Equacions de Difusió amb Condicions de Contorn No Lineals

Neus Cónsul

El problema parabòlic no lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t & = & \Delta u + f(u) \ , & \text{a } \Omega \ , \\ u_\nu & = & 0 \ , & \text{a } \partial\Omega \ , \\ u(x,0) & = & u_0(x) \ , & \end{array} \right. \tag{1}$$

en un domini acotat $\Omega \subset R^n$ representa l'evolució en el temps de la concentració u d'una determinada substància en un contenidor isolat, el qual està sotmés als efectes d'una reacció no lineal representada per la funció f i d'una difusió lineal homogènia.

És fàcil comprovar que els zeros de la funció f són solucions d'equilibri constants per al problema (1). L'existència de solucions d'equilibri estables no constants per al problema (1) i amb $n \geq 2$ és un fenomen important, que sovint s'anomena "morfogènesi" o formació de patrons.

Motivats per aquest problema amb condicions de contorn de Neumann homogènies, presentem en aquesta memòria una contribució a l'estudi de solucions d'equilibri estables no constants per a una equació de difusió amb condicions de contorn de Neumann no lineals. El problema que considerarem és el següent:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t & = & \Delta u \ , & \text{a } \Omega \ , \\ u_\nu & = & f(u) \ , & \text{a } \partial\Omega \ . \end{array} \right. \tag{2}$$

Suposem que el domini $\Omega \subset^n$, $n \geq 2$, és acotat i amb frontera $\partial\Omega$ regular. En la condició de contorn, $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ denota la derivada normal en sentit exterior a la frontera. La solució $u = u(x,t)$ és una funció de $\overline{\Omega} \times R$ en R i la funció $f(u) : \partial\Omega \to R$.

De manera semblant a allò que dèiem per al problema (1), podem interpretar (2) com l'equació que modela l'evolució d'una concentració sota els efectes conjunts d'una difusió lineal homogènia a l'interior d'un contenidor i una reacció no lineal que succeeix únicament a la frontera i que ve representada per f. Per exemple, per la presència d'un catalitzador.

L'observació de fenòmens físics, químics, biològics i d'enginyeria que es poden modelar amb aquest tipus d'equacions presenten sovint condicions de contorn no lineals. Aquest fet fa augmentar l'interés en l'estudi de problemes com el (2).

Tal com passa per al problema (1), els zeros de la funció f són solucions d'equilibri constants del problema (2). Ens preguntem, però, per l'existència o no de solucions d'equilibri estables no constants.

Observem, per exemple, que si el domini Ω és no connex es poden construir de manera trivial equilibris estables no constants assignant a cada component connexa diferents valors constants α_i, tals que $f(\alpha_i) = 0$ i $f'(\alpha_i) < 0$. (L'estabilitat d'aquests equilibris no és immediata i se seguirà d'un principi d'estabilitat per linealització per al problema (2), presentat en el capítol 2 de la memòria.)

En el cos de la tesi s'estudia l'entorn funcional abstracte del problema (capítol 2), les condicions sobre la funció f que donen existència o no de patrons (capítol 3), la geometria sobre Ω que donen morfogènesi (no hi ha patrons en boles, però si en dominis "dumbbell" i en dominis connexos amb frontera disconnexa, capítols 4 i 5). L'apèndix A fa referència al problema u-dimensional. Finalment en l'apèndix B es tracta numèricament el problema dels dumbbell, per tal d'il.lustrar els patrons trobats en el capítol 4. Destaca l'ús del mètode dels elements finits i de mètodes semiimplícits de resolució en el seguiment, en funció d'un paràmetre de les solucions d'equilibri estables no constants calculades.