarrow P_1 > 0$ i $S > 0$.
2. Si $P_1 > 0$, aleshores $P \geq 0 \Leftrightarrow S \geq 0$.
3. Considerem el complement de P_3 en P , que és $\bar{S} = P_1 - P_2 P_3^{-1} P_2^T$, sent P_3 invertible. Aleshores, es té que $P > 0 \Leftrightarrow P_3 > 0$ i $\bar{S} > 0$.

Els complements de Schur són certs per a matrius simètriques definides negatives. És a dir, si P_3 és invertible, aleshores $P < 0$ si i només si $P_3 < 0$ i $\bar{S} < 0$.

Demostració. D'una banda, per a qualsevol matriu F , la matriu P verifica

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} Id & -F \\ 0 & Id \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Id & F \\ 0 & Id \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} Id & F \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & -F \\ 0 & Id \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} Id & -F \\ 0 & Id \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_1 & P_1 F + P_2 \\ F^T P_1 + P_2^T & F^T P_1 F + F^T P_2 + P_2^T F + P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & -F \\ 0 & Id \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que és definida positiva si ho és la matriu central. Per tant,

$$P > 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P_1 & P_1F + P_2 \\ F^T P_1 + P_2^T & F^T P_1 F + F^T P_2 + P_2^T F + P_3 \end{pmatrix} > 0 .$$

Agafant $F = -P_1^{-1}P_2$, obtenim

$$P > 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} > 0 ,$$

que es verifica si i només si $P_1 > 0$ i $S > 0$. Per tant, hem obtingut que $P > 0 \Leftrightarrow P_1 > 0$ i $S > 0$, que és el que volíem demostrar. \square

Per tant, una LMI no lineal:

$$Q(x) - R(x)W(x)^{-1}R(x)^T > 0 ,$$

es converteix en una de lineal:

$$\begin{pmatrix} Q(x) & R(x) \\ R^T(x) & W(x) \end{pmatrix} > 0 , \quad (2.4)$$

sempre i quan $W(x) > 0$, amb $Q(x)$ i $W(x)$ simètriques i $R(x)$ una funció afí en x . A continuació presentem tres problemes tipus on s'usen les tècniques LMI.

Exemple 2.1. Suposem que volem calcular els valors de x que verifiquen que $\|Z(x)\| < 1$, amb $Z(x) \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Aquesta desigualtat serà certa si i només si $Id - Z(x)Z^T(x) > 0$. Considerant $W(x) = Q(x) = Id > 0$ simètriques en (2.4), s'obté una LMI equivalent:

$$\|Z(x)\| < 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Id & Z(x) \\ Z^T(x) & Id \end{pmatrix} > 0 .$$

Exemple 2.2. Una restricció del tipus $c(x)^T P^{-1}(x)c(x) < 1$, amb les condicions $P(x) > 0$ simètrica i $c(x) \in \mathbb{R}^n$, pot convertir-se en

$$P^{-1} < (c^T)^{-1}c^{-1} = (cc^T)^{-1} \Leftrightarrow cc^T < P \Leftrightarrow P - cc^T > 0 ,$$

on per estalvi de notació, hem eliminat la dependència en x .

Aplicant el complement de Schur a $P_1 = 1 > 0$, $P_2 = c$ i $P_3 = P$, s'obté

$$c^T P^{-1}c < 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & c \\ c^T & P \end{pmatrix} > 0 .$$

Exemple 2.3. Per a resoldre la restricció $tr(R^T P^{-1} R) < 1$, on la matriu $P > 0$ és simètrica, s'introdueix una matriu X simètrica, obtenint aleshores una LMI en les variables P i X

$$tr(X) < 1, \quad \begin{pmatrix} X & R^T \\ R & P \end{pmatrix} > 0. \quad (2.5)$$

En efecte,

$$\begin{pmatrix} X & R^T \\ R & P \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ X - R^T P^{-1} R > 0. \end{cases}$$

Tenim que $P > 0$ per hipòtesi. D'altra banda, si $X - R^T P^{-1} R > 0$, aleshores

$$R^T P^{-1} R < X \Rightarrow tr(R^T P^{-1} R) < tr(X) < 1 \quad (\text{per suposició}).$$

Per tant, el problema de trobar $P > 0$ tal que $tr(R^T P^{-1} R) < 1$ es transforma en trobar X i $P > 0$ tals que verifiquen (2.5).

2.3 Teoria del control i LMI

En aquest apartat presentem dues de les inequacions més bàsiques en teoria del control, que tenen la seva expressió equivalent en termes LMI.

2.3.1 Inequació de Lyapunov

Considerem la inequació de Lyapunov $A^T P + P A < 0$, on $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és la matriu incògnita i $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és coneguda. Per a expressar-la com LMI, construïm una base per P . Escollim P_1, \dots, P_m base de les matrius simètriques $n \times n$, on $m = \frac{n(n+1)}{2}$. En aquest cas, $P = \sum_{i=1}^m x_i P_i$ on x_i són les components incògnites de P .

Es defineix aleshores $F_0 = 0$, $F_i = -A^T P_i - P_i A$. D'on:

$$A^T P + P A = \sum_i x_i (A^T P_i + P_i A) < 0 \Leftrightarrow F_0 + \sum_i x_i F_i > 0,$$

on les matrius F_i són simètriques

$$F_i^T = (-A^T P_i - P_i A)^T = -P_i^T A - A^T P_i = F_i, \quad \text{ja que } P_i = P_i^T.$$

Si a més a més de la inequació es té una restricció lineal, per tal d'obtenir l'expressió en LMI s'imposa aquesta restricció en la base de l'espai de P . Per exemple, suposem que tenim el problema de trobar $P > 0$ tal que $A'P + PA < 0$ i $\text{tr}(P) = 1$. Es considera aleshores la base P_1, \dots, P_m de les matrius simètriques $n \times n$ amb traça nul·la, on ara $m = \frac{n(n+1)}{2} - 1$. Hem de fixar certa matriu P_0 simètrica $n \times n$ de traça 1. Cal tenir present que es té llibertat per a escollir aquestes matrius P_i . Aleshores, si $P = \sum_{i=0}^m x_i P_i$, es té que

$$F_i = \begin{pmatrix} P_i & 0 \\ 0 & -A'P_i - P_iA \end{pmatrix}, \quad i = 0, \dots, m,$$

d'on la LMI corresponent serà $F(x) = F_0 + \sum_i x_i F_i = -A'P - PA > 0$. De fet, es considera LMI a la inequació junt amb la restricció.

2.3.2 Inequació de Riccati

Sigui la inequació matricial de Riccati quadràtica $A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0$, amb $A, B, Q = Q^T$ i $R = R^T > 0$ donades i $P = P^T$ incògnita. Per Schur, veiem que la LMI equivalent és

$$F(P) = \begin{pmatrix} -A^T P - PA - Q & PB \\ B^T P & R \end{pmatrix} > 0,$$

que serà definida positiva si $R > 0$ i $-A^T P - PA - Q - PBR^{-1}B^T P > 0$. La primera condició es té per hipòtesi. I la segona és equivalent a l'equació inicial. La LMI $F(P) > 0$ també es pot expressar com

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + Q & PB \\ B^T P & -R \end{pmatrix} < 0.$$

Aquest resultat indica que els problemes de control basats en Riccati es poden resoldre usant les tècniques LMI. De fet, també permet veure que la inequació de Riccati és convexa en P . En efecte, anem a veure que la LMI equivalent és convexa. Sigui doncs $\alpha > 0$ i $P = P^T$ i $\bar{P} = \bar{P}^T$ tals que $F(P) > 0$ i $F(\bar{P}) > 0$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
F(\alpha P + (1 - \alpha)\bar{P}) &= \\
&= \begin{pmatrix} -A^T(\alpha P + (1 - \alpha)\bar{P}) - (\alpha P + (1 - \alpha)\bar{P})A - Q & (\alpha P + (1 - \alpha)\bar{P})B \\ B^T(\alpha P + (1 - \alpha)\bar{P}) & R \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(-A^T P) + (1 - \alpha)(-A^T \bar{P}) - \alpha P A + (1 - \alpha)\bar{P} A - \alpha Q - (1 - \alpha)Q & | \\ B^T \alpha P + (1 - \alpha)B^T \bar{P} & | \\ & | \alpha P B + (1 - \alpha)\bar{P} B \\ & | \alpha R + (1 - \alpha)R \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aleshores,

$$F(\alpha P + (1 - \alpha)\bar{P}) = \alpha F(P) + (1 - \alpha)F(\bar{P}) > 0.$$

Per tant, el conjunt $\{F(P) > 0\}$ és convex en P .

2.4 Classes de problemes LMI

Com la inequació lineal matricial $F(x) > 0$ defineix una restricció convexa en x , els problemes d'optimització que involucren la minimització o maximització d'una funció $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, amb $\mathcal{S} = \{x/F(x) > 0\}$, pertanyen a la classe de problemes d'optimització convexa. Suposem que $F, G, H, V : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{S}$ són funcions afins. Existeixen tres tipus genèrics de problemes relacionats amb l'estudi de les LMIs (veure [47], [56]).

1. Viabilitat (*feasibility*): Correspon al test per a veure si existeix o no solució de $F(x) > 0$. La LMI s'anomena viable si existeix $x \in \mathbb{V}$ que verifica aquesta inequació. En cas contrari, $F(x) > 0$ no és viable (*infeasible*). El problema d'estudiar quan un sistema format per N interconnectats és estable, correspon a aquest tipus de problemes LMI.
2. Optimització: Sigui $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, on $\mathcal{S} = \{x/F(x) > 0\}$. El problema d'optimització amb restricció LMI és el de determinar:

$$S_{opt} = \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x).$$

La resolució d'aquest problema requereix determinar S_{opt} i, per a $\epsilon > 0$ qualsevol, calcular almenys una solució òptima x que satisfagi $x \in \mathcal{S}$ amb:

$$S_{opt} \leq f(x) \leq S_{opt} + \epsilon .$$

El problema de cost garantit correspon a aquesta classe de problema LMI, ja que cal minimitzar la cota del cost respecte totes les solucions estabilitzadores.

Un problema molt habitual és el problema de minimitzar una funció lineal subjecte a una inequació lineal matricial, que s'anomena *semidefinite programming* (SDP):

$$\begin{aligned} & \text{minimitzar } b^T y \\ & \text{subjecte a } F(y) \leq 0 . \end{aligned}$$

3. Problema generalitzat del valor propi: Cal trobar el mínim escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ verificant les restriccions:

$$\begin{cases} \lambda F(x) - G(x) > 0 \\ F(x) > 0 \\ H(x) > 0 . \end{cases}$$

2.5 Eines per a obtenir LMIs

En aquest apartat presentem els resultats que permeten obtenir l'expressió LMI d'inequacions matricials generals. Ja hem presentat una eina: els complements de Schur, definits en l'Apartat 2.1. També tenim els lemes de projecció, que permeten identificar una inequació no lineal amb una LMI.

Lema 2.2 (Lema de projecció [54]). *Donada la matriu Ψ simètrica i matrius P i Q , existeix X tal que es verifica la següent equivalència:*

$$\Psi + P^T X^T Q + Q^T X P < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{N}_P^T \Psi \mathcal{N}_P < 0 \\ \mathcal{N}_Q^T \Psi \mathcal{N}_Q < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

sent \mathcal{N}_P i \mathcal{N}_Q bases qualssevol dels subespais P i Q , respectivament.

També necessitem aplicar una modificació d'aquest Lema de projecció (2.2), pel cas de desigualtat major o igual.

$$\text{Si } \psi + P^T X^T Q + Q^T X P \geq 0 \text{ té solució } \Rightarrow \begin{cases} W_P^T X W_P \geq 0 \\ W_Q^T X W_Q \geq 0 \end{cases} .$$

En efecte, com $PW_P = 0$, resulta que:

$$W_P^T(\psi + P^T X^T Q + Q^T X P)W_P^T = W_P^T \Psi W_P ,$$

i per tant $W_P^T X W_P \geq 0$. De la mateixa manera es veu que $W_Q^T X W_Q \geq 0$, usant en aquest cas que $QW_Q = 0$.

Lema 2.3 (Lema de projecció recíproc [54]). *Per a tota matriu $P > 0$, tenim que $\Psi + S + S^T < 0$ si i només si existeix W tal que*

$$\begin{pmatrix} \Psi + P - (W + W^T) & S^T + P^T \\ S + W & -P \end{pmatrix} < 0 . \quad (2.7)$$

La variable W afegeix flexibilitat en la resolució del problema, al no trobar-se multiplicant les dades.

2.5.1 Procediment S

El mètode anomenat procediment S (*S-Procedure*) transforma una restricció quadràtica d'un problema resoluble en un problema lineal resoluble, afegint variables auxiliars. Siguin les matrius simètriques donades $\{Q_i\}_{i=1,\dots,L}$. Considerem les funcions quadràtiques $F_i(x) = x^T Q_i x$. Aleshores, ens plantegem resoldre el problema de trobar x tal que $F_0(x) < 0$ sobre $F_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, L$. Aquesta teoria assegura que aquest problema té solució sempre i quan existeixin escalars s_i tals que

$$F_0(x) - \sum_{i=1}^L s_i F_i(x) < 0 ,$$

o bé, en notació LMI:

$$Q_0 - \sum_{i=1}^L s_i Q_i < 0 .$$

Els escalars s_i són les noves variables auxiliars.

Considerem, per exemple, les matrius $\Psi = \Psi^T$, N i M i suposem que hem de determinar si, per a tot x no nul, es verifica

$$x^T(\Psi + N^T \Delta^T M + M^T \Delta N)x < 0 ,$$

per a tot Δ tal que $\|\Delta\| \leq 1$. Considerem $p = \Delta Nx$. Aleshores,

$$x^T \Psi x + p^T M x + x^T M^T p < 0 \Leftrightarrow (x^T, p^T) \begin{pmatrix} \Psi & M^T \\ M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} < 0. \quad (2.8)$$

D'altra banda, com $\|\Delta\| \leq 1$, tenim $p^T p \leq x^T N^T N x$. Per tant, cal que es verifiqui (2.8) sota la condició $p^T p - x^T N^T N x \leq 0$, per a tot $(x, p) \neq (0, 0)$. Per tant, aquest és un problema al qual se li pot aplicar la S-procedure, amb

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \Psi & M^T \\ M & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} -N^T N & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix},$$

d'on obtenim que cal trobar el valor de les variables auxiliars $\lambda > 0$ tal que

$$\begin{pmatrix} \Psi & M^T \\ M & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -N^T N & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} < 0, \\ \begin{pmatrix} \Psi + \lambda N^T N & M^T \\ M & -\lambda Id \end{pmatrix} < 0.$$

Aquesta és una LMI, que té solució en λ . Aquest tipus de tècnica s'usa per a sistemes amb incerteses normades.

2.5.2 Multiconvexitat

Aquesta teoria permet convertir LMIs que depenen de paràmetres en un sistema de LMIs independents paramètricament. És una condició menys restrictiva que la convexitat i només imposa que la diagonal del hessià d'una funció $f(\alpha_1, \dots, \alpha_L)$ sigui no negativa. S'usa en sistemes que depenen politòpicament dels paràmetres (veure Apartats 1.1.2 i 1.1.3). Cada α_k pertanyen a un interval donat de \mathbb{R}

$$\alpha_k \in [\underline{\alpha}_k, \bar{\alpha}_k], \quad k = 1, \dots, L.$$

Considerem ara el conjunt dels vèrtexs d'aquests intervals:

$$V = \{v \in \mathbb{R}^L, v_k \in \{\underline{\alpha}_k, \bar{\alpha}_k\}, k = 1, \dots, L\}.$$

Ens centrem en el cas en que els paràmetres $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_L)^T$ són constants ($\dot{\alpha} \equiv 0$). Sigui la següent funció de segon ordre en $\alpha \in \mathbb{R}^L$, on a_k, b_k, c_k són coeficients reals donats:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_L) = a_0 + \sum_{k=1}^L a_k \alpha_k + \sum_{k=1, k < j}^L b_{kj} \alpha_k \alpha_j + \sum_{k=1}^L c_k \alpha_k^2.$$

Aleshores, definim la multiconvexitat de la següent manera.

Definició 2.4 (Multiconvexitat [3]). La funció real $f(\alpha)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}^L$, és multiconvexa si existeixen les seves derivades parcials segones i veriquen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_k^2}(\alpha) = 2c_k \geq 0 \quad , \quad k = 1, \dots, L .$$

Aleshores, tenim que una funció multiconvexa és definida negativa si ho és en els seus vèrtexs. És a dir, si considerem $\text{co}(V)$ com el conjunt de les combinacions convexes sobre V , tenim que

$$f(\alpha) < 0 \text{ en } \text{co}(V) \Leftrightarrow f(v) < 0 \text{ , } \forall v \in V .$$

Sigui el sistema lineal amb incerteses paramètriques

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) \text{ , } x(0) = x_0 \text{ ,} \quad (2.9)$$

amb $A(\alpha) = A_0 + \sum_{k=1}^L \alpha_k A_k$. Considerem la funció de Lyapunov politòpica

$$V(x, \alpha) = x^T(t)P(\alpha)x(t) \text{ ,}$$

on $P(\alpha) = P_0 + \sum_{k=1}^L \alpha_k P_k$. Per tal que sigui funció de Lyapunov, cal que es verifiqui que $V(x, \alpha) > 0$ i $\frac{d}{dt}V(x, \alpha) < 0$. De la primera condició, treiem que $P(\alpha) > 0$, mentre que de la segona condició, tenim que:

$$A^T(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0 .$$

D'aquestes condicions, usant la definició de multiconvexitat, obtenim el següent concepte d'estabilitat quadràtica afí (AQS).

Definició 2.5 ([12]). El sistema (2.9) és quadràticament estable i afí si existeix $V(x, \alpha)$ funció de Lyapunov associada al sistema.

Tenint en compte les caracteritzacions anteriors, s'enuncia el següent lema.

Lema 2.4 ([12]). Sigui el sistema (2.9). Si A_0 estable i existeixen matrius definides positives P_0, \dots, P_L tals que

1. $A(v)^T P(v) + P(v)A(v) < 0 \text{ , } v \in V$
2. $A_k^T P_k + P_k A_k \geq 0 \text{ , } k = 1, \dots, L$,

aleshores el sistema és AQS amb funció de Lyapunov

$$V(x, \delta) = x(t)^T \left(P_0 + \sum_{k=1}^L \alpha_k P_k \right) x(t) .$$

Demostració. Per tal que $V(x, \alpha)$ sigui funció de Lyapunov, cal que $V > 0$. Això és cert ja que si A_0 és estable, existeix $V_0 = x^T P_0 x$ tal que $V_0 > 0$. Per tant, al voltant de P_0 , la funció es manté positiva, tenint que $P(\alpha) > 0$. La segona condició que ha de verificar és: $f(\alpha) = A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) < 0$. Per la hipòtesi 2 d'aquest lema, comprovem que és multiconvexa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \delta^2} = 2 \sum_{k=1}^L (A_k^T P_k + P_k A_k) \geq 0 .$$

Per tant, $f(\alpha) < 0 \Leftrightarrow f(v) < 0$, sent v vèrtex del politop del paràmetre α . La inequació $f(v) < 0$ ve donada per la hipòtesi 1 del lema. Acaba així la demostració. \square

En aquest apartat no hem tractat el cas de paràmetres dependents del temps ja que no l'hem considerat en el nostre problema. Aquí acabem el capítol, on hem fet una breu ressenya històrica i una presentació dels resultats principals de la teoria de les inequacions lineals matricials.

Capítol 3

Caracterització LMI

En aquest capítol presentem el primer resultat central d'aquest treball. Es tracta de donar l'equivalència entre una inequació matricial no lineal i una LMI. Això s'aconsegueix introduïnt certes variables matricials que separen els termes quadràtics. Utilitzarem aquest resultat en els casos d'incerteses convexes i polítòpiques, però no en el cas d'incerteses normades, ja que en aquest cas aprofitarem les cotes de les incerteses. Primer presentem els resultats més rellevants existents a la literatura fins a l'actualitat, per després passar a exposar els resultats que permeten establir una equivalència entre inequacions lineals i no lineals.

3.1 Introducció

En aquest apartat presentem els resultats en que ens basem per deduir el nostre teorema. Es tracta dels enunciats de dos teoremes que donen l'equivalència entre determinades inequacions lineals no lineals, típiques en teoria de control, i inequacions matricials. Les demostracions d'aquests teoremes es poden trobar en els articles [4] i [54], i es basen en l'aplicació dels lemes de projecció 2.2 i de projecció recíproc 2.3. Com veurem, aquests resultats són especialment útils quan les incerteses dels sistemes són convexes, així com quan es treballa amb funcions de Lyapunov paramètriques.

Teorema 3.1 ([4]). *Per a matrius X i Y simètriques, i matrius qualssevol W i V matrius, les següents afirmacions són equivalents:*

- (i) *El sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ és estable;*

(ii) Existeix X simètrica tal que:

$$\begin{pmatrix} A^T X + X A & 0 \\ 0 & -X \end{pmatrix} < 0;$$

(iii) Existeixen Y simètrica, W tals que:

$$\begin{pmatrix} Y - (W + W^T) & AY + W^T \\ YA^T + W & -Y \end{pmatrix} < 0;$$

(iv) Existeixen X simètrica, V tals que:

$$\begin{pmatrix} -(V + V^T) & V^T A + X & V^T \\ A^T V + X & -X & 0 \\ V & 0 & -X \end{pmatrix} < 0.$$

Els avantatges d'aquest teorema és que els termes AY i YA^T estan separats per la matriu W . Desapareix el terme clàssic $XA + A^T X$, és a dir, la variable X que busquem no es troba multiplicada per la matriu d'estat A . La resolució és més feixuga ja que s'introdueix una nova variable V , però tot i així és avantatjós ja que comporta una reducció del conservadurisme del mètode tradicional. Anem a veure a continuació la millora que comporta aquesta separació. Per això, ens fixarem en un cas particular de sistema. Considerem el sistema lineal amb incerteses convexes

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) = \sum_{k=1}^L \alpha_k A_k x(t), \quad (3.1)$$

on $\alpha_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^L \alpha_k = 1$. La matriu $A(\alpha)$ és una combinació convexa de $\{A_k\}_{k=1,\dots,L}$.

Volem estudiar l'estabilitat d'aquest sistema. El mètode clàssic usa una funció de Lyapunov $V(x, t) = x^T P x$. Però aquest tipus de funció no sempre permet veure l'estabilitat del sistema. Hi han casos on no és evident com definir la funció de Lyapunov associada, mentre que si es considera una funció paramètrica

$$V(x, \alpha) = x(t)^T X(\alpha)x(t) = \sum_{k=1}^L x(t)^T \alpha_k X_k x(t),$$

aquesta classe de funció de Lyapunov sí que permet demostrar l'estabilitat del sistema paramètric. Així doncs, considerem aquest cas general de funció de Lyapunov paramètrica. Tenim doncs que el sistema (3.1) és estable si existeix una funció de Lyapunov paramètrica $V(x, \alpha)$ associada al sistema. Usant el Teorema 3.1, tenim que existeixen matrius $X(\alpha)$ simètriques i matrius V tals que

$$\begin{pmatrix} -(V + V^T) & * & * \\ A^T(\alpha)V + X(\alpha) & -X(\alpha) & * \\ V & 0 & -X(\alpha) \end{pmatrix} < 0. \quad (3.2)$$

És important ressaltar que si la funció de Lyapunov és paramètrica, aquesta inequació és lineal en el paràmetre α , així com en la variable matricial $X(\alpha)$. Per tant, tenint en compte que $\sum_{k=1}^L \alpha_k = 1$ i expressant $A(\alpha)$ i $X(\alpha)$ respecte el seu conjunt convex associat, (3.2) és equivalent al sistema LMI

$$\begin{pmatrix} -(V + V^T) & * & * \\ A_k^T V + X_k & -X_k & * \\ V & 0 & -X_k \end{pmatrix} < 0, \quad k = 1, \dots, L. \quad (3.3)$$

Fixem-nos que la matriu V és comuna a totes les LMIs.

Per tant, el sistema (3.1) és estable si i només si existeixen matrius $X_k > 0$ simètriques, $k = 1, \dots, L$, i V tals que fan viable (3.3). Separant la matriu (3.3) com a suma d'una matriu en X_k més una matriu contenint V i aplicant després el Lema de projecció 2.2, s'obté que (3.3) és equivalent a

$$A_k^T X_k + X_k A_k < 0, \quad (3.4)$$

per a cada $k = 1, \dots, L$. Aquesta és la condició que ha de verificar la funció $V(x, \alpha)$ per a ser de Lyapunov. Normalment s'usa una funció de Lyapunov $\bar{V}(x) = x(t)^T X x(t)$, obtenint la condició següent

$$A_k^T X + X A_k < 0.$$

Que aquesta funció sigui menys conservadora que la funció paramètrica queda comprovat per exemples numèrics, on determinats sistemes són estables per a $V(x, \alpha)$, però no es pot establir estabilitat amb una funció de Lyapunov de la

forma $\bar{V}(x)$ (veure [4]). Com a conseqüència de (3.3), en [4], s'obté un resultat per al problema de control realimentat per l'estat. Sigui el sistema paramètric $\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t)$. Busquem el control $u(t) = Kx(t)$ tal que fagi estable aquest sistema. Introduïnt una nova variable $N := KV$, cal trobar les matrius $Y_k > 0$, V i N que fan viable el sistema LMI

$$\begin{pmatrix} -(V + V^T) & * & * \\ A_k^T V + Y_k + B_k N & -Y_k & * \\ V & 0 & -Y_k \end{pmatrix} < 0, \quad k = 1, \dots, L. \quad (3.5)$$

La funció de Lyapunov està definida per $V(x, \alpha) = \sum_{k=1}^L x(t)^T \alpha_k Y_k^{-1} x(t)$.

Abans de generalitzar aquest resultat al cas de sistemes interconnectats, enunciem el teorema definit en [54], que presenta una nova equivalència entre inequacions matricials.

Teorema 3.2 ([54]). *Existeix $X > 0$ solució de*

$$\begin{pmatrix} A^T X + X A & * & * \\ B^T X & Q_{11} & * \\ C & Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix} < 0, \quad (3.6)$$

si i només si existeix un escalar $\mu > 0$ tal que la següent LMI és resoluble respecte V i X

$$\begin{pmatrix} -(V + V^T) & * & * & * & * \\ A^T V + X & -\mu X & * & * & * \\ B^T V & 0 & Q_{11} & * & * \\ 0 & C & Q_{12}^T & Q_{22} & * \\ V & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} X \end{pmatrix} < 0. \quad (3.7)$$

De fet, (3.7) és una generalització de les inequacions del Teorema 3.1. Comparada amb la inequació (3.6), l'avantatge de (3.7) és que la variable de Lyapunov X no es troba multiplicant les matrius donades A i B , que contenen la informació del sistema. Aquest fet aporta una major llibertat a l'hora d'usar diferents variables de Lyapunov segons les especificacions del problema. La inequació (3.7) no és

lineal en μ , que és un paràmetre de disseny.

Si tenim un sistema convex, en virtut de $\sum_{k=1}^L \alpha_k = 1$, la inequació (3.7) es converteix en L inequacions matricials

$$\begin{pmatrix} -(V + V^T) & * & * & * & * \\ A_k^T V + X_k & -\mu X_k & * & * & * \\ B_k^T V & 0 & Q_{11} & * & * \\ 0 & C & Q_{12}^T & Q_{22} & * \\ V & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} X_k \end{pmatrix} < 0, \quad k = 1, \dots, L. \quad (3.8)$$

El paràmetre μ permet imposar que $X_k > 0$. Si $C = 0$, tenim que (3.8) es converteix en

$$\begin{pmatrix} -(V + V^T) & * & * & * & * \\ A_k^T V + X_k & -X_k & * & * & * \\ B_k^T V & 0 & Q_{11} & * & * \\ 0 & 0 & Q_{12}^T & Q_{22} & * \\ V & 0 & 0 & 0 & -X_k \end{pmatrix} < 0,$$

junt a $X_k > 0$ per a tot $k = 1, \dots, L$. Tenim certa restricció sobre Q_{11} i Q_{22} , ja que cal que siguin definides negatives, encara que són matrius qualssevol. Quan se soluciona l'equació (3.8) numèricament, les matrius Q_{11} i Q_{22} s'introdueixen com a variables de la inequació matricial, optimitzant així el resultat.

3.2 Resultats

En aquest apartat enunciem i demostrem dos resultats d'aquesta tesi que permeten linealitzar les inequacions matricials obtingudes en el Capítol 4, aconseguint sintetitzar el control RGC mitjançant LMIs. Aquest fet permetrà dissenyar i calcular numèricament aquest control. Aquesta caracterització és sobretot útil quan el model d'incerteses emprat és el model multiconvex, o en particular el model politòpic. Els resultats que presentem són una millora dels obtinguts fins ara en el

sentit que obtenim efectivament una LMI, en treure el paràmetre μ . Però aleshores hem d'afegir una segona LMI, obtenint per a cada i i k un sistema de dues LMIs. Però tot i així, el resultat és més robust, ja que no depèn del valor d'un paràmetre sobre el qual no tenim cap informació a priori.

Proposició 3.1. *Siguin les matrius A, B, G, C i $Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & * \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$ donades. Aleshores, les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *Existeixen matrius $X > 0$ simètrica i K tals que*

$$\begin{pmatrix} (A + BK)^T X + (*) & * & * \\ G^T X & Q_{11} & * \\ C & Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} < 0; \quad (3.9)$$

(ii) *Existeixen $Y > 0$ simètrica, V i N tals que*

$$\begin{pmatrix} -(V + V^T) & * & * & * & * \\ AV + Y + BN & -Y & * & * & * \\ 0 & G^T & Q_{11} & * & * \\ CV & 0 & Q_{21} & Q_{22} & * \\ V & 0 & 0 & 0 & -Y \end{pmatrix} < 0, \quad (3.10)$$

$$\begin{pmatrix} -Y & * & * \\ G^T & Q_{11} & * \\ 0 & Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} < 0; \quad (3.11)$$

(iii) *Existeix un escalar $\mu > 0$ i matrius $Y > 0$ simètrica, V i N tals que*

$$\begin{pmatrix} -(V + V^T) & * & * & * & * \\ AV + Y + BN & -\mu Y & * & * & * \\ 0 & G^T & Q_{11} & * & * \\ CV & 0 & Q_{21} & Q_{22} & * \\ V & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} Y \end{pmatrix} < 0. \quad (3.12)$$

Per tal que les LMIs (3.10)-(3.12) siguin resolubles, cal que els termes diagonals de la matriu Q siguin definits negatius.

Demostració. Per tal de veure l'equivalència entre (i) i (ii), considerem la variable

$$N := KV.$$

Aplicarem els resultats del Lema de projecció 2.2 a (3.10). En efecte, considerem la matriu $\bar{A} = A + BK$ i fem la descomposició següent de (3.10)

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * \\ Y & -Y & * & * & * \\ 0 & G^T & Q_{11} & * & * \\ 0 & 0 & Q_{21} & Q_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Id \\ \bar{A} \\ 0 \\ C \\ Id \end{pmatrix} V(Id, 0, 0, 0, 0) + (*) < 0 .$$

Considerem $P = (Id, 0, 0, 0, 0)$, $Q = (-Id, \bar{A}^T, 0, C^T, Id)$ i

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * \\ Y & -Y & * & * & * \\ 0 & G^T & Q_{11} & * & * \\ 0 & 0 & Q_{21}^T & Q_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Y \end{pmatrix} .$$

Com a bases dels espais nuls associats a P i Q , considerem

$$\mathcal{N}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ Id & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_Q = \begin{pmatrix} \bar{A}^T & 0 & C^T & Id \\ Id & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \end{pmatrix} .$$

En imposar $\mathcal{N}_P^T \psi \mathcal{N}_P < 0$, obtenim

$$\begin{pmatrix} -Y & * & * & * \\ G^T & Q_{11} & * & * \\ 0 & Q_{21} & Q_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 & -Y \end{pmatrix} < 0 . \quad (3.13)$$

Aplicant-hi el complement de Schur, (3.13) és certa si i només si

$$\begin{pmatrix} -Y & * & * \\ G^T & Q_{11} & * \\ 0 & Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} < 0 ,$$

que és justament l'equació (3.11) i per tant es verifica.

De la condició $\mathcal{N}_Q^T \psi \mathcal{N}_Q < 0$ treiem

$$\begin{pmatrix} \bar{A}Y + Y\bar{A}^T - Y & * & * & * \\ G^T & Q_{11} & * & * \\ CY & Q_{21} & Q_{22} & * \\ Y & 0 & 0 & -Y \end{pmatrix} < 0 .$$

Aplicant-hi els complements de Schur, obtenim que es verifica aquesta inequació si i només si

$$\begin{pmatrix} \bar{A}Y + Y\bar{A}^T & * & * \\ G^T & Q_{11} & * \\ CY & Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} < 0 . \quad (3.14)$$

Tornant a aplicar el complement de Schur a l'inequació (3.14)

$$\bar{A}Y + Y\bar{A}^T - (G, YC^T)Q^{-1} \begin{pmatrix} G^T \\ CY \end{pmatrix} < 0 .$$

Utilitzant ara que $X = Y^{-1}$, i pre i post-multiplicant per X , obtenim

$$X\bar{A} + \bar{A}^T X - (XG, C^T)Q^{-1} \begin{pmatrix} G^T X \\ C \end{pmatrix} < 0 ,$$

que, pels complements de Schur, és justament (3.9), amb $Q < 0$. Per tant, acabem de veure (i) i (ii) són equivalents.

Per veure que (ii) implica (iii), només cal considerar $\mu = 1$.

Per tal de veure que (iii) implica (i), cal seguir els mateixos passos que acabem de fer per veure l'equivalència entre (i) i (ii). Aleshores, obtenim que (3.12) és certa si es verifiquen (3.9) i

$$\begin{pmatrix} -\mu Y & * & * \\ G^T & Q_{11} & * \\ 0 & Q_{12} & Q_{22} \end{pmatrix} < 0 .$$

Si μ és suficientment petit, es verifica aquesta inequació ja que $Q < 0$. Per tant, hem vist que (i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i), acabant així la demostració d'aquesta proposició. \square

El següent teorema és una generalització del resultat anterior.

Teorema 3.3. *Siguin les matrius A, B, C, E, F i $Q = Q^T < 0$ donades. Aleshores, les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *Existeixen matrius $X > 0$ simètrica i K tals que resolen*

$$\begin{pmatrix} (A + BK)^T X + (*) & * & * & * \\ E^T X & Q_{11} & * & * \\ C & Q_{21} & Q_{22} & * \\ FK & Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} < 0; \quad (3.15)$$

(ii) *Existeixen matrius $Y > 0$ simètrica, V i N que verifiquen*

$$\begin{pmatrix} -(V + V^T) & * & * & * & * & * \\ AV + Y + BN & -Y & * & * & * & * \\ 0 & E^T & Q_{11} & * & * & * \\ CV & 0 & Q_{21} & Q_{22} & * & * \\ F^T N & 0 & Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & * \\ V & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y \end{pmatrix} < 0, \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} -Y & * & * & * \\ E^T & Q_{11} & * & * \\ 0 & Q_{21} & Q_{22} & * \\ 0 & Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} < 0; \quad (3.17)$$

(iii) *Cas $C = 0$. Existeixen matrius $X > 0$ simètrica i K tals que*

$$\begin{pmatrix} (A + BK)^T X + (*) & * & * \\ E^T X & Q_{11} & * \\ FK & Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} < 0,$$

si i només si existeixen matrius $Y > 0$ simètrica, V i N tals que

$$\begin{pmatrix} -(V + V^T) & * & * & * & * \\ AV + Y + BN & -Y & * & * & * \\ 0 & E^T & Q_{11} & * & * \\ F^T N & 0 & Q_{21} & Q_{22} & * \\ V & 0 & 0 & 0 & -Y \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} -Y & * & * \\ E^T & Q_{11} & * \\ 0 & Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} < 0.$$

Demostració. Per tal de veure aquesta equivalència, seguirem els passos de la demostració anterior. Per això, apliquem el Lema de projecció 2.2 a (3.16). Considerem $\bar{A} = A + BK$, $N := KV$ i fem la següent descomposició de (3.16)

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * & * \\ Y & -Y & * & * & * & * \\ 0 & E^T & Q_{11} & * & * & * \\ 0 & 0 & Q_{21} & Q_{22} & * & * \\ 0 & 0 & Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Id \\ \bar{A} \\ 0 \\ C \\ F^T K \\ Id \end{pmatrix} V(Id, 0, 0, 0, 0, 0) + (*) < 0.$$

Sigui $P = (Id, 0, 0, 0, 0, 0)$, $Q = (-Id, \bar{A}^T, 0, C^T, K^T F, Id)$ i

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * & * \\ Y & -Y & * & * & * & * \\ 0 & E^T & Q_{11} & * & * & * \\ 0 & 0 & Q_{21} & Q_{22} & * & * \\ 0 & 0 & Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y \end{pmatrix}.$$

De $\mathcal{N}_P^T \psi \mathcal{N}_P < 0$ treiem que

$$\begin{pmatrix} -Y & * & * & * \\ E^T & Q_{11} & * & * \\ 0 & Q_{21} & Q_{22} & * \\ 0 & Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} < 0,$$

que és justament la condició (3.17).

De la condició $\mathcal{N}_Q^T \psi \mathcal{N}_Q < 0$ obtenim

$$\begin{pmatrix} Y\bar{A}^T + \bar{A}Y & * & * & * \\ E^T & Q_{11} & * & * \\ CY & Q_{21} & Q_{22} & * \\ F^T KY & Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} < 0.$$

Usant el complement de Schur i substituint $X^{-1} = Y$, es veu fàcilment que aquesta desigualtat matricial és equivalent a (3.15). En efecte, si fem aquestes operacions, obtenim

$$X^{-1}\bar{A}^T + \bar{A}X^{-1} - (E, X^{-1}C^T, X^{-1}K^T F)Q^{-1} \begin{pmatrix} E^T \\ CX^{-1} \\ F^T KX^{-1} \end{pmatrix} < 0.$$

Multiplicant per la dreta i per l'esquerra per X , treiem que

$$X\bar{A} + \bar{A}^T X - (XE, C^T, K^T F)Q^{-1} \begin{pmatrix} E^T X \\ C \\ F^T K \end{pmatrix} < 0,$$

que pel complement de Schur és equivalent a (3.15), amb $Q < 0$. Per tant, acabem de veure que (i) i (ii) són equivalents. Quan $C = 0$, obtenim un cas particular de (ii), i per tant acabem de veure l'equivalència de (iii). Concluïm així la demostració d'aquest teorema. \square

Hem de fer notar que si bé existeix certa llibertat sobre la matriu Q , cal que sigui definida negativa per tal de poder tenir aquestes equivalències. Quan se'n fa la implementació numèrica, cal tenir present aquesta restricció, ja que sovint, per donar més llibertat en la resolució, es considera Q com una variable més. Però sempre cal imposar que sigui definida negativa, si no la LMI corresponent no serà resoluble. Fixem-nos que la desigualtat matricial (3.15) és del mateix tipus que la desigualtat (4.14), que caracteritza el control RGC. Les equivalències del teorema també es verifiquen si tenim inequacions matricials semidefinides positives, és a dir, quan tenim $M \geq 0$. Utilitzarem aquests resultats en els casos d'incerteses convexes i politòpiques, però no en el cas d'incerteses normades, ja que en aquest cas aprofitarem les cotes de les incerteses.

Acabem aquí aquest capítol, on hem presentat dos dels resultats principals d'aquesta tesi, ja que permeten obtenir condicions lineals que donen el disseny de la llei de control RGC i del control H_∞ per a sistemes interconnectats amb incerteses.

Capítol 4

Control fiable amb cost garantit

En aquest capítol presentem el segon eix d'aquest treball. Donem primer la caracterització dels controls descentralitzats fiables i amb cost garantit, que anomenarem control RGC (*Reliable Guaranteed Cost Control*). Aquesta caracterització serà independent del model d'incerteses. Veurem que obtenim una condició suficient d'existència, lligada a la resolució d'una inequació matricial no lineal. Per tal de poder-la resoldre, ens caldrà linealitzar-la. Aquesta linealització la durem a terme utilitzant els resultats del capítol 3, tenint present el model d'incerteses emprat. El resultat que presentem a continuació serà utilitzat en els capítols posteriors per tal de dissenyar el control fiable amb cost garantit.

4.1 Introducció

En aquest apartat presentem el teorema que permet fer el disseny dels controls descentralitzats fiables i amb cost garantit per a sistemes interconnectats amb incerteses i en presència de fallades. Recordem primer els models d'interconnexions i de fiabilitat ja definits en el Capítol 1.

Condicions sobre les interconnexions

Considerem les condicions 1.1 i 1.2, definides en l'Apartat 1.3, sobre el vector desconegut d'interconnexions $g_{ij}(t, x_j)$. La primera condició permet donar al vector g_{ij} certa estructura lineal en x_j :

$$\|g_{ij}(t, x_j)\| \leq \|W_{ij}x_j\| . \quad (4.1)$$

La Condició 1.2 és necessària per tal de facilitar la presentació dels resultats:

$$W_i := \sum_{j=1, j \neq i}^N W_{ji}^T W_{ji} > 0. \quad (4.2)$$

Usarem aquest model d'interconnexió al llarg de tot el capítol.

Model de fiabilitat

Reprenem el model general de fallada presentat en l'Apartat 1.4, on denotàvem per $u_i^F(t)$ el control després de fallada i l'expressàvem com una part lineal en $u_i(t)$ més una part desconeguda acotada (veure les equacions (1.10) i (1.12)), tal com reproduïm aquí:

$$\begin{cases} u_i^F(t) = \Lambda_i u_i(t) + \phi_i(u_i) \\ \|\phi_i(u_i)\| \leq \|\Gamma_i u_i\|, \end{cases} \quad (4.3)$$

amb $\Lambda_i > 0$ i $\Gamma_i \geq 0$ matrius diagonals.

Funció de cost

En l'Apartat 1.3, l'equació (1.8) defineix la funció de cost associada a un sistema format per N subsistemes interconnectats. Després de fallada, l'expressió del cost és

$$J = \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \left(x_i^T(t) Q_i x_i(t) + (u_i^F(t))^T R_i u_i^F(t) \right) dt, \quad (4.4)$$

on $Q_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ i $R_i \in \mathbb{R}^{s_i \times s_i}$ són matrius simètriques semidefinida i definida positiva, respectivament.

Definim finalment què entenem per control fiable amb cost quadràtic garantit. Per això, ens remetem a la Definició 1.11.

Definició 4.1 (Control RGC). Sigui el sistema format per N sistemes interconnectats després de fallada definit per

$$\dot{x}_i(t) = \Delta A_i x_i(t) + \Delta B_i u_i^F(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G_{ij} g_{ij}(t, x_j), \quad (4.5)$$

on $u_i^F(t)$ verifica (4.3). Els controls $u_i(t) = K_i x_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ formen un conjunt de controls fiable amb cost quadràtic garantit (RGC) amb matriu de cost

$P_i > 0$ pel sistema (4.5) i amb funció de cost (4.4) si es verifica la següent desigualtat:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} x_i^T(t) P_i x_i(t) + x_i^T(t) Q_i x_i(t) + (u_i^F(t))^T R_i u_i^T(t) \right) < 0. \quad (4.6)$$

4.2 Disseny del control RGC

L'objectiu d'aquest capítol és sintetitzar el conjunt de lleis de control fiable descentralitzat amb cost quadràtic garantit, realimentades per l'estat: $u_i(t) = K_i x_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, per al sistema format per N subsistemes interconnectats amb incerteses. Cal escollir, per a cada subsistema i , una matriu de guany K_i que assegurí que el sistema en llaç tancat sigui estable i amb cost acotat. El següent teorema presenta la condició suficient per a l'existència del control realimentat per l'estat, fiable i de cost garantit, per a subsistemes interconnectats amb incerteses admissibles, independentment del model escollit.

Teorema 4.1 (Disseny RGC). *Sota la condició sobre les interconnexions (4.1), sigui el sistema (4.5), amb el model de fallada (4.3). Suposem que existeixen $P_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ matrius simètriques definides positives i matrius $K_i \in \mathbb{R}^{n_i \times s_i}$, tals que es verifica la inequació matricial*

$$M_i := \begin{pmatrix} \Pi_i & * & \dots & * & * \\ G_{i1}^T P_i & -I_{l_i} & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_{iN}^T P_i & 0 & \dots & -I_{l_i} & * \\ \Psi_i^T & 0 & \dots & 0 & R_i - I_{s_i} \end{pmatrix} < 0, \quad (4.7)$$

on $M_i \in \mathbb{R}^{\bar{N} \times \bar{N}}$, $\bar{N} = n_i + (N-1)l_i + s_i$, amb

$$\Pi_i = \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + W_i + K_i^T \Gamma_i^2 K_i + \bar{R}_i,$$

$$\bar{A}_i = \Delta A_i + \Delta B_i \Lambda_i K_i,$$

$$\bar{R}_i = Q_i + K_i^T \Lambda_i R_i \Lambda_i K_i,$$

$$\Psi_i = P_i \bar{B}_i + K_i^T \Lambda_i R_i.$$

Aleshores el conjunt de lleis de control $u_i(t) = K_i x_i(t)$ és fiable amb cost garantit. A més a més, si tenim fixat els valors inicials $x_i(0) = x_{i0}$, el valor corresponent de la funció de cost (4.4) satisfà la següent cota:

$$J < \bar{J} = \sum_{i=1}^N x_{i0}^T P_i x_{i0} . \quad (4.8)$$

Nota 4.1. En la matriu M_i no existeix el terme $P_i G_{ii}$, per a $i = 1, \dots, N$.

Nota 4.2. Per a cada i , la matriu P_i depèn de les matrius de fiabilitat Λ_i i Γ_i , i per tant la cota \bar{J} en depèn també.

Demostració. Si utilitzem el control realimentat per l'estat $u_i(t) = K_i x_i(t)$, obtenim que el sistema (4.5) és de fet el sistema enllaç tancat

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & \Delta A_i(t) x_i(t) + \\ & + \Delta B_i(t) \left(\Lambda_i K_i x_i(t) + \phi_i(K_i x_i(t)) \right) \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G_{ij} g_{ij}(t, x_j) . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Suposem ara que existeix una matriu simètrica definida positiva $P_i > 0$ tal que la LMI (4.7) es verifica per a tota incertesa admissible. Per tal de demostrar l'estabilitat asimptòtica del sistema (4.9), considerem la candidata a funció de Lyapunov

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^N x_i^T(t) P_i x_i(t) , \quad (4.10)$$

on $x^T(t) = (x_1(t)^T, \dots, x_N(t)^T)$. Cal que es verifiqui $V(x(t)) > 0$ i $\frac{d}{dt} V(x(t)) < 0$. A partir d'ara, per a simplificar la notació, ometem la dependència en la variable temps, t . La condició $V(x) > 0$ és certa per hipòtesi, ja que $P_i > 0$ per a tot

$i = 1, \dots, N$, sempre i quan $x \neq 0$. D'altra banda, tenim que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x) &= \sum_{i=1}^N \dot{x}_i^T P_i x_i + x_i^T P_i \dot{x}_i \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\left(\Delta A_i x_i + \Delta B_i (\Lambda_i K_i x_i + \phi_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N G_{ij} g_{ij} \right)^T P_i x_i + \right. \\
&\quad \left. + x_i^T P_i \left(\Delta A_i x_i + \Delta B_i (\Lambda_i K_i x_i + \phi_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N G_{ij} g_{ij} \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^N x_i^T \left[\left(\Delta A_i + \Delta B_i \Lambda_i K_i \right)^T P_i + P_i \left(\Delta A_i + \Delta B_i \Lambda_i K_i \right) \right] x_i + \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \phi_i^T \Delta B_i^T P_i x_i + x_i^T P_i \Delta B_i \phi_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j \neq i} G_{ij} g_{ij} \right)^T P_i x_i + x_i^T P_i \left(\sum_{j \neq i} G_{ij} g_{ij} \right).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Considerem ara el vector $z_i^T = (x_i^T, g_{i1}^T, \dots, g_{iN}^T, \phi_i^T)$, que no conté el terme g_{ii} . Aquest vector z_i ens permet expressar l'equació (4.11) com una forma bilineal

$$\frac{d}{dt}V = \sum_{i=1}^N z_i^T \Omega_i z_i + \sum_{j \neq i} g_{ij}^T g_{ij} + \phi_i^T \phi_i, \tag{4.12}$$

on Ω_i queda definida per

$$\Omega_i = \begin{pmatrix} \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i & * & \dots & * & * \\ G_{i1}^T P_i & -Id_{l_i} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_{iN}^T P_i & 0 & \dots & -Id_{l_i} & * \\ \bar{B}_i^T P_i & 0 & \dots & 0 & -Id_{s_i} \end{pmatrix}.$$

Per tal de verificar que $\frac{d}{dt}V < 0$, anem a acotar els termes quadràtics $\sum_{j \neq i} g_{ij}^T g_{ij}$ i $\phi_i^T \phi_i$. Per la Condició 4.1, tenim que

$$g_{ij}^T g_{ij} \leq x_j^T W_{ij}^T W_{ij} x_j.$$

Per tant, fent-ne la suma respecte i i j ,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} g_{ij}^T g_{ij} \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} x_j^T W_{ij}^T W_{ij} x_j .$$

Si desenvolupem els sumatoris del terme de la dreta, obtenim la següent igualtat:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} x_j^T W_{ij}^T W_{ij} x_j &= \\ &= x_2^T W_{12}^T W_{12} x_2 + x_3^T W_{13}^T W_{13} x_3 + \dots + x_N^T W_{1N}^T W_{1N} x_N + \\ &\quad + x_1^T W_{21}^T W_{21} x_1 + x_3^T W_{23}^T W_{23} x_3 + \dots + x_N^T W_{2N}^T W_{2N} x_N + \dots \\ &\quad + x_1^T W_{N1}^T W_{N1} x_1 + x_2^T W_{N2}^T W_{N2} x_2 + \dots + x_{N-1}^T W_{N,N-1}^T W_{N,N-1} x_{N-1} \\ &= x_1^T \left(W_{21}^T W_{21} + \dots + W_{N1}^T W_{N1} \right) x_1 + \dots \\ &= \sum_{i=1}^N x_i^T \left(\sum_{j \neq i} W_{ji}^T W_{ji} \right) x_i . \end{aligned}$$

Per tant, tenim que els vectors d'interconnexió g_{ij} estan acotats per x_i :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} g_{ij}^T g_{ij} - \sum_{i=1}^N x_i^T W_i x_i \leq 0 .$$

Aquesta última igualtat és la que ens facilita establir l'estabilitat, ja que permet incloure aquest terme en la matriu Ω_i , ja que finalment s'acota el vector $g_{ij}(t, x_j)$ per un factor de x_i . D'aquí la importància d'imposar la Condició 1.1 sobre les interconnexions. Anem a acotar ara el tercer terme de (4.12). Usant el model de fallada (4.3), obtenim que

$$\phi_i^T(u_i) \phi_i(u_i) \leq u_i^T \Gamma_i^2 u_i .$$

Com $u_i = K_i x_i$, tenim

$$\phi_i^T \phi_i \leq x_i^T K_i^T \Gamma_i^2 K_i x_i .$$

Aleshores,

$$\phi_i^T \phi_i - x_i^T K_i^T \Gamma_i^2 K_i x_i \leq 0 .$$

Per tant, ja tenim el tercer terme de (4.12) acotat per un terme dependent de x_i . Posant W_i i $K_i^T \Gamma_i^2 K_i$ en la matriu Ω_i , l'equació (4.12) queda transformada en la

següent equació:

$$\frac{d}{dt}V = \sum_{i=1}^N z_i^T \bar{\Omega}_i z_i + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j \neq i} g_{ij}^T g_{ij} - \sum_{i=1}^N x_i^T W_i x_i \right) + \sum_{i=1}^N \left(\phi_i^T \phi_i - x_i^T K_i^T \Gamma_i^2 K_i x_i \right)$$

on ara $\bar{\Omega}_i$ correspon a l'ampliació de la matriu Ω_i i es defineix per:

$$\bar{\Omega}_i = \begin{pmatrix} \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + W_i + K_i^T \Gamma_i^2 K_i & P_i G_{i1} & \dots & * & * \\ G_{i1}^T P_i & -I_{l_i} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_{iN}^T P_i & 0 & \dots & -I_{l_i} & * \\ \bar{B}_i^T P_i & 0 & \dots & 0 & -I_{s_i} \end{pmatrix}.$$

Per tant, si veiem que $\bar{\Omega}_i < 0$, aleshores tindrem que $\frac{d}{dt}V < 0$ ja que els altres termes són negatius i el sistema serà asimptòticament estable. Anem a comprovar que efectivament $\bar{\Omega}_i < 0$. En efecte, considerem la següent expressió de la matriu $\bar{\Omega}_i$:

$$\bar{\Omega}_i = M_i - z_i^T \begin{pmatrix} Q_i + K_i^T \Lambda_i R_i \Lambda_i K_i & * & * \\ 0 & 0 & * \\ R_i \Lambda_i K_i & 0 & R_i \end{pmatrix} z_i.$$

Tenim per hipòtesi que $M_i < 0$. Per tant, cal comprovar que el segon terme restant és semidefinit positiu, que ho serà si la matriu interior és definida positiva. Com $R_i > 0$, podem aplicar-hi els complements de Schur, obtenint

$$Q_i + K_i^T \Lambda_i R_i \Lambda_i K_i - (K_i^T \Lambda_i R_i) R_i^{-1} (R_i \Lambda_i K_i) = Q_i \geq 0.$$

Per tant, és cert que $\bar{\Omega}_i < 0$ i els subsistemes en llaç tancat (4.9) són asimptòticament estables.

Falta veure ara que el control és de cost garantit i fiable. Per això, cal que es verifiqui l'acotació (4.6) de la Definició 4.1. Sigui doncs l'expressió del cost respecte el control $u_i^F(t)$:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \left(x_i^T Q_i x_i + (u_i^F)^T R_i u_i^F \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \left(x_i^T Q_i x_i + (\phi_i^T + u_i^T \Lambda_i) R_i (\Lambda_i u_i + \phi_i) \right) dt. \end{aligned}$$

Com el control es troba realimentat per l'estat, és a dir $u_i = K_i x_i$, l'expressió anterior és de fet

$$J = \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} \left(x_i^T (Q_i + K_i^T \Lambda_i R_i \Lambda_i K_i) x_i + \phi_i^T R_i \phi_i + \phi_i^T R_i \Lambda_i K_i x_i + x_i^T K_i^T \Lambda_i R_i \phi_i \right) dt .$$

Un cop tenim el cost expressat en funció del model de fiabilitat, cal verificar la inequació (4.6). Per tant, cal verificar si la següent inequació és certa:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (x_i^T P_i x_i) + x_i^T (Q_i + K_i^T \Lambda_i R_i \Lambda_i K_i) x_i + \phi_i^T R_i \phi_i + \phi_i^T R_i \Lambda_i K_i x_i + x_i^T K_i^T \Lambda_i R_i \phi_i = \sum_{i=1}^N z_i^T M_i z_i < 0 , \quad (4.13)$$

que és cert per hipòtesi. Encara més, a partir de l'equació (4.13), es verifica la següent desigualtat:

$$\sum_{i=1}^N x_i^T Q_i x_i + (u_i^F)^T R_i u_i < - \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (x_i^T P_i x_i) .$$

Integrant ambdues bandes entre 0 i ∞ , i usant que $V(x(t)) \rightarrow 0$ quan t tendeix a ∞ per estabilitat asimptòtica, tenim que el cost està acotat en la forma

$$J(x_i, u_i^F) < \sum_{i=1}^N x_{i0}^T P_i x_{i0} .$$

Això completa la demostració del Teorema 4.1. □

Acabem de donar el teorema que ens permet dissenyar el control RGC per a sistemes interconnectats amb incerteses, que contempla tant fallades parcials com totals en els subsistemes.

Presentem a continuació una proposició que expressa la desigualtat (4.7) del Teorema 4.1 d'una manera més aplicable, sobretot quan es treballa amb el model d'incerteses politòpic o convex. Per a dur a terme aquest pas, ens cal suposar que la matriu de cost R_i verifica que

$$R_i - Id_{s_i} < 0 ,$$

mentre que Q_i ha de ser invertible. Per això, suposarem que $Q_i > 0$.

Proposició 4.1. *Sota la condició sobre les interconnexions (4.1), sigui el sistema (4.5), amb el model de fallada (4.3). Siguin les matrius $Q_i > 0$ i $R_i > 0$ tal que $R_i - Id_{s_i} < 0$. Si existeixen matrius P_i simètriques definides positives i matrius K_i verificant la següent desigualtat matricial:*

$$\left(\begin{array}{ccc} (\Delta A_i + \Delta B_i(\Lambda_i + (Id - R_i)^{-1}R_i\Lambda_i)K_i)^T P_i + (*) & * & * \\ \left(\begin{array}{c} G_i^T \\ \Delta B_i^T \end{array} \right) P_i & \left(\begin{array}{cc} -Id & * \\ 0 & R_i - Id \end{array} \right) & \\ Id & & 0 \\ \left(\begin{array}{c} \Gamma_i \\ \Lambda_i \\ R_i\Lambda_i \end{array} \right) K_i & & 0 \\ * & * & \\ * & * & \\ \left(\begin{array}{cc} -Q_i^{-1} & * \\ 0 & -W_i^{-1} \end{array} \right) & * & \\ 0 & \left(\begin{array}{ccc} -R_i^{-1} & * & * \\ 0 & -Id & * \\ 0 & 0 & R_i - Id \end{array} \right) & \end{array} \right) < 0, \quad (4.14)$$

aleshores, les matrius P_i i K_i verifiquen la desigualtat (4.7) i el conjunt de controls $u_i = K_i x_i$, $i = 1, \dots, N$, és RGC amb cota del cost $\bar{J} := \sum_{i=1}^N x_{i0}^T P_i x_{i0}$.

Demostració. Considerem $G_i^T = (G_{i1}, \dots, G_{iN})^T$. Aleshores, la matriu M_i en (4.7) s'expressa de la següent manera:

$$\left(\begin{array}{ccc} (\Delta A_i + \Delta B_i\Lambda_i K_i)^T P_i + (*) + W_i + Q_i + K_i^T (\Gamma_i^2 + \Lambda_i R_i \Lambda_i) K_i & * & * \\ G_i^T P_i & -Id & * \\ \Delta B_i^T P_i + R_i \Lambda_i K_i & 0 & R_i - Id \end{array} \right) < 0. \quad (4.15)$$

Usant els complements de Schur, convertirem (4.15) en (4.14). Hem de fer dues modificacions. Primer descomposem el terme $K_i^T (\Gamma_i^2 + \Lambda_i R_i \Lambda_i) K_i$ de la

següent manera, aplicant els complements de Schur (obviem la resta dels termes de (4.15)),

$$K_i^T(\Gamma_i^2 + \Lambda_i R_i \Lambda_i)K_i \Rightarrow \begin{pmatrix} \dots & K_i^T(\Lambda_i, \Gamma_i) \\ \left(\begin{array}{c} \Lambda_i \\ \Gamma_i \end{array} \right) K_i & \begin{pmatrix} -R_i^{-1} & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

El segon pas és linealitzar el terme mixte $\Delta B_i^T P_i + R_i \Lambda_i K_i$, que necessitarà més manipulació. Aplicant els complements de Schur a tota la inequació (4.15), obtenim el terme

$$(P_i \Delta B_i + K_i^T \Lambda_i R_i)(I - R_i)^{-1}(\Delta B_i^T P_i + R_i \Lambda_i K_i)$$

que és equivalent a

$$\begin{aligned} & P_i \Delta B_i (I - R_i)^{-1} \Delta B_i^T P_i + K_i^T \Lambda_i R_i (I - R_i)^{-1} R_i \Lambda_i K_i + \\ & + P_i \Delta B_i (I - R_i)^{-1} R_i \Lambda_i K_i + K_i^T \Lambda_i R_i (I - R_i)^{-1} \Delta B_i^T P_i. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Per Schur, podem afegir aquest terme en la posició 1-1 de (4.15) i obtenir així la inequació matricial (4.14). En efecte, l'equació (4.16) permet expressar (4.15) de la següent manera:

$$\begin{pmatrix} \dots + (\Delta B_i (I - R_i)^{-1} R_i \Lambda_i K_i)^T P_i + (*) & * & * \\ \Delta B_i P_i & R_i - I & * \\ R_i \Lambda_i K_i & 0 & R_i - I \end{pmatrix}.$$

Obtenim així que si P_i i K_i verifiquen (4.14), també verifiquen (4.7). Recordem que per poder aplicar els complements Schur, cal que els termes diagonals siguin definits negatius, fet que es verifica en aquest cas. Així queda demostrada aquesta proposició. \square

En aquest apartat hem enunciat i demostrat el teorema que caracteritza el control RGC realimentat per l'estat, anomenat així ja que a més a més d'assegurar el cost del sistema, també permet un cert nivell de fallades. En aquest teorema, la caracterització es basa en suposar que certa inequació matricial no lineal té solució. Cal tenir present que obtenim una condició suficient, és a dir, que poden existir controls fiables amb cost garantit que no verifiquin aquesta inequació matricial. La importància d'aquest resultat radica en donar una condició en forma de inequació matricial, independentment del model d'incerteses escollit.

Capítol 5

Incerteses normades

En aquest capítol desenvolupem metodologies pel disseny del control fiable i descentralitzat amb cost quadràtic garantit, usant la realimentació d'estat, per a N sistemes interconnectats amb incerteses acotades o normades. Tractem el problema de fiabilitat davant d'una fallada del controlador, junt amb el problema del cost garantit. Investiguem dos problemes que no tenen encara una solució complerta per a aquests tipus de sistemes. Els resultats claus i originals són la definició i demostració d'una proposició que caracteritza, per mitjà de les inequacions lineals matricials, el control descentralitzat fiable amb cost quadràtic garantit. Per això, recollim tots els resultats obtinguts fins el moment i referenciats en els capítols anteriors, així com els que hem obtinguts nosaltres, en particular el Teorema 4.1.

Ens centrem en el model d'incerteses normades, deixant l'estudi dels dos altres models d'incerteses per a capítols posteriors. Aquesta separació per mètodes és deguda a que l'estructura de les incerteses varia força d'un model a l'altre. Per tal d'aprofitar al màxim aquesta estructura, la metodologia emprada és diferent. En aquest capítol, aprofitem l'acotació que verifiquen les matrius d'incerteses $\Delta(t)$ per tal d'obtenir una caracterització LMI. Primer fem una breu introducció on definim els sistemes i els models d'incerteses i de fiabilitat, per passar després a enunciar i demostrar la proposició central d'aquest capítol.

5.1 Introducció

Considerem el sistema format per N subsistemes interconnectats d'equació

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = (A_i + \Delta A_i(t)) x_i(t) + (B_i + \Delta B_i(t)) u_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G_{ij} g_{ij}(t, x_j) \\ x_i(0) = x_{i0} \quad , i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (5.1)$$

on $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ és l'estat del subsistema i , $u_i \in \mathbb{R}^{s_i}$ és el control del subsistema i , $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ és la matriu d'estat, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times s_i}$ és la matriu de control. El vector desconegut $g_{ij}(t, x_j) \in \mathbb{R}^{l_i}$ representa les interconnexions sobre el subsistema i , mentre que $G_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times l_i}$ és la matriu constant d'interconnexió entre el subsistema i i el subsistema j . S'assumeix que els vectors $g_{ij}(t, x_j)$ són continus i suficientment diferenciables en x_j i continus a trossos en t .

Model d'interconnexió

Considerem el model d'interconnexió presentat en l'Apartat 1.3, on hem donat les Condicions 1.1 i 1.2 que verifica sobre el vector desconegut d'interconnexions $g_{ij}(t, x_j)$:

$$\|g_{ij}(t, x_j)\| \leq \|W_{ij} x_j\| . \quad (5.2)$$

$$W_i := \sum_{j=1, j \neq i}^N W_{ji}^T W_{ji} > 0 . \quad (5.3)$$

Condicions sobre les incerteses

El model d'incerteses que considerem és el definit en l'Apartat 1.1.1:

$$\begin{cases} \Delta A_i(t) = D_i \Delta_i(t) E_{1i} \\ \Delta B_i(t) = D_i \Delta_i(t) E_{2i} . \end{cases} \quad (5.4)$$

Les matrius D_i , E_{1i} i E_{2i} són matrius donades, constants, reals de dimensions $n_i \times m_i$, $p_i \times n_i$ i $p_i \times s_i$, respectivament. Les matrius desconegudes $\Delta_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i \times p_i}$ satisfan $\Delta_i^T(t) \Delta_i(t) \leq Id_{p_i}$. Degut a aquesta condició, aquest model rep el nom de model d'incerteses acotades o normades. Cal tenir present que aquesta descomposició no és única.

Model de fiabilitat

Reprenem el model general de fallada presentat en l'Apartat 1.4, on denotàvem per $u_i^F(t)$ el control després de fallada i l'expressàvem com una part lineal en $u_i(t)$ més una part desconeguda acotada (veure les equacions (1.10) i (1.12)), tal com reproduïm aquí:

$$\begin{cases} u_i^F(t) = \Lambda_i u_i(t) + \phi_i(u_i) \\ \|\phi_i(u_i)\| \leq \|\Gamma_i u_i\|, \end{cases} \quad (5.5)$$

amb $\Lambda_i > 0$ i $\Gamma_i \geq 0$.

Funció de cost

En l'Apartat 1.3, l'equació (1.8) defineix la funció de cost associada a un sistema format per N subsistemes interconnectats. Després de fallada, l'expressió del cost queda

$$J(x, u^f) = \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} (x_i^T(t) Q_i x_i(t) + u_i^F(t)^T R_i u_i^F(t)) dt, \quad (5.6)$$

on $Q_i \geq 0$ i $R_i > 0$ són matrius simètriques.

5.2 Disseny del control RGC

Presentem a continuació l'aproximació LMI que permet construir les lleis de control descentralitzat fiables amb cost garantit. L'objectiu d'aquest apartat és obtenir una LMI que no depengui de la matriu d'incerteses $\Delta_i(t)$ i assegurí cost quadràtic. Veurem, durant la demostració d'aquest resultat, que és necessari imposar una certa condició entre la matriu de cost R_i i E_{2i} . Això ens implica que si volem obtenir cert nivell de fiabilitat, perdem llibertat en escollir la funció de cost, i per tant no podem considerar qualsevol funció de rendiment. Tampoc podem fer qualsevol descomposició de la matriu de control ΔB_i .

Condició 5.1. Existeix una constant $\delta_i > 0$ tal que

$$0 < E_{2i}(Id_{s_i} - R_i)^{-1} E_{2i}^T < \delta_i Id_{p_i}, \quad (5.7)$$

on existeix $(Id_{s_i} - R_i)^{-1}$.

Això fa certa la condició $R_i - Id_{s_i} < 0$. Necessitem també una condició extra sobre les incerteses.

Condició 5.2. Les matrius d'incerteses verifiquen, per a tot t ,

$$\Delta_i(t)\Delta_i^T(t) \leq Id_{m_i} . \quad (5.8)$$

Per tant, si volem fiabilitat, no només obtenim restriccions sobre la matriu R_i , sino també sobre la descomposició de les incerteses de la matriu de control ΔB_i . Com tenim llibertat per a escollir les matrius E_{2i} , això no implica més dificultat en la resolució del problema, però sí que amplia el sistema LMI, ja que afegeix una LMI. En efecte, la Condició 5.1 és equivalent a

$$\begin{pmatrix} \delta_i Id_{p_i} & * \\ E_{2i}^T & R_i - Id_{s_i} \end{pmatrix} > 0 . \quad (5.9)$$

Enunciem a continuació la proposició que caracteritza el RCCControl per mitjà de les tècniques LMIs.

Proposició 5.1. *Sigui el sistema (5.1) amb el model de fiabilitat (5.5), les condicions (5.2)–(5.3) sobre les interconnexions, i les condicions addicionals (5.7)–(5.8). Sigui la funció de cost (5.6). Suposem que existeixen paràmetres constants $\beta_{1i} > 0, \beta_{2i} > 0, \beta_{3i} > 0, \beta_{4i} > 0$, matrius simètriques definides positives $X_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ i matrius $Y_i \in \mathbb{R}^{s_i \times n_i}$, tals que per a cada $i = 1, \dots, N$, la LMI*

$$\begin{pmatrix} P_{i1} & P_{i2} \\ P_{i2}^T & P_{i3} \end{pmatrix} < 0 \quad (5.10)$$

és viable. Els termes d'aquesta LMI són

$$P_{i1} = X_i A_i^T + A_i X_i + \bar{B}_i \Lambda_i Y_i + Y_i^T \Lambda_i \bar{B}_i^T + \sum_{j \neq i} G_{ij} G_{ij}^T + B_i \bar{R}_i B_i^T + \mu_i D_i D_i^T ,$$

amb

$$\bar{R}_i = (Id_{s_i} - R_i)^{-1}$$

$$\bar{B}_i = B_i (Id_{s_i} + \bar{R}_i R_i)$$

$$\mu_i = \delta_i + \beta_{1i} + \beta_{2i} + \beta_{3i}$$

$$P_{i2} = \left(X_i E_{1i}^T, X_i, X_i, Y_i \Lambda_i E_{2i}^T, Y_i^T \Gamma_i, Y_i^T \Lambda_i, Y_i^T \Lambda_i R_i, Y_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i E_{2i}^T, B_i \bar{R}_i E_{2i}^T \right)$$

$$P_{i3} = \begin{pmatrix} -\beta_{1i} & 0 & & \dots & & & 0 \\ 0 & -W_i^{-1} & & & & & \\ & & -Q_i^{-1} & & & & \\ \vdots & & & -\beta_{2i} & & & \\ & & & & -Id_{s_i} & & \vdots \\ & & & & & -R_i^{-1} & \\ & & & & & & R_i - Id_{s_i} \\ 0 & & & & & & -\beta_{3i} & 0 \\ & & & & & & 0 & -\beta_{4i} \end{pmatrix}.$$

Aleshores, el conjunt de controls descentralitzats lineals

$$u_i(t) = K_i x_i(t) = Y_i X_i^{-1} x_i(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.11)$$

formen un conjunt de controls RGC i es verifica que

$$J(x, u^F) < \sum_{i=1}^N x_{i0}^T X_i^{-1} x_{i0}. \quad (5.12)$$

Demostració. Volem aplicar el Teorema 4.1 per tal de poder afirmar que el control és RGC. Per això, a partir de les hipòtesis de la Proposició 5.1, cal obtenir la inequació matricial lineal $M_i < 0$, definida en (4.7). Calculem els complements de Schur de M_i :

$$S_i := \Pi_i - (P_i G_{i1}, \dots, P_i G_{iN}, \Psi_i) \begin{pmatrix} -Id_{l_i} & & & \\ & \ddots & & \\ & & -Id_{l_i} & \\ & & & R_i - Id_{s_i} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_{i1}^T P_i \\ \vdots \\ G_{iN}^T P_i \\ \Psi_i^T \end{pmatrix},$$

$$S_i = \Pi_i + \sum_{j \neq i} P_i G_{ij} G_{ij}^T P_i - \Psi_i (R_i - Id_{s_i})^{-1} \Psi_i^T. \quad (5.13)$$

Pel Lema de Schur, tenim que $M_i < 0 \Leftrightarrow S_i < 0$ i els termes diagonals de M_i són definitos negatius. Si veiem que, per les hipòtesis del present teorema, $S_i < 0$, aleshores tindrem que $M_i < 0$ i podrem aplicar la tesi del Teorema 4.1. Per veure com és S_i en el nostre cas, hi substituïm el model d'incerteses normades 5.4. Per claretat en la notació, ometem la dimensió de la matriu identitat: $Id_{s_i} = Id$.

Aleshores,

$$\begin{aligned}
S_i &= \left(A_i + D_i \Delta_i(t) E_{1i} \right)^T P_i + P_i \left(A_i + D_i \Delta_i(t) E_{1i} \right) \\
&\quad + \left[\left(B_i + D_i \Delta_i(t) E_{2i} \right) \Lambda_i K_i \right]^T P_i + P_i \left[\left(B_i + D_i \Delta_i(t) E_{2i} \right) \Lambda_i K_i \right] \\
&\quad + W_i + K_i^T \Gamma_i^2 K_i + Q_i + K_i^T \Lambda_i R_i \Lambda_i K_i + P_i \left(\sum_{j \neq i} G_{ij} G_{ij}^T \right) P_i \\
&\quad - \left[P_i \left(B_i + D_i \Delta_i(t) E_{2i} \right) + K_i^T \Lambda_i R_i \right] (R_i - Id_{s_i})^{-1} \left[P_i \left(B_i + D_i \Delta_i(t) E_{2i} \right) + K_i^T \Lambda_i R_i \right]^T
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Usant que $-(R_i - Id_{s_i})^{-1} = (Id_{s_i} - R_i)^{-1} = \bar{R}_i$ i desenvolupant els primers termes de l'equació (5.14), obtenim

$$\begin{aligned}
S_i &= A_i^T P_i + P_i A_i + \left(B_i \Lambda_i K_i \right)^T P_i + P_i \left(B_i \Lambda_i K_i \right) \\
&\quad + \left(D_i \Delta_i(t) E_{1i} \right)^T P_i + P_i \left(D_i \Delta_i(t) E_{1i} \right) \\
&\quad + P_i \left(D_i \Delta_i(t) E_{2i} \Lambda_i K_i \right) + \left(D_i \Delta_i(t) E_{2i} \Lambda_i K_i \right)^T P_i \\
&\quad + W_i + K_i^T \Gamma_i^2 K_i + Q_i + K_i^T \Lambda_i R_i \Lambda_i K_i + P_i \left(\sum_{j \neq i} G_{ij} G_{ij}^T \right) P_i \\
&\quad + \left[P_i \left(B_i + D_i \Delta_i(t) E_{2i} \right) + K_i^T \Lambda_i R_i \right] \bar{R}_i \left[P_i \left(B_i + D_i \Delta_i(t) E_{2i} \right) + K_i^T \Lambda_i R_i \right]^T.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Usem ara la desigualtat matricial estàndard (DME):

$$\forall A, B \text{ matrius}, \beta > 0 \Rightarrow A^T B + B^T A \leq \beta A^T A + \frac{1}{\beta} B^T B.$$

Aquesta propietat ens permet treure la dependència de la inequació (5.15) en la matriu d'incerteses $\Delta_i(t)$ i acotar-la. Considerem els termes en $\Delta_i(t)$ de (5.15) i anem a acotar-los usant DME.

Siguin els dos primers termes en $\Delta_i(t)$ de (5.15) i sigui $\beta_{1i} > 0$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
P_i (D_i \Delta_i(t) E_{1i}) + (D_i \Delta_i(t) E_{1i})^T P_i &= (D_i^T P_i)^T \Delta_i(t) E_{1i} + (\Delta_i(t) E_{1i})^T D_i^T P_i \\
&\leq \beta_{1i} P_i D_i D_i^T P_i + \frac{1}{\beta_{1i}} E_{1i}^T \Delta_i^T(t) \Delta_i(t) E_{1i} \\
&\leq \beta_{1i} P_i D_i D_i^T P_i + \frac{1}{\beta_{1i}} E_{1i}^T E_{1i}.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Considerem ara el següent terme en $\Delta_i(t)$, i tornem a utilitzar la desigualtat DME per treure'n la dependència en l'incertesa. Per això, considerem $\beta_{i2} > 0$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
& (D_i \Delta_i(t) E_{2i} \Lambda_i K_i)^T P_i + P_i (D_i \Delta_i(t) E_{2i} \Lambda_i K_i) = \\
& = (\Delta_i(t) E_{2i} \Lambda_i K_i)^T D_i^T P_i + P_i D_i (\Delta_i(t) E_{2i} \Lambda_i K_i) \\
& \leq \beta_{i2} P_i D_i D_i^T P_i + \frac{1}{\beta_{i2}} K_i^T \Lambda_i E_{2i}^T \Delta_i^T(t) \Delta_i(t) E_{2i} \Lambda_i K_i \\
& \leq \beta_{i2} P_i D_i D_i^T P_i + \frac{1}{\beta_{i2}} K_i^T \Lambda_i E_{2i}^T E_{2i} \Lambda_i K_i .
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Considerem ara l'últim terme de (5.15) i en fem l'expansió:

$$\begin{aligned}
& P_i B_i \bar{R}_i (P_i B_i)^T + K_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i (K_i^T \Lambda_i R_i)^T + \\
& + P_i B_i \bar{R}_i (K_i^T \Lambda_i R_i)^T + K_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i (P_i B_i)^T \\
& + P_i D_i \Delta_i(t) E_{2i} \bar{R}_i (K_i^T \Lambda_i R_i)^T + K_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i (P_i D_i \Delta_i(t) E_{2i})^T \\
& + P_i B_i \bar{R}_i (P_i D_i \Delta_i(t) E_{2i})^T + P_i D_i \Delta_i(t) E_{2i} (P_i B_i \bar{R}_i)^T \\
& + P_i D_i \Delta_i(t) E_{2i} \bar{R}_i (P_i D_i \Delta_i(t) E_{2i})^T .
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Anem ara a acotar els termes en $\Delta_i(t)$ de (5.18), per ordre d'aparició. El primer és doncs:

$$\begin{aligned}
& P_i D_i \Delta_i(t) E_{2i} \bar{R}_i (K_i^T \Lambda_i R_i)^T + K_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i (P_i D_i \Delta_i(t) E_{2i})^T \\
& = (D_i^T P_i)^T \left(\Delta_i(t) E_{2i} \bar{R}_i R_i \Lambda_i K_i \right) + \left(\Delta_i(t) E_{2i} \bar{R}_i R_i \Lambda_i K_i \right)^T D_i^T P_i \\
& \leq \beta_{3i} P_i D_i D_i^T P_i + \frac{1}{\beta_{3i}} K_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i E_{2i}^T \Delta_i^T(t) \Delta_i(t) E_{2i} \bar{R}_i R_i \Lambda_i K_i \\
& \leq \beta_{3i} P_i D_i D_i^T P_i + \frac{1}{\beta_{3i}} K_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i E_{2i}^T E_{2i} \bar{R}_i R_i \Lambda_i K_i ,
\end{aligned} \tag{5.19}$$

per a $\beta_{3i} > 0$ constant i per a tota incertesa admissible.

Anem a acotar ara el següent terme en $\Delta_i(t)$ de (5.18). Per això, considerem $\beta_{4i} > 0$. Aleshores, tenint en compte que $\Delta_i^T(t) \Delta_i(t) \leq Id$,

$$\begin{aligned}
& P_i B_i \bar{R}_i (P_i D_i \Delta_i(t) E_{2i})^T + P_i D_i \Delta_i(t) E_{2i} \bar{R}_i (P_i B_i)^T \\
& = (D_i^T P_i)^T \Delta_i(t) E_{2i} \bar{R}_i B_i^T P_i + \left(\Delta_i(t) E_{2i} \bar{R}_i B_i^T P_i \right)^T D_i^T P_i \\
& \leq \beta_{4i} P_i D_i D_i^T P_i + \frac{1}{\beta_{4i}} P_i B_i \bar{R}_i E_{2i}^T E_{2i} \bar{R}_i B_i^T P_i .
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Finalment, l'últim terme de (5.18) a acotar és:

$$P_i D_i \Delta_i(t) E_{2i} \bar{R}_i [P_i D_i \Delta_i(t) E_{2i}]^T .$$

De les condicions 5.1 i 5.2 sobre les incerteses, treiem que es pot acotar de la següent manera:

$$\begin{aligned} P_i D_i \Delta_i(t) E_{2i} \bar{R}_i E_{2i}^T \Delta_i^T(t) D_i P_i \\ \leq \delta_i P_i D_i \Delta_i(t) \Delta_i^T(t) D_i P_i \\ \leq \delta_i P_i D_i D_i^T P_i , \end{aligned} \quad (5.21)$$

per a cert $\delta_i > 0$ donat.

De les inequacions (5.16)-(5.21) que acabem d'establir, resulta que l'equació (5.15) verifica, per a $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3}$ i β_{i4} positius donats,

$$\begin{aligned} S_i \leq & A_i^T P_i + P_i A_i + (B_i \Lambda_i K_i)^T P_i + P_i (B_i \Lambda_i K_i) + \\ & + \beta_{i1} P_i D_i D_i^T P_i + \frac{1}{\beta_{i1}} E_{1i}^T E_{1i} \\ & + \beta_{i2} P_i D_i D_i^T P_i + \frac{1}{\beta_{i2}} K_i^T \Lambda_i E_{2i}^T E_{2i} \Lambda_i K_i \\ & + W_i + K_i^T \Gamma_i^2 K_i + Q_i + K_i^T \Lambda_i R_i \Lambda_i K_i + P_i (\sum_{j \neq i} G_{ij} G_{ij}^T) P_i \\ & + \beta_{i3} P_i D_i D_i^T P_i + \frac{1}{\beta_{i3}} K_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i E_{2i}^T E_{2i} \bar{R}_i R_i \Lambda_i K_i \\ & + \beta_{i4} P_i D_i D_i^T P_i + \frac{1}{\beta_{i4}} P_i B_i \bar{R}_i E_{2i}^T E_{2i} \bar{R}_i B_i^T P_i \\ & + P_i B_i \bar{R}_i (P_i B_i)^T + K_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i (K_i^T \Lambda_i R_i)^T \\ & + K_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i (P_i B_i)^T + P_i B_i \bar{R}_i (K_i^T \Lambda_i R_i)^T \\ & + \delta_i P_i D_i D_i P_i . \end{aligned} \quad (5.22)$$

Cal imposar ara que l'equació (5.22) és definida negativa: $S_i < 0$. Abans, introduïm les matrius $X_i > 0$ simètrica i Y_i tals que

$$\begin{cases} P_i = X_i^{-1} , \\ K_i = Y_i X_i^{-1} . \end{cases}$$

Substituint-les en (5.22), obtenim la següent inequació matricial, on

$$\mu_i = \beta_{i1} + \beta_{i2} + \beta_{i3} + \beta_{i4} + \delta_i$$

$$W_i = \sum_{j \neq i} W_{ji}^T W_{ji} ,$$

obtenim

$$\begin{aligned}
S_i \leq & A_i^T X_i^{-1} + X_i^{-1} A_i + (B_i \Lambda_i Y_i X_i^{-1})^T X_i^{-1} + X_i^{-1} (B_i \Lambda_i Y_i X_i^{-1}) \\
& + \frac{1}{\beta_{i1}} E_{1i}^T E_{i1} + \frac{1}{\beta_{i2}} X_i^{-1} Y_i^T \Lambda_i E_{2i}^T E_{2i} \Lambda_i Y_i X_i^{-1} \\
& + W_i + X_i^{-1} Y_i^T \Gamma_i^2 Y_i X_i^{-1} + Q_i + X_i^{-1} Y_i^T \Lambda_i R_i \Lambda_i Y_i X_i^{-1} + X_i^{-1} \left(\sum_{j \neq i} G_{ij} G_{ij}^T \right) X_i^{-1} \\
& + \frac{1}{\beta_{3i}} X_i^{-1} Y_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i E_{2i}^T E_{2i} \bar{R}_i R_i \Lambda_i Y_i X_i^{-1} \\
& + \frac{1}{\beta_{4i}} X_i^{-1} B_i \bar{R}_i E_{2i}^T E_{2i} \bar{R}_i B_i^T X_i^{-1} \\
& + X_i^{-1} B_i \bar{R}_i [X_i^{-1} B_i]^T + X_i^{-1} Y_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i [X_i^{-1} Y_i^T \Lambda_i R_i]^T \\
& + X_i^{-1} Y_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i [X_i^{-1} B_i]^T + X_i^{-1} B_i \bar{R}_i [X_i^{-1} Y_i^T \Lambda_i R_i]^T \\
& + \mu_i X_i^{-1} D_i D_i X_i^{-1} .
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Pre- i post-multiplicant totes dues bandes de la desigualtat (5.23) per X_i , tenim

$$\begin{aligned}
S_i \leq & X_i A_i^T + A_i X_i + (B_i \Lambda_i Y_i)^T + B_i \Lambda_i Y_i + \\
& + \frac{1}{\beta_{i1}} X_i E_i^T E_i X_i + \frac{1}{\beta_{i2}} Y_i^T \Lambda_i E_{2i}^T E_{2i} \Lambda_i Y_i \\
& + X_i W_i X_i + Y_i^T \Gamma_i^2 Y_i + X_i Q_i X_i + Y_i^T \Lambda_i R_i \Lambda_i Y_i + \sum_{j \neq i} G_{ij} G_{ij}^T \\
& + \frac{1}{\beta_{3i}} Y_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i E_{2i}^T E_{2i} \bar{R}_i R_i \Lambda_i Y_i \\
& + \frac{1}{\beta_{4i}} B_i \bar{R}_i E_{2i}^T E_{2i} \bar{R}_i B_i^T \\
& + B_i \bar{R}_i B_i^T + Y_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i R_i \Lambda_i Y_i \\
& + Y_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i B_i^T + B_i \bar{R}_i R_i \Lambda_i Y_i \\
& + \mu_i D_i D_i .
\end{aligned}$$

Reagrupant els termes convenientment, obtenim

$$\begin{aligned}
S_i \leq & X_i A_i^T + A_i X_i + \mu_i D_i D_i^T + B_i \bar{R}_i B_i^T + \sum_{j \neq i} G_{ij} G_{ij}^T \\
& + Y_i^T \Lambda_i (R_i \bar{R}_i + Id) B_i^T + B_i (\bar{R}_i R_i + Id) \Lambda_i Y_i \\
& + \frac{1}{\beta_{1i}} X_i E_{1i}^T E_{1i} X_i + X_i W_i X_i + X_i Q_i X_i \\
& + \frac{1}{\beta_{2i}} Y_i^T \Lambda_i E_{2i}^T E_{2i} \Lambda_i Y_i + Y_i^T \Gamma_i^2 Y_i \\
& + Y_i^T \Lambda_i R_i \Lambda_i Y_i + Y_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i R_i \Lambda_i Y_i \\
& + \frac{1}{\beta_{3i}} Y_i^T \Lambda_i R_i \bar{R}_i E_{2i}^T E_{2i} \bar{R}_i R_i \Lambda_i Y_i \\
& + \frac{1}{\beta_{4i}} B_i \bar{R}_i E_{2i}^T E_{2i} \bar{R}_i B_i^T .
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Per Schur, veure que l'equació (5.24) és definida negativa és equivalent a que es verifiqui (5.10). Per tant, com tenim per hipòtesi que (5.10) té solució, resulta que $S_i < 0$, d'on $M_i < 0$. Pel Teorema 4.1, el conjunt de controls $u_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, definit en (5.11) és doncs fiable i de cost quadràtic garantit i es verifica la cota del cost (5.12), quedant demostrada la proposició. \square

Nota 5.1. En (5.23), tenim que $S_i \leq A_i^T X_i^{-1} + \dots < 0$. Per tal d'obtenir les hipòtesis del Teorema 5.1, cal fer les pre- i post-multiplicacions per X_i . Per tant, obtenim de fet que $X_i S_i X_i \leq X_i (A_i^T + \dots) X_i < 0$. Aquesta última desigualtat és certa aplicant Schur a les hipòtesis del teorema. Per tant, obtenim que $X_i S_i X_i < 0$ i com $X_i > 0$, això només podrà ser cert si $S_i < 0$, es pot aplicar el Teorema 4.1.

Acabem de dissenyar el control fiable amb cost quadràtic garantit, per a sistemes interconnectats amb incerteses normades. Aquest disseny es basa en trobar matrius X_i i Y_i tal que fan viable certa LMI. Aquest fet facilita la seva resolució numèrica. A continuació presentem un exemple il·lustratiu de l'eficàcia del nostre mètode.

5.3 Independència en les condicions inicials

Per tal d'implementar el control descentralitzat que proposem, hem de resoldre el següent problema:

Σ_{i0} : Donat un valor inicial x_{i0} , trobar $(X_i, Y_i, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3}, \beta_{i4}, \delta_i)$ tal que (5.9)–(5.10) són viables.

La cota (5.12) de la funció de cost depèn de les condicions inicials. Per tal de treure'n la dependència, assumim que els valors inicials del vector d'estat són vectors aleatoris de mitjana zero, amb matriu de covariància $E(x_{i0} x_{i0}^T) = Id$, on $E(\cdot)$ és l'operador esperança. Aleshores, es pot escriure la cota com

$$E(J) < \sum_{i=1}^N \text{tr}(X_i^{-1}) .$$

Considerem ara la matriu simètrica Z_i tal que $Z_i > X_i^{-1}$. Aquesta matriu permet transformar el problema anterior en el problema següent:

Σ_i : Minimitzar $\text{tr}(Z_i)$ sobre $(X_i, Y_i, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3}, \beta_{i4}, \delta_i, Z_i)$ satisfent (5.9)–(5.10) i

$$\begin{pmatrix} -Z_i & I_{n_i} \\ I_{n_i} & -X_i \end{pmatrix} < 0 . \quad (5.25)$$

Aquest problema s'ha de resoldre per a cada $i = 1, \dots, N$, per tal d'acotar el cost corresponent a tot el sistema interconnectat. El problema Σ_i té una variable addicional i una LMI de més a resoldre, però el resultat que s'obté és més general que l'anterior problema Σ_{i0} .

5.4 Aplicació numèrica

Presentem a continuació un exemple numèric que demostra l'eficàcia del mètode. Sigui el sistema interconnectat amb incerteses (5.1), format per tres sistemes 2-dimensionals: $n_i = 2, s_i = 1, \forall i = 1, 2, 3$. Les matrius del sistema i les matrius d'incerteses són les següents:

$$\begin{aligned} S_1 : & \left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, G_{12} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \right\} \\ S_2 : & \left\{ A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, G_{21} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0 \end{bmatrix}, G_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \right\} \\ S_3 : & \left\{ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, G_{31} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, G_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \right\} . \end{aligned}$$

Els vectors d'interconnexió $g_{ij}(t, x_j)$ estan acotats per $W_{ij} = \text{diag}(0.1, 0.1)$, per a tot i, j . Les matrius d'incerteses estan definides, per a cada $i = 1, \dots, N$, de la

següent forma:

$$D_i = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{1i} = [0 \ 1], E_{2i} = [0.1].$$

Considerem les matrius de cost $R_i = [0.7]$, $Q_i = \text{diag}(0.01, 0.01)$, mentre que segons el model de fallada considerat, tenim que:

$$\Lambda_1 = 0.7, \Gamma_1 = 0.1,$$

$$\Lambda_2 = 0.9, \Gamma_2 = 0.1,$$

$$\Lambda_3 = 0.9, \Gamma_3 = 0.2.$$

Aplicant la Proposició 5.1 i resolent el problema Σ_{i0} , amb les condicions inicials

$$x_{i0} = [1, 0.5]^T, \quad i = 1, 2, 3,$$

obtenim les següents matrius de guany:

$$K_1 = [4.5266, -19.9210],$$

$$K_2 = [2.4168, -18.7301], \quad (5.26)$$

$$K_3 = [51.0367, -88.1536],$$

que permeten calcular les lleis de control descentralitzat i realimentat per l'estat. La cota del cost és, en aquest cas, $\bar{J} = 8.9305$.

Si volem obtenir una cota independent de les condicions inicials, ens cal resoldre el problema Σ_i , per a $i = 1, 2, 3$, obtenint:

$$K_1 = [0.4181, -4.2939],$$

$$K_2 = [0.3922, -6.5882], \quad (5.27)$$

$$K_3 = [1.2621, -7.6932].$$

En aquest cas, la cota del cost val $\bar{J} = 29.5700$.

Amb el toolbox LMI del programa Matlab, hem definit la funció següent, que ens permet resoldre la Proposició 5.1.

```
function [K,J]=resolmi(n,s)
% Definició de les variables

setlmiis([]);

X=lmivar(1,[n,1]); Y=lmivar(2,[s,n]); b1=lmivar(1,[1,1]);
b2=lmivar(1,[1,1]); b3=lmivar(1,[1,1]); deltai=lmivar(1,[1,1]);
```



```

Zi=lmivar(1,[n,1]);

% Fitxers de dades i definicio matrius

dades; ID=eye(s); Rinv=inv(ID-R); B1=LAM*(ID+R*Rinv)*B';
C1=B*Rinv*B'+G1*G1'+G2*G2';

E2=LAM*E2i'; R1=LAM*R; Q2=-inv(Q); Wi=-inv(W'*W); R2=-inv(R);
Q5=R-ID;

% lmi 1: LMI (5.10) de la proposició 5.1
%Primera fila
  lmiterm([1 1 1 X],A,1,'s');
  lmiterm([1 1 1 -Y],1,B1,'s');
  lmiterm([1 1 1 0],C1);
  lmiterm([1 1 1 delta1],1,D*D');
  lmiterm([1 1 1 b1],1,D*D');
  lmiterm([1 1 1 b2],1,D*D');
  lmiterm([1 1 1 b3],1,D*D');
  lmiterm([1 1 1 delta1],1,D*D');
% Segons termes de la fila 1
  lmiterm([1 1 2 X],1,E1i');
  lmiterm([1 1 3 X],1,1);
  lmiterm([1 1 4 X],1,1);
  lmiterm([1 1 5 -Y],1,E2);
  lmiterm([1 1 6 -Y],1,GA);
  lmiterm([1 1 7 -Y],1,LAM);
  lmiterm([1 1 8 -Y],1,R1);
  lmiterm([1 1 9 -Y],1,R1*Rinv*E2i');
  lmiterm([1 1 10 0],B*Rinv*E2i');
%Termes diagonal
  lmiterm([1 2 2 b1],-1,1);
  lmiterm([1 3 3 0],Wi);
  lmiterm([1 4 4 0],Q2);
  lmiterm([1 5 5 b1],-1,1);
  lmiterm([1 6 6 0],-1);
  lmiterm([1 7 7 0],R2);
  lmiterm([1 8 8 0],R-ID);
  lmiterm([1 9 9 b3],-1,1);
  lmiterm([1 10 10 b2],-1,1);
% Variables positives
  lmiterm([-2 1 1 X],1,1);
  lmiterm([-3 1 1 b1],1,1);
  lmiterm([-4 1 1 b2],1,1);

```

```

lmiterm([-5 1 1 b3],1,1);
lmiterm([-6 1 1 deltai],1,1);
lmiterm([-7 1 1 Zi],1,1);
lmiterm([8 1 1 deltai],-1,1);
lmiterm([8 1 1 0],M);
lmiterm([9 1 1 Zi],-1,eye(n));
lmiterm([9 1 2 0],eye(n));
lmiterm([9 2 2 X],-1,1);

```

```
lmil=getlmis;
```

Per a resoldre el problema Σ_{i0} , utilitzem les instruccions de viabilitat:

```

[tmin,xffeas]=feasp(lmil); X1=dec2mat(lmil,xffeas,X);
Y1=dec2mat(lmil,xffeas,Y); K=Y1*inv(X1);
%Valor inicial
x0=[1;0.5];
J=x0'*inv(X1)*x0;

```

Per a resoldre el problema Σ_i , cal utilitzar la instrucció `mincx`, que minitza la relació `cx` sota condicions LMI:

```

c=mat2dec(lmil,0,0,0,0,0,0,eye(n)); options=[1e-5 0 0 0 0];
[copt,xopt]=mincx(lmil,c,options); X1=dec2mat(lmil,xopt,X);
Y1=dec2mat(lmil,xopt,Y); K=Y1*inv(X1); Z=dec2mat(lmil,xopt,Zi);
J=trace(Z);

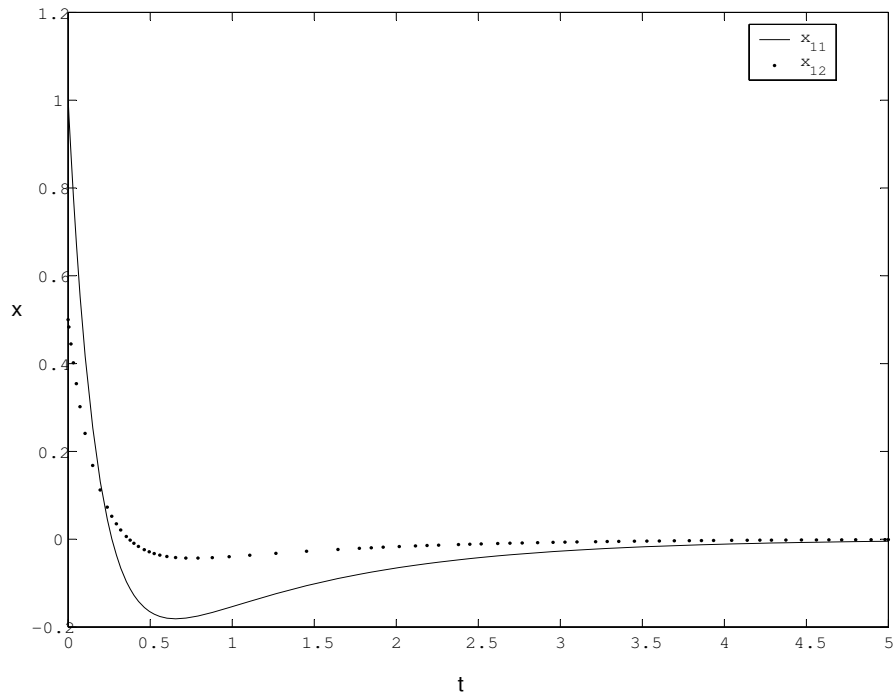
```

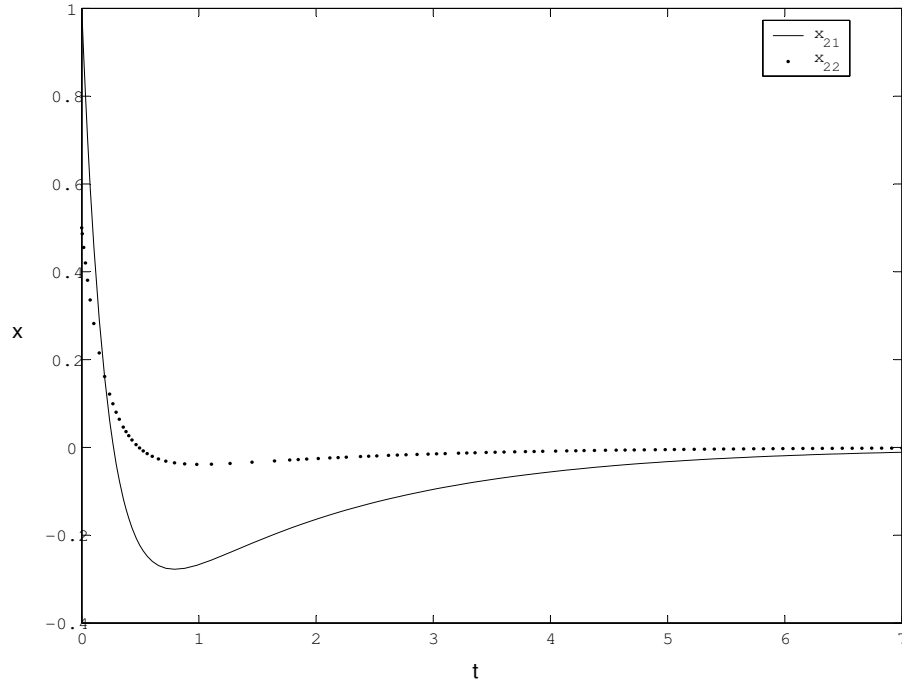
A continuació, en les figures 5.1, 5.2 i 5.3, presentem la resposta temporal del sistema amb els control (5.26). Hem escollit els següent valors per a les matrius d'incerteses, vectors d'interconnexió i vector de fiabilitat, respectivament:

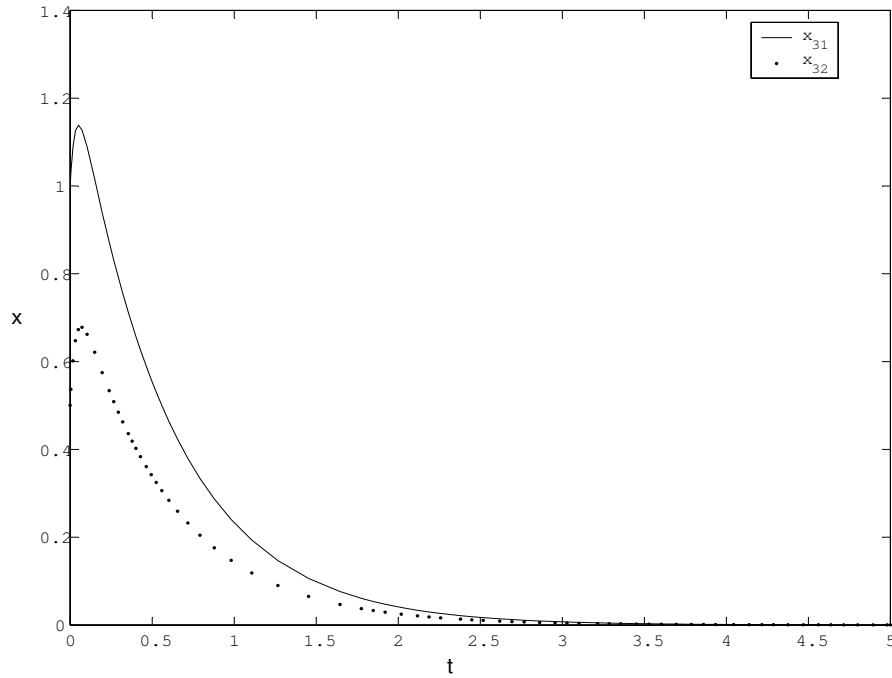
$$\Delta_i(t) = \sin(t)$$

$$g_{ij} = 0.005 x_j$$

$$\phi_i = 0.005 u_i$$

Figura 5.1: Resposta temporal del sistema S_1

Figura 5.2: Resposta temporal del sistema S_2

Figura 5.3: Resposta temporal del sistema S_3

Capítol 6

Model politòpic

En aquest capítol tractem sistemes interconnectats, amb incerteses de tipus politòpic, dependents d'un vector paramètric α (veure Apartat 1.1.3). Enunciem els resultats que ens permeten dissenyar el control realimentat per l'estat, que assegura estabilitat, fiabilitat i cost quadràtic garantit. Aprofitant l'estructura paramètrica del sistema, utilitzarem funcions de Lyapunov paramètriques. El fet d'usar funcions de Lyapunov $V(t, \alpha)$ solventa el problema de la rigidesa de l'estabilitat quadràtica en front a petites variacions dels paràmetres o a paràmetres dependents del temps.

Donarem un disseny que es basa en les tècniques LMIs. En aquest sentit, usarem els resultats enunciats en el Capítol 3, on hem presentat tècniques per a separar les variables de Lyapunov de les dades del sistema (Proposició 3.1 i Teorema 3.3). La majoria de formulació LMI té que la funció de Lyapunov usada per a testar el comportament del sistema apareix multiplicant les variables del controlador. Aquest fet porta a restriccions innecessàries en el conjunt de solucions i limita l'ús pràctic d'aquests mètodes. Aquesta feblesa és superada usant variables auxiliars, tal com hem deduït en el Capítol 3, així com reemplaçant usant funcions de Lyapunov paramètriques per tal d'obtenir eines més acurades i reduir el grau de conservadorisme inherent als problemes de control robust.

L'avantatge de l'ús de les LMIs que obtenim en front de les LMI clàssiques és que permeten utilitzar funcions de Lyapunov sense perdre la linealitat paramètrica en α . Habitualment, quan tant les matrius del sistema com la funció de Lyapunov són paramètriques, s'obtenen equacions quadràtiques en el paràmetre α , que obliga a emprar tècniques d'optimització convexa que compliquen notablement la resolu-

ció del problema d'estabilitat.

Al final del capítol presentem una aplicació numèrica, que permet il·lustrar la bondat del mètode.

6.1 Introducció

Sigui el conjunt de N sistemes interconnectats

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \Delta A_i x_i(t) + \Delta B_i u_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G_{ij} g_{ij}(t, x_j) \\ x_i(0) = x_{i0} \quad , \quad i = 1, \dots, N . \end{cases} \quad (6.1)$$

Per les Condicions 1.1–1.2 de l'Apartat 1.3, les interconnexions verifiquen la següent acotació:

$$\|g_{ij}(t, x_j)\| \leq \|W_{ij} x_j\| \quad \text{amb} \quad W_i := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N W_{ji}^T W_{ji} > 0 . \quad (6.2)$$

El model d'incerteses queda definit ara en la forma

$$\begin{cases} \Delta A_i := A_i(\alpha) = \sum_{k=1}^L \alpha_k A_{i_k} , \\ \Delta B_i := B_i(\alpha) = \sum_{k=1}^L \alpha_k B_{i_k} . \end{cases} \quad (6.3)$$

El paràmetre α pertany al símplex Π_i definit per

$$\Pi_i = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^L, \sum_{k=1}^L \alpha_k = 1, \alpha_k \geq 0, k = 1, \dots, L \right\} , \quad (6.4)$$

per a cada $i = 1, \dots, N$. Es pot considerar que $A_i(\alpha) \in \text{co}\{A_{i_1}, \dots, A_{i_L}\}$ i $B_i(\alpha) \in \text{co}\{B_{i_1}, \dots, B_{i_L}\}$, conjunt de les combinacions convexes les matrius A_{i_k} i B_{i_k} , respectivament.

El problema que ens plantegem en aquest capítol és el de trobar un control descentralitzat realimentat per l'estat, tal que el sistema sigui estable i es garanteixi

cert rendiment o cost. Per això, cal calcular la funció de Lyapunov associada al sistema (6.1) i obtenir una condició tipus LMI. A partir d'ara i al llarg de tot el capítol, usem la següent notació, que permet distingir quan una matriu depèn del paràmetre α :

$$\mathbf{T} := T(\alpha) .$$

Abans de caracteritzar el control fiable amb cost quadràtic garantit, presentem primer el cas d'estabilitat en sistemes interconnectats amb incerteses. Després hi afegim la fiabilitat, per acabar tractant el problema del control RGC. En cada cas, obtenim el disseny del control realimentat per l'estat. Per a claretat en la notació, ometem la dependència en la variable temps t , és a dir,

$$x_i := x_i(t) , u_i := u_i(t) ,$$

i denotem per Id la matriu identitat de dimensió adequada.

6.2 Estabilitat

Considerem la funció paramètrica de Lyapunov

$$V(x, \alpha) = \sum_{i=1}^N x_i^T X_i(\alpha) x_i , \quad (6.5)$$

on $X_i(\alpha) = \sum_{k=1}^L \alpha_k X_{i_k}$, $\alpha \in \Pi_i$. Per tal de tenir estabilitat, cal que sigui efectivament una funció de Lyapunov:

1. $V(x, \alpha) > 0 \Leftrightarrow X_{i_k} > 0, \forall k = 1, \dots, L, \forall i = 1, \dots, N$;
2. $\frac{d}{dt} V(x, \alpha) < 0$.

Per tal que es compleixi la Condició 2, cal imposar que la funció $V(x, \alpha)$ sigui decreixent:

$$\frac{d}{dt} V = \sum_{i=1}^N \dot{x}_i^T \mathbf{X}_i x_i + x_i^T \mathbf{X}_i \dot{x}_i < 0 .$$

Cal veure ara quina condició s'obté. Tenint en compte que realmentem per l'estat, és a dir, $u_i = K_i x_i$, obtenim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V = & \sum_{i=1}^N x_i^T \left((\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i K_i)^T \mathbf{X}_i + \mathbf{X}_i (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i K_i) \right) x_i + \\ & + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j \neq i} g_{ij}^T(t, x_j) G_{ij}^T \mathbf{X}_i(\alpha) x_i + x_i^T \mathbf{X}_i G_{ij} g_{ij}(t, x_j) \right) . \end{aligned}$$

Seguint els passos de la demostració del Teorema 4.1, acotem el terme en g_{ij} usant la Condició (6.2) i els complements de Schur. Volem obtenir $\frac{d}{dt}V < 0$. Aquesta inequació és certa si la següent desigualtat matricial es verifica per a $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i K_i)^T \mathbf{X}_i + \mathbf{X}_i (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i K_i) & * & * & * & * \\ G_{ij}^T \mathbf{X}_i & -Id & * & * & * \\ \vdots & 0 & -Id & * & * \\ G_{ij}^T \mathbf{X}_i & 0 & 0 & -Id & * \\ Id & 0 & 0 & 0 & -W_i^{-1} \end{pmatrix} < 0. \quad (6.6)$$

Volem aplicar ara els resultats obtinguts en el Capítol 3, per a obtenir una condició LMI paramètrica (PLMI) prou eficient. Per això, reescrivim primer la inequació (6.6) de forma més compacta:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i K_i)^T \mathbf{X}_i + \mathbf{X}_i (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i K_i) & * & * \\ G_i^T \mathbf{X}_i & Q_{11}^i & * \\ C_i & Q_{21}^i & Q_{22}^i \end{pmatrix} < 0, \quad (6.7)$$

on

$$G_i = (G_{i1}, \dots, G_{iN})$$

$$C_i = Id$$

$$Q_{11}^i = \text{diag}(-Id, \dots, -Id)$$

$$Q_{21}^i = (0, 0, 0)$$

$$Q_{22}^i = -W_i^{-1}.$$

Usant la Proposició 3.1, podem enunciar la següent proposició.

Proposició 6.1. *Sota les condicions (6.2) sobre les interconnexions, amb el model d'incerteses donat per (6.3) i (6.4), el sistema (6.1) realimentat pel conjunt de controladors $u_i = K_i x_i$, $i = 1, \dots, N$, és estable amb funció de Lyapunov $V(x, \alpha) = \sum_{i=1}^N x_i^T X_i(\alpha) x_i$ si existeixen matrius $\{Y_{i_k}\}_k$ simètriques definides*

positives, matrius V_i invertibles i N_i que verifiquen

$$\begin{pmatrix} -(V_i + V_i^T) & * & * & * & * \\ A_{i_k} + Y_{i_k} + B_{i_k} N_i & -Y_{i_k} & * & * & * \\ 0 & G_i^T & Q_{11}^i & * & * \\ C_i V_i & 0 & Q_{21}^i & Q_{22}^i & * \\ V_i & 0 & 0 & 0 & -Y_{i_k} \end{pmatrix} < 0, \quad (6.8)$$

$$\begin{pmatrix} -Y_{i_k} & * \\ G_i^T & Q_{11}^i \end{pmatrix} < 0, \quad k = 1, \dots, L, \quad (6.9)$$

per tot $k = 1, \dots, L$, $i = 1, \dots, N$. En aquest cas:

$$\begin{cases} K_i = N_i V_i^{-1}, \\ X_i(\alpha) = \sum_{k=1}^L \alpha_k Y_{i_k}^{-1}. \end{cases} \quad (6.10)$$

Demostració. La demostració és una aplicació directa de la Proposició 3.1, que afirma que les inequacions matricials (6.7) i les inequacions

$$\begin{pmatrix} -(V_i + V_i^T) & * & * & * & * \\ \mathbf{A}_i + \mathbf{Y}_i + \mathbf{B}_i N_i & -\mathbf{Y}_i & * & * & * \\ 0 & G_i^T & Q_{11}^i & * & * \\ C_i V_i & 0 & Q_{21}^i & Q_{22}^i & * \\ V_i & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{Y}_i \end{pmatrix} < 0, \quad (6.11)$$

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{Y}_i & * & * \\ G_i^T & Q_{11}^i & * \\ 0 & Q_{21}^i & Q_{22}^i \end{pmatrix} < 0, \quad (6.12)$$

són equivalents. Com $\sum_{k=1}^L \alpha_k = 1$, per les propietats de convexitat i la Definició 2.3 de LMI paramètrica, tenim que (6.11) és de fet la inequació (6.8). D'altra

banda, com $Q_{12} = 0$, tenim que (6.12) és equivalent a (6.9), quedant demostrada així l'estabilitat del sistema en llaç tancat. En la demostració del Proposició 3.1, hem vist que $N := KV$. En el cas present, cal tenir en compte que tenim un sistema format per N subsistemes, i que les condicions les hem descomposat en $N \cdot L$ condicions, amb $i = 1, \dots, N$. Tenim doncs que $K_i = N_i V_i^{-1}$ i $X_{i_k} = Y_{i_k}^{-1}$. Així s'acaba la demostració d'aquesta proposició. \square

6.3 Estabilitat i fiabilitat

Considerem el següent model de fiabilitat donat en el Capítol 1 per l'equació (1.10)–(1.12):

$$\begin{cases} u_i^F = \Lambda_i u_i + \phi_i(u_i) , \\ \|\phi_i\| \leq \|\Gamma_i u_i\| . \end{cases} \quad (6.13)$$

En presència de fallades, el sistema (6.1) queda expressat per

$$\dot{x}_i = \mathbf{A}_i x_i + \mathbf{B}_i u_i^F + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G_{ij} g_{ij}(t, x_j) . \quad (6.14)$$

Cal estudiar l'estabilitat d'aquest sistema. Per això, considerem la funció:

$$V(x, \alpha) = \sum_{i=1}^N x_i^T X_i(\alpha) x_i .$$

En imposar les condicions per tal que sigui de Lyapunov, trobem que s'ha de verificar la següent desigualtat matricial, per a cada $i = 1, \dots, N$:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \Lambda_i K_i)^T \mathbf{X}_i + (*) + W_i + K_i^T \Gamma_i^2 K_i & * & * \\ G_i^T \mathbf{X}_i & -Id & * \\ \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}_i & 0 & -Id \end{pmatrix} < 0 , \quad (6.15)$$

on $G_i = (G_{i1}, \dots, G_{iN})$ és la matriu d'interconnexions. Per tal de dur a terme una linealització que ens permeti calcular tant la funció de Lyapunov $V(x, \alpha)$ com la

matriu de realimentació K_i , fem les següents consideracions. Siguin les matrius

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{B}}_i &= \mathbf{B}_i \Lambda_i \\
 \mathbf{E}_i &= \begin{pmatrix} G_i, \mathbf{B}_i \end{pmatrix} \\
 F_i &= \Gamma_i \\
 C_i &= Id \\
 Q_{11}^i &= \text{diag}(-Id, -Id) \\
 Q_{22}^i &= -W_i \\
 Q_{33}^i &= -Id .
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Aleshores, degut al complement de Schur, l'equació (6.15) és equivalent a

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{A}_i + \bar{\mathbf{B}}_i K_i)^T \mathbf{X}_i + (*) & * & * & * \\ \mathbf{E}_i^T \mathbf{X}_i & Q_{11}^i & * & * \\ C_i & 0 & Q_{22}^i & * \\ F_i K_i & 0 & 0 & Q_{33}^i \end{pmatrix} < 0 . \tag{6.17}$$

Aleshores, aplicant el Teorema 3.3 i fent com en l'apartat anterior, obtenim una LMI paramètrica, que és certa si es verifica en cada vèrtex del conjunt convex on estan definides les matrius del sistema. Aquest fet ens permet dissenyar un control fiable estable realimentat per l'estat. Considerant les matrius donades en (6.16) i tenint en compte que $\bar{B}_{i_k} = \Lambda_i B_{i_k}$, establim la següent proposició.

Proposició 6.2. *Sota les condicions (6.2) sobre les interconnexions, amb el model paramètric (6.3)–(6.4) i el model de fiabilitat (6.13), el sistema (6.14) realimentat pel conjunt de controls $u_i = K_i x_i$, és fiable i estable amb funció de Lyapunov $V(x, \alpha) = \sum_{i=1}^N x_i^T X_i(\alpha) x_i$ si existeixen matrius $\{Y_{i_k}\}_k$ simètriques definides*

positives, matrius V_i i N_i que verifiquen

$$\begin{pmatrix} -(V_i + V_i^T) & * & * & * & * & * \\ A_{i_k} V_i + Y_{i_k} + \bar{B}_{i_k} N_i & -Y_{i_k} & * & * & * & * \\ 0 & E_{i_k}^T & Q_{11}^i & * & * & * \\ C_i V_i & 0 & 0 & Q_{22}^i & * & * \\ F_i^T N_i & 0 & 0 & 0 & Q_{33}^i & * \\ V_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_{i_k} \end{pmatrix} < 0, \quad (6.18)$$

$$\begin{pmatrix} -Y_{i_k} & * \\ E_{i_k} & Q_{11}^i \end{pmatrix} < 0, \quad (6.19)$$

per a tot $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, L$. En aquest cas:

$$\begin{cases} K_i = N_i V_i^{-1}, \\ X_i(\alpha) = \sum_{k=1}^L \alpha_k Y_{i_k}^{-1}. \end{cases} \quad (6.20)$$

Demostració. La demostració és semblant a la de la Proposició 6.1. Sabem que el sistema (6.14) és estable i fiable si existeixen matrius X_i i K_i tals que la inequació (6.17) és viable. Usant el Teorema 3.3, la desigualtat matricial (6.17) és equivalent a

$$\begin{pmatrix} -(V_i + V_i^T) & * & * & * & * & * \\ \mathbf{A}_i V_i + \mathbf{Y}_i + \bar{\mathbf{B}}_i N_i & -\mathbf{Y}_i & * & * & * & * \\ 0 & \mathbf{E}_i^T & Q_{11}^i & * & * & * \\ C_i V_i & 0 & 0 & Q_{22}^i & * & * \\ F_i^T N_i & 0 & 0 & 0 & Q_{33}^i & * \\ V_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{Y}_i \end{pmatrix} < 0, \quad (6.21)$$

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{Y}_i & * & * & * \\ \mathbf{E}_i & Q_{11}^i & * & * \\ 0 & 0 & Q_{22}^i & * \\ 0 & 0 & 0 & Q_{33}^i \end{pmatrix} < 0. \quad (6.22)$$

Per la propietat de convexitat, tenim que $\sum_{k=1}^L \alpha_k = 1$. Per tant, la inequació (6.21) és equivalent a (6.18). D'altra banda, aplicant els complements de Schur i aquesta propietat de convexitat, la LMI (6.22) és equivalent a (6.19). Per tant, sota les hipòtesis de la proposició, el sistema en llaç tancat (6.14) és estable i el control descentralitzat definit per $u_i = N_i V_i^{-1} x_i$ és fiable. \square

6.4 Estabilitat, fiabilitat i cost garantit

Contemplem ara el problema de cost quadràtic garantit i fiabilitat. Per això, sigui el sistema (6.14) amb la funció de cost

$$J = \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} x_i^T Q_i x_i + (u_i^F)^T R_i u_i^F dt. \quad (6.23)$$

Les matrius constants $Q_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ i $R_i \in \mathbb{R}^{s_i \times s_i}$ són simètriques definides positives, per a tot $i = 1, \dots, N$.

En aquest cas, usant el Teorema 4.1 i la caracterització donada per la Proposició 4.1, la condició que s'ha de verificar per tal de tenir cost garantit i fiabilitat és la següent:

$$\left(\begin{array}{ccc} \left(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i (\Lambda_i + (Id - R_i)^{-1} R_i \Lambda_i) K_i \right)^T \mathbf{X}_i + (*) & * & * \\ \begin{pmatrix} G_i^T \\ \mathbf{B}_i^T \end{pmatrix} \mathbf{X}_i & \begin{pmatrix} -Id & * \\ 0 & R_i - Id \end{pmatrix} & * \\ \begin{pmatrix} Id \\ Id \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} \Gamma_i \\ \Lambda_i \\ R_i \Lambda_i \end{pmatrix} K_i & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \\ \left(\begin{array}{cc} -Q_i^{-1} & * \\ 0 & -W_i^{-1} \end{array} \right) & * \\ 0 & \left(\begin{array}{ccc} -R_i^{-1} & * & * \\ 0 & -Id & * \\ 0 & 0 & R_i - Id \end{array} \right) \end{array} \right) < 0 . \quad (6.24)$$

Aquí veiem que cal afegir una restricció sobre la funció de cost R_i , ja que cal que els termes diagonals siguin definits negatius i invertibles. En cas contrari, no es pot resoldre aquesta desigualtat matricial.

Condicció 6.1. La matriu definida positiva R_i verifica que $R_i - Id$ és invertible i que

$$R_i - Id < 0 .$$

Aquesta condició treu llibertat sobre la funció de cost, en pro de la fiabilitat. És a dir, si demanem que el control sigui fiable, perdem llibertat en el cost, encara que continua sent garantit. Per tant, podem aplicar el Teorema 3.3, obtenint un sistema de $N \cdot L$ inequacions lineals matricials que permeten calcular el control descentralitzat d'un sistema format per N subsistemes interconnectats. A més a més, aquests controls són fiables, i s'obté una cota de la funció cost.

La següent proposició recull aquests resultats. Considerem les matrius

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_i \left(Id + (Id - R_i)^{-1} R_i \right) \Lambda_i$$

$$F_i = \left(\Lambda_i, \Gamma_i, \Lambda_i R_i \right)$$

$$C_i = \left(Id, Id \right)^T$$

$$\mathbf{E}_i = \left(G_i, \mathbf{B}_i \right)$$

$$Q_{11} = \left(\begin{array}{cc} -Id & * \\ 0 & R_i - Id \end{array} \right)$$

$$Q_{22} = \begin{pmatrix} -Q_i^{-1} & * \\ 0 & -W_i^{-1} \end{pmatrix}$$

$$Q_{33} = \begin{pmatrix} -R_i^{-1} & * & * \\ 0 & -Id & * \\ 0 & 0 & R_i - Id \end{pmatrix}.$$

Proposició 6.3. *Sota les condicions (6.2) sobre les interconnexions, la Condició 6.1 sobre la matriu de cost R_i i el model de fiabilitat (6.13), sigui el sistema (6.14) amb incerteses convexes (6.3)–(6.4) i la funció de cost (6.23).*

Aleshores, el conjunt de controls realimentats per l'estat $u_i = K_i x_i$ és fiable amb cost quadràtic garantit, amb funció de Lyapunov $V(x, \alpha) = \sum_{i=1}^N x_i^T X_i(\alpha) x_i$ si existeixen matrius simètriques $\{Y_{i_k}\}_{k=1, \dots, L}$ definides positives, matrius V_i i N_i que fan viables les dues següents LMIs:

$$\begin{pmatrix} -(V_i + V_i^T) & * & * & * & * & * \\ A_{i_k} V_i + Y_{i_k} + \bar{B}_{i_k} N_i & -Y_{i_k} & * & * & * & * \\ 0 & E_{i_k}^T & Q_{11}^i & * & * & * \\ C_i V_i & 0 & 0 & Q_{22}^i & * & * \\ F_i^T N_i & 0 & 0 & 0 & Q_{33}^i & * \\ V_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_{i_k} \end{pmatrix} < 0, \quad (6.25)$$

$$\begin{pmatrix} -Y_{i_k} & * \\ E_{i_k}^T & Q_{11}^i \end{pmatrix} < 0, \quad (6.26)$$

per a tot $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, L$. En aquest cas, la matriu de guany i la funció de Lyapunov estan definides per

$$\begin{cases} K_i = N_i V_i^{-1}, \\ X_i(\alpha) = \sum_{k=1}^L \alpha_k Y_{i_k}^{-1}. \end{cases} \quad (6.27)$$

A més a més, tenim que per a qualsevol estat inicial $x_i(0) = x_{i0}$ donat, es verifica la següent cota del cost:

$$J < \sum_{i=1}^N x_{i0}^T X_i(\alpha) x_{i0}. \quad (6.28)$$

Si Γ_i és nul·la, la LMI (6.25) continua essent ben definida. Per tant, es poden tractar tant els casos de funcionament normal ($\Lambda_i = I$, $\Gamma_i = 0$) com els casos de funcionament parcial ($\Gamma_i \neq 0$).

Demostració. La demostració és una aplicació directa dels teoremes 4.1 i 3.3, com en la Proposició 6.2. El Teorema 4.1 dóna el disseny de la llei de control RGC, mentre que el Teorema 3.3 en dóna la caracterització LMI. Només cal tenir present que, en tractar-se d'incerteses convexes, es verifica que $\sum_{k=1}^L \alpha_k = 1$. \square

Cal tenir present que la cota (6.28) del cost depèn de les condicions inicials i del paràmetre α . Per tal de treure'n la dependència respecte les condicions inicials, es poden considerar els mètodes presentats en el Capítol 8. Però per a obtenir una cota no paramètrica, s'ha d'aprofitar l'estructura del model polítòpic i considerar tots els possibles estats inicials no nuls, prenent la mitjana de la cota (6.28):

$$\mathcal{E}(J) < \sum_{i=1}^N \text{tr}(X_i(\alpha)) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^L \text{tr}(X_{i_k}) \alpha_k .$$

Aquesta inequació permet trobar el valor òptim de la cota. En efecte, considerant $Z_k := \sum_{i=1}^N \text{tr}(X_{i_k})$ i per $\sum_{k=1}^L \alpha_k = 1$, tenim

$$\mathcal{E}(J) < \sum_{k=1}^L Z_k \alpha_k < \sum_{k=1}^L \max_k(Z_k) \alpha_k < \max_k(Z_k).$$

Aleshores, la cota del cost es transforma en: $\bar{J} = \max_k(Z_k)$. En conseqüència, el problema que volem resoldre és el següent:

Problema Σ

Trobar el màxim respecte k de $Z_k := \sum_{i=1}^N \text{tr}(X_{i_k})$, tal que les LMIs (6.25) i (6.26) són viables.

6.5 Cas particular: interconnexions paramètriques

El vector d'interconnexions $g_{ij}(t, x_j)$ no pot desaparèixer, ja que la Condició 1.1 és la que permet obtenir una LMI ben definida i així tenir control descentralitzat, tal i com hem justificat en el Capítol 1. Si tenim que els termes que defineixen les interconnexions també tenen estructura paramètrica, és a dir,

$$G_{ij} := G_{ij}(\alpha) = \sum_{k=1}^L \alpha_k G_{ij_k} ,$$

s'obtenen les mateixes LMIs en G_{ijk} . En aquest cas, la definició del terme \mathbf{E}_i canvia i cal considerar

$$\mathbf{E}_i = (\mathbf{G}_i, \mathbf{B}_i),$$

on \mathbf{G}_i correspon a la matriu de les interconnexions:

$$\mathbf{G}_i = (\mathbf{G}_{i1}, \dots, \mathbf{G}_{iN}).$$

Aleshores, es pot aplicar la Proposició 6.3 considerant aquesta nova definició per al terme \mathbf{E}_i . Aquestes consideracions no impliquen un augment del nombre de LMIs a resoldre.

6.6 Aplicació numèrica

Per tal de veure l'eficiència del mètode proposat, presentem a continuació un exemple numèric. Sigui el sistema interconnectat amb incerteses (6.14), format per tres subsistemes 2-dimensionals: $n_i = 2, s_i = 1, \forall i = 1, 2, 3$. Les matrius dels subsistemes són les següents:

$$\begin{aligned} S_1 : \quad A_{11} &= \begin{bmatrix} -0.5 & -0.8 \\ 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 0.2 & -0.25 \end{bmatrix}, A_{13} = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, \\ B_{11} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\ G_{12} = G_{13} &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 : \quad A_{21} &= \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 0.3 & -0.5 \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}, \\ B_{21} &= \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\ G_{21} = G_{23} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 : \quad A_{31} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}, A_{32} = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_{33} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.1 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}, \\ B_{32} &= \begin{bmatrix} 1.01 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{33} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ G_{31} = G_{32} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, B_{31} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Per a tot i i j , considerem la cota de les interconnexions

$$W_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.001 \end{bmatrix},$$

i les matrius de cost

$$R_i = [0.7], \quad Q_i = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}.$$

Segons el model de fallada, considerem $\Lambda_i = 0.9$, $\Gamma_i = 0.1$, $i = 1, 2, 3$.

Tal i com hem comentat, la cota del cost (6.28) depèn del paràmetre α . Com considerem qualsevol estat inicial no nul, cal prendre la cota sobre tots els possibles estats inicials i resollem el problema Σ . Per això, usant el Toolbox LMI del programari Matlab, calculem els controls descentralitzats lineals associats a cada subsistema. Obtenim les matrius de guany

$$K_1 = [-0.0457, -0.0334],$$

$$K_2 = [-0.0317, -0.0126],$$

$$K_3 = [-0.0640, -0.0157].$$

A continuació, presentem la funció que ens ha permès calcular aquestes matrius.

```
function [K,liap]=poliG
%Dades
S3; R=0.7;Q=[0.01 0;0 0.01]; W=[0;0.001]; Lam=0.9; Gam=0.1;
n=2;s=1;
%
%Inicialitzacio LMI
%
setlmiis([]);
V1=lmivar(1,[n,1]);
Y1=lmivar(1,[n,1]);
Y2=lmivar(1,[n,1]);
Y3=lmivar(1,[n,1]);
N1=lmivar(2,[s,n]);

%k=1
B11=B1*(Lam+inv(eye(s)-R)*R*Lam);
lmiterm([1 1 1 V1],-1,1,'s');
lmiterm([1 2 1 V1],A1,1);
```

```

lmiterm([1 2 1 Y1],1,1);
lmiterm([1 2 1 N1],B11,1);
lmiterm([1 5 1 V1],1,1);
lmiterm([1 6 1 V1],1,1);
lmiterm([1 7 1 N1],Lam,1);
lmiterm([1 8 1 N1],Gam,1);
lmiterm([1 9 1 N1],Lam*R,1);
lmiterm([1 10 1 V1],1,1);
lmiterm([1 2 2 Y1],-1,1);
lmiterm([1 3 2 0],G');
lmiterm([1 4 2 0],B1');
lmiterm([1 3 3 0],-1);
lmiterm([1 4 4 0],R-eye(s));
lmiterm([1 5 5 0],-inv(Q));
lmiterm([1 6 6 0],-inv(W'*W));
lmiterm([1 7 7 0],-inv(R));
lmiterm([1 8 8 0],-1);
lmiterm([1 9 9 0],R-eye(s));
lmiterm([1 10 10 Y1],-1,1);

%k=2
B22=B2*(Lam+inv(eye(s)-R)*R*Lam);
lmiterm([2 1 1 V1],-1,1,'s');
lmiterm([2 2 1 V1],A2,1);
lmiterm([2 2 1 Y2],1,1);
lmiterm([2 2 1 N1],B22,1);
lmiterm([2 5 1 V1],1,1);
lmiterm([2 6 1 V1],1,1);
lmiterm([2 7 1 N1],Lam,1);
lmiterm([2 8 1 N1],Gam,1);
lmiterm([2 9 1 N1],Lam*R,1);
lmiterm([2 10 1 V1],1,1);
lmiterm([2 2 2 Y2],-1,1);
lmiterm([2 3 2 0],G');
lmiterm([2 4 2 0],B2');
lmiterm([2 3 3 0],-1);
lmiterm([2 4 4 0],R-eye(s));
lmiterm([2 5 5 0],-inv(Q));
lmiterm([2 6 6 0],-inv(W'*W));
lmiterm([2 7 7 0],-inv(R));
lmiterm([2 8 8 0],-1);
lmiterm([2 9 9 0],R-eye(s));
lmiterm([2 10 10 Y2],-1,1);

```

```

%k=3
B33=B3*(Lam+inv(eye(s)-R)*R*Lam);
lmiterm([3 1 1 V1],-1,1,'s');
lmiterm([3 2 1 V1],A3,1);
lmiterm([3 2 1 Y3],1,1);
lmiterm([3 2 1 N1],B33,1);
lmiterm([3 5 1 V1],1,1);
lmiterm([3 6 1 V1],1,1);
lmiterm([3 7 1 N1],Lam,1);
lmiterm([3 8 1 N1],Gam,1);
lmiterm([3 9 1 N1],Lam*R,1);
lmiterm([3 10 1 V1],1,1);
lmiterm([3 2 2 Y3],-1,1);
lmiterm([3 3 2 0],G');
lmiterm([3 4 2 0],B3');
lmiterm([3 3 3 0],-1);
lmiterm([3 4 4 0],R-eye(s));
lmiterm([3 5 5 0],-inv(Q));
lmiterm([3 6 6 0],-inv(W'*W));
lmiterm([3 7 7 0],-inv(R));
lmiterm([3 8 8 0],-1);
lmiterm([3 9 9 0],R-eye(s));
lmiterm([3 10 10 Y3],-1,1);

%Definides Positives
lmiterm([-4 1 1 Y1],1,1);
lmiterm([-5 1 1 Y2],1,1);
lmiterm([-6 1 1 Y3],1,1);
lmiterm([-7 1 1 V1],1,1);

%Segona LMI
lmiterm([8 1 1 Y1],-1,1);
lmiterm([8 1 2 0],G12);
lmiterm([8 1 3 0],G13);
lmiterm([8 1 4 0],B1);
lmiterm([8 2 2 0],-1);
lmiterm([8 3 3 0],-1);
lmiterm([8 4 4 0],R-eye(s));
lmiterm([9 1 1 Y2],-1,1);
lmiterm([9 1 2 0],G12);
lmiterm([9 1 3 0],G13);
lmiterm([9 1 4 0],B2);
lmiterm([9 2 2 0],-1);
lmiterm([9 3 3 0],-1);

```

```
lmiterm([9 4 4 0],R-eye(s));
lmiterm([10 1 1 Y3],-1,1);
lmiterm([10 1 2 0],G12);
lmiterm([10 1 3 0],G13);
lmiterm([10 1 4 0],B3);
lmiterm([10 2 2 0],-1);
lmiterm([10 2 3 0],-1);
lmiterm([10 4 4 0],R-eye(s));
%
% Resolucio LMI
%
lmi1=getlmi; [tmin,xfeas]=feasp(lmi1); NN=dec2mat(lmi1,xfeas,N1);
VV=dec2mat(lmi1,xfeas,V1); K=NN*inv(VV);
X1=dec2mat(lmi1,xfeas,Y1); X2=dec2mat(lmi1,xfeas,Y2);
X3=dec2mat(lmi1,xfeas,Y3);

liap=[inv(X1) inv(X2) inv(X3)];
```

Cal resoldre aquest programa per a cada sistema i aleshores resoldre el problema Σ . La cota del cost òptima és aleshores $\bar{J} = 0.2307$.

Capítol 7

Model multiconvex

En aquest capítol estudiem el control descentralitzat, fiable amb cost garantit per a sistemes interconnectats, amb incerteses multiconvexes. Recollim els resultats obtinguts en els Capítols 4 i 3, així com la teoria de multiconvexitat presentada en l'Apartat 2.5.2. Seguim la mateixa estructura que l'emprada en el Capítol 6: primer estudiem l'estabilitat del sistema, per passar a enunciar i demostrar el resultat principal d'aquest capítol, que és una caracterització LMI del control RGC quan les incerteses són multiconvexes.

7.1 Introducció

Considerem el sistema format per N subsistemes amb incerteses paramètriques. Usem el mateix model que en els capítols anteriors i que hem definit en 1.4. Sigui, per a cada $i = 1, \dots, N$, el subsistema S_i definit per l'equació diferencial lineal

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \Delta A_i x_i + \Delta B_i u_i^F + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G_{ij} g_{ij}(t, x_j) \\ x_i(0) = x_{i0}, \end{cases} \quad (7.1)$$

on u_i^F indica el control després de fallada de l'actuador. El model multiconvex d'incerteses ens diu que

$$\begin{cases} \Delta A_i := A_i(\alpha_i) = A_{i0} + \sum_{k=1}^L \alpha_{i_k} A_{i_k}, \\ \Delta B_i := B_i(\alpha_i) = B_{i0} + \sum_{k=1}^L \alpha_{i_k} B_{i_k}. \end{cases}$$

Considerem el paràmetre constant $\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_L})^T \in \mathbb{R}^L$. Cada una de les seves components es troba en l'interval

$$\alpha_{i_k} \in [\underline{\alpha}_{i_k}, \bar{\alpha}_{i_k}] .$$

Considerem ν_i com un possible extrem d'aquests intervals. És a dir, $\nu_i \in V_i$, on

$$V_i = \left\{ \nu_i = \begin{pmatrix} \nu_{i_1} \\ \vdots \\ \nu_{i_L} \end{pmatrix}, \nu_{i_k} \in \{\underline{\alpha}_{i_k}, \bar{\alpha}_{i_k}\}, k = 1, \dots, L \right\} .$$

Sigui el sistema enllaçat tancat realimentat pels controls descentralitzats $u_i(t) = K_i x_i(t)$. Volem trobar una condició suficient que ens permeti dissenyar aquests controls, per a cada $i = 1, \dots, N$, tal que assegurui fiabilitat i obtinguem certa cota per a la funció de cost. Primer ens fixarem en el problema de tenir estabilitat sota fallades parcials o totals, és a dir, estudiarem el cas de fiabilitat i estabilitat. L'estudi d'aquest cas ens permetrà veure d'una manera més clara com queden les especificacions del problema del control RGG, quan el sistema està descrit en forma multiconvexa. Si hem decidit estudiar per separat els models convex i multiconvex és per a aprofitar al màxim les estructures de cada model. Tal i com hem vist en el Capítol 6, el model d'incerteses convexes permet caracteritzar el control RGC per mitjà de LMIs. Aquestes LMIs depenen del valor de les matrius que descomponen les incerteses de les matrius d'estat i de control. La propietat de convexitat $\sum_{k=1}^L \alpha_{i_k} = 1$ hi juga un paper molt rellevant. Ara tractem el model d'incerteses multiconvexes, que engloba el model d'incerteses convexes. Però les condicions que s'obtenen en aquest cas tenen una difícil particularització. Per aquesta raó hem decidit tractar tots dos models per separat. El model d'incerteses multiconvexes, definit en l'Apartat 1.1.2, permet considerar la variació dels paràmetres respecte el temps. Nosaltres no hem volgut tractar aquest cas, de moment. Ho deixem com una possible línia de treball futur. A continuació presentem els models de interconnexió i de fiabilitat que hem vingut usant al llarg de tot el treball.

Model d'interconnexió

Considerem el model d'interconnexió presentat en l'Apartat 1.3, on hem donat les condicions 1.1 i 1.2 que verifica sobre el vector desconegut d'interconnexions

$g_{ij}(t, x_j)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \|g_{ij}(t, x_j)\| \leq \|W_{ij}x_j\| \\ W_i := \sum_{j=1, j \neq i}^N W_{ji}^T W_{ji} > 0 . \end{array} \right. \quad (7.2)$$

Model de fiabilitat

Reprenem el model general de fallada presentat en l'Apartat 1.4, on denotàvem per $u_i^F(t)$ el control després de fallada i l'expressàvem com una part lineal en $u_i(t)$ més una part desconeguda acotada, tal com reproduïm aquí:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^F(t) = \Lambda_i u_i(t) + \phi_i(u_i) \\ \|\phi_i(u_i)\| \leq \|\Gamma_i u_i\| , \end{array} \right. \quad (7.3)$$

amb $\Lambda_i > 0$ i $\Gamma_i \geq 0$.

7.2 Estabilitat i multiconvexitat

Considerem la següent candidata a funció de Lyapunov

$$V(x, \alpha) = \sum_{i=1}^N V_i(x_i, \alpha_i) = \sum_{i=1}^N x_i^T X_i(\alpha_i) x_i , \quad (7.4)$$

on la matriu X_i depèn del paràmetre:

$$X_i(\alpha_i) := X_{i0} + \sum_{k=1}^L \alpha_{i_k} X_{i_k} . \quad (7.5)$$

Per tal d'assegurar l'estabilitat del sistema, cal imposar que efectivament la funció $V(x, \alpha)$ sigui funció de Lyapunov. Per això, cal que $V(x, \alpha)$ sigui definida positiva i que la seva derivada sigui definida negativa:

1. Funció definida positiva:

$$V(x, \alpha) > 0 \Leftrightarrow X_i(\alpha_i) > 0 , \quad i = 1, \dots, N . \quad (7.6)$$

2. Funció decreixent:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} V_i(x_i, \alpha_i) < 0 . \quad (7.7)$$

Anem a concretar la Condició (7.6). Si A_{i0} és estable, existeix $V_{i0}(x_i) = x_i^T X_{i0} x_i$ funció de Lyapunov associada a aquesta matriu, i aleshores $V_{i0} > 0$. Per tant, al voltant de X_{i0} , la funció es manté positiva i s'obté que $V_i(x_i, \alpha_i) > 0$ per a cada $i = 1, \dots, N$. D'on $V(x, \alpha) > 0$. Per tant, la Condició (7.6) es modifica de la següent manera.

Condició 7.1 (Definida Positiva). Per a cada $i = 1, \dots, N$, la matriu A_{i0} és estable.

En desenvolupar la Condició (7.7), obtenim

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} V_i(x_i, \alpha_i) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \dot{x}_i^T X_i(\alpha_i) x_i + x_i^T X_i(\alpha_i) \dot{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \left(A_i(\alpha_i) x_i + B_i(\alpha_i) u_i^F + \sum_{j \neq i} G_{ij} g_{ij}(t, x_j) \right)^T X_i(\alpha_i) x_i + (*) < 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Cal imposar doncs que aquesta desigualtat es verifiqui per a tot valor del paràmetre α_i . Com això ens dóna infinites inequacions, anem a aplicar la teoria de les funcions multiconvexes (veure 2.5.2). És a dir, si demostrem que $\frac{d}{dt} V(x, \alpha)$ és multiconvexa, tindrem que si és definida negativa en els vèrtexs del conjunt on es troba definit el paràmetre, ho serà en els punts interiors. Així obtindrem una condició que assegurarà que $V(x, \alpha)$ és funció de Lyapunov. Serà una condició amb un nombre finit d'inequacions, ja que l'obtindrem per a un nombre finit de valors (els extrems dels intervals) i ens permetrà assegurar que es verifica per a qualsevol valor del paràmetre.

Considerem, per a cada $i = 1, \dots, N$, la funció

$$f_i(\alpha_i) := \left(A_i(\alpha_i) x_i + B_i(\alpha_i) u_i^F + \sum_{j \neq i} G_{ij} g_{ij}(t, x_j) \right)^T X_i(\alpha_i) x_i + (*). \quad (7.9)$$

Aquesta funció és el sumant i de (7.8). Per tal que sigui una funció multiconvexa, cal que verifiqui

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha_{i_k}^2} \geq 0. \quad (7.10)$$

En el nostre cas, s'ha de verificar una desigualtat de tipus matricial. És el que anunciem en el següent lema.

Lema 7.1 (Multiconvexitat). *Sigui la funció $f_i(\alpha_i)$ definida en (7.9). Si existeixen matrius X_{i_k} simètriques definides positives, K_i donades tals que es verifica la següent desigualtat matricial*

$$\begin{pmatrix} (A_{i_k} + B_{i_k} \Lambda_i K_i)^T X_{i_k} + (*) - K_i^T \Gamma_i^2 K_i & (*) \\ B_{i_k}^T X_{i_k} & Id \end{pmatrix} \geq 0, \quad (7.11)$$

la funció $f_i(\alpha_i)$ és multiconvexa.

Demostració. Cal que $f_i(\alpha_i)$ verifiqui la Condició de multiconvexitat (7.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_{i_k}} &= (A_{i_k} x_i + B_{i_k} u_i^F)^T X_{i_k}(\alpha_i) x_i + \\ &+ \left(A_i(\alpha_i) x_i + B_i(\alpha_i) u_i + \sum_{j \neq i} G_{ij} g_{ij}(t, x_j) \right)^T X_{i_k} x_i + (*), \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha_{i_k}^2} &= 2 \left((A_{i_k} x_i + B_{i_k} u_i^F)^T X_{i_k} x_i + x_i^T X_{i_k} (A_{i_k} x_i + B_{i_k} u_i^F) \right). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Usant el model de fiabilitat donat en (7.3), tenim que $u_i^F = \Lambda_i u_i + \phi_i(u_i)$. Com realmentem per l'estat ($u_i = K_i x_i$), resulta que

$$u_i^F = \Lambda_i K_i x_i + \phi_i(K_i x_i),$$

verificant-se les condicions sobre les funcions ϕ_i . Per tant, la derivada segona (7.12) queda expressada per

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha_{i_k}^2} &= 2 \left((A_{i_k} x_i + B_{i_k} (\Lambda_i K_i x_i + \phi_i))^T X_{i_k} x_i + (*) \right) \\ &= 2 x_i^T \left((A_{i_k} + B_{i_k} \Lambda_i K_i)^T X_{i_k} + (*) + \phi_i^T B_{i_k}^T X_{i_k} x_i + x_i^T X_{i_k} B_{i_k} \phi_i \right) \\ &= 2 (x_i^T, \phi_i^T) \begin{pmatrix} (A_{i_k} + B_{i_k} \Lambda_i K_i)^T X_{i_k} + (*) & * \\ B_{i_k}^T X_{i_k} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ \phi_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Usant el model de fiabilitat en (7.13), trobem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha_{i_k}^2} &= 2 (x_i^T, \phi_i^T) \begin{pmatrix} (A_{i_k} + B_{i_k} \Lambda_i K_i)^T X_{i_k} + (*) - K_i^T \Gamma_i^2 K_i & * \\ B_{i_k}^T X_{i_k} & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ \phi_i \end{pmatrix} + \\ &+ x_i^T K_i^T \Gamma_i^2 K_i x_i - \phi_i^T \phi_i. \end{aligned}$$

Per les condicions sobre el model de fiabilitat, tenim que $x_i^T K_i^T \Gamma_i^2 K_i x_i - \phi_i^T \phi_i \geq 0$. Per tant, $\frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha_{i_k}^2} \geq 0$ si es verifica

$$\begin{pmatrix} (A_{i_k} + B_{i_k} \Lambda_i K_i)^T X_{i_k} + (*) - K_i^T \Gamma_i^2 K_i & * \\ B_{i_k}^T X_{i_k} & Id \end{pmatrix} \geq 0,$$

que és justament la Condició (7.11) del lema. Acabem de demostrar que si (7.11) és certa, aleshores $\frac{\partial^2 f_i}{\partial \alpha_{i_k}^2} \geq 0$ i la funció $f_i(\alpha_i)$ és multiconvexa. \square

Degut al Lema 7.1, obtenim que $\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} V_i(\alpha_i) < 0$ si es verifica en els vèrtexs:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} V_i(\nu_i) < 0.$$

Anem a veure quina condició treiem d'aquesta desigualtat. Per això, calculem quina és l'expressió de $\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} V_i(\nu_i)$ en el nostre context, usant els models de interconnexió (7.2) i de fiabilitat (7.3):

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} V_i(\nu_i) = \sum_{i=1}^N \left(A_i(\nu_i) x_i + B_i(\nu_i) u_i^F + \sum_{j \neq i} G_{ij} g_{ij}(t, x_j) \right)^T X_i(\nu_i) x_i + (*).$$

Considerant $z_i^T = (x_i^T, g_{i1}^T, \dots, g_{iN}^T, \phi_i^T)$, obtenim

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} V_i(\nu_i) &= \\ &= \sum_{i=1}^N z_i^T \begin{pmatrix} (A_i(\nu_i) + B_i(\nu_i) \Lambda_i K_i)^T X_i(\nu_i) + (*) & * & * & * & * \\ G_{i1}^T X_i(\nu_i) & -Id & * & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & * & * \\ G_{iN}^T X_i(\nu_i) & 0 & 0 & -Id & * \\ B_i(\nu_i)^T X_i(\nu_i) & 0 & \dots & 0 & -Id \end{pmatrix} z_i \\ &+ \sum_{j \neq i} g_{ij}^T g_{ij} + \phi_i^T \phi_i. \end{aligned}$$

Seguint els passos de l'Apartat 6.2 i usant les acotacions donades pels models de interconnexió i de fiabilitat, obtenim que si la següent desigualtat matricial és

viable:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} (A_i(\nu_i) + B_i(\nu_i)\Lambda_i K_i)^T X_i(\nu_i) + (*) + K_i \Gamma_i^2 K_i + W_i & * & * & * & * & & & & \\ & G_{i1}^T X_i(\nu_i) & & & -Id & * & * & * & \\ & \vdots & & & 0 & \ddots & * & * & \\ & G_{iN}^T X_i(\nu_i) & & & 0 & 0 & -Id & * & \\ & B_i(\nu_i)^T X_i(\nu_i) & & & 0 & \dots & 0 & -Id & \end{array} \right) < 0, \quad (7.14)$$

aleshores,

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} V_i(\nu_i) < 0.$$

Per multiconvexitat, obtenim que si (7.14) és certa, aleshores $\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} V_i(\alpha_i) < 0$. Per tant, el sistema (7.1) és estable si es verifiquen el Lema 7.1 i (7.14), ja que en aquest cas la funció $V(x, \alpha)$ definida en (7.4) és una funció de Lyapunov per al sistema interconnectat amb incerteses (7.1).

7.3 Estabilitat, fiabilitat i cost garantit

Aprofitant els resultats obtinguts en el Capítol 4, on hem caracteritzat el control RGC, sabem que per tal de tenir fiabilitat i cost garantit cal que es verifiqui la següent desigualtat:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} V_i(x_i, \alpha_i) + x_i^T Q_i x_i + (u_i^F)^T R_i u_i^F < 0. \quad (7.15)$$

La següent condició ens permet reduir la comprovació als extrems o vèrtexs dels intervals de definició del paràmetre α_i .

Condició 7.2 (Multiconvexitat). La funció $f_i(\alpha_i)$, definida per:

$$f_i(\alpha_i) := \frac{d}{dt} V_i(x_i, \alpha_i) + x_i^T Q_i x_i + (u_i^F)^T R_i u_i^F,$$

serà multiconvexa si es verifica que

$$\left(\begin{array}{cc|cc} (A_{i_k} + B_{i_k} \Lambda_i K_i)^T X_{i_k} + (*) - K_i^T \Gamma_i^2 K_i & (*) & & \\ & B_{i_k}^T X_{i_k} & & Id \end{array} \right) \geq 0.$$

En efecte, com els termes $x_i^T Q_i x_i + (u_i^F)^T R_i u_i^F$ no depenen del paràmetre α_i , només cal que es verifiqui el Lema 7.1. Aquesta condició permet imposar la desigualtat (7.15) en els vèrtexs del politop paramètric.

La tercera condició que s'ha de verificar per a obtenir un control RGC, ve donada directament per l'equació (7.15). Com volem obtenir una condició matricial, caldrà desenvolupar aquesta inequació i aprofitar les condicions sobre les interconnexions i el model de fiabilitat, per tal d'obtenir una desigualtat matricial. Això és de fet el que hem deduït en el Teorema 4.1. La desigualtat que obtenim es pot convertir en una LMI usant els resultats presentats en el Capítol 3.

Degut al Teorema 4.1, tenim la següent condició que ens caracteritza la llei de control RGC.

Condició 7.3 (Control RGC). Existeixen matrius $X_i(\alpha_i)$ simètriques definides positives i K_i tals que

$$\Omega_i(\nu_i) := \begin{pmatrix} \bar{A}_i(\nu_i)^T X_i(\nu_i) + (*) + K_i^T \Lambda_i R_i \Lambda_i K_i + W_i + Q_i & * & * & * & * \\ G_{i1}^T X_i(\nu_i) & -Id & * & * & * \\ \vdots & 0 & -Id & * & * \\ G_{iN}^T X_i(\nu_i) & 0 & 0 & -Id & * \\ B_i^T(\nu_i) X_i(\nu_i) + R_i \Gamma_i K_i & 0 & 0 & 0 & R_i - Id \end{pmatrix} < 0, \quad (7.16)$$

on $\bar{A}_i(\nu_i) = A_i(\nu_i) + B_i(\nu_i) \Lambda_i K_i$.

Fíxem-nos que imposem aquesta inequació en els vèrtexs ν_i , ja que per multiconvexitat tenim que es verificarà per a tot valor d' α_i , $i = 1, \dots, N$. Juntant la Condició 7.2 de multiconvexitat i la Condició 7.3 de control fiable amb cost garantit deduïda del Teorema 4.1, podem enunciar la següent proposició.

Proposició 7.1. *Sigui el sistema (7.1), sota les condicions del model de les interconnexions (7.2) i de fiabilitat (7.3). Siguin les matrius simètriques definides positives X_{i0} i X_{ik} , i matrius K_i , per a $k = 1, \dots, L$ i $i = 1, \dots, N$, que verifiquen les condicions 7.1, 7.2 i 7.3.*

Aleshores, el conjunt de controls descentralitzats definit per $u_i = K_i x_i$, $i = 1, \dots, N$, és una llei de control fiable amb cost garantit. Encara més, el cost

es troba acotat:

$$J < \sum_{i=1}^N x_{i0}^T X_i(\alpha_i) x_{i0} .$$

Demostració. Sigui la funció $V(x, \alpha) = \sum_{i=1}^N x_i^T V_i(x_i, \alpha_i) x_i$. La Condició 7.1 ens assegura que la funció $V(x, \alpha)$ és definida positiva. La Condició 7.2 ens permet assegurar que la funció que apareix en (7.15) és multiconvexa i per tant que només cal imposar que es verifiqui en els vèrtexs dels intervals de definició del paràmetre α . La Condició 7.3 és la que ens assegura control fiable amb cost garantit. \square

Aquesta proposició presenta condicions no lineals del control fiable amb cost garantit, quan el sistema té incerteses multiconvexes. Cal remarcar que, tal i com passa amb el model politòpic, la cota del cost depèn tant dels estats inicials x_{i0} com dels paràmetres α_i .

7.4 Disseny LMI

És necessari obtenir una condició lineal de poder-ne fer una resolució numèrica. Per això, apliquem el Teorema 3.3 i obtenim la caracterització LMI per a controls RGC descentralitzats per a sistemes interconnectats amb incerteses multiconvexes. També necessitem aplicar una modificació del Lema de projecció (2.2), presentada en el Capítol 3:

$$\text{Si } \psi + P^T X^T Q + Q^T X P \geq 0 \text{ té solució } \Rightarrow \begin{cases} W_P^T X W_P \geq 0 \\ W_Q^T X W_Q \geq 0 \end{cases} .$$

Primer veiem com és la linealització de la Condició 7.3 del control fiable amb cost garantit. En efecte, pels complements de Schur, tal i com hem dut a terme en la

Proposició 4.1, tenim que (7.16) és equivalent a:

$$\left(\begin{array}{ccc} (A_i(\nu_i) + B_i(\nu_i)(\Lambda_i + (Id - R_i)^{-1}R_i\Lambda_i)K_i)^T X_i + (*) & & * \\ & \begin{pmatrix} G_i^T \\ B_i^T(\nu_i) \end{pmatrix} X_i & \begin{pmatrix} -Id & * \\ 0 & R_i - Id \end{pmatrix} \\ & Id & 0 \\ & \begin{pmatrix} \Gamma_i \\ \Lambda_i \\ R_i\Lambda_i \end{pmatrix} K_i & 0 \\ & * & * \\ & * & * \\ \begin{pmatrix} -Q_i^{-1} & * \\ 0 & -W_i^{-1} \end{pmatrix} & & * \\ & 0 & \begin{pmatrix} -R_i^{-1} & * & * \\ 0 & -Id & * \\ 0 & 0 & R_i - Id \end{pmatrix} \end{array} \right) < 0, \quad (7.17)$$

sempre i quan $R_i - Id < 0$ i invertible. Fem la següent assignació de matrius:

$$\bar{\Lambda}_i := (\Lambda_i + (Id - R_i)^{-1}R_i\Lambda_i)$$

$$E_i := (G_i, B_i(\nu_i))$$

$$C_i := Id$$

$$F_i := \begin{pmatrix} \Gamma_i \\ \Lambda_i \\ R_i\Lambda_i \end{pmatrix}$$

$$Q_{11}^i := \begin{pmatrix} -Id & * \\ 0 & R_i - Id \end{pmatrix}$$

$$Q_{22}^i := \begin{pmatrix} -Q_i^{-1} & * \\ 0 & -W_i^{-1} \end{pmatrix}$$

$$Q_{33}^i := \begin{pmatrix} -R_i^{-1} & * & * \\ 0 & -Id & * \\ 0 & 0 & R_i - Id \end{pmatrix}.$$

El Teorema 3.3 ens permet presentar una linealització de (7.16). Usant aquest teorema, tenim que (7.17) és equivalent a

$$\left(\begin{array}{cccccc} -(V_i + V_i^T) & * & * & * & * & * \\ A_i(\nu_i)V_i + Y_i(\nu_i) + B_i(\nu_i)\bar{\Lambda}_i N_i & -Y_i(\nu_i) & * & * & * & * \\ 0 & E_i^T & Q_{11}^i & * & * & * \\ C_i V_i & 0 & 0 & Q_{22}^i & * & * \\ F_i^T N_i & 0 & 0 & 0 & Q_{33}^i & * \\ V_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_i(\nu_i) \end{array} \right) < 0, \quad (7.18)$$

$$\left(\begin{array}{cc} -Y_i(\nu_i) & * \\ E_i^T & Q_{11}^i \end{array} \right) < 0.$$

Obtenim així una condició LMI que caracteritza el control RGC, equivalent a la inequació (7.16).

Enunciem a continuació la caracterització LMI del control amb cost garantit.

Proposició 7.2 (Caracterització LMI). *Sigui el sistema (7.1), sota les condicions del model de les interconnexions (7.2) i de fiabilitat (7.3). Siguin les matrius definides positives simètriques Y_{i0} i Y_{i_k} , i matrius V_i , N_i , per a $k = 1, \dots, L$ i $i = 1, \dots, N$. Es verifica que:*

- (i) *La matriu A_{i0} és estable, per a cada $i = 1, \dots, N$;*
- (ii) *Per a $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, L$, es verifica la següent inequació, que permet assegurar la multiconvexitat:*

$$\left(\begin{array}{ccccc} -(V_i + V_i^T) & * & * & * & * \\ A_{i_k} V_i + Y_{i_k} + B_{i_k} \Lambda_i N_i & -Y_{i_k} & * & * & * \\ 0 & B_{i_k}^T & Id & * & * \\ \Lambda_i N_i & 0 & 0 & Id & * \\ V_i & 0 & 0 & 0 & -Y_{i_k} \end{array} \right) \geq 0, \quad (7.19)$$

(iii) Per a cada valor de $\nu_i \in V_i$, $i = 1, \dots, N$, es verifica la inequació matricial (7.18).

Aleshores, el conjunt de controls definit per $u_i = N_i V_i^{-1} x_i$, $i = 1, \dots, N$, és un control RGC. Encara més, el cost es troba acotat per

$$J < \bar{J}(\alpha_i) := \sum_{i=1}^N x_{i0}^T \left(Y_{i0}^{-1} + \sum_{k=1}^L \alpha_{i_k} Y_{i_k}^{-1} \right) x_{i0} .$$

Demostració. Sigui la funció $V(x, \alpha)$ definida per:

$$\begin{aligned} V(x, \alpha) &= \sum_{i=1}^N x_i^T X_i(\alpha_i) x_i \\ &= \sum_{i=1}^N x_i^T \left(X_{i0} + \sum_{k=1}^L \alpha_{i_k} X_{i_k} \right) x_i . \end{aligned}$$

La condició (i) ens indica que la funció $V(x, \alpha)$ és definida positiva, tal i com hem vist en la Condició 7.1. La condició (ii) ens assegura que la funció

$$\frac{d}{dt} V(x, \alpha) + \sum_{i=1}^N \left(x_i^T Q_i x_i + (u_i^F)^T R_i u_i^F \right)$$

és multiconvexa. En efecte, la inequació (7.19) és equivalent a la Condició 7.2 de multiconvexitat, degut al resultat obtingut en el Teorema 3.3, ítem (iii), aplicat al cas de desigualtat major o igual. Per tant serà definida negativa per a tot α_i si ho és en els vèrtexs del conjunt de definició de paràmetres.

La condició (iii) és equivalent a la Condició 7.3, que ens assegura que el control és RGC. Té l'avantatge que només s'ha de verificar en els vèrtexs del conjunt de definició dels paràmetres α_i . \square

Nota 7.1. Cal anar amb compte a l'hora de fer-ne la resolució numèrica, ja que mentre (ii) té com a variables Y_{i_k} , amb $k = 1, \dots, L$, la inequació (iii) té a més a més la variable Y_{i0} . A més a més, els termes de l'estil $A_i(\nu_i)$ de la inequació (7.18) cal desenvolupar-los de la següent manera:

$$\begin{aligned} A_i(\nu_i) &= A_{i0} + \sum_{k=1}^L \nu_{i_k} A_{i_k} \\ &= \sum_{k=1}^L \left(\frac{1}{L} A_{i0} + \nu_{i_k} A_{i_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^L \left(A_{i0} + \nu_{i_k} A_{i_k} L \right) \frac{1}{L} . \end{aligned}$$

Es fa aleshores un canvi convenient d'escala en les matrius

$$V_i \rightarrow \frac{1}{L}V_i$$

$$N_i \rightarrow \frac{1}{L}N_i$$

$$Y_{i0} \rightarrow \frac{1}{L}Y_{i0}$$

$$A_{i_k} \rightarrow LA_{i_k}$$

$$B_{i_k} \rightarrow LB_{i_k}$$

$$E_i \rightarrow \frac{1}{L}E_i$$

$$Q_{jj}^i \rightarrow \frac{1}{L}Q_{jj}^i, \quad j = 1, 2, 3.$$

Obtenim que resoldre (7.18) és reduïx a resoldre L inequacions matricials.

Aquesta proposició ens dona una cota del cost que depèn tant de les condicions inicials com del paràmetre α_i . Per tal de treure'n la dependència respecte les condicions inicials, es poden considerar els mètodes presentats en el Capítol 8. Per obtenir una cota independent del paràmetre, cal resoldre un problema d'optimització. En efecte, caldrà calcular, segons tots els possibles valors del paràmetre, el mínim valor de $\sum_{i=1}^N x_{i0}^T X_i(\alpha_i) x_{i0}$. Per a cada $i = 1, \dots, N$, caldrà resoldre el següent problema:

Per a x_{i0} fixat, trobar $\min_{\alpha_i \in V_i} \bar{J}(\alpha_i)$, on X_i verifica la Proposició 7.2.

Aquí acabem aquest capítol, on hem donat una caracterització per mitjà de les inequacions lineals matricials, del control descentralitzat amb cost garantit per a sistemes interconnectats multiconvexos, sota la presència de fallades en els actuadors. Els models de interconnexió i de fiabilitat considerats són els que hem definit i utilitzats al llarg de tot aquest treball.

Capítol 8

Optimització de la cota del cost

En els Capítols 5, 6 i 7, hem obtingut la següent cota del cost:

$$\bar{J} := \sum_{i=1}^N x_{i0}^T X_i^{-1} x_{i0} . \quad (8.1)$$

En aquest capítol tractem dos problemes: el de minimització d'aquesta cota i el problema de la independència respecte les condicions inicials. Per a resoldre el problema d'optimització, es consideren dues aproximacions, que són independents del model d'incerteses escollit. La primera tracta la solució a partir d'una minimització dels factors $x_{i0}^T X_i^{-1} x_{i0}$. Es la presentada en el primer apartat. En el segon apartat es presenten dues maneres clàssiques que es basen en treure la dependència d'aquesta cota en les condicions inicials x_{i0} , i resoldre aleshores el problema d'optimització.

8.1 Minimització de la cota

El problema plantejat és un problema de solució convexa respecte les solucions de les LMIs. Com existeixen diferents algorismes d'optimització convexa, les seves solucions es poden parametritzar en el conjunt de controls amb cost garantit. Aquesta parametrització es pot usar per a dissenyar controls que minimitzin el valor del cost garantit, per a sistemes interconnectats amb incerteses en llaç tancat. Per tant, la resolució del següent problema d'optimització, anomenat Σ_0 , ens permet determinar la cota òptima:

Per a cada $i = 1, \dots, N$, de la solució X_i del problema del control

RGC, tal que

$$\begin{pmatrix} -\delta_i & x_{i0}^T \\ x_{i0} & -X_i \end{pmatrix} < 0, \quad (8.2)$$

es busca el mínim de $\sum_i \delta_i$.

Aquest problema ens diu que cal trobar K_i tal que les LMIs corresponents al problema de control RGC i (8.2) són viables, i a més a més trobem la cota \bar{J} mínima: $J^* = \min_{\Sigma_0} \sum_{i=1}^N \delta_i$. Això mateix s'enuncia en el següent lema.

Lema 8.1. *Si el problema d'optimització Σ_0 té solució, aleshores el conjunt de controls $u_i(t) = K_i x_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ és una llei de control RGC.*

Aquest control assegura la minimització del cost garantit \bar{J} per a sistemes interconnectats amb incerteses.

Demostració. La inequació (8.2) equival, per Schur, a

$$\begin{pmatrix} -\delta_i & x_{i0}^T \\ x_{i0} & -X_i \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow -\delta_i + x_{i0}^T X_i x_{i0} < 0 \Rightarrow x_{i0}^T X_i x_{i0} < \delta_i.$$

Per tant, $J < \bar{J} < \sum_{i=1}^N \bar{\delta}_i$, on $\bar{\delta}_i = \min_{X_i} \delta_i$. □

En el model politòpic i multiconvex, cal tenir en compte que tindrem aquests problemes per a cada $k = 1, \dots, L$, dimensió dels paràmetres.

8.2 Independència respecte les condicions inicials

En general, es té que la cota del cost depèn de x_{i0} . Per treure'n la dependència, habitualment s'usen dues vies: la manera estocàstica (soroll blanc) i la manera determinista, que desenvolupem a continuació. En tots dos casos l'avantatge és que es pot obtenir una minimització de la cota del cost.

8.2.1 Soroll blanc

La manera estocàstica considera que el vector inicial x_{i0} és un vector aleatori guassian de mitjana 0. Suposem que el problema de control RGC ja està solucionat, i per tant que tenim les matrius P_i que defineixen la funció de Lyapunov associada

al sistema interconnectat. La matriu P_i designa la matriu de guany i ve definida convenientment, segons el model d'incertesa. Considerant l'esperança de tots els estats possibles, obtenim que

$$\mathcal{E}(J) < \sum_{i=1}^N \mathcal{E}(x_{i0}^T P_i x_{i0}) .$$

Sigui $x(t) = (x_1^T(t), \dots, x_N^T(t))$. Si a més a més, la matriu de covariància constant és $C_x(t_0) = Id$, aquests estats s'anomenen soroll blanc. En aquest cas es té el següent resultat, que permet treure la dependència en x_{i0} de la cota del cost. Tenim que per a tota matriu simètrica $W(t)$ es verifica que

$$\mathcal{E}\{x(t)^T W(t)x(t)\} = tr(W(t)C_x(t)) .$$

Per veure-ho, només cal desenvolupar el producte, amb $x \in R^N$:

$$\mathcal{E}\{x^T(t)W(t)x(t)\} = \mathcal{E}\left\{\sum_{i,j=1}^n x_i^T(t)W_{ij}(t)x_j(t)\right\} = \sum_{i,j=1}^n W_{ij}(t)\mathcal{E}\{x_i^T(t)x_j(t)\} .$$

Com $W(t)$ i $C_x = (\mathcal{E}\{x_i^T(t)x_j(t)\}) = (C_{ij})$ són matrius simètriques, es té que aquesta equació representa la traça del producte. En efecte, els elements de la diagonal de $W(t)C(t)$ són $\sum_{i=1}^n W_{ji}C_{ij}$, amb $j = 1, \dots, n$. Per tant,

$$\sum_{i,j=1}^n W_{ij}C_{ij} = tr(W(t)C_x(t)) .$$

Si $W(t) = W$ i $C_x(t) = Id$ són constants, tal i com passa en el nostre cas, es té

$$\mathcal{E}\{x^T(t)Wx(t)\} = tr(W) .$$

Sigui doncs el cost J , del qual se sap que $J \leq \sum_{i=1}^N x_{i0}^T P_i x_{i0}$. Considerant el soroll blanc com estat inicial, identificant P_i amb W i agafant el valor esperat de la funció de cost, s'obté que

$$\bar{J} = \mathcal{E}(J) \leq \sum_{i=1}^N \mathcal{E}(x_{i0}^T P_i x_{i0}) = \sum_{i=1}^N tr(P_i) . \quad (8.3)$$

D'aquí s'obté una cota del cost independent del valor inicial x_{i0} .

8.2.2 Manera determinista

La manera determinista es basa en considerar un estat inicial x_{i0} arbitrari, però dins el conjunt $S_i = \{x_i(0) \in \mathbb{R}^{n_i} / x_i(0) = \Pi_{i0}v_i, \quad v_i^T v_i \leq 1\}$. Considerem $\lambda_{max}(\cdot)$ el valor propi màxim d'una matriu. Aleshores,

$$J \leq \sum_i x_i^T(0) P_i x_i(0) \leq \sum_{i=1}^N \lambda_{max}(\Pi_{i0}^T P_i \Pi_{i0}) .$$

Per tant, com a mesura del rendiment robust i per tant com a mínim de la cota del cost, es considera

$$J^* = \inf \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_{max}(\Pi_{i0}^T P_i \Pi_{i0}) / P_i > 0, \quad P_i \text{ matriu de cost quadràtic} \right\} . \quad (8.4)$$

En aquest capítol, hem presentat dues maneres de treure la dependència en les condicions inicials de la cota del cost, obtenint en cada cas una nova inequació matricial lineal, permetent afegir-la al nostre problema de cost garantit i resoldre totes les LMIs al mateix temps. També hem dut a terme una minimització d'aquesta cota, sempre en termes LMI.

Capítol 9

Control H_∞ estàtic

En aquest capítol tractem els sistemes interconnectats amb incerteses treballats al llarg de tota aquesta tesi, però considerarem també la presència de perturbacions externes en cada subsistema. Sota aquestes condicions, el nostre objectiu és dissenyar un conjunt de controls descentralitzats i per això utilitzarem la teoria H_∞ . Sota la seva forma més simple, el problema H_∞ és un problema de rebuig de perturbació. El fet de tractar aquest tipus de problema, i no el problema H_2 , que sembla el més natural en el desenvolupament d'aquest treball, és degut a que el problema H_∞ tracta amb un tipus més general de perturbació, plantejant-se el pitjor cas. En canvi, el problema H_2 tracta el cas de perturbació tipus soroll blanc, amb covariància coneguda, fet que no és prou general.

En aquest capítol, primer fem una breu introducció a la teoria H_∞ , per passar després a caracteritzar el comportament H_∞ per a sistemes interconnectats amb incerteses admissibles i fallades en l'actuador, sense especificar-ne el model d'incerteses. Després, per a cada model d'incerteses, presentem el disseny LMI del control descentralitzat que assegura comportament H_∞ .

9.1 Introducció a la teoria H_∞

Sigui el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fw \\ y = Ex + Hu \\ z = Cx + Dw, \end{cases}$$

on x és la variable d'estat, y la variable medible, w la pertorbació externa, u la variable de control i z la variable de sortida a controlar. La Figura 9.1 representa aquest problema H_∞ estàndard.

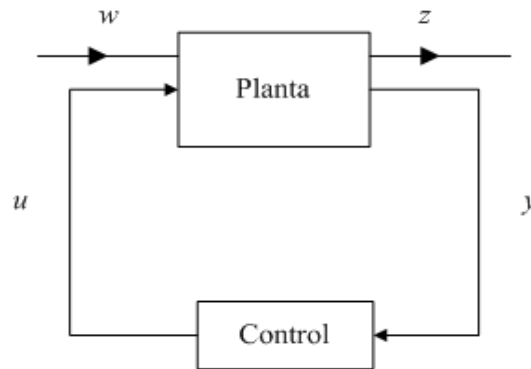


Figura 9.1: Problema H_∞ estàndard

El problema H_∞ tracta el problema de minimitzar l'efecte produït per una pertorbació w sobre el comportament del sistema, i en particular sobre la sortida z . Per això, caldrà sintetitzar una llei de control que estudiï l'impacte de w sobre z , tot i mantenint estable el sistema. Aquest impacte es medeix fent-ne el quocient de les seves normes. Caldrà doncs definir aquesta norma, anomenada norma H_∞ , que representa l'increment màxim en energia, entre l'entrada i la sortida del sistema.

La connexió entre l'estabilització robusta amb incerteses lineals independents del temps i la teoria H_∞ va ser establerta per primer cop per Kimura l'any 84 ([23]). En [10], Francis dona una introducció a la teoria H_∞ i conté una llarga referència a l'aproximació pel domini de freqüència a l'estabilització quadràtica. Una solució en l'espai d'estat pel problema H_∞ , que és anàloga a la resolució d'un problema LQG (veure annex A), va ser donada per Doyle en [9]. Els resultats que hi presenten són considerats ja com bàsics en el disseny dels controladors H_∞ . La idea general es resumeix en resoldre dues equacions algebraiques de Riccati per tal de verificar l'existència d'aquests controladors. A més a més, es donen fòrmules explícites per a calcular una solució particular, anomenada controlador central. Finalment, els controladors són parametritzats via una transformació fraccional construïda al voltant del controlador central i involucrant paràmetres. Però algunes de les restriccions que imposa sobre el sistema tendeix a limitar-ne la seva

aplicació. El comportament H_∞ ha estat tractat sota diferents marcs. En [27], es tracta el control H_∞ per a sistemes de transformació lineal fraccionària (LFT), mentre que [6] tracta el control LQG i busca una cota del comportament H_∞ . En [12], els autors tracten el problema de les funcions de Lyapunov paramètriques per a caracteritzar el problema del comportament H_∞ afí quadràtic. Aquests últims anys, la flexibilitat de les tècniques LMI han permès replantejar-ne el comportament H_∞ dins de problemes clàssics. Per exemple, [38] tracta sistemes amb retard i n'estudia el filtre H_∞ usant tècniques LMI. En [35] i [37], es treballa el problema d'optimització i cost garantit. En [18] es tracta el cas de fiabilitat local i control H_∞ . Cal destacar [2], on els autors presenten una alternativa a la caracterització presentada en [9]: usant la formulació LMI, s'extén el concepte de parametrització convexa en l'espai d'estat dels controladors H_∞ .

La principal diferència entre la teoria LQG i la teoria H_∞ és deguda al tractament i modelització de les pertorbacions externes incertes. Com s'explica en [6], el disseny LQG es basa en pertorbacions estocàstiques amb covariància fixada, mentre que la teoria H_∞ treballa amb un model determinístic, que consisteix de senyals acotats, de quadrat integrable. Així com el disseny LQG utilitza el criteri del cost quadràtic, la teoria H_∞ tracta de minimitzar la norma \mathcal{L}_2 de la resposta al pitjor cas de pertorbació. Per a sistemes amb un model poc definit de pertorbacions, que poden tenir una potència significativa en una banda arbitrària, és més eficaç H_∞ . Per a sistemes on es coneix la densitat de les pertorbacions, el disseny LQG és menys conservatiu.

9.1.1 Definicions

Considerem el cas $y(t) = x(t)$, suposant que tots els estats són mesurables. Sigui el sistema lineal independent del temps

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad (9.1)$$

sent $x(t)$ la variable d'estat, $z(t)$ la sortida i $w(t)$ la pertorbació en entrada.

Volem estudiar la relació entre la pertorbació $w(t)$ i la sortida $z(t)$ del sistema, és a dir, com afecta la pertorbació en el comportament del sistema. Es considera que el sistema té un bon comportament si la variació de $z(t)$ és petita en presència de la pertorbació $w(t)$. Una manera estàndard de quantificar aquest comportament

del sistema és considerar el guany del sistema:

$$\Gamma := \sup_w \frac{\text{mida}(z)}{\text{mida}(w)}. \quad (9.2)$$

Aquesta definició és equivalent a

$$\Gamma := \sup_w \{ \text{mida}(z) : \text{mida}(w) \leq 1 \}. \quad (9.3)$$

La quantitat Γ mesura la mida del senyal de sortida z com a resposta del pitjor cas de pertorbació w , amb estat inicial nul. Per tant, quan més petit és el guany del sistema, millor n'és el seu comportament. La definició anterior no és prou concreta, cal especificar com mesurar la talla dels senyals z i w . Existeixen diferents maneres de fer aquesta medició.

Mesura \mathcal{L}_∞

Si v és un senyal acotat, la seva mida pot ser calculada usant

$$\|v\|_{\mathcal{L}_\infty} := \sup_{t \geq 0} \|v(t)\|.$$

La quantitat $\|v\|_{\mathcal{L}_\infty}$ s'anomena norma \mathcal{L}_∞ del senyal v . La mida d'un senyal-impuls $v(t) = v_0 \delta(t)$ pot ser quantificada per $\|v_0\|$, on $\delta(\cdot)$ és la funció delta de Dirac.

Mesura \mathcal{L}_2

Si v és un senyal integrable, es pot calcular la següent norma:

$$\|v\|_{\mathcal{L}_2} = \|v\|_2 := \sqrt{\int_0^\infty \|v\|^2 dt},$$

on $\|\cdot\|$ és la norma euclídea. La quantitat $\|v\|_{\mathcal{L}_2}$ s'anomena norma \mathcal{L}_2 del senyal v , i també es considera com l'energia del senyal v . L'espai $L_2(\mathbb{R})$ indica l'espai de Hilbert de les funcions w de \mathbb{R}_+ a \mathbb{R}^n , amb norma \mathcal{L}_2 acotada.

Se suposa que el senyal pertorbador w es mesura amb la norma \mathcal{L}_2 i té energia finita (norma \mathcal{L}_2 finita). El seu efecte sobre el sistema es mesura també amb la norma \mathcal{L}_2 del vector z . Quan el sistema és realimentat per l'estat ($u = Kx$), cal dissenyar aquesta llei de control tal que minimitzi l'impacte de w sobre z . Es

mesura aquest impacte acotant el quocient $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$. Cal que a més a més s'asseguri l'estabilitat interna del sistema, és a dir, que la matriu A sigui estable.

Es poden considerar les següents mesures pel comportament del sistema (9.1), que definiran el guany del sistema.

- Guany impuls/energia:

$$\Gamma_{ie} := \sup \{ \|z\|_{\mathcal{L}_2} \} \text{ respecte } w(t) = w_0 \delta(t), \|w_0\| \leq 1.$$

El seu nom és degut a que l'entrada és una funció $\delta(t)$, delta de Dirac.

- Guany energia/pic:

$$\Gamma_{ep} := \sup \{ \|z\|_{\mathcal{L}_\infty} \} \text{ respecte } \|w\|_{\mathcal{L}_2} \leq 1.$$

S'anomena així degut a que es fa la norma \mathcal{L}_∞ de la sortida z .

- Guany energia/energia:

$$\Gamma_{ee} := \sup \{ \|z\|_{\mathcal{L}_2} \} \text{ respecte } \|w\|_{\mathcal{L}_2} \leq 1.$$

Rep aquest nom ja que es calcula la norma \mathcal{L}_2 tant de l'entrada com de la sortida.

Per tal d'analitzar el comportament del sistema, es calculen aquests guanys del sistema. Recordem que per al sistema (9.1), la funció de transferència entre la pertorbació w i la sortida z és $T(s) := D + C(sId - A)^{-1}B$. Si el sistema és asimptòticament estable, $T(s)$ és acotada per a tot $s \in \mathbb{C}, Re(s) > 0$, d'on $\sigma_{max}(T(s)) < \infty$. Els guanys Γ_{ie} i Γ_{ep} són anomenats norma H_2 de la funció de transferència $T(s)$, definida en el domini de freqüència com

$$\|T\|_{H_2} = \|T\|_2 := \text{tr} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T^*(j\omega)T(j\omega)d\omega \right)^{1/2},$$

o bé,

$$\|T\|_{H_2} := \text{tr} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(j\omega)T^*(j\omega)d\omega \right)^{1/2}.$$

El guany Γ_{ee} correspon a la norma H_∞ de la funció de transferència (veure [51] per més detalls):

$$\|T\|_{H_\infty} := \sup_w \|T(iw)\|.$$

Per veure que $\Gamma_{ee} = \|T\|_{H_\infty}$, s'usa l'identitat de Parseval, tenint en compte que $T(iw)$ és la transformada de Fourier de $Ce^{tA}B$. Presentem a continuació les dues acceptacions per a la definició de la norma H_∞ .

Definició 9.1 (Norma H_∞). La norma H_∞ de la funció de transferència és el suprem del màxim valor propi singular de resposta en freqüència del sistema:

$$\|T\|_\infty := \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \sigma_{max}(T(iw))$$

Si l'operador T és la funció de transferència entre $z(t)$ i $w(t)$, aleshores la norma infinit de T és

$$\|T(s)\|_\infty := \sup_{W(s) \in \mathcal{L}_2} \frac{\|Z(s)\|_2}{\|W(s)\|_2},$$

on s és la variable de Laplace.

Per a sistemes amb perturbacions, és necessari definir el concepte d'estabilitat interna.

Definició 9.2 (Estabilitat interna). El sistema (9.1) és estable de manera interna si la matriu A és estable.

9.1.2 Comportament H_∞ nominal

Es consideren dos tipus de problema H_∞ (veure [1]):

Problema H_∞ òptim: minimitzar la norma H_∞ de la funció de transferència T sobre el conjunt d'actuadors que estabilitzin internament el sistema.

El mínim s'indica per γ_{opt} i s'anomena guany H_∞ òptim. El problema sub-òptim també és important i és el que tractarem en aquest treball:

Problema H_∞ sub-òptim: donat $\gamma > 0$, trobar un compensador K que estabilitzi el sistema de manera interna i asseguri $\|T\|_\infty < \gamma$.

Les solucions d'aquest problema s'anomenen controladors γ -subòptims. Tenim que la quantitat $\frac{1}{\gamma}$ defineix la màxima amplitud de les incerteses no estructurades que pot aguantar el sistema en llaç tancat sense desestabilitzar-se (teorema dels petits guanys). Per tant, minimitzant $\|T\|_\infty$, el problema H_∞ òptim consisteix en calcular una llei de control K de manera que el sistema en llaç tancat sigui el més robust possible en presència d'incerteses.

Lema 9.1 ([51]). Si el sistema és asimptòticament estable i $\gamma > 0$, tenim les següents equivalències:

(i) $\|T\|_\infty < \gamma$, sent T la funció de transferència entre z i w .

(ii) Sent $x(0) = 0$, per a tot w :

$$\sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|}{\|w\|} < \gamma.$$

(iii) Existeix $P > 0$ simètrica solució de:

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + C^T C & * \\ B^T P + D^T C & -\gamma^2 + D^T D \end{pmatrix} < 0. \quad (9.4)$$

El següent lema presenta el recíproc del Lema 9.1. En farem la seva demostració degut a la seva importància.

Lema 9.2 ([51]). Sigui el sistema (9.1) amb $x(0) = 0$. Donat $\gamma > 0$, si existeix una matriu $P > 0$ solució de

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA & * & * \\ B^T P & -\gamma^2 & * \\ C & D & -Id \end{pmatrix} < 0. \quad (9.5)$$

Aleshores, el sistema és internament estable i amb norma H_∞ menor que γ .

Demostració. Considerem la funció de Lyapunov $V(x, t) := x^T P x$. Com $P > 0$, tenim que $V(x, t) > 0$. D'altra banda, el terme (1, 1) de (9.5) porta a $A^T P + PA < 0$, assegurant l'estabilitat interna. Recordem que si una matriu simètrica és definida negativa, aleshores les matrius diagonals també ho són. Falta veure que la norma H_∞ està acotada superiorment per γ :

$$\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma,$$

o bé $\gamma^2 w^T w - z^T z > 0$. Considerem

$$L := \frac{d}{dt} V + z^T z - \gamma^2 w^T w.$$

Anem a veure que $L < 0$.

$$\begin{aligned} L &= (x^T, w^T) \begin{pmatrix} A^T P + PA & * \\ B^T P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + \\ &\quad + (Cx + Dw)^T (Cx + Dw) - \gamma^2 w^T w \\ &= (x^T, w^T) \begin{pmatrix} A^T P + PA + C^T C & * \\ B^T P + D^T C & -\gamma^2 + D^T D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per Schur, aquesta matriu és definida negativa si ho és (9.5), que resulta ser la nostra hipòtesi. Per tant, integrant L entre 0 i ∞ , obtenim que

$$V(x(\infty)) - V(x(0)) + \int_0^\infty z^T z - \gamma^2 \int_0^\infty w^T w < 0 .$$

Com tenim estabilitat interna, resulta que $x(\infty) \rightarrow 0$ i per tant

$$\int_0^\infty z^T z - \gamma^2 \int_0^\infty w^T w < 0 ,$$

que és equivalent a

$$\|z\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2 \Rightarrow \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma \Rightarrow \|T_{zw}\|_\infty < \gamma .$$

Acabem de demostrar que si (9.5) té solució, aleshores tenim comportament H_∞ i estabilitat interna, tal i com volíem. \square

9.2 Caracterització del control fiable robust

Sigui el sistema format per N subsistemes interconnectats amb incerteses

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \mathbf{A}_i x_i(t) + \mathbf{B}_i u_i^F(t) + \sum_{j \neq i} G_{ij} g_{ij}(x_j, t) + \mathbf{F}_i w_i(t) \\ z_i(t) = \mathbf{C}_i x_i(t) + \mathbf{D}_i w_i(t) \end{cases} , \quad (9.6)$$

amb condicions inicials $x_i(0) = x_{i0}$, $i = 1, \dots, N$. Suposarem que $x_{i0} = 0$, i si no és així, només cal considerar una translació d'origen. El vector $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ és el vector d'estat, que suposarem mesurable, $u_i \in \mathbb{R}^{s_i}$ és el vector de control i $w_i \in \mathbb{R}^{r_i}$ representa la pertorbació que sofreix el sistema. El vector $g_{ij} \in \mathbb{R}^{l_i}$ representa les interconnexions entre el subsistema S_i i la resta de subsistemes. El vector $z_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ és la sortida controlable, que ens indica l'efecte del soroll o pertorbació en el subsistema i . En la Figura 9.2 es presenta l'esquema d'aquest problema quan hi afegim la possibilitat de fallada en l'actuador, sent u_i^F el control després de fallada de l'actuador. A continuació presentem els models d'interconnexió i de fiabilitat que hem vingut usant al llarg de tot el treball.

Model de interconnexió

Per les condicions 1.1–1.2 de l’Aparat 1.3, les interconnexions verifiquen la següent acotació:

$$\|g_{ij}(t, x_j)\| \leq \|W_{ij}x_j\| \quad \text{amb} \quad W_i := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N W_{ji}^T W_{ji} > 0. \quad (9.7)$$

Model de fiabilitat

Considerem el següent model de fiabilitat donat en el Capítol 1 per les equacions (1.10)–(1.12):

$$\begin{cases} u_i^F = \Lambda_i u_i + \phi_i(u_i), \\ \|\phi_i\| \leq \|\Gamma_i u_i\|. \end{cases} \quad (9.8)$$

Recordem que la notació emprada ens indica que T depèn de les incerteses. El primer resultat que obtenim és independent del model d’incerteses, així que de moment no el fixem.

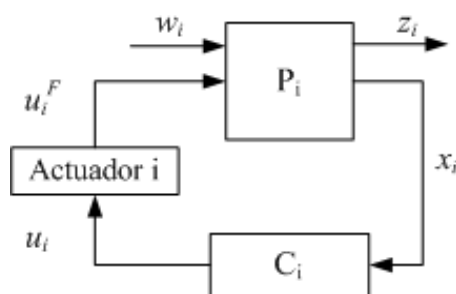


Figura 9.2: Problema H_∞ en presència de fallades en el sistema S_i

Determinar condicions necessàries i suficients per al problema de control robust estàtic pel sistema (9.6) és força complex. En aquest capítol donem condicions suficients que assegurin estabilitat i comportament H_∞ acotat per al sistema (9.6) en laço tancat. Moltes tècniques per a verificar la robustesa de sistemes amb incerteses usen funcions de Lyapunov i les trobem tractades, per exemple, en [2] i

[54]. Recollint el que hem definit en els apartats anteriors, anem ara a caracteritzar el control robust i fiable, amb norma H_∞ acotada. Suposem que existeixen funcions de Lyapunov quadràtiques i paramètriques $V(x) = x^T \mathbf{X}x$, tal que per a qualsevol x no nul i qualsevol entrada w , es verifiquen les següents condicions, tal i com es presenta en el lema 9.2:

$$\begin{cases} V(x) > 0 \\ \frac{d}{dt}V + z^T z - \gamma^2 w^T w < 0. \end{cases} \quad (9.9)$$

Veurem que el sistema en llaç tancat (9.6), amb $u_i = K_i x_i$, és estable i té norma H_∞ acotada, per a tota incertesa admissible. Cal tenir present que també considerem que poden haver-hi fallades en els actuadors, i per tant de fet tenim $u_i^F(t)$ en lloc de u_i , on $u_i^F(t)$ ve donat pel model definit en l'Apartat 1.4. Volem estudiar com afecta la pertorbació acotada w_i en el comportament del subsistema S_i . Per això, comparem les normes \mathcal{L}_2 de w_i i de la sortida z_i , acotant-les per un cert valor donat $\gamma_i > 0$. De fet, fem més: considerem el pitjor cas de pertorbació i busquem el valor de γ_i que més s'aproxima a la norma H_∞ del sistema. Cal tenir present que es tindrà comportament H_∞ quan existeixi K_i tal que es mantingui z_i acotada en front a w_i . És a dir, cal minimitzar $\|T_i\| := \|T_{z_i w_i}(s)\|_\infty$. Per això, ens plantegem el problema sub-òptim H_∞ :

Volem trobar γ_i tal que $\|T_i\|_\infty \leq \gamma_i \Leftrightarrow \|z_i\|_2 \leq \gamma_i \|w_i\|_2$ i que el sistema (9.6) sigui internament estable.

El pitjor cas el tindrem en considerar el suprem del quocient de les normes de la pertorbació i de la sortida:

$$\sup_{\substack{w_i \in \mathcal{L}_2 \\ \text{acotat}}} \frac{\|z_i\|_2}{\|w_i\|_2} \leq \gamma_i.$$

Com $\gamma_i > 0$, resulta que el quocient anterior és equivalent a

$$\gamma_i^{-1} \|z_i\|_2^2 - \gamma_i \|w_i\|_2^2 < 0, \quad (9.10)$$

per a cada $i = 1, \dots, N$. Aquesta condició ens assegura doncs que la norma infinit de la funció de transferència és menor que una certa constant $\gamma_i > 0$. Gràcies a aquest plantejament, el problema que resollem és el de minimitzar aquesta constant i trobar així la matriu de guany tal que que l'efecte de la pertorbació sigui

mínim. Finalment, exposarem aquest problema en termes LMI, per tal de poder fer-ne una resolució numèrica eficaç.

A més de voler acotar la norma H_∞ de cada subsistema, volem mantenir l'estabilitat asimptòtica interna, malgrat de les fallades del sistema. Aquest concepte d'estabilitat interna es refereix a que el sistema no pertorbat és estable. Per tal de tenir estabilitat interna, considerem una candidata a funció de Lyapunov, per a cada subsistema S_i ,

$$V_i(x) = x_i^T \mathbf{X}_i x_i .$$

Per tal que sigui efectivament una funció de Lyapunov, cal que $\mathbf{X}_i > 0$ i que $\frac{d}{dt}V_i < 0$. Anem a veure quina condició s'ha de verificar per tal que aquesta segona condició es verifiqui. Cal tenir present que estem en el cas de fiabilitat i per tant caldrà aplicar el model corresponent. Per tant, per a cada $i = 1, \dots, N$,

$$\frac{d}{dt}V < 0 \Leftrightarrow \left(\mathbf{A}_i x_i + \mathbf{B}_i u_i^F + \sum_{j \neq i} G_{ij} g_{ij} \right)^T \mathbf{X}_i x_i + (*) < 0 . \quad (9.11)$$

Per (9.7) i (9.8), tenint en compte que realmentem per l'estat, $u_i = K_i x_i$ i definint

$$t_i^T = (x_i^T, \dots, g_{ij}^T, \dots, \phi_i^T) \\ \mathcal{G}_i^T := (G_{i1}, \dots, G_{iN}) ,$$

tenim que (9.11) es verifica si

$$t_i^T \begin{pmatrix} (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \Lambda_i K_i)^T \mathbf{X}_i + (*) + W_i + K_i^T \Gamma_i^2 K_i & * & * \\ \mathcal{G}_i \mathbf{X}_i & -Id & * \\ \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}_i & 0 & -Id \end{pmatrix} t_i +$$

$$+ \phi_i^T \phi_i - x_i^T K_i^T \Gamma_i^2 K_i x_i + \sum_{j \neq i} g_{ij}^T g_{ij} - x_i^T W_i x_i < 0 .$$

Per les condicions sobre la variable de fallada ϕ_i i sobre les interconnexions g_{ij} , tenim que $\phi_i^T \phi_i - x_i^T K_i^T \Gamma_i^2 K_i x_i < 0$ i $\sum_{j \neq i} g_{ij}^T g_{ij} - x_i^T W_i x_i < 0$. Per tant, obtenim el següent resultat. La funció de Lyapunov verifica $\dot{V} < 0$ si

$$M_i := \begin{pmatrix} (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \Lambda_i K_i)^T \mathbf{X}_i + (*) + W_i + K_i^T \Gamma_i K_i & * & * \\ \mathcal{G}_i \mathbf{X}_i & -Id & * \\ \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}_i & 0 & -Id \end{pmatrix} < 0 . \quad (9.12)$$

El següent lema resumeix el que acabem de veure.

Lema 9.3. *Sigui el sistema no pertorbat (9.6), és a dir $F_i := 0$, amb $u_i = K_i x_i$ per a cada $i = 1, \dots, N$. Si $M_i < 0$ (9.12), el sistema en llaç tancat té estabilitat asimptòtica interna. En aquest cas, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$.*

Ara cal determinar una condició que asseguri estabilitat interna, norma H_∞ acotada i fiabilitat, quan realmentem el sistema per l'estat: $u_i(t) = K_i x_i(t)$. Per això, considerem la funció paramètrica de Lyapunov $V(x) = \sum_{i=1}^N V_i(x)$ i imposem la condició de comportament H_∞ .

Definició 9.3 (Comportament H_∞). Sigui el subsistema S_i (9.6) amb funció de Lyapunov $V_i(x) = x_i^T \mathbf{X}_i x_i$. Aleshores, el subsistema S_i té norma H_∞ acotada si es verifica

$$\frac{d}{dt} V_i + \gamma_i^{-1} z_i^T z_i - \gamma_i w_i^T w_i < 0. \quad (9.13)$$

El sistema global té comportament H_∞ si, per a tot $i = 1, \dots, N$, el subsistema S_i en té. Anem a transformar la condició donada en la Definició 9.3 per tal d'obtenir una condició tipus LMI. Encara que els passos a seguir són molt semblants als que ens han permès definir el Lema 9.3, els tornem a reproduir per al cas de comportament H_∞ , per tal de clarificar l'explicació i la deducció dels resultats. Així doncs, desenvolupem (9.13):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_i + \gamma_i^{-1} z_i^T z_i - \gamma_i w_i^T w_i &= \\ &= \dot{x}_i^T \mathbf{X}_i x_i + x_i^T \mathbf{X}_i \dot{x}_i + \gamma_i^{-1} z_i^T z_i - \gamma_i w_i^T w_i \\ &= \left(\mathbf{A}_i x_i + \mathbf{B}_i u_i^F + \sum_{j \neq i} G_{ij} g_{ij} + \mathbf{F}_i w_i \right)^T \mathbf{X}_i x_i + (*) \\ &\quad + \gamma_i^{-1} (\mathbf{C}_i x_i + \mathbf{D}_i w_i)^T (\mathbf{C}_i x_i + \mathbf{D}_i w_i) - \gamma_i w_i^T w_i < 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Considerem ara el model de fiabilitat (9.8) i la realimentació. Per tant, tenim que

$$u_i^F = \Lambda_i K_i x_i + \phi_i(K_i x_i). \quad (9.15)$$

Posant (9.15) en (9.14) i definint $t_i^T = (x_i^T, \dots, g_{ij}^T, \dots, \phi_i^T, w_i^T)$, obtenim que la

norma H_∞ estarà acotada per γ_i si es verifica la següent inequació:

$$t_i^T \begin{pmatrix} (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \Lambda_i K_i)^T \mathbf{X}_i + (*) + W_i + K_i^T \Gamma_i^2 K_i + \gamma_i^{-1} \mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_i & * & * & * \\ \mathcal{G}_i \mathbf{X}_i & -Id & * & * \\ \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}_i & 0 & -Id & * \\ \mathbf{F}_i^T \mathbf{X}_i + \gamma_i^{-1} \mathbf{D}_i^T \mathbf{C}_i & 0 & 0 & -\gamma_i Id + \gamma_i \mathbf{D}_i^T \mathbf{D}_i \end{pmatrix} t_i + \\ + \phi_i^T \phi_i - x_i^T K_i^T \Gamma_i^2 K_i x_i + \sum_{j \neq i} g_{ij}^T g_{ij} - x_i^T W_i x_i < 0$$

Utilitzem ara les condicions imposades sobre les interconnexions (9.7) i sobre la variable de fiabilitat ϕ_i (9.8). Per tant, la inequació (9.13) és certa si es verifica que

$$\bar{M}_i := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{X}_i + (*) + W_i + K_i^T \Gamma_i^2 K_i + \gamma_i^{-1} \mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_i & * & * & * \\ \mathcal{G}_i \mathbf{X}_i & -Id & * & * \\ \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}_i & 0 & -Id & * \\ \mathbf{F}_i^T \mathbf{X}_i + \gamma_i^{-1} \mathbf{D}_i^T \mathbf{C}_i & 0 & 0 & -\gamma_i Id + \gamma_i \mathbf{D}_i^T \mathbf{D}_i \end{pmatrix} < 0 \quad (9.16)$$

on $\bar{\mathbf{A}}_i := \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \Lambda_i K_i$.

Si $\bar{M}_i < 0$, obtenim que $\frac{d}{dt} V_i + \gamma_i^{-1} z_i^T z_i - \gamma_i w_i^T w_i < 0$, per a $i = 1, \dots, N$. Si veiem que aquesta mateixa condició també implica que $M_i < 0$ (9.12), aleshores tindrem estabilitat asimptòtica interna i aleshores, integrant (9.13) entre 0 i ∞ , obtenim

$$x_{i0}^T x_{i0} + \gamma_i^{-1} \|z_i\|_2^2 - \gamma_i \|w_i\|_2^2 < 0.$$

Si tenim que les condicions inicials són nul·les, $x_{i0} = 0$, per tot i , obtenim que la norma H_∞ del subsistema i es troba acotada per γ_i :

$$\frac{\|z_i\|_2^2}{\|w_i\|_2^2} < \gamma_i^2 \Rightarrow \sup_{w_i \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z_i\|_2}{\|w_i\|_2} < \gamma_i.$$

Per tant, si demostrem que $\bar{M}_i < 0 \Rightarrow M_i < 0$, tindrem estabilitat degut al Lema 9.3, i comportament H_∞ per $\bar{M}_i < 0$. Abans de veure aquesta implicació, anem a

obtenir una altre expressió de \bar{M}_i . Per això, considerem la següent matriu:

$$\bar{\bar{M}}_i := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{X}_i + (*) + W_i + K_i^T \Gamma_i^2 K_i & * & * & * & * \\ \mathcal{G}_i \mathbf{X}_i & -Id & * & * & * \\ \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}_i & 0 & -Id & * & * \\ \mathbf{F}_i^T \mathbf{X}_i & 0 & 0 & -\gamma_i Id & * \\ \mathbf{C}_i & 0 & 0 & \mathbf{D}_i & -\gamma_i Id \end{pmatrix}.$$

Considerem $\bar{\bar{M}}_i$ i apliquem el complement de Schur al terme $-\gamma_i Id$:

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{X}_i + (*) + W_i + K_i^T \Gamma_i^2 K_i & * & * & * \\ \mathcal{G}_i \mathbf{X}_i & -Id & * & * \\ \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}_i & 0 & -Id & * \\ \mathbf{F}_i^T \mathbf{X}_i & 0 & 0 & -\gamma_i Id \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}_i^T \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{D}_i^T \end{pmatrix} \gamma_i^{-1} (\mathbf{C}_i \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{D}_i) < 0.$$

Aquesta operació correspon justament a \bar{M}_i . Però el complement de Schur també demana que el primer terme sigui definit negatiu:

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{X}_i + (*) + W_i + K_i^T \Gamma_i^2 K_i & * & * & * \\ \mathcal{G}_i \mathbf{X}_i & -Id & * & * \\ \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}_i & 0 & -Id & * \\ \mathbf{F}_i^T \mathbf{X}_i & 0 & 0 & -\gamma_i Id \end{pmatrix} < 0,$$

d'on tenim que $M_i < 0$, ja que conté M_i . Per tant, acabem de demostrar la següent proposició.

Proposició 9.1 (Control fiable robust). *Siguin els models de interconnexió (9.7) i de fiabilitat (9.8). Si existeixen matrius $X_i > 0$ simètriques i K_i tals que $\bar{M}_i < 0$,*

per a cada $i = 1, \dots, N$, aleshores el sistema (9.6) és fiable sota fallades dels actuadors, té estabilitat asimptòtica interna i té norma H_∞ acotada per $\gamma_i > 0$. És a dir,

$$\overline{\overline{M}}_i < 0 \Rightarrow \begin{cases} M_i < 0 \\ \overline{M}_i < 0. \end{cases}$$

Els resultats enunciats en el Capítol 3 es poden aplicar a la matriu $\overline{\overline{M}}_i$ i així separar les matrius que depenen dels paràmetres. Cal tenir present que $\overline{\overline{M}}_i < 0$ no és una inequació matricial lineal, ja que conté factors quadràtics. Els resultats del Capítol 3 permeten linealitzar aquest tipus d'inequació, usar funcions de Lyapunov paramètriques i a més a més caracteritzen les matrius de guany K_i . Com seguim el mateix tipus de raonament que pel cas de control fiable amb cost garantit (veure Capítol 4), ho ometem aquí. El següent lema ens dóna, pel complement de Schur, la relació entre $\overline{\overline{M}}_i < 0$ i una inequació adequada per a poder aplicar el Teorema 3.3.

Lema 9.4. $\overline{\overline{M}}_i < 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{X}_i + (*) & * & * & * & * & * & * \\ \mathcal{G}_i \mathbf{X}_i & -Id & * & * & * & * & * \\ \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}_i & 0 & -Id & * & * & * & * \\ \mathbf{F}_i^T \mathbf{X}_i & 0 & 0 & -\gamma_i Id & * & * & * \\ \mathbf{C}_i & 0 & 0 & \mathbf{D}_i & -\gamma_i Id & * & * \\ Id & 0 & 0 & 0 & 0 & -W_i^{-1} & * \\ \Gamma_i K_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Id \end{pmatrix} < 0.$$

Per claretat en la notació, fem les següents assignacions, que usarem en apartats posteriors:

$$\begin{aligned} E_i &:= (\mathcal{G}_i^T \quad \mathbf{B}_i \quad \mathbf{F}_i) \\ \mathcal{C}_i^T &:= (\mathbf{C}_i^T \quad Id) \\ H_i &:= \Gamma_i \\ Q_{11}^i &:= \text{diag}(-Id, -Id, -\gamma_i Id) \\ Q_{22}^i &:= \text{diag}(-\gamma_i Id, -W_i^{-1}) \\ Q_{33}^i &:= -Id \\ Q_{21}^i &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{D}_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Q_{31}^i = Q_{32}^i &:= 0. \end{aligned}$$

En aquesta secció hem caracteritzat el comportament H_∞ per a sistemes interconnectats amb incerteses admissibles, sense especificar-ne el model, amb fallades en la realimentació.

9.3 Disseny LMI: Incerteses normades

En aquest apartat considerem el model d'incerteses normades i presentem la caracterització del control fiable amb norma H_∞ acotada per mitjà de les tècniques LMIs.

Sigui doncs, per a cada $i = 1, \dots, N$, el subsistema S_i

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \mathbf{A}_i x_i(t) + \mathbf{B}_i u_i^F(t) + \sum_{j \neq i} G_{ij} g_{ij}(x_j, t) + F_i w_i \\ z_i(t) = \mathbf{C}_i x_i(t) + D_i w_i . \end{cases} \quad (9.17)$$

Cal remarcar que no considerem que les matrius de perturbacions F_i i D_i tinguin incerteses. Aquesta suposició no implica una pèrdua massa gran de generalitat, ja que es considera que se sap de quina manera actua la perturbació. En el següent apartat, en el cas d'incerteses politòpiques, ja considerarem aquest cas. Però en el cas d'incerteses normades es complica el resultat sense necessitat. Així doncs, les matrius d'estat, control i sortida tenen expressió

$$\begin{cases} \mathbf{A}_i = A_i + H_{1i} \Delta_i(t) E_{1i} \\ \mathbf{B}_i = B_i + H_{1i} \Delta_i(t) E_{2i} \\ \mathbf{C}_i = C_i + H_{2i} \Delta_i(t) E_{3i} . \end{cases} \quad (9.18)$$

Les matrius d'incerteses $\Delta_i(t)$ verifiquen l'acotació

$$\|\Delta_i^T(t) \Delta_i(t)\| \leq Id . \quad (9.19)$$

Considerem els models d'interconnexió (9.7) i de fiabilitat (9.8), definits en l'Apartat 9.2. El resultat principal obtingut en aquest apartat és la Proposició 9.1, que ens permet dissenyar el control fiable robust. De fet, el que veurem a continuació és una adaptació d'aquesta proposició, que dona una caracterització LMI d'aquest control per a sistemes amb incerteses normades. Cal que es verifiquin les següents condicions.

Condicció 9.1. Per a cada $i = 1, \dots, N$, la matriu D_i verifica

$$\bar{D}_i := (Id - D_i^T D_i)^{-1} > 0 .$$

Condicció 9.2. Existeix un escalar $\delta_{1i} > 0$ tal que

$$\|E_{2i} E_{2i}^T\| \leq \delta_{1i} Id .$$

Condicció 9.3. Existeix un escalar $\delta_{2i} > 0$ tal que

$$\|H_{1i} D_i D_i^T H_{1i}^T\| \leq \delta_{2i} Id .$$

La Condicció 9.1 imposa una restricció sobre el sistema mateix, limitant molt el tipus de pertorbació que pot patir la sortida del sistema. Les condicions 9.2 i 9.3 indiquen com escollir les matrius que descomposen les incerteses del sistema. Com aquestes matrius no són úniques, aquestes dues condicions no són tan restrictives com l'anterior.

Proposició 9.2. *Sigui el sistema (9.17), amb els models d'incerteses (9.18), d'interconnexió (9.7) i de fiabilitat (9.8). Siguin les condicions 9.1, 9.2 i 9.3. Siguin $\gamma_i > 0$, $\beta_{4i} > 0$ i $\beta_{5i} > 0$ donats.*

Si existeixen matrius $P_i = P_i^T$ definides positives i Y_i que fan viable la següent LMI:

$$\begin{pmatrix} P_{1i} & P_{2i} \\ P_{2i}^T & P_{3i} \end{pmatrix}, \quad (9.20)$$

per a cada $i = 1, \dots, N$, on

$$P_{1i} := P_i A_i^T + A_i P_i + Y_i \Lambda_i B_i^T + B_i \Lambda_i Y_i + \mu_i H_{1i} H_{1i}^T + G_i^T G_i + B_i^T \Lambda_i^2 B_i^T \\ + \gamma_i^{-2} \left(F_i \bar{D}_i D_i^T C_i P_i + P_i C_i^T D_i \bar{D}_i^T F_i^T \right)$$

$$P_{2i} := \left(P_i E_{1i}^T, Y_i \Lambda_i E_{2i}^T, Y_i \Gamma_i, B_i \Lambda_i^2 E_{2i}^T, F_i, P_i E_{3i}^T, P_i C_i^T D_i, \right. \\ \left. , P_i C_i^T D_i D_i^T H_{2i}^T, P_i E_{3i}^T, P_i E_{3i}^T, F_i \bar{D}_i D_i^T H_{2i} \right)$$

$$P_{3i} := \text{diag} \left(-\beta_{1i}, -\beta_{2i}, -Id, -\beta_{3i}, -\gamma_i \bar{D}_i^{-1}, -\beta_{4i} \gamma_i^2, -\gamma_i^3, -\frac{\gamma_i^3}{\beta_{5i}}, \right. \\ \left. , -\beta_{5i} \gamma_i^3, -\gamma_i^2 \delta_2, -\frac{\gamma_i^2}{\beta_{4i}} \right)$$

$$\mu_i := \beta_{1i} + \beta_{2i} + \beta_{3i} + \delta_{1i}$$

$$G_i^T := \left(G_{i1}, \dots, G_{iN} \right),$$

aleshores, el control $u_i(t) = Y_i P_i^{-1} x_i(t)$ és fiable i la norma H_∞ del sistema es troba acotada per γ_i .

Es pot veure que la LMI (9.20) no és lineal en γ_i , i per tant el que s'obté és el control fiable robust per a cada $\gamma_i > 0$ fixada.

Demostració. Els passos de la demostració són semblants als efectuats en el Capítol 5. Estem sota les condicions de la Proposició 9.1. Aplicant els complements de Schur a la desigualtat matricial $\overline{\overline{M}}_i < 0$, i usant les acotacions donades pel model d'incerteses normades i les condicions 9.1–9.3, junt a la desigualtat matricial estàndard, obtenim que $\overline{\overline{M}}_i < 0$ si la LMI (9.20) és viable. Com això és justament la hipòtesi de la nostra proposició, aquesta queda demostrada. No presentem els passos de les diferents acotacions, ja que són iguals als fets en la demostració de la Proposició 5.1 i no aporta cap nova metodologia. \square

9.4 Disseny LMI: Model polític

En aquest apartat, donem per al model d'incerteses polític, la caracterització per mitjà de les inequacions lineals. Aquest disseny permet fer-ne una resolució numèrica més efectiva, encara que no en presentem, ja que volem veure'n l'eficàcia comparant-la amb altres dissenys.

En aquesta secció apliquem el Teorema 3.3 al cas de comportament H_∞ , quan el model d'incerteses és el polític. Aquest teorema ens permet obtenir inequacions matricials lineals i usar funcions de Lyapunov paramètriques, tornant l'estudi de l'estabilitat menys restrictiu. Recordem que en el cas polític, les incerteses són del tipus

$$\mathbf{T} := \sum_{k=1}^L \alpha_k T_k, \quad \text{amb} \quad \sum_{k=1}^L \alpha_k = 1.$$

Sota aquest model, el comportament H_∞ queda assegurat en la següent proposició.

Proposició 9.3. *Considerem els models de interconnexió (9.7) i de fiabilitat (9.8). Sigui el sistema amb incerteses convexes (9.6), realimentat per l'estat: $u_i(t) = K_i x_i(t)$. Si, per a cada $i = 1, \dots, N$, existeixen $\gamma_i > 0$, matrius $Y_{i_k} > 0$*

simètriques i matrius V_i , N_i solució de

$$\begin{pmatrix} -(V_i + V_i^T) & * & * & * & * & * \\ A_{i_k} V_i + Y_{i_k} + B_{i_k} \Lambda_i N_i & -Y_{i_k} & * & * & * & * \\ 0 & E_i^T & Q_{11}^i & * & * & * \\ C_{i_k} V_i & 0 & Q_{21}^i & Q_{22}^i & * & * \\ H_i^T N_i & 0 & Q_{31}^i & Q_{32}^i & Q_{33}^i & * \\ V_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_{i_k} \end{pmatrix} < 0, \quad (9.21)$$

aleshores, el sistema en llaç tancat és fiable, internament estable i amb norma H_∞ acotada

$$\sup_{w_i \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z_i\|_2}{\|w_i\|_2} < \gamma_i. \quad (9.22)$$

El control realimentat ve definit per $K_i := N_i V_i^{-1}$.

Demostració. Si es verifica la inequació (9.21), aplicant el Teorema 3.3 i el Lema 9.4, tenim que $\overline{M}_i < 0$. Aplicant ara la Proposició 9.1, tenim que el sistema és fiable, té norma H_∞ acotada per γ_i i és internament estable. \square

Aquest teorema caracteritza la llei de control que permet fallades en el sistema tot i conservant-ne l'estabilitat i que assegura l'acotació de la norma H_∞ del sistema. Si es considera la cota γ_i com una variable més del sistema LMI, es pot calcular el valor òptim, obtenint així la mínima cota de la norma H_∞ .

No hem desenvolupat el cas del model multiconvex ja que considerem que seria interessant fer un estudi considerant els paràmetres dependents del temps. Això comporta un estudi més extens i ho deixem com a un possible treball futur.

9.5 Realimentació per la sortida

En aquest apartat presentem el disseny del control descentralitzat realimentat per la sortida mesurable y_i . Considerem el sistema interconnectat d'equació

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \Delta A_i x_i + \Delta B_i u_i^F + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G_{ij} g_{ij} + \Delta F_i w_i \\ y_i = \Delta C_{1i} x_i \\ z_i = \Delta C_{2i} x_i + \Delta D_i w_i . \end{cases}$$

El vector $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ és el vector d'estat, $u_i \in \mathbb{R}^{s_i}$ és el control, $y_i \in \mathbb{R}^{q_i}$ és la sortida mesurable i $z_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ és la sortida controlable. Els vectors $g_{ij} \in \mathbb{R}^{l_i}$ representen la interconnexió entre el sistema S_i i la resta de subsistemes. De moment no fixem el model d'incerteses. Després de fallada, el vector de control segueix el model definit al llarg d'aquest treball:

$$u_i^F = \Lambda_i u_i + \phi_i(u_i) \text{ on } \|\phi_i\| \leq \|\Gamma_i u_i\| .$$

En aquest apartat considerem el control realimentat per la sortida. Per tant, caldrà dissenyar la matriu de guany K_i tal que

$$u_i = K_i y_i ,$$

sigui un control amb comportament H_∞ . Per això, per a cada subsistema S_i , considerem la funció de Lyapunov

$$V_i := x_i^T X_i x_i .$$

Per la Definició 9.3, cal imposar la condició (9.13), que ens assegura una acotació de la norma H_∞ :

$$\frac{d}{dt} V_i + \gamma_i z_i^T z_i - \gamma_i^{-1} w_i^T w_i < 0 . \quad (9.23)$$

En desenvolupar aquesta condició, utilitzant les equacions del subsistema, i considerant el vector $t_i^T = (x_i^T, g_{i1}^T, \dots, g_{iN}^T, \phi_i^T, w_i^T)$, obtenim que la desigualtat (9.23) és certa si es verifica la següent inequació matricial, on hem tingut en

compte les acotacions que verifiquen ϕ_i i g_{ij} (veure Apartat 9.2):

$$\begin{pmatrix} \left(\Delta A_i + \Delta B_i K_i \Delta C_{1i} \right)^T X_i + (*) & * & * & * \\ \Delta E_i^T X_i & Q_{11}^i & * & * \\ \Delta C_i^T & Q_{21}^i & Q_{22}^i & * \\ \Gamma_i K_i \Delta C_{1i} & Q_{31}^i & Q_{32}^i & Q_{33}^i \end{pmatrix} < 0 ,$$

on els termes d'aquesta inequació venen definits per

$$\Delta E_i = \left(G_i, \Delta B_i, \Delta F_i \right), \text{ on } G_i = (G_{i1}, \dots, G_{iN})$$

$$\Delta C_i = \left(\Delta C_{2i}, Id \right)$$

$$Q_{11}^i = \begin{pmatrix} -Id & * & * \\ 0 & Id & * \\ 0 & 0 & -\gamma_i \end{pmatrix}$$

$$Q_{21}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta D_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_{22}^i = \begin{pmatrix} -\gamma_i & * \\ 0 & -W_i^{-1} \end{pmatrix}$$

$$Q_{31}^i = 0, \quad Q_{32}^i = 0, \quad Q_{33}^i = -Id.$$

Per tal de trobar una condició lineal, cal considerar els tres models d'incerteses definits en el Capítol 1. Però ens trobem amb la dificultat generada en considerar que la relació entre x_i i y_i té incerteses. Per tal de poder usar la teoria desenvolupada en aquest treball, cal imposar que aquesta relació no contingui incerteses:

$$\Delta C_{1i} \equiv C_{1i}.$$

Fer aquesta suposició no comporta una pèrdua de generalitat, només correspon a suposar que la medició no comporta errors, o que aquests són despreciables. En aquest cas, podem resoldre el problema reduint-nos al cas estudiat en l'Apartat 9.2, trobant la matriu \bar{K}_i solució de la Proposició 9.1, amb

$$\bar{K}_i := K_i C_{1i}.$$

Aleshores, suposant que el rang de la matriu C_{1i} és màxim, sempre podem trobar una matriu inversa per la dreta tal que

$$C_{1i}^{-1} \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i} \text{ tal que } C_{1i} \cdot C_{1i}^{-1} = Id_{q_i \times q_i} .$$

Aleshores, la nostra matriu de guany és

$$K_i := \bar{K}_i C_{1i}^{-1} .$$

En aquest capítol hem tractat el control estàtic amb comportament H_∞ , per a sistemes interconnectats amb incerteses, obtenint un disseny LMI, que permet a l'hora calcular la cota γ_i de la norma H_∞ com la matriu de guany que defineix el control. Hem considerat tant el cas de la realimentació per l'estat, com la realimentació per la sortida.

Capítol 10

Conclusions i treball futur

En aquest capítol s'analitza l'acompliment dels objectius formulats a l'inici de la present tesi i es resumeixen les principals aportacions. En la segona part del capítol es presenten algunes futures línies de recerca a les que pot donar lloc aquest treball.

10.1 Conclusions

El principal objectiu d'aquesta tesi, que era dissenyar un conjunt de controladors descentralitzats amb realimentació d'estat, verificant certes especificacions, per a sistemes interconnectats amb incerteses i fallades en els actuadors, ha estat assolit. Així, hem presentat una solució per a dos problemes rellevants en la teoria de control:

- Control RGC: és el problema de sintetitzar el control fiable que a més a més d'assegurar l'estabilitat, garanteix cert nivell de rendiment o de cost quadràtic. De fet, hem trobat una cota mínima per a la funció de cost.
- Control H_∞ : és el problema de dissenyar el control que assegura estabilitat interna sota perturbacions en el sistema, obtenint una cota per a la relació entre la perturbació i la sortida controlable.

Hem considerat tres models diferents d'incerteses: incerteses normades o acotades, incerteses definides sobre un polítop i incerteses que segueixen el model multiconvex. El model de fiabilitat emprat permet plantejar-se tant una fallada total en l'actuador com una fallada parcial.

A l'hora de dissenyar ambdós controls, hem volgut utilitzar les tècniques donades per les inequacions lineals matricials (LMI), ja que permeten una fàcil implementació numèrica. Així doncs, en primer lloc hem tractat aquests dos problemes obtenint una caracterització general, així com un disseny en termes de les tècniques LMIs, que ens han permès dissenyar tant el control RGC com el control H_∞ . Després, hem especificat el disseny en funció del model d'incerteses escollit, així com hem donat un exemple numèric que demostra la bondat de les tècniques definides (veure Figura 10.1).

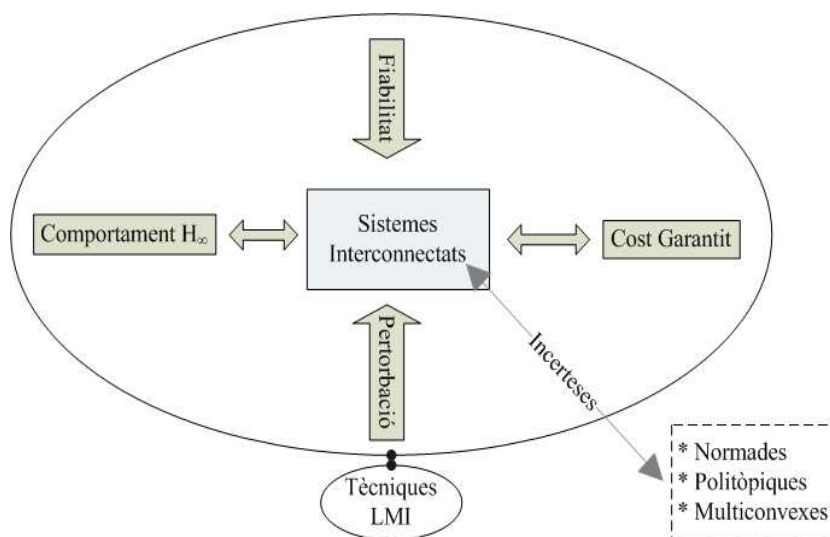


Figura 10.1: Esquema de treball

Dins el contexte dels sistemes interconnectats amb incerteses, sota la presència de fallades en els actuadors, les principals aportacions de la tesi són les següents:

1. Obtenició d'una relació general entre inequacions matricials lineals (LMI) i no lineals. Hem obtingut aquest resultat introduïnt certes variables matricials que separen els termes quadràtics. Aquesta relació permet obtenir caracteritzacions LMI per a un gran ventall de problemes de teoria de control, i no només en els dos problemes que hem tractat en aquest treball. Permeten obtenir implementacions numèriques efectives, així com relaxacions en les condicions d'estabilitat, ja que aquestes LMIs separen les dades del problema i les variables de disseny. Aquesta caracterització permet, en particular,

utilitzar funcions de Lyapunov paramètriques que assegurin l'estabilitat del sistema quan una funció no paramètrica no arriba a fer-ho.

2. Caracterització general d'un conjunt de controladors fiables amb cost quadràtic garantit. Aquesta caracterització es basa en suposar que certa inequació matricial no lineal té solució. Cal tenir present que obtenim una condició suficient, és a dir, que poden existir controladors fiables amb cost garantit que no verifiquin aquesta inequació matricial. La importància d'aquest resultat radica en donar una condició en forma d'inequació matricial, independentment del model d'incerteses escollit.
3. Disseny d'un conjunt de controls descentralitzats fiables amb cost garantit. Aquest disseny es basa en la realimentació d'estat i en l'obtenció d'un resultat basat en les tècniques LMI. Aquest disseny és específic a cada model d'incerteses considerat, i s'han considerat fallades parcials i totals en els actuadors.
4. Minimització de la cota del cost quadràtic. Hem presentat dues maneres que permeten obtenir una cota òptima del cost garantit, així com treure'n la dependència respecte les condicions inicials
5. Determinació de condicions de resolució del problema de control RGC. En efecte, en tractar aquest problema ens hem adonat que en considerar fallades en el sistema, el model d'incerteses es veu reduït en certa manera, perdent també llibertat en la definició de la funció de cost. Per tant, el fet d'estudiar la fiabilitat junt a les incerteses del sistema comporta una sèrie de restriccions, que ens indiquen que tenir en compte les fallades comporta una pèrdua de llibertat a l'hora d'escollir la funció de cost.
6. Caracterització d'un conjunt de controladors estàtics fiables realimentats per l'estat, amb norma H_∞ del sistema acotada. Aquesta caracterització obtinguda és independent del model de incerteses. També hem fet un breu estudi del control robust realimentat per la sortida mesurable, en el cas que no se suposin errors en la medició de la sortida.
7. Disseny d'un conjunt de controladors H_∞ fiables per a sistemes interconnectats amb incerteses, sota la presència de fallades en els actuadors, usant les tècniques LMI. Hem obtingut condicions suficients que assegurin estabilitat i comportament H_∞ acotat per a sistemes interconnectats enllaçat tancat.

8. Formulació de condicions sobre els sistemes interconnectats amb incerteses normades i comportament H_∞ . Cal imposar restriccions sobre el sistema mateix, limitant molt el tipus de pertorbació que pot patir la sortida del sistema. Aquestes condicions també actuen sobre com escollir les matrius que descomposen les incerteses del sistema.

10.2 Línies de treball futur

El treball futur se centra en tres eixos, que es corresponen amb els dos problemes tractats al llarg d'aquest treball i a les tècniques LMIs.

El primer eix és el referent al control descentralitzat fiable de cost garantit. Es tractaria de fer-ne l'extensió següent:

1. Estudi de sistemes interconnectats en temps discret amb incerteses, en presència de fallades dels actuadors. Es consideraran els tres models d'incerteses: normat, politòpic i multiconvex.
2. Estudi de sistemes interconnectats amb incerteses multiconvexes, quan els paràmetres varien en el temps. En aquest treball hem suposat que els paràmetres eren constants, per tal de fer una primera aproximació al problema. Seria convenient estudiar la caracterització del control RGC per a aquest model d'incerteses.
3. Estudi de sistemes continus de gran escala més complexos, considerant característiques com retards en el temps, no linealitats, controls redundants. Aquests són casos força tractats en la teoria de control, i seria interessant veure com podem estendre els nostres resultats en aquests casos.

El segon eix es refereix al estudi del control H_∞ . En aquest treball, hem tractat el control estàtic. Seria oportú realitzar l'estudi del control dinàmic per a sistemes interconnectats amb incerteses, sota la presència de fallada en els actuadors. Ens centrariem també en els tres models d'incerteses, i escolliríem el mateix model de fallada, que contempla tant la fallada total com la fallada parcial en els actuadors. També seria bó veure com els resultats que hem presentat es poden traslladar al cas de sistemes discrets.

El tercer eix que ens permet extendre el present treball és aprofundir en les tècniques LMI, per tal d'aprofitar més el seu potencial en problemes de control. Caldria veure com es poden utilitzar en els problemes presentats en els dos eixos anteriors.

Apèndix A

Síntesi LQ/LQG

A.1 Síntesi LQ

Sigui el sistema lineal continu, d'estat inicial $x(t_0) = x_0$, definit per

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = x(t) \\ z(t) = Dx(t) \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

on $x(t) \in \mathbb{R}^n$ és el vector d'estat, $u(t) \in \mathbb{R}^s$ és el vector de control i $z(t) \in \mathbb{R}^m$ és el vector de sortida regulat. El vector $y(t)$ de sortides observades és el mateix vector d'estat.

La síntesi lineal quadràtica LQR (*Linear Quadratic Regulator*), o bé simplement LQ, consisteix en trobar una matriu de guany K tal que el control realimentat per l'estat $u(t) = -Kx(t)$ estabilitza el sistema i minimitza el criteri quadràtic

$$J = \int_0^{\infty} (z^T Q_1 z + u^T R u) dt = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt,$$

amb les matrius de ponderació $Q_1 \geq 0$ i $R > 0$ simètriques, i $Q = D^T Q_1 D$. Quan el sistema és en llaç tancat, el criteri J es reescriu com

$$J = \text{tr} \left[\left(Q + K^T R K \right) L \right], \quad (\text{A.2})$$

amb $L = \int_0^{\infty} x x^T dt$. Tenint present que la solució del sistema (A.1) en llaç tancat té per equació $\dot{x} = (A - BK)x$, la solució és

$$x(t) = e^{A_f t} x_0, \text{ amb } A_f := A - BK.$$

Si el sistema és estable, L verifica l'equació de Lyapunov

$$A_f L + L A_f^T = -x_0 x_0^T . \quad (\text{A.3})$$

Per tant, cal buscar una matriu K que minimitzi el criteri J definit per (A.2), on L verifica (A.3). Es considera la funció de Hamilton

$$H := \text{tr} \left[\left(Q + K^T R K \right) L \right] + P \left(A_f L + L A_f^T + x_0 x_0^T \right) ,$$

i les condicions d'optimització es transformen en

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial L} = 0 \Rightarrow Q + K^T R K + P A_f + A_f^T P = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial K} = 0 \Rightarrow 2 R K L - 2 B^T P L = 0 . \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

D'aquesta segona igualtat treiem l'expressió de la matriu de guany K

$$K = R^{-1} B^T P ,$$

on la matriu simètrica $P > 0$ verifica l'equació de Riccati no lineal

$$P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 .$$

Així doncs, per a calcular la matriu K cal primer tenir la matriu P , resolent l'equació de Riccati, tal i com mostrem en l'apartat següent. Si volem obtenir un valor mínim del cost J , cal resoldre el següent problema

$$\begin{aligned} J_{min} &= \text{tr} \left[\left(Q + K^T R K \right) L \right] \\ &= \text{tr} \left[\left(- P A_f - A_f^T P \right) L \right] \text{ verificant (A.4)} . \end{aligned}$$

Com $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ i per (A.3), s'obté que $J_{min} = x_0^T P x_0$.

Resolució de l'equació de Riccati [1]

Considerem la matriu anomenada hamiltoniana

$$Z = \begin{pmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} .$$

La matriu Z verifica la següent propietat. Els seus valors propis estan formats pels n valors propis de la matriu del sistema en llaç tancat $A - B K$ i els

seus oposats. Per veure aquesta afirmació, només cal expressar convenientment el determinant de Z . En efecte,

$$\det(Z) = \det \begin{pmatrix} A - BR^{-1}B^T P & -BR^{-1}B^T \\ -Q - A^T P & -A^T \end{pmatrix}.$$

Utilitzant la definició de la matriu de guany K i Riccati, obtenim

$$\det(Z) = \det \begin{pmatrix} A - BK & -BR^{-1}B^T \\ P(A - BK) & -A^T \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - BK & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -(A^T - K^T B^T) \end{pmatrix}.$$

Per tant, resulta que

$$\det(\lambda I - Z) = \det(\lambda I - (A - BK)) \det(\lambda I + A - BK).$$

En conseqüència, els valors propis que anul·len $\det(\lambda I - Z)$ estan formats pels n valors propis del sistema LQ en llaç tancat i els seus oposats. Existeixen només n valors propis amb part real negativa. Sigui $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matriu d'aquests valors propis. Aleshores, construïm la matriu X formada pels vectors propis associats a Λ . Tenim que $ZX = X\Lambda$. Subdividint la matriu X en dues matrius X_1 i X_2 , obtenim:

$$\begin{pmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \Lambda,$$

que es descomposa en

$$\begin{aligned} AX_1 - BR^{-1}B^T X_2 &= X_1 \Lambda \\ -QX_1 - A^T X_2 &= X_2 \Lambda. \end{aligned}$$

Si escollim la matriu P de la forma

$$P := X_2 X_1^{-1},$$

obtenim que P verifica Riccati, tal i com volíem. A posteriori, es verifica l'estabilitat del sistema en llaç tancat tenint en compte que $X_1^{-1}(A - BK)X_1 = \Lambda$, on els valors propis de Λ són de part real negativa. De la mateixa manera, la positivitat de P ve de l'equació de Lyapunov (A.4), on la matriu A_f té tots els seus valors propis estables.

Relació entre norma H_2 i LQ

En el control LQ que utilitza el vector d'estat com a mesura, el criteri quadràtic de funcionament a minimitzar és

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt ,$$

que es pot reescriure com

$$J = \int_0^{\infty} y^T y dt , \text{ amb } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} ,$$

on $y_1 = Q^{1/2}x$, $y_2 = R^{1/2}u$. Pel teorema de Parseval, que relaciona el domini temporal amb el domini de freqüències, tenim que

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\omega) Y(j\omega) d\omega .$$

El terme $Y(j\omega)$ designa la transformada de Laplace de $y(t)$. Per definició de norma H_2 , tenim aleshores

$$J = \|Y\|^2 .$$

La condició inicial x_0 donada, el control LQ correspon a la minimització de la norma H_2 de la matriu de transferència entre x_0 i y , que és justament el vector que conté l'estat i el control.

A.2 Síntesi LQG

El mètode lineal quadràtic (LQ) exigeix el coneixement del vector d'estat, mentre que en la majoria de problemes de control només es disposa d'informació parcial de l'estat, en cada instant. La síntesi lineal quadràtica gaussiana (LQG) consisteix en buscar, a partir d'una mesura parcial, un regulador que minimitzi un criteri quadràtic de caire estocàstic. Suposem que tenim un sistema lineal d'ordre n d'equacions

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w , \\ y = Cx + v , \\ z = Dx . \end{cases}$$

Els vectors w i v representen soroll blanc, de mitjana zero, independents, amb matrius de covariància W i V , respectivament. És a dir,

$$\mathcal{E}(ww^T) = W \geq 0 , \mathcal{E}(vv^T) = V \geq 0 , \mathcal{E}(wv^T) = 0 .$$

A partir de les mesures de y , que contenen soroll, volem calcular una llei de control que minimitzi el criteri

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ \int_0^T (z^T Q_1 z + u^T R u) dt \right\}. \quad (\text{A.5})$$

La solució del problema es basa en el principi de separació que estableix que el control òptim s'obté:

- a) buscant l'estimació \hat{x} de l'estat usant el filtre de Kalman. Per això, és necessari que $(A, \Gamma W^{\frac{1}{2}}, C)$ sigui detectable i estabilitzable.
- b) usant aquest estimador com a mesura exacta de l'estat, per tal de resoldre el problema de control òptim lineal LQ.

Ja que el regulador lineal quadràtic i el filtre de Kalman, cada un per separat, són robustos, es podria pensar que els compensadors LQG també ho són. Però no és així i normalment la síntesi LQG té marges estrets d'estabilitat. Un mètode per a resoldre aquesta mancança és sintetitzar un control LQG que recobreixi asimptòticament les propietats de robustesa de, o bé el filtre de Kalman, o bé la síntesi LQ.

Relació entre norma H_2 i LQG

Si designem per $P(p)$ la matriu de transferència que lliga, en llaç tancat, les entrades $(w, v)^T$ al vector $l = (Q^{1/2}x, R^{1/2}u)$, el criteri (A.5), per Parseval, s'escriu com

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(jw)^* P(jw) dw = \|P(p)\|_2^2.$$

Per tant, els problemes LQ i LQG són de fet casos particulars de problemes més generals, ja que podem minimitzar altres funcions de transferència.

Apèndix B

Mètodes del punt interior

La introducció dels mètodes del punt interior va marcar un abans i un després en la resolució numèrica de les inequacions lineals matricials. Aquests mètodes van ser desenvolupats primer per Kamarkar [21] i van veure la seva rellevància en la teoria LMI gràcies al treball de Nesterov i Nemirovsky [33].

A continuació n'exposem la idea principal (veure [47]). Sigui F una funció afí i sigui $\mathcal{S} := \{x \mid F(x) > 0\}$ el domini de la funció convexa $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ a minimitzar. És a dir, volem resoldre un problema d'optimització convexa

$$\min f(x) ,$$

sobre tots els valors de la variable x que satisfan la inequació matricial $F(x) > 0$. Aquest tipus de problema també s'anomena problema d'optimització condicionada. La idea és obtenir un problema no condicionat. Per això, primer és necessari introduir una funció barrera ϕ . Aquesta funció haurà de ser contínua i complir

- Estrictament convexa en l'interior de \mathcal{S} ,
- Al llarg de $\{x_n\}_n$ convergent a la frontera de \mathcal{S} , ϕ ha de tendir a infinit.

Donada una funció barrera ϕ verificant aquestes dues condicions, el problema d'optimització és reemplaçat per un problema d'optimització lliure, on s'ha de minimitzar el funcional

$$\bar{f}(t, x) := tf(x) + \phi(x) ,$$

on t és un paràmetre anomenat de càstig. Aleshores, cal determinar el mínim $x(t)$ de \bar{f} i considerar $x(t)$ com una funció dependent del paràmetre de càstig $t > 0$.

En la majoria de mètodes del punt interior, aquest problema d'optimització lliure es resol pel mètode clàssic de Newton-Raphson, per tal d'aproximar el mínim de \bar{f} . Sota condicions generals i per a una successió de paràmetres de càstig t_n amb $t_n \rightarrow \infty$, la successió $\{x(t_n)\}_n$ convergeix cap a un punt x que és solució del problema d'optimització condicionada inicial.

Modificant lleugerament el problema d'optimització lliure, s'obté una solució quasi analítica del problema d'optimització convexa. Substituint el problema inicial pel problema d'extremes lliures

$$g(t, x) := \phi_0(t - f(x)) + \phi(x), \quad (\text{B.1})$$

amb $t > t_0 := \inf_{F(x) > 0} f(x)$ i ϕ_0 una funció barrera per a la part positiva de l'eix real. Com abans, la idea és calcular el mínim $x(t)$ de $g(t, x)$ i considerar-lo com una funció del paràmetre t . La corba donada per $x(t)$, $t > t_0$, s'anomena recorregut dels centres pel problema d'optimització. Sota bones condicions, les solucions $x(t)$ són analítiques i el seu límit quan $t \rightarrow t_0$ és definit com x_{opt} . El punt x_{opt} és òptim ja que $x(t)$ verifica la LMI i satisfà $f(x(t)) \ll t$.

Els mètodes del punt interior poden ser aplicats a tots tres tipus de problemes LMI presentats en l'apartat 2.4. Si considerem el problema de viabilitat amb $F(x) > 0$, aleshores una candidata a funció de barrera és la següent funció logarítmica

$$\phi(x) := \begin{cases} \log \det F(x)^{-1} & \text{si } x \in \mathcal{S} \\ \infty & \text{altrament.} \end{cases}$$

Sota la suposició que el conjunt de viabilitat \mathcal{S} és acotat i no buit, resulta que ϕ és estrictament convexa i defineix una funció barrera. Per convexitat, tenim que existeix un únic $x_{opt} \in \mathcal{S}$ tal que $\phi(x_{opt})$ és el mínim global de ϕ . Aquest punt s'anomena centre analític i s'obté usualment pel mètode d'iteració de Newton

$$x_{k+1} = x_k - (\phi''(x_k))^{-1} \phi'(x_k).$$

Aquí ϕ' i ϕ'' indiquen el gradient i la matriu Hessiana de ϕ , respectivament. La convergència d'aquest mètode es veu de la següent manera. Com ϕ és estrictament convexa i prou suau, existeixen nombres L i M tals que, per a tot vector u de norma 1, es verifica

$$\begin{cases} u^T \phi''(x) u \geq M, \\ \|\phi''(x) u - \phi''(y) u\| \leq L \|x - y\|. \end{cases}$$

En aquest cas,

$$\|\phi'(x_{k+1})\|^2 \leq \frac{L}{2M^2} \|\phi'(x_k)\|^2 .$$

Per tant, quan la condició inicial x_0 verifica $\frac{L}{2M^2} \|\phi'(x_0)\|^2 < 1$, el mètode convergeix quadràticament.

El problema d'optimització de minimitzar $f(x)$ sota la restricció LMI $F(x) > 0$, pot ser plantejat com un problema de viabilitat si es considera

$$\bar{F}(t, x) := \begin{pmatrix} t - f(x) & 0 \\ 0 & F(x) \end{pmatrix} ,$$

on $t > t^* := \inf_{F(x) > 0} f(x)$ és el paràmetre de càstig. Usant la mateixa funció de barrera anterior, s'obté el problema d'optimització de minimitzar

$$g(t, x) := \log \det \bar{F}(t, x) = \log \frac{1}{t - f(x)} + \log \det F(x)^{-1} ,$$

que té la mateixa estructura que (B.1). Degut a la convexitat estricta de la funció $g(t, x)$, el mínim $x(t)$ de $g(t, x)$ és únic per a tot $t > t^*$. De fet, la successió $x(t)$ és viable per a tot $t > t^*$ i aproxima l'ímfim de $f(x)$ sobre $F(x) > 0$.

Bibliografia

- [1] Alazard D., Cumer C., Apkarian P., Gauvrit M., Ferreres G. (1999). *Robustesse et Commande Optimale*. Publications ONERA/CERT.
- [2] Apkarian P., Feron E., Gahinet P. (1996). Parameter-Dependent Lyapunov Functions for Robust Control of Systems with Real Parametric Uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7): 1041-1046.
- [3] Apkarian P., Tuan H.D. (2000). Parameterized LMIs in Control Theory. *SIAM Journal on Control Optimization*, 38: 1241-1264.
- [4] Apkarian P., Tuan H.D., Bernussou J. (2000). Continuous-Time Analysis, Eigenstructure Assignment and H_2 Synthesis with Enhanced LMI Characterizations. *Proceedings of 39th Conference on Decision and Control*:1489-1494.
- [5] Barmish B.R. (1989). A Generalized of Kharitonov's Four Polynomial Concept for Robustness Stability with Linearly Dependent Coefficient Perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34: 157-165.
- [6] Berstein D.S., Haddad W.M. (1989). LQG Control with an H_∞ Performance Bound: A Riccati Equation Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(3): 293-305.
- [7] Boyd S., ElGhaoui L., Feron E., Balakrishnan V. (1994). Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. *SIAM Studies in Applied Mathematics*, 15.
- [8] Chang S.S.L., Peng T.K.C. (1972). Adaptive Guaranteed Cost Control of Systems with Uncertain Parameter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17: 474-483.

- [9] Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. (1989). State-Space Solutions to the Standard H^2 and H^∞ Control Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8): 293-305.
- [10] Francis B.A. (1987). *A Course in H_∞ Theory*. Berlin: Springer-Verlag.
- [11] Gahinet P., Apkarian P. (1994). A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4: 421–448.
- [12] Gahinet P., Apkarian P., Chilali M. (1996). Parameter-Dependent Lyapunov Functions for Real Parametric Uncertainty. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 41:436–442.
- [13] Gahinet P., Nemirvski A., Laub A.J., Chilali M. (1995). *LMI Control Toolbox. For Use with MATLAB*, The MathWorks Inc.
- [14] Geromel J.C., Bernussou J., Oliveira M.C. (1999). H_2 -Norm Optimization with Constrained Dynamic Output Feedback Controllers: Decentralized and Reliable Control. *IEEE Transactions on Automatic control*, 44(7): 1449–1454.
- [15] Gong Z., Wen C., Mital D.P. (1996). Decentralized Robust Controller Design for a Class of Interconnected Uncertain Systems: with Unknown Bound of Uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(6): 850-854.
- [16] Guo Y., D.J. Hill, Wang Y. (2000). Nonlinear Decentralized Control of Large-Scale Power Systems. *Automatica*, 36: 1275-1289.
- [17] Horisberger H.P., Bélanger P.R. (1976) Regulators for Linear, Time Invariant Plants with Uncertain Parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21: 705-708.
- [18] Huang S., Lam J., Chen B. (2002). Local Reliable Control for Linear Systems with Saturing Actuators. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA.
- [19] Huang S., Lam J., Yang G.H. (2001). Reliable Linear-Quadratic Control for Symmetric Composite Systems. *International Journal of Systems Science*, 32(1): 73–82.

- [20] Huang S., Tan K.K., Lee T.H. (2003). Decentralized Control Design for Large-Scale Systems with Strong Interconnections using Neural Networks. *IEEE Transactions on Automatic control*, 48(5): 805–810.
- [21] Kamarkar N. (1984). A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. *Combinatorica*, 4: 373–395.
- [22] Khargonekar P.P., Petersen I.R., Zhou K. (1990). Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and H_∞ Control Theory. *IEEE Transactions on Automatic control*, 35(3): 356–361.
- [23] Kimura H. (1984). Robust Stability for a Class of Transfer Functions. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 29: 788–793.
- [24] Leitmann G. (1993). On One Approach to the Control of Uncertain Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 115:373–380.
- [25] Liang Y.W., Liaw D.C., Lee T.C. (2000). Reliable Control of Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4): 706–710.
- [26] Liao F., Wang J.L., Yang G.H. (2002). Reliable Robust Flight Tracking Control: An LMI Approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(1): 76-89.
- [27] Lu W.M., Doyle J.C. (1992). H_∞ Control of LFT Systems: An LMI Approach. *Proceedings of the 31th Conference on Decision and Control: 1997–2001*.
- [28] Lyapunov A.M. (1992) *The General Problem of the Stability of Motion*, London: Taylor and Francis Ltd.
- [29] Lynch J.P., Law K.H. (2002). Decentralized Control Techniques for Large-Scale Civil Structural Systems. *Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference*, Los Angeles, CA, USA.
- [30] Mukaidini H., Takato Y., Tanaka Y., Mizukami K. (2002). The Guaranteed Cost Control for Uncertain Large-Scale Interconnected Systems. *IFAC 15th Triennial World Congress*, Spain.

- [31] Mukaidini H., Tanaka Y., Xu H. (2003). An LMI Approach to Guaranteed Cost Control of Nonlinear Large-Scale Uncertain Delay Systems under Controller Gain Perturbations. *Proceedings of the Third International DCDIS Conference*, Watam Press.
- [32] Nesterov Y., Nemirovsky A. (1988). A General Approach to Polynomial-Time Algorithms Design for Convex Programming. *Technical report, Central Economy & Mathematic Institute*. Moscou: USSR Academie of Science.
- [33] Nesterov Y., Nemirovsky A. (1994). Interior-Point Algorithm in Convex Programmig. *SIAM Review*.
- [34] Ogata K. (1998). *Ingeniería de Control Moderna*. 3a ed. México: Prentice-Hall.
- [35] Oliveira P.J., Oliveira R.C.L.F., Leite V.J.S., Montagner V.F., Peres P.L.D. (2004). H_∞ Guaranteed Cost Computation by Means of Parameter-Dependent Lyapunov Function. *Automatica*.
- [36] Ohse N., Ono K. (1998). Guaranteed Cost Controllers under Pole Placement Constraints for Uncertain Linear System: An LMI Approach. *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*: 123-128.
- [37] Park J.H., Kwon O., Lee S., Won S. (2003). On Robust H_∞ Filter Design for Uncertain Neural Systems: LMI Optimization Approach. *Applied Mathematics and Computation*.
- [38] Park J.H., Kwon O., Won S. (2004). LMI Approach to Robust H_∞ Filtering for Neural Delay Differential Systems. *Applied Mathematics and Computation*, 150: 235–244.
- [39] Petersen I.R. (1985). A Riccati Equation Approach to the Design of Stabilizing Controllers and Observers for a Class of Uncertain Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(9): 904-907.
- [40] Petersen I.R. (1987). A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Systems. *Systems Control Letters*, 8: 181-188.
- [41] Petersen I.R. (1995). Guarented Cost LQG Control of Uncertain Linear Systems. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 142(2): 95-102.

- [42] Petersen I.R., McFarlane D.C. (1994). Optimal Guaranteed Cost Control and Filtering for Uncertain Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(9): 1971–1977.
- [43] Petersen I.R., McFarlane D.C., Rotea M.A. (1998). Optimal Guaranteed Cost Control of Discrete-Time Uncertain Linear Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8: 649–657.
- [44] Pramod, Petersen I.R., Zhou (1990). Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilization and H^∞ Control Theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(3): 356–361.
- [45] Puerta Sales F. (2000). *Teoría de Sistemas Lineales*. Barcelona: Ed. CPDA-ETSEIB (Publicacions D'Abast S.L.L).
- [46] Pujol G., Rodellar J., Rossell J.M. (2004). Reliability and Norm-Bounded Uncertain Interconnected Systems. *submitted to IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [47] Scherer C., Weiland S. (2001). *Linear Matrix Inequalities in Control*, The Netherlands: DISC.
- [48] Siljak D. (1978). *Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure*. Amsterdam, North Holland.
- [49] Siljak D. (1980). Reliable Control using Redundant Controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31: 303–329.
- [50] Siljak D. (1991). *Decentralized Control of Complex Systems*. San Diego: Academic Press.
- [51] Skelton R.E., Iwasaki T., Grigoriades K. (1998) *A Unified Algebraic Approach to LCD*. London: Ed. Taylor&Francis.
- [52] Suyama K. (2002). Systematization of Reliable Control. *Proceeding of the American Control Conference*: 5110–5118, Anchorage, AK, USA.
- [53] Thorp J.S., Barmish B.R. (1981). On Guaranteed Stability of Uncertain Linear Systems via Linear Control. *Journal on Optimization Theory and Application*, 35(4): 559–579.

- [54] Tuan H.D., Apkarian P., Nguyen T.Q. (2003). Robust Filtering for Uncertain Nonlinearly Parameterized Plants. *IEEE Transactions on Signal Processig*, 51(7): 1816–1824.
- [55] Vandenberghe L., Balakrishnan V. (1996). Algorihtms and Software tools for LMI Problem in Control: An Overview.
- [56] Vandenberghe L., Boyd S. (1996). Semidefinite Programming. *SIAM Review*, 38(1): 49–95.
- [57] Veillette R.J. (1995). Reliable Linear-Quadratic State-Feedback Control. *Automatica*, 31(1): 137–143.
- [58] Veillette R.J., Medanic J.V., Perkins W.R. (1992). Design of Reliable Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(3): 290–304.
- [59] Xie S., Xie L., Wang Y.,Zhang H. (1999). Decentralized Guaranteed Cost Control of a Class of Large-Scale Interconnected Systems. *Proceedings of the 38th Conference on Decision Control: 3297-3302*.
- [60] Xie S., Xie L., Wang T, Guo G. (2000). Decentralized Control of Multi-machine Power Systems with Guaranteed Performance. *IEE Proceedings of Control Theory and Application*, 147(3): 355–365.
- [61] Xu S., Lam J., Yang C., Verriest E.I. (2003). An LMI Approach to Guaranteed Cost Control for Uncertain Linear Neutral Delay Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13: 35–53.
- [62] Yakubovich V.A. (1967). The Method of Matrix Inequalities in the Stability Theory of Nonlinear Control Systems I,II,III. *Automation and Remote Control*, 25-26: 905-917, 577-592, 753-763.
- [63] Yang G.H., Wang J.L., Soh Y.C. (2000). Reliable Guaranteed Cost Control for Uncertain Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(11): 2188-2192.
- [64] Yang G.H., Wang J.L., Soh Y.C. (2000). Guaranteed Cost Control for Discrete-Time Linear Systems under Controller Gain Perturbation. *Linear Algebra and its Applications*, 312: 161–180.

-
- [65] Yang G.H., Zhang S.Y., Lam J., Wang J. (1998). Reliable Control using Redundant Controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(11): 1588–1593.
- [66] Yu L., Gao F. (2002). Output Feedback Guaranteed Cost Control for Uncertain Discrete-Time Systems using Linear Matrix Inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 113(3): 621–634.