

A Toni, Miguel,
Vicenç y Marta,
Carles y Montse.

Agradecimientos

Esta tesis se inscribe en las actividades del grupo de investigación de Teoría de Grafos y Combinatoria del Departamento de Matemática Aplicada y Telemática de la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC), en el que colabora personal del resto de Departamentos de Matemática Aplicada de la UPC y también de la Universitat de Lleida.

Ha sido un placer inmenso poder formar parte durante estos cuatro años de un grupo consolidado, sólido, tan vital y tan numeroso como éste.

Quisiera agradecer a aquellos amigos que he encontrado durante este doctorado como Daniela, Angélica, Xavier, José Ramon, Toni, Diego y Christian, que con su magnífica compañía me hayan ayudado en el trabajo del día a día. Si alguna vez hiciera una segunda tesis se la dedicaría a ellos.

Parte del trabajo de esta memoria ha sido realizado durante una estancia de casi tres meses que hice en la School of Mathematical Sciences del Queen Mary and Westfield College de Londres, y más concretamente, en el QMW Combinatorics Study Group. Durante esa estancia tuve la enorme satisfacción de conocer y trabajar con Peter Cameron. De las fructíferas conversaciones que teníamos, aún quedan muchos problemas por resolver...

Durante aquellos meses, también tuve oportunidad de conocer a personas maravillosas como Raúl Vera, Carrie Rutherford, Shane O'Rourke, Simeon Ball y Leonard Soicher. A su probervial amabilidad y paciencia se debe que ahora sepa hablar inglés y entender el grupo de Mathieu.

Quisiera dedicar esta tesis a mis compañeros de carrera, Toni, Miguel, Vicenç y Marta, Carles y Montse, porque me acompañaron sin dudar desde el comienzo de esta aventura, que empezó con la licenciatura en matemáticas.

Siempre soñé con no perder nunca la curiosidad por aprender, buscar y crear cosas nuevas. Parte de ese sueño se materializa ahora con esta Tesis y gracias a la inefable ayuda de mi tutor, Oriol Serra. No sólo me introdujo en la Teoría de Grafos, me estimuló con sus ideas y revisó minuciosamente todos los trabajos relacionados con la tesis, sino que ha conseguido contagiarme una pequeña parte de su gran dedicación y pasión a la investigación.

Contenidos

Prefacio	i
1 Teoría de Grafos	1
1.1 Introducción	1
1.2 Definiciones básicas	1
1.2.1 Algunas familias de digrafos	5
1.2.2 Digrafos de Cayley	7
1.3 La técnica del digrafo línea	8
1.3.1 Definición	9
1.3.2 Caracterización	9
1.3.3 Propiedades	10
1.3.4 Algunas familias de digrafos línea iterados	13
2 Herramientas para la construcción de recubrimientos k-arco transitivos	17
2.1 Introducción	17
2.2 Digrafos k -arco transitivos	18
2.2.1 Estado del arte de construcciones de digrafos k -arco transitivos	19
2.3 Arco-coloraciones o 1-factorizaciones	20
2.3.1 1-factorizaciones de digrafos de Cayley y de Schreier	23
2.3.2 1-factorizaciones inducidas en digrafos línea	24
2.4 Recubrimientos de digrafos	27
2.4.1 Recubrimientos de Cayley de digrafos arco-coloreados	28
2.4.2 Equialcanzabilidad	30
3 Técnica de construcción de recubrimientos k-arco transitivos	33
3.1 Introducción	33
3.2 Digrafos de Cayley k -línea iterados	34
3.3 1-factorizaciones k -uniformes de digrafos k -línea iterados	35
3.4 Construcción de recubrimientos k -arco transitivos	39
3.5 Recubrimientos k -arco transitivos de algunas familias de digrafos	43
3.5.1 Recubrimientos k -arco transitivos de los digrafos completos con bucles	43
3.5.2 Recubrimientos k -arco transitivos de los digrafos completos	45
3.6 Cadenas infinitas de recubrimientos k -arco transitivos	53
3.6.1 Asignaciones de voltaje y elevaciones de digrafos	54

4	Construcción de recubrimientos k-arco transitivos de grado pequeño	59
4.1	Introducción	59
4.2	1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea	60
4.2.1	Preliminares sobre cuadrados latinos	60
4.2.2	Cuadrados latinos uniformes y 1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea	61
4.2.3	1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea de grado pequeño	67
4.3	Digrafos de Cayley k -línea iterados de grado pequeño	71
4.4	Representación de grupos de permutaciones de grado pequeño	76
4.4.1	Grupos de permutaciones transitivos de grado 4	78
4.4.2	Grupos de permutaciones transitivos de grado 5	79
4.4.3	Grupos de permutaciones transitivos de grado 6	80
4.4.4	Grupos de permutaciones transitivos de grado 7	86
5	Automorfismos de recubrimientos k-arco transitivos	87
5.1	Introducción	87
5.2	Recubrimientos exactamente k -arco transitivos de grado dos	88
5.2.1	Normalidad de los digrafos de Cayley	88
5.2.2	Recubrimientos de Cayley de digrafos de grado dos	89
5.2.3	Recubrimientos k -arco transitivos de K_2^+ y K_3	90
5.3	Digrafos k -arco transitivos no homeomorfos a ciclos	94
	Conclusiones	99
	Apéndice de Grupos de permutaciones	103
	Bibliografía	113

Prefacio

Esta tesis se engloba dentro de las actividades del grupo de investigación de Teoría de Grafos y Combinatoria del Departamento de Matemática Aplicada y Telemática de la Universidad Politécnica de Cataluña, que está identificado como Grup de Recerca de Qualitat de la Generalitat de Catalunya con la referencia 1998 SGR00119. Esta tesis ha sido realizada parcialmente con el soporte del Comissionat per a Universitats i Recerca en la Beca 1997FI-693, en el marco de los proyectos CICYT siguientes:

Título: *Redes eficientes para arquitecturas paralelas y de telecomunicación: estructura y algoritmos.*

Referencia: TIC94-0592

Organismo ejecutor: Universidad Politécnica de Catalunya

Investigador principal: Miguel Ángel Fiol Mora

Inicio/Fin: 01-08-1994/31-07-1997

y

Título: *Optimización de redes de interconexión: Transporte y difusión de la información, modelos y algoritmos.*

Referencia: TIC97-0963

Organismo ejecutor: Universidad Politécnica de Catalunya

Investigador principal: Josep Fàbrega Canudas

Inicio/Fin: 01-08-1997/31-07-2000

Parte de este trabajo ha sido realizado durante una estancia de tres meses de la autora en la School of Mathematical Sciences del Queen Mary and Westfield College de Londres, y más concretamente, en el QMW Combinatorics Study Group.

El ámbito en que se sitúa esta tesis es la Teoría de Grafos. Enmarcada en la Combinatoria, la Teoría de Grafos permite modelar, de forma simple, cualquier sistema discreto (finito) sobre el que se define una relación binaria, por ejemplo una red de interconexión. El modelo matemático adecuado para estos sistemas discretos es un grafo o alguna de sus variantes, grafo dirigido, multigrafo, pseudografo, etc. En este trabajo se estudian grafos dirigidos o digrafos que pueden servir como modelos teóricos para la construcción de redes de comunicaciones y de memorias dinámicas, especialmente desde el punto de vista de la simetría.

La descripción explícita de los diversos tipos de criterios de optimización, así como los modelos y problemas matemáticos subyacentes a los problemas de diseño de redes de interconexión y de comunicaciones se pueden encontrar, por ejemplo, en las monografías de Rumeur (acrónimo de un conjunto de autores), [24], o de Leighton [60].

Una red de comunicaciones o de interconexión consta de procesadores (nodos) conectados por canales de comunicación. Estas redes se modelan usualmente mediante un digrafo — estructura matemática formada por un conjunto de puntos llamados vértices y un conjunto de pares ordenados de vértices llamados arcos — que tiene por vértices los procesadores y por arcos las conexiones unidireccionales entre procesadores. Una de las aplicaciones de la Teoría de Grafos en este campo de las comunicaciones es el diseño de redes de interconexión, actividad en las cuales se trata de construir topologías para estas redes que resulten óptimas dentro de un conjunto de necesidades específicas; por ejemplo, simetría, máxima capacidad de tolerancia a fallos o diseño de tabla de encaminamiento con algoritmos eficientes.

Algunas de las redes más populares que se utilizan en los sistemas multiprocesadores, como el hipercubo o la red 'butterfly' constituyen ejemplos de redes simétricas que se usan en la práctica. Algunas de las redes que se han propuesto en la literatura como alternativa al hipercubo, como las basadas en los digrafos de De Bruijn [23] o de Kautz [56] y sus generalizaciones, tienen precisamente como principal defecto el hecho de no ser redes simétricas. El estudio sistemático de topologías simétricas basadas en modelos algebraicos se inició con los trabajos de Akers y Krishnamurthy [1]. Se puede encontrar un resumen exhaustivo de las distintas propuestas en esta línea en el 'survey' de Lakshmivarahan, Jwo y Dhall [58]. En este resumen se incluyen también los modelos utilizados para el diseño de redes de permutaciones.

Las redes de interconexión simétricas son aquellas que se ven igual desde cualquier nodo, es decir, aquellas en que el digrafo correspondiente es vértice transitivo. Las redes simétricas son buenos modelos para redes de interconexión pues la simetría se aprovecha para diseñar una tabla de encaminamiento con algoritmos sencillos y eficientes, para construir esquemas de comunicación comunes a todos los vértices, y porque en una red simétrica los problemas de congestión se minimizan, pues la carga se puede distribuir uniformemente entre todos los vértices.

Una primera medida de la simetría de un digrafo es su grupo de automorfismos. Si un digrafo consta de n vértices y el grupo de automorfismos es el simétrico S_n , la simetría es máxima. Si por el contrario, el grupo de automorfismos es el trivial, no hay simetría alguna. En nuestro caso, también tienen interés los subgrupos del grupo de automorfismos que conservan o modifican una estructura añadida al digrafo, como puede ser una 1-factorización o arco-coloración del digrafo. Se definen entonces los grupos de automorfismos de digrafos arco-coloreados o los grupos de automorfismos permutadores de colores de un digrafo arco-coloreado. Los digrafos arco-coloreados son los modelos matemáticos de las redes de permutaciones, y en particular, de las memorias dinámicas.

Una red de permutaciones se modela por un digrafo en el cual, en cada unidad de tiempo, los paquetes de cada nodo se envían a uno de los nodos adyacentes, de manera que no tiene lugar ningún conflicto, esto sería, que dos paquetes fueran transferidos a un mismo nodo. Así, el protocolo de red consiste en el conocimiento de todas las permutaciones posibles y de un algoritmo para producir cada una de ellas en el mínimo cardinal de unidades de tiempo posible. Las arco-coloraciones que nosotros utilizamos en la memoria, nos devienen entonces útiles para modelar una red de este tipo.

Las redes de permutaciones tienen como objetivo proporcionar sistemas eficientes de generación de permutaciones de datos aptas para su procesamiento en paralelo, como las que se utilizan

para la ordenación de datos, el cálculo de la transformada discreta de Fourier, o los cálculos matriciales. Por sus múltiples aplicaciones computacionales, y por la complejidad algorítmica de generación de permutaciones, el diseño de redes de permutaciones constituye un área de investigación extremadamente activa.

Una aplicación particular de las redes de permutaciones la constituyen las denominadas memorias dinámicas.

Una memoria dinámica es un medio de almacenaje de datos caracterizado por el hecho de que el acceso a los datos no se efectúa por medio del medio mecánico de una celda especial de lectura/escritura, sino a través del movimiento, por medios electrónicos, de los propios datos a través de una red de permutaciones. Este modelo se propuso originariamente para reducir el tiempo de acceso a los datos.

En [35] se puede encontrar un 'survey' de las distintas propuestas que se encuentran en la literatura sobre modelos de memorias dinámicas en el que se introduce un modelo matemático general, el de los denominados digrafos coloreados, que constituye uno de los puntos de partidas de la presente memoria.

La familia de digrafos más utilizada para diseñar, analizar y mejorar redes de interconexión son los digrafos de Cayley (véanse por ejemplo [1, 58]). Los digrafos introducidos por Cayley en [19] son digrafos que tienen como vértices los elementos de un grupo y como arcos los pares de elementos del grupo (g, h) tales que gh^{-1} es un generador del grupo (véase la definición formal en la sección 1.2.2). Los modelos de digrafos de Cayley representan la mayoría de las redes de interconexión simétricas. De hecho, toda red de interconexión simétrica se puede representar como una extensión de este modelo via el Teorema de Sabidussi [78], que establece que todo digrafo vértice transitivo es un cociente de un digrafo de Cayley por clases laterales. Los modelos de digrafos de Cayley permiten interpretar algunas propiedades para digrafos (por ejemplo, ser digrafos vértice transitivos se traduce en modelar redes de interconexión simétricas), así como demostrar muchas propiedades de clases de redes conocidas dentro de este conjunto, en lugar de probarlas para cada red independientemente. Y más importante aún, este modelo teórico nos permite construir una gran variedad de nuevos modelos de redes simétricas.

Las mencionadas anteriormente constituyen las motivaciones generales en las que se enmarca el trabajo realizado en esta tesis. El contenido de la tesis, sin embargo, no desarrolla explícitamente estas aplicaciones, sino que se centra en sus aspectos matemáticos subyacentes. Uno de los resultados principales constituye el desarrollo de una herramienta eficaz para la construcción de digrafos con alto grado de simetría. El tipo de simetría que se considera es la denominada k -arco transitividad. Un digrafo es k -arco transitivo si tiene un grupo de automorfismos que actúa transitivamente en el conjunto de caminos de longitud k del digrafo. Así, los digrafos 0-arco transitivos son los digrafos vértice transitivos, y los 1-arco transitivos se corresponden a los digrafos arco transitivos usuales.

El estudio de los digrafos k -arco transitivos fue especialmente motivado por el resultado de Weiss [85] que prueba que los únicos grafos (no dirigidos) k -arista transitivos para $k > 7$ son los ciclos, es decir, no existen grafos altamente transitivos no triviales. La situación es distinta para el caso dirigido, en el que Praeger [71] dió construcciones explícitas de digrafos k -arco transitivos para valores arbitrarios de k y para cualquier grado. Estos trabajos fueron proseguídos después por varios autores en [18, 21, 30, 61]. En todos estos trabajos el punto de vista es algebraico y se parte de grupos abstractos a partir de los cuales se construyen los modelos combinatorios. Por el contrario, en las construcciones de esta tesis se parte de modelos combinatorios de los que se construyen digrafos con grado de simetría preestablecido. Esta técnica de construcción de digrafos k -arco transitivos constituye una de las aportaciones

centrales del trabajo, y puede entenderse como una técnica universal en el sentido de que todo digrafo k -arco transitivo puede ser obtenido como aplicación de dicha técnica. Además, los digrafos k -arco transitivos obtenidos a partir de un digrafo arbitrario dado resultan ser recubridores, en el sentido topológico, del digrafo de partida. Así, esta técnica es también una técnica de construcción de recubrimientos k -arco transitivos de digrafos arbitrarios para cualquier entero positivo k . En este sentido, se generalizan resultados anteriores de Babai [2], que corresponden a los casos $k = 0, 1$, y se da respuesta, en sentido negativo, a un problema abierto planteado por Cameron [15, Problema 9.1] en el que se pregunta si la matriz de adyacencia de un digrafo (k -)arco transitivo es diagonalizable.

La segunda parte de la tesis se centra en el análisis específico de digrafos k -arco-transitivos que pueden ser obtenidos mediante el uso de la técnica que se ha introducido a partir de digrafos básicos, entre los que destacan por su uso en las aplicaciones los denominados digrafos de De Bruijn y de Kautz. En particular, se desarrollan las herramientas de análisis adecuadas para producir e identificar familias de recubrimientos que puedan ser útiles como modelos de transmisión y de difusión de la información. Además del estudio sistemático de los recubrimientos k -arco transitivos de digrafos de De Bruijn, de Kautz, y de los denominados digrafos de Cayley multidimensionales, se hace un estudio exhaustivo de los digrafos de grado pequeño que pueden obtenerse con la aplicación de la técnica propuesta. Este tipo de trabajo exhaustivo permite disponer de información abundante sobre las características básicas de estos digrafos y en especial de la estructura de sus grupos de automorfismos.

Notamos aquí que una gran parte del trabajo reflejado en los últimos capítulos de la memoria ha consistido en desarrollar herramientas computacionales para la identificación de grupos de permutaciones. Este trabajo computacional se ha desarrollado en base al sistema GAP de teoría computacional de grupos (véase [43]) y al paquete compartido para GAP para grafos y grupos (véase [81] para más información al respecto). En esta memoria no se incluyen los programas específicos que se han desarrollado ni tampoco las técnicas usadas para identificación de los grupos de permutaciones obtenidos, sino que la memoria se centra en los aspectos matemáticos del problema, obviando los problemas computacionales. Aún así, es de destacar que el desarrollo de algunas de las herramientas computacionales, en particular las de obtención de grupos de automorfismos de digrafos k -arco transitivos, fue hecho en estrecha colaboración con Leonard Soicher, autor del paquete GRAPE, durante la estancia que la autora realizó en QMW, lo que permitió depurar y optimizar algunas de las rutinas de dicho paquete.

Finalmente, la forma en que se estructura esta memoria es la siguiente.

En el Capítulo 1 incluimos la notación y terminología básica de digrafos que utilizaremos a lo largo de la memoria, y explicitaremos algunas de las familias de digrafos que utilizaremos con asiduidad. También introduciremos la técnica del digrafo línea y algunas familias de digrafos línea como los digrafos de De Bruijn y los Kautz. Es conocido que el digrafo línea es una operación de digrafos con muy buenas propiedades, y en nuestro caso particular, desde el punto de vista de la simetría, pues conserva el grupo de automorfismos.

En el Capítulo 2 definiremos los digrafos k -arco transitivos y daremos un estado del arte de otras construcciones de digrafos k -arco transitivos conocidas hasta la fecha. En este capítulo, introduciremos también las herramientas claves para nuestra construcción de digrafos k -arco transitivos como son las arco-coloraciones o 1-factorizaciones y los recubrimientos de digrafos. En particular, definiremos los recubrimientos de Cayley de digrafos arco-coloreados y estudiaremos algunas de las condiciones bajo las que los recubrimientos obtenidos son homeomorfos a ciclos.

En el Capítulo 3 presentamos nuestra construcción de digrafos k -arco transitivos, que es también una técnica de construcción de recubrimientos k -arco transitivos de un digrafo conexo regular arbitrario para cada entero positivo k . Como técnica de construcción de recubrimientos k -arco transitivos, generaliza los resultados de Babai de 1985 para los casos $k = 0, 1$ (véase [2]). La idea de la construcción consiste en escoger recubrimientos vértice transitivos “apropiados” del digrafo k -línea iterado del digrafo de partida, de manera que estos recubrimientos sean también digrafos k -línea iterados. Además, los digrafos k -arco transitivos de los que son k -línea iterados resultan ser también recubrimientos del digrafo de partida. Los recubrimientos “apropiados” de los digrafos k -línea iterados son recubrimientos de Cayley de los digrafos con 1-factorizaciones k -uniformes. En la sección 3.3 definiremos las 1-factorizaciones k -uniformes de digrafos k -línea iterados y probaremos que todo digrafo k -línea iterado admite 1-factorizaciones de este tipo. En el Capítulo 3 también calcularemos explícitamente los recubrimientos k -arco transitivos obtenidos con nuestra construcción a las familias de digrafos de De Bruijn y Kautz, y estudiaremos el problema de la construcción de una cadena infinita de recubrimientos k -arco transitivos de un digrafo arbitrario.

En el Capítulo 4 introducimos el concepto de cuadrado latino uniforme y damos una caracterización de las 1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea en términos de cuadrados latinos uniformes. En particular, obtenemos el número de 1-factorizaciones 1-uniformes de un digrafo línea en función del número de cuadrados latinos normalizados uniformes de manera constructiva. Se demuestra también que los cuadrados latinos uniformes son isomorfos al cuadrado latino de la tabla de composición de un grupo del mismo orden. Como consecuencia, calculamos explícitamente los cuadrados latinos uniformes de orden pequeño y obtenemos las 1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea de grado pequeño de algunas familias de digrafos. La última parte del Capítulo 4 la dedicamos al estudio de la representación de grupos de permutaciones de grado pequeño como grupos de permutaciones de digrafos línea o lo que es equivalente, al problema de determinar cuándo un grupo de permutaciones es un grupo de automorfismos de un digrafo que actúa regularmente en el conjunto de arcos del mismo.

En el Capítulo 5 estudiaremos el grupo completo de automorfismos de los recubrimientos k -arco transitivos que obtenemos con nuestra técnica. Podremos dar algunos resultados interesantes para los digrafos de grado dos en términos de normalidad. Un digrafo de Cayley es normal cuando su grupo de automorfismos es el menor posible. Por último en este capítulo, estudiaremos la estructura del grupo de automorfismos de los digrafos k -arco transitivos que son homeomorfos a un ciclo y en particular, veremos que un digrafo de Cayley es homeomorfo a un ciclo si y sólo si existe un subgrupo normal del grupo base tal que los generadores están contenidos en una de las clases laterales del subgrupo.

Con el fin de que la memoria sea lo más autocontenida posible, incluimos al final de la memoria un Apéndice sobre Grupos de permutaciones. Como los grupos de permutaciones de 1-factorizaciones de digrafos son grupos de permutaciones transitivos en el conjunto de vértices del digrafo, nos ha parecido oportuno incluir en este Apéndice algunas de las definiciones básicas y resultados conocidos sobre grupos de permutaciones que utilizaremos a lo largo de la memoria.

Muchas de las aportaciones que aparecen en esta memoria han sido publicadas previamente en diferentes revistas o presentadas a congresos ([63, 62, 65, 64]).

Capítulo 1

Teoría de Grafos

1.1 Introducción

En este capítulo introductorio presentamos aquellos conceptos y teoremas de Teoría de Grafos que utilizaremos a lo largo de esta memoria. Una primera sección se ocupa de las definiciones básicas de Teoría de Grafos, y la segunda sección introduce la técnica del digrafo línea, que será una de las herramientas fundamentales de nuestro trabajo.

Se puede completar información de los términos definidos, así como las demostraciones de los resultados enunciados, en los libros de texto generales de la materia (véanse, por ejemplo [10], [16] y en [20]).

Las definiciones y resultados que no se incluyen en este capítulo se introduzcan en el capítulo 2 o a medida que sean necesarias.

1.2 Definiciones básicas

Definimos a continuación los principales conceptos de Teoría de Grafos que utilizamos en la memoria.

Grafos y digrafos

Un grafo $\Gamma = (V, E)$ es un par ordenado formado por un conjunto no vacío $V = V(\Gamma)$ de *vértices* y un conjunto $E = E(\Gamma)$ de pares no ordenados de vértices llamados *aristas*. El *orden* de un grafo Γ es su número de vértices, es decir, el cardinal del conjunto V , $|V|$. El *tamaño* de Γ es el cardinal del conjunto de aristas E , i.e. $|E|$. Un *bucle* o *autolazo* (a veces también *lazo*) es una arista $\{u, v\}$ tal que $u = v$. Un *grafo simple* es un grafo sin bucles. Si u y v son vértices del grafo tales que $\{u, v\} \in E$, decimos que u y v son adyacentes, y lo denotamos por $u \sim v$. También en este caso se dice que u y v son incidentes a la arista e . El conjunto de vértices adyacentes a un vértice dado u se llama *vecindario* de u y se denota $\Gamma(u)$. El cardinal $|\Gamma(u)|$ es el llamado *grado* del vértice u y se denota $\delta(u)$. El *grado mínimo* se define como el mínimo de los grados de entre todos los vértices de Γ y se denota $\delta = \delta(\Gamma)$. Análogamente se define el *grado máximo* y se denota $\Delta = \Delta(\Gamma)$. Un grafo Γ se dice *regular* si $\delta = \Delta$, o también *r-regular* cuando $\delta = \Delta = r$.

Análogamente, un *grafo dirigido* o *digrafo* $\Gamma = (V, A)$ está formado por un conjunto no vacío de *vértices* $V = V(\Gamma)$ y un conjunto $A = A(\Gamma)$ de pares ordenados de vértices llamados *arcos*.

El *orden* de un digrafo es el cardinal $|V|$ y el *tamaño* el cardinal $|A|$. Un arco de la forma (u, v) se llama *bucle* o *lazo*. Un *digrafo simple* es un digrafo sin bucles. Si u y v son vértices del digrafo Γ tales que $(u, v) \in A$, diremos que u es *adyacente hacia* v o que v es *adyacente desde* u . En este caso también se dice que el arco (u, v) es *incidente desde* u o *incidente hacia* v . De la misma manera, dados dos arcos de la forma (u, v) y (v, w) , donde el vértice hacia el cual es incidente el primer arco coincide con el vértice desde el cual es incidente el segundo, se dice que son *arcos adyacentes* el uno hacia el otro. El conjunto de vértices adyacentes desde un vértice u se denota $\Gamma^+(u)$ y su cardinal es el *grado de salida* del vértice u , $d^+(u)$. Análogamente, se define el conjunto de vértices adyacentes hacia un vértice u , $\Gamma^-(u)$, y el *grado de entrada* de este vértice, $d^-(u) = |\Gamma^-(u)|$. Dado un digrafo $\Gamma = (V, A)$, se define el *grado máximo de salida*, Δ^+ , como $\Delta^+ = \max_{u \in V} \{d^+(u)\}$. De manera similar se definen el *grado máximo de entrada*, Δ^- , el *grado mínimo de salida*, δ^+ , y el *grado mínimo de entrada*, δ^- . El *grado máximo* y el *grado mínimo* de un digrafo se definen como $\Delta = \max\{\Delta^+, \Delta^-\}$ y $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\}$ respectivamente. Un digrafo se dice que es *r-regular* o simplemente *regular* si $r = \delta = \Delta$. También se habla de digrafos *regulares de entrada* o *de salida* cuando $\delta^- = \Delta^-$ o $\delta^+ = \Delta^+$ respectivamente.

En la definición de digrafo consideraremos el conjunto A como un conjunto simple, es decir, dados dos vértices u y v , puede haber como mucho un único arco de la forma (u, v) . Si permitimos *arcos múltiples*, esto es, más de dos arcos de la forma (u, v) , entonces la estructura se llama *multidigrafo*. (Análogamente se define el concepto de *multigrafo*).

Un *digrafo simétrico* es un digrafo tal que para cualquier par de vértices u, v se cumple $(u, v) \in A \Leftrightarrow (v, u) \in A$. Obsérvese que cada grafo $\Gamma = (V, E)$ puede identificarse con un único digrafo simétrico $\Gamma' = (V, A)$, y entonces $|A| = 2|E|$.

En alguna ocasión consideraremos el concepto de *grafo subyacente* de un digrafo $\Gamma = (V, A)$, que se define como el (multi)grafo resultante de considerar el conjunto A como conjunto de aristas, es decir, de considerar A como conjunto de pares no ordenados de vértices.

En esta memoria consideramos únicamente digrafos finitos (con conjunto de vértices V finito), regulares, no necesariamente simples.

Distancia en digrafos

Un *recorrido* en un digrafo $\Gamma = (V, A)$ es una secuencia de vértices

$$u_0, u_1, \dots, u_{h-1}, u_h$$

donde $(u_i, u_{i+1}) \in A$ para todo subíndice $i = 0, \dots, h-1$. Decimos entonces que es un recorrido *de* u_0 *a* u_h . La *longitud* del recorrido es el cardinal h de arcos en la secuencia (o uno menos que el cardinal de vértices en la secuencia). Se permite $h = 0$. Un recorrido se dice *cerrado* si $h > 0$ y $u_h = u_0$. Un *circuito* es un recorrido cerrado. Un recorrido en el cual $u_i \neq u_j$ para todo $i \neq j$ se llama *camino* o *camino* $u \rightarrow v$. Un camino cerrado de longitud h lo denominaremos *h-ciclo* o simplemente *ciclo*. Un *dígono* es un 2-ciclo. Obsérvese que un recorrido, camino, circuito o ciclo también se pueden expresar como una secuencia de arcos en lugar de vértices de la siguiente manera:

$$(u_0, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{h-1}, u_h).$$

Dados dos vértices u, v , se define la *distancia* de u a v como la longitud del camino más corto posible de u a v y se denota por $d(u, v)$. Si no existe ningún camino de u a v se define $d(u, v) = \infty$.

El *diámetro* de un digrafo Γ se define como la máxima de las distancias de entre todos los vértices del digrafo y se denota por $D = D(\Gamma)$. Esto es,

$$D = \max_{u,v \in V} \{d(u,v)\}.$$

Dado $u \in V$, se define $\Gamma^k(v)$ como el conjunto de vértices $v \in V$ tales que existe un recorrido de u a v de longitud k . Nótese que $\Gamma^1(u) = \Gamma^+(u)$. De manera similar se define $\Gamma^{-k}(u)$ como el conjunto de vértices $v \in V$ tales que existe un recorrido de v a u de longitud k .

Un digrafo se dice que es *fuertemente conexo*¹ o simplemente *conexo* si para todo par de vértices u, v existe un camino de u a v . Esto es, un digrafo es conexo si $D \neq \infty$. Diremos que un digrafo está *desconectado* si no es conexo. Un *digrafo* (Δ, D) es un digrafo conexo con grado máximo Δ y diámetro D . En esta memoria consideramos únicamente digrafos finitos regulares (fuertemente) conexos.

El *cuello* (en inglés *girth*) de un digrafo Γ es la mínima longitud de los ciclos contenidos en el digrafo y se denota por $g = g(\Gamma)$. Si el digrafo es *acíclico*, es decir, si no contiene ningún ciclo, entonces se define $g = \infty$. Obsérvese que si el digrafo es conexo, entonces tiene cuello finito.

Se dice que un digrafo (conexo) es *equalcanzable* si existe $h \in \mathbb{N}$ tal que entre cualquier par de vértices del digrafo existe un recorrido de longitud igual a h . Si h es mínima con esta propiedad, decimos que Γ es *h-alcanzable*.

Un *circuito euleriano* es un circuito que pasa una sola vez por todos y cada uno de los arcos del digrafo. Un digrafo se llama *euleriano* cuando admite un circuito euleriano. Un (multi)digrafo conexo es euleriano si y sólo si $\forall u \in V, d^-(u) = d^+(u)$.

Un *camino hamiltoniano* es un camino que pasa una sola vez por cada uno de los vértices del digrafo (excepto quizás cuando sea cerrado que comenzará y acabará en el mismo vértice). Un camino hamiltoniano cerrado es un *circuito hamiltoniano*. Un digrafo que admita un circuito hamiltoniano se dice *digrafo hamiltoniano*. Determinar si un digrafo es hamiltoniano o no es un problema *NP-completo*.

Dos recorridos se dicen que son *recorridos disjuntos* si no contienen ningún vértice interno en común. Esto es, si no tienen ningún vértice en común, excepto quizás los vértices iniciales o finales de los mismos. Dos recorridos se dice que son *arco-disjuntos* si no tienen ningún arco en común. Nótese que si dos recorridos son disjuntos son también arco-disjuntos, pero no viceversa, si son arco-disjuntos no necesariamente son disjuntos.

Homomorfismos de digrafos. Grupo de automorfismos

Sean $\Gamma_1 = (V_1, A_1)$ y $\Gamma_2 = (V_2, A_2)$ dos digrafos y sea $\sigma : V_1 \rightarrow V_2$ una aplicación entre sus respectivos conjuntos de vértices. Se dice que σ es un *homomorfismo* de Γ_1 en Γ_2 si y sólo preserva las adyacencias, es decir, si σ verifica que:

$$\forall (u,v) \in A_1, (\sigma(u), \sigma(v)) \in A_2.$$

Denotamos por $\sigma^{-1}(v)$, $v \in V_2$, el conjunto de vértices $u_i \in V_1$ tales que $\sigma(u_i) = v$.

Se dice que dos digrafos $\Gamma_1 = (V_1, A_1)$ y $\Gamma_2 = (V_2, A_2)$ son *isomorfos* si existe un homomorfismo de digrafos $\sigma : V_1 \rightarrow V_2$ que sea una aplicación biyectiva y cuya aplicación inversa sea también un homomorfismo de digrafos. Se escribe entonces $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$. Ciertamente, la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia.

¹Se dice que un digrafo es *débilmente conexo* si para todo par de vértices u, v del digrafo existe un camino de u a v en el grafo subyacente. Como en el caso no dirigido ambos conceptos coinciden, se habla simplemente de *grafos conexos*.

En el caso $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, el isomorfismo σ se denomina *automorfismo* de Γ . Un automorfismo de un digrafo $\Gamma = (V, A)$ se define equivalentemente como un elemento $\sigma \in \text{Sym}(V) = \mathcal{S}_V$ tal que $\forall u, v \in V, (u, v) \in A \Leftrightarrow (u, v)^\sigma = (u^\sigma, v^\sigma) \in A$. El conjunto de todos los automorfismos de un digrafo Γ forma un subgrupo, $\text{Aut}(\Gamma)$, de $\text{Sym}(V)$ llamado el *grupo de automorfismos* de Γ . Si existe un subgrupo $G < \text{Aut}(\Gamma)$ que actúe transitivamente en el conjunto de vértices V o el conjunto de arcos A , decimos que Γ es *G -vértice transitivo* o *G -arco transitivo*. A menudo se omite el prefijo G si no es necesario y se dice simplemente que Γ es *vértice transitivo* (*VT*) o *arco transitivo* respectivamente. Si G actúa regularmente en el conjunto de vértices V o en el conjunto de arcos A , se dice también que Γ es *vértice regular* (*VR*) o *arco regular* respectivamente. Recordemos que un grupo G se dice que actúa regularmente en un conjunto X si para cada dos elementos $x, y \in X$ del conjunto existe un único elemento del grupo $g \in G$ tal que $x^g = y$ (para más detalles véase el Apéndice de Grupos de permutaciones).

Subdigrafos. Operaciones sobre digrafos

Dado un digrafo $\Gamma = (V, A)$, $H = (V', A')$ es un *subdigrafo* de Γ si $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$. Además, cuando $V' = V$, el subdigrafo H es un *subdigrafo generador*. Un *subdigrafo inducido por un conjunto de vértices* $U \subseteq V$ es aquel que tiene U como conjunto de vértices, y como conjunto de arcos todos aquellos arcos $(u, v) \in A$ tales que $u, v \in U$. Con otras palabras, es el subdigrafo de Γ con conjunto de vértices U maximal en tamaño. Dado $F \subseteq V = V(\Gamma)$, se define $\Gamma - F$ como el subdigrafo inducido por el conjunto de vértices $V \setminus F$, i.e. el digrafo obtenido de suprimir los vértices de F .

Dados un digrafo $\Gamma = (V, A)$ y P una partición del conjunto de vértices V . Se define el *digrafo cociente*, Γ/P , como el digrafo que tiene como vértices los conjuntos de la partición P , y donde existe un arco de Γ/P de la parte $X \in P$ a la parte $Y \in P$ si hay un arco de Γ de la forma $(u, v) \in X \times Y$. Entonces, la aplicación $\sigma : V \rightarrow P$, donde $\sigma(u)$ es la parte de P que contiene u , es un homomorfismo de digrafos de Γ en Γ/P . Notemos que el digrafo Γ/P tiene bucles si existe alguna adyacencia entre vértices de una misma parte X . Un conjunto de vértices X de un digrafo se dice que *estable* si no existen adyacencias entre los vértices del conjunto X . Así, el digrafo cociente Γ/P es un digrafo simple (i.e., sin bucles) si todas los conjuntos de la partición P son conjuntos estables.

Dados dos digrafos $\Gamma_1 = (V_1, A_1)$ y $\Gamma_2 = (V_2, A_2)$, su *producto categorial* o *producto débil*, $G_1 \times G_2$, se define como el digrafo $H = (V', A')$ que tiene $V' = V_1 \times V_2 = \{(u_1, u_2) : u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$, y donde $((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \in A' \Leftrightarrow (u_1, v_1) \in A_1, (u_2, v_2) \in A_2$.

El *producto cartesiano* de Γ_1 y Γ_2 se denota por $\Gamma_1 \square \Gamma_2$ y se define como el digrafo que tiene $V_1 \times V_2$ como conjunto de vértices, y donde (u_1, u_2) es adyacente hacia (v_1, v_2) si y sólo si $u_1 = v_1$ y $(u_2, v_2) \in A_2$, o bien $u_2 = v_2$ y $(u_1, v_1) \in A_1$.

Teoría espectral de digrafos

Sea Γ un digrafo, escojamos una ordenación v_1, \dots, v_n de los vértices de Γ . La *matriz de adyacencia* de Γ se define como la matriz cuadrada A de orden n con entradas definidas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (v_i, v_j) \in A \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como las matrices de adyacencia de digrafos isomorfos son semejantes, todos los invariantes matriciales por la relación de semejanza, como el polinomio característico y el polinomio mínimo, pueden definirse para una clase de isomorfía de digrafos, o en particular, para un digrafo Γ .

El *polinomio característico* de Γ es el polinomio característico de A , donde A es la matriz de adyacencia de Γ , i.e. $\det(xI - A)$. Y el *polinomio mínimo* de Γ es el polinomio mínimo de A .

El *espectro* de Γ está formado por los ceros (complejos) del polinomio característico de Γ con sus respectivas multiplicidades, es decir, los autovalores de A (que son los *autovalores* de Γ) y sus respectivas multiplicidades.

Entender hasta qué punto el espectro de un digrafo contiene información sobre su estructura es el objetivo de la Teoría Espectral de Digrafos. Algunas de las aplicaciones más sencillas son que del espectro de un digrafo (no necesariamente regular) se puede deducir el carácter bipartito de un digrafo (fuertemente) conexo así como el carácter fuertemente conexo de un digrafo regular. Uno de los temas que complejos comprende la Teoría Espectral de Digrafos es el estudio de digrafos densos.

Conectividad

La *conectividad* de un digrafo $\Gamma = (V, A)$, $\kappa = \kappa(\Gamma)$, es el mínimo número de vértices que se han de eliminar de Γ para desconectarlo (i.e. que no sea fuertemente conexo) o convertirlo en *trivial* (con un vértice aislado). Más formalmente:

$$\kappa = \min_{F \subseteq V} \{|F| : \Gamma - F \text{ está desconectado o es trivial}\}.$$

Si el digrafo está desconectado o es trivial, entonces $\kappa = 0$.

Si δ es el grado mínimo del digrafo, se demuestra que $\kappa \leq \delta$ ([44]). Diremos que un digrafo es *maximalmente conexo* cuando se verifique la igualdad, i.e. $\kappa = \delta$. Un digrafo maximalmente conexo se dice que es *superconexo* cuando los únicos conjuntos desconectores minimales son los conjuntos de vértices adyacentes desde un vértice del digrafo.

Diremos también que Γ es *k-conexo* si $\kappa \geq k$, luego si ningún subconjunto $F \subseteq V$ de menos de k vértices desconecta (i.e. $\Gamma - F$ es fuertemente conexo). Un resultado clásico en conectividad es el teorema de Menger que establece que un digrafo Γ es *k-conexo* si y sólo si entre dos vértices distintos de Γ existen al menos k caminos disjuntos.

Cuando el digrafo se considera que modela una red de interconexión con enlaces unidireccionales, la conectividad constituye una medida de la vulnerabilidad de la red ante el fallo de nodos.

Parámetro l

En [32] Fàbrega y Fiol introdujeron el *parámetro* l de un digrafo simple fuertemente conexo.

Sea Γ un digrafo simple conexo con grado mínimo δ y diámetro D , el *parámetro* $l = l(\Gamma)$ es el mayor entero, $1 \leq l \leq D$, tal que, para cualesquiera $u, v \in V$,

- si $d(u, v) < l$, el camino más corto $u \rightarrow v$ es único y no existen caminos $u \rightarrow v$ de longitud $d(u, v) + 1$.
- si $d(u, v) = l$, hay un único camino corto $u \rightarrow v$.

Este parámetro se ha demostrado una herramienta excelente para estudiar tolerancia a fallos en digrafos y el problema de vulnerabilidad del diámetro (véase por ejemplo [67]).

1.2.1 Algunas familias de digrafos

Presentamos en esta sección algunos de los digrafos básicos que utilizaremos en el resto de la memoria.

Digrafo completo

El *digrafo completo* de orden n , denotado K_n , consta de un conjunto V de n vértices y de un conjunto A de arcos que contiene todos los arcos posibles entre vértices distintos, i.e. $A = (V \times V) \setminus \{(u, u) : u \in V\}$.

No es difícil ver que K_n es $n - 1$ -regular, $m(K_n) = (n - 1)n$, $D(K_n) = 1$, es 2-alcanzable, es hamiltoniano, $\text{Aut}(K_n) = \mathcal{S}_n$, $\kappa(K_n) = n - 1$ (luego es superconexo) y que $l(K_n) = 1$.

Digrafo completo con bucles

El *digrafo completo con bucles* de orden n , K_n^+ , se define como el digrafo completo pero añadiendo un bucle a cada vértice. Esto es, $A(K_n^+) = V \times V$.

K_n^+ es n -regular, $m(K_n^+) = n^2$, $D(K_n^+) = 1$, es 1-alcanzable, es hamiltoniano, $\text{Aut}(K_n^+) = \mathcal{S}_n$ y que $\kappa(K_n^+) = n - 1$.

En el contexto de multidigrafos, se denota por K_n^p al digrafo completo al cual se han añadido p bucles a cada vértice. Con esta notación $K_n^1 = K_n^+$.

Digrafo m -ciclo generalizado

Un digrafo $\Gamma = (V, A)$ regular es un *m -ciclo generalizado* si V admite una partición en m partes (no vacías y mutuamente disjuntas), $V = \cup_{i=1}^m V_i$, tal que $\forall u \in V_i$, $\Gamma^+(u) \subseteq V_{i+1}$, y donde los subíndices se toman módulo m . A los conjuntos de la m -partición se les llama *conjuntos estables* del m -ciclo generalizado.

Obsérvese que cualquier digrafo puede verse como un 1-ciclo generalizado. Si un digrafo es un m -ciclo generalizado para algún $m \geq 2$, entonces se dice que es un *ciclo generalizado*.

Digrafo ciclo

El *ciclo*² de orden $m > 1$, C_m , es un caso particular del m -ciclo generalizado conexo donde el cardinal de cada una de las m partes es igual a 1. También se suele definir como el digrafo con conjunto de vértices los elementos de \mathbb{Z}_m y con conjunto de arcos los pares ordenados $(i, i + 1)$ para $i = 1, \dots, m$ y donde la suma es módulo \mathbb{Z}_m .

Se demuestra fácilmente que C_m es 1-regular, tiene tamaño m , $D(C_m) = m - 1$, no es equialcanzable, es hamiltoniano, $\text{Aut}(C_m) = \mathbb{Z}_m$, $\kappa(C_m) = 1$ (luego es superconexo) y que $l(C_m) = m - 1$.

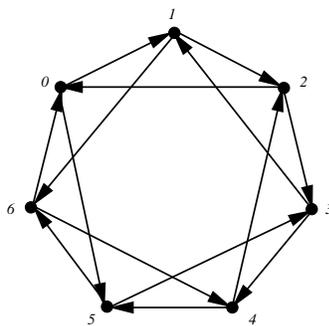
A lo largo de la memoria utilizaremos la siguiente caracterización de los ciclos generalizados en términos de homomorfismos en ciclos:

Proposición 1.2.1 *Un digrafo Γ conexo es un m -ciclo generalizado para algún $m \geq 2$ si y sólo si existe un homomorfismo de digrafos de Γ en C_m .*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\Gamma = (V, A)$ es un m -ciclo generalizado. Sea $V = \cup_{i=1}^m V_i$ la m -partición de V en conjuntos estables. Entonces, la aplicación $\sigma : V \rightarrow \mathbb{Z}_m$, definida por $\sigma(u) = i$, para $u \in V_i$ es claramente un homomorfismo de Γ en C_m .

A la inversa, supongamos que existe un homomorfismo de digrafos $\sigma : V \rightarrow \mathbb{Z}_m$ de Γ en C_m . Definimos los conjuntos $V_i = \sigma^{-1}(i) \subset V$ para $1 \leq i \leq m$. Es inmediato comprobar que $V = \cup_{i=1}^m V_i$ es una partición de V en m partes no vacías y mutuamente disjuntas. ■

²Hemos visto que ciclo también tiene la acepción de camino cerrado. Pero obsérvese que el digrafo C_m es también el subdigrafo formado por el conjunto de vértices y arcos de un camino cerrado de longitud m en un digrafo.

Figura 1.1: Digrafo circulante $\text{Cay}(\mathbb{Z}_7, \{1, 5\})$

Digrafos bipartitos

Un *digrafo bipartito semicompleto* K_{n_1, n_2} es aquel digrafo con dos conjuntos estables $|V_1| = n_1$ y $|V_2| = n_2$ y conjunto de arcos $A(K_{n_1, n_2}) = \{(u, v) : u \in V_1, v \in V_2\}$. Nótese que K_{n_1, n_2} no es conexo ni regular. Además, tiene tamaño $n_1 n_2$ y $\text{Aut}(K_{n_1, n_2}) = \mathcal{S}_{n_1} \times \mathcal{S}_{n_2}$.

Un *digrafo bipartito completo* K_{n_1, n_2}^+ es un 2-ciclo generalizado con $|V_1| = n_1$ y $|V_2| = n_2$, y conjunto de arcos

$$A(K_{n_1, n_2}^+) = \{(u, v) : u \in V_1, v \in V_2\} \cup \{(v, u) : v \in V_2, u \in V_1\}.$$

Obsérvese que K_{n_1, n_2}^+ es un digrafo simétrico y fuertemente conexo. Además, es regular si y sólo si $n_1 = n_2$, tiene tamaño $2n_1 n_2$, $\text{Aut}(K_{n_1, n_2}^+) = \mathcal{S}_{n_1} \times \mathcal{S}_{n_2}$ si $n_1 \neq n_2$ y $\text{Aut}(K_{n_1, n_2}^+) = \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ si $n_1 = n_2 = n$.

1.2.2 Digrafos de Cayley

Los digrafos de Cayley fueron introducidos por Cayley en 1895 (véase [19]).

Sea G un grupo finito y $S \subseteq G$. El *digrafo de Cayley (por la derecha)* de G definido por S , $\text{Cay}(G, S)$, tiene como vértices los elementos de G y como conjunto de arcos los pares ordenados (x, y) siempre que $x^{-1}y \in S$.

Si para todo $s \in S$, $s^{-1} \in S$, entonces el digrafo de Cayley es simétrico y al grafo subyacente se le llama *grafo de Cayley*.

Si $|S| = r$, entonces $\text{Cay}(G, S)$ es r -regular. Además, $\text{Cay}(G, S)$ es un digrafo fuertemente conexo si y sólo si S es un conjunto de generadores de G , *i.e.* $\langle S \rangle = G$. Algebraicamente, el diámetro de $\text{Cay}(G, S)$ es el máximo número de términos requeridos para escribir los elementos de G como palabras en el alfabeto S .

Si G es un grupo cíclico el digrafo $\text{Cay}(G, S)$ se dice *circulante*. Véase en la Figura 1.1 el digrafo circulante $\text{Cay}(\mathbb{Z}_7, \{1, 5\})$.

Ya hemos presentado de algunos digrafos de Cayley:

Ejemplos 1.2.1

- $K_n = \text{Cay}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n \setminus \{0\})$
- $K_n^+ = \text{Cay}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n)$
- $K_{n, n}^+ = \text{Cay}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, \{(i, 1) : i \in \mathbb{Z}_n\})$
- $C_n = \text{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{1\})$

Caracterización

Sea $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ un digrafo de Cayley de G con respecto S . Es un hecho básico que cada elemento $g \in G$ define un automorfismo de Γ como $\bar{g} : h \rightarrow gh$. El conjunto de estos automorfismos constituye un subgrupo de $\text{Aut}(\Gamma)$ que es justamente la representación por la izquierda por permutaciones $L(G)$ de G , que actúa regularmente en G , luego $\text{Cay}(G, S)$ es vértice regular.

Sabidussi en [77] caracteriza los grafos de Cayley en términos del grupo de automorfismo. Para digrafos la misma caracterización sigue siendo válida:

Teorema 1.2.1 (Sabidussi, [77]) *Un digrafo $\Gamma = (V, A)$ es un digrafo de Cayley si y sólo si $\exists G < \text{Aut}(\Gamma)$ tal que Γ es G -vértice regular.*

Vértice transitividad

Existen digrafos vértice transitivos que no son digrafos de Cayley. Un ejemplo muy conocido es el grafo de Petersen, que es un grafo vértice transitivo, pero no es un grafo de Cayley. Sabidussi en [78] demostró que todos los grafos vértice transitivos son cocientes de grafos de Cayley por clases laterales. Resultados análogos se verifican para digrafos:

Teorema 1.2.2 ([78, 31]) *Dado $\Gamma = (V, A)$ un digrafo vértice transitivo y $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Sea $v \in V$, $H = G_v$ el estabilizador de v en G , y $S = \{\sigma \in G : (v, v^\sigma) \in A\}$.*

Definimos $\Gamma(G/H, S) = (V', A')$ el digrafo con $V' = \{gH : g \in G\}$ y tal que $(g_1H, g_2H) \in A' \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in HSH$.

Entonces, $\Gamma \simeq \Gamma(G/H, S)$.

Nótese que este Teorema es más fuerte que la caracterización de Sabidussi (Teorema 1.2.1).

En general, determinar todas las simetrías de un digrafo ($\text{Aut}(\Gamma)$) da un margen más amplio para la ejecución de algoritmos sobre las redes que hagan uso de estas simetrías. La simetría de los digrafos de Cayley (ser VT) es una de las principales razones por las que resultan ser buenos modelos para redes de interconexión. Se aprovecha esta simetría para diseñar una tabla de encaminamiento con algoritmos sencillos y *eficientes*, para construir esquemas de comunicación comunes a todos los vértices, y porque en una red simétrica los problemas de congestión se minimizan, pues la carga se puede distribuir uniformemente entre todos los vértices. Entendemos por un algoritmo *eficiente* aquel que es determinístico y corre en tiempo polinomial. Véanse a este respecto [1, 58].

1.3 La técnica del digrafo línea

El digrafo línea fue presentado por Harary y Norman en [50] como una adaptación para digrafos del *grafo línea* [86] que estaba siendo estudiado en el caso no dirigido.

Ahora bien, el nombre de digrafo línea también designa la técnica de construcción de estos digrafos. Fiol, Yebra y Alegre en [41] estudian por primera vez la iteración del digrafo línea como manera de construir familias de digrafos con buenas propiedades desde el punto de vista de las redes de interconexión. En particular, estas familias son óptimas en la mayoría de los aspectos que planteábamos en el Prefacio: sencillez en el encaminamiento o routing ([41]), problema (Δ, D) ([41]), conectividad ([32, 34]), problema de vulnerabilidad del diámetro ([67]), broadcasting ([9])...

Parece justificado por lo tanto escoger este tipo de digrafos como modelos de redes de interconexión.

1.3.1 Definición

Definición 1.3.1 Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo. Se define el digrafo línea $L\Gamma$ como el digrafo tal que su conjunto de vértices $V(L\Gamma)$ corresponde al conjunto de arcos A , esto es, $V(L\Gamma) = \{(u, v) : (u, v) \in A\}$, y tal que dos vértices de $L\Gamma$ son adyacentes el uno hacia el otro si sus correspondientes arcos de Γ también son adyacentes el uno hacia el otro, i.e. $A(L\Gamma) = \{((u, v), (v, w)); (u, v), (v, w) \in A\}$.

Los digrafos k -línea iterados de Γ , $L^k\Gamma$, se definen de manera recursiva como $L^k\Gamma = L(L^{k-1}\Gamma)$ para $k \geq 2$.

La definición de digrafo línea puede generalizarse para multidigrafos. En cualquiera de los casos, es fácil comprobar de la definición que un digrafo línea no puede tener arcos múltiples y que sólo tiene bucles si el digrafo del cual es línea los tiene.

Diremos que un digrafo Γ es *línea* si existe un digrafo o multidigrafo Γ' tal que $L\Gamma' = \Gamma$. Si Γ es un digrafo línea conexo, es fácil ver que hay un único digrafo Γ' (salvo isomorfismo) tal que $L\Gamma' = \Gamma$. Así, es correcto escribir $\Gamma' = L^{-1}\Gamma$. De manera similar, denotaremos por $\Gamma_0 = L^{-k}\Gamma$ cuando Γ sea un digrafo k -línea iterado de Γ_0 .

1.3.2 Caracterización

Dado un digrafo $\Gamma = (V, A)$, consideremos ahora $v \in V$. En el digrafo línea los conjuntos de vértices $B_v^- = \{(u, v) : (u, v) \in A\}$ y $B_v^+ = \{(v, w) : (v, w) \in A\}$ verifican que para cualquier $x \in B_v^-$, $L\Gamma^+(x) = B_v^+$, y de la misma forma, para cualquier $x \in B_v^+$, $L\Gamma^-(x) = B_v^-$. Sea B_v el subdigrafo de $L\Gamma$ inducido por el conjunto de vértices $B_v^- \cup B_v^+$. Es inmediato comprobar que si v no forma parte de un bucle, el subdigrafo B_v es un digrafo bipartito semicompleto con conjuntos estables B_v^- y B_v^+ .

De esta manera, se encuentran diferentes caracterizaciones de los digrafos línea. Heuchenne en [52] demuestra:

Teorema 1.3.1 (Heuchenne, [52]) Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo r -regular conexo. Γ es k -línea iterado de un (multi)digrafo Γ' si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

- $\forall u, v \in V$ y para $i = 1, \dots, k$, o bien $\Gamma^i(u) \cap \Gamma^i(v) = \emptyset$, o bien $\Gamma^i(u) = \Gamma^i(v)$,
- $\forall u \in V$, $|\Gamma^k(u)| = r^k$.

Otra formulación equivalente, también de Heuchenne, es la siguiente:

Teorema 1.3.2 (Heuchenne, [52]) Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo r -regular conexo. Γ es k -línea iterado de un (multi)digrafo Γ' si y sólo si $\{\Gamma^k(u) : u \in V\}$ es una partición de V en conjuntos de cardinalidad r^k . Más aún, Γ' es un digrafo (sin arcos múltiples) si y sólo si $|\Gamma^{k+1}(u)| = r^{k+1}$ para cada $u \in V$.

Observaciones 1.3.1 Obsérvese que un digrafo k -línea iterado es también un digrafo s -línea iterado para $1 \leq s \leq k$. Además, si Γ^{-1} es el digrafo inverso de Γ , esto es, el digrafo obtenido de Γ cambiando el sentido a todos los arcos, se verifica $L^k(\Gamma^{-1}) = (L^k\Gamma)^{-1}$.

Como consecuencia directa del Teorema 1.3.2 y de la observaciones anteriores se obtiene entonces el siguiente corolario:

Corolario 1.3.1 *Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo k -línea iterado de un (multi)digrafo r -regular Γ' . Entonces,*

- (a) *para cada $u \in V$ se verifica $|\Gamma^s(u)| = r^s$ para $1 \leq s \leq k$.*
- (b) *para cada $u \in V$ se verifica $|\Gamma^{-s}(u)| = r^s$ para $1 \leq s \leq k$.*
- (c) *para cada $u \in V$ se verifica $|\Gamma^{-s}\Gamma^k(u)| = r^k$ para $1 \leq s \leq k$.*
- (d) *$\{\Gamma^{-s}(u) \mid u \in V\}$ es una partición de V en conjuntos de cardinal r^s para $1 \leq s \leq k$.*
- (e) *$\{\Gamma^{-s}\Gamma^k(u) \mid u \in V\}$ es una partición de V en conjuntos de cardinal r^k para $1 \leq s \leq k$.*

De acuerdo con estas caracterizaciones, Γ es isomorfo al digrafo cociente $L\Gamma/P$, donde P es la partición de V en los conjuntos de vértices u con $\Gamma^+(u)$ común, esto es, $u, v \in X$ para algún $X \in P$ si y sólo si $\Gamma^+(u) = \Gamma^+(v)$.

1.3.3 Propiedades

Como consecuencia directa de la definición de digrafo línea se obtiene la siguiente lista de propiedades:

Teorema 1.3.3 ([41, 51]) *Sea Γ un digrafo. Entonces,*

- $n(L\Gamma) = m(\Gamma)$
- $\forall (u, v) \in V(L\Gamma)$, $d^+(u, v) = d^+(v)$ y $d^-(u, v) = d^-(u)$
- $\delta(L\Gamma) = \delta(\Gamma)$ y $\Delta(L\Gamma) = \Delta(\Gamma)$
- Γ is r -regular $\Leftrightarrow L^k\Gamma$ es r -regular y $n(L^k\Gamma) = r^k n(\Gamma)$, donde $k \geq 1$.
- Γ y $L\Gamma$ tienen el mismo cuello, i.e. $g(L\Gamma) = g(\Gamma)$
- $\Gamma = C_n \Leftrightarrow L\Gamma = C_n$

Diámetro

Una propiedad interesante de los digrafos línea con respecto al diámetro es:

Proposición 1.3.1 ([41]) *Sea Γ un digrafo conexo diferente de un ciclo, entonces $D(L^k\Gamma) = D(\Gamma) + k$.*

Esta propiedad junto con la del orden de $L\Gamma$, justifica la aplicación de la técnica del digrafo línea en el problema (Δ, D) o construcción de digrafos densos (véase [41]).

Grupo de automorfismos

Una propiedad que utilizaremos a lo largo de toda la memoria respecto al grupo de automorfismos de un digrafo línea es la siguiente:

Teorema 1.3.4 ([51]) *Sea Γ un digrafo regular y $L\Gamma$ su digrafo línea. La aplicación $\Phi : \text{Aut } \Gamma \rightarrow \text{Aut } L\Gamma$ definida por:*

$$(u, v)^{\Phi(g)} = (u^g, v^g), (u, v) \in A$$

para cada $g \in \text{Aut } \Gamma$, es un isomorfismo de grupos. Con esta identificación, nos es lícito escribir $\text{Aut } \Gamma = \text{Aut } L\Gamma$.

Como consecuencia de este Teorema 1.3.4 y de la caracterización de Sabidussi de los digrafos de Cayley (Teorema 1.2.1), se tiene entonces que $L\Gamma$ es un digrafo de Cayley si y sólo si $\text{Aut}(\Gamma)$ contiene un subgrupo que actúe regularmente en los arcos, i.e. si y sólo si Γ es arco regular.

Conectividad

Con respecto a la conectividad de los digrafos línea encontramos los siguientes teoremas:

Teorema 1.3.5 ([51]) *Sea Γ un digrafo conexo r -regular con $r \geq 2$. Entonces $\kappa(L^k\Gamma) \geq \kappa(\Gamma)$.*

Teorema 1.3.6 ([38]) *Sea Γ un digrafo simple. Entonces Γ es superconexo si y sólo si $L\Gamma$ es superconexo.*

Teorema 1.3.7 ([32]) *Sea Γ un digrafo simple con $\delta(\Gamma) \geq 2$. Entonces $l(L^k\Gamma) = l(\Gamma) + k$.*

Equialcanzabilidad

En [33] Fiol et al. estudian por primera vez la equialcanzabilidad de los digrafos línea:

Teorema 1.3.8 *Un digrafo es h -alcanzable si y sólo si su digrafo línea es $h + 1$ -alcanzable.*

En el mismo artículo se da una caracterización de los digrafos equialcanzables:

Teorema 1.3.9 *Un digrafo conexo es equialcanzable si y sólo si no es un ciclo generalizado.*

Como corolario inmediato se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 1.3.2 *Un digrafo Γ es un ciclo generalizado si y sólo si $L\Gamma$ es un ciclo generalizado. En este caso, $V(L\Gamma)$ se puede descomponer en el mismo número de conjuntos estables que $V(\Gamma)$.*

Obsérvese, que si un digrafo h -alcanzable modela una red de comunicaciones, cualquier mensaje puede ser enviado desde su origen a su destino en precisamente h -unidades de tiempo. La construcción de digrafos densos con esta propiedad ha sido estudiada, entre otros, en [33].

Encaminamientos

Obsérvese que los vértices de $L^k\Gamma$ representan recorridos de longitud k en Γ , y por lo tanto se pueden escribir como secuencias de $k + 1$ vértices de Γ , (u_0, u_1, \dots, u_k) de forma que u_i es adyacente hacia u_{i+1} para todo $i = 0, \dots, k - 1$. Si $d^+(u_k) > 0$, entonces:

$$L^k\Gamma^+(u_0, u_1, \dots, u_k) = \{(u_1, \dots, u_k, v) : v \in \Gamma^+(u_k)\}.$$

Un recorrido de longitud t en $L^k\Gamma$ se puede representar como una secuencia de $k + t + 1$ vértices de Γ de manera que las subsecuencias de $k + 1$ vértices consecutivos son los vértices

del recorrido en $L^k\Gamma$. Esta formulación es muy útil para diseñar encaminamientos sencillos en redes de interconexión ([41]).

A modo de ejemplo, véase en la Figura 1.2 el digrafo línea LK_2^+ y el digrafo 2-línea iterado $L^2K_2^+$ del digrafo completo con bucles K_2^+ , con los vértices etiquetados como secuencias de vértices en K_2^+ .

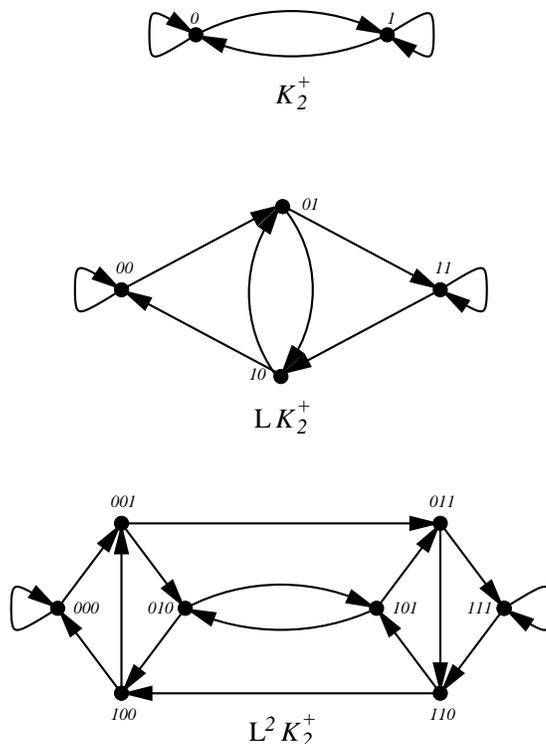


Figura 1.2: K_2^+ , LK_2^+ y $L^2K_2^+$

Encaminamientos mínimos

Otra propiedad interesante de los digrafos línea como modelos de redes de interconexión es que la existencia de *encaminamientos mínimos* se puede inferir de la operación de digrafo línea. Un *encaminamiento mínimo* (o de *trayectoria mínima*) de un vértice u a un vértice v de un digrafo se entiende como un recorrido de longitud mínima $d(u, v)$.

Una *tabla de encaminamiento de trayectoria mínima* en un digrafo $\Gamma = (V, A)$ es una aplicación $\rho : V \times V \rightarrow V$ tal que, para cada $u \neq v$, se verifica $\rho(u, v) \in \Gamma^+(u)$ y $d(\rho(u, v), v) = d(u, v) - 1$ (y $\rho(v, v) = v$). Con otras palabras, dado un vértice de destino v , una tabla de encaminamiento de trayectoria mínima proporciona un camino de longitud mínima desde cualquier vértice al vértice v de manera que cada paso del camino se calcula conociendo simplemente la posición actual y el vértice de destino v .

Si ρ es una tabla de encaminamiento de trayectoria mínima en un digrafo $\Gamma = (V, A)$, el encaminamiento *inducido* ρ_L en el digrafo línea $L\Gamma$ definido como la aplicación $\rho_L : A \times A \rightarrow A$ tal que $\rho_L((u, v), (w, x)) = (v, \rho(v, w))$ para $v \neq w$ y $(u, v) \neq (w, x)$, y $\rho_L((u, v), (v, x)) = (v, x)$ (y $\rho_L((u, v), (u, v)) = (u, v)$). Con esta notación se demuestra el siguiente resultado:

Proposición 1.3.2 ([29]) *Si ρ es una tabla de encaminamiento de trayectoria mínima en un digrafo Γ , entonces el encaminamiento inducido ρ_L en el digrafo línea $L\Gamma$ es también una tabla de encaminamiento de trayectoria mínima en $L\Gamma$.*

Circuitos hamiltonianos

Otra propiedad interesante de los digrafos línea su carácter hamiltoniano:

Proposición 1.3.3 ([51]) *Si Γ un digrafo r -regular conexo, entonces $L\Gamma$ es hamiltoniano.*

En este caso, las redes de interconexión modeladas por un digrafo línea tienen otra buena propiedad respecto a la tolerancia a fallos en los nodos. Nótese que un circuito euleriano en Γ corresponde a un circuito hamiltoniano en $L\Gamma$. Así, la existencia de un circuito hamiltoniano en $L\Gamma$ implica que Γ tiene que ser euleriano. Ahora bien, la buena propiedad es que mientras que los circuitos hamiltonianos son difíciles de hallar cuando hay fallos de nodos, los equivalentes circuitos eulerianos en Γ son relativamente fáciles de encontrar en presencia de enlaces prohibidos (correspondientes a fallos de un nodo en $L\Gamma$). Véase [84].

1.3.4 Algunas familias de digrafos línea iterados

Digrafos de De Bruijn

Los digrafos de *De Bruijn*, $B(r, k)$, aparecen por primera vez en 1946 en [23, 46] en el contexto de los registros de desplazamiento. Actualmente, constituyen una familia de digrafos ampliamente utilizada como modelos de redes de interconexión y de sistemas multiprocesadores porque tienen diámetro pequeño y disponen de un protocolo de comunicación simple ([79, 24]). Se trata de la familia de digrafos línea iterados más estudiada.

Presentamos a continuación tres definiciones equivalentes para los digrafos de esta familia:

Definición 1.3.2 (a partir de secuencias) *Los vértices de $B(r, k)$ son palabras de longitud k construidas a partir de un alfabeto \mathcal{A} de r símbolos, donde $r > 1$. Es decir,*

$$V(B(r, k)) = \{(u_0, u_1, \dots, u_{k-1}) : u_i \in \mathcal{A}\}$$

Y un vértice $(u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$ es adyacente hacia los vértices de la forma $(u_1, \dots, u_{k-1}, \alpha)$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.

Definición 1.3.3 (como línea iterado) *El digrafo $B(r, k)$ se obtiene como digrafo línea iterado del digrafo completo con bucles y r vértices, $r > 1$. Es decir, $B(r, k) = L^{k-1}K_r^+$.*

De forma equivalente, si consideramos multidigrafos, puesto que $K_r^+ = LK_1^r$ (un digrafo con un único vértice y r bucles), $B(r, k) = L^k K_1^r$.

Definición 1.3.4 (a partir de congruencias) ³ *Los vértices del $B(r, k)$, $r > 1$, son los elementos del grupo \mathbb{Z}_{r^k} , y los arcos el conjunto de pares ordenados $(u, ru + i)$ para todo $u \in \mathbb{Z}_{r^k}$ y para $i = 0, \dots, r - 1$.*

³Imase e Itoh [54] y Reddy, Pradhan y Kuhl [74] presentaron de manera independiente una generalización de estos digrafos consistente en sustituir el conjunto de vértices por cualquier \mathbb{Z}_N . A los digrafos resultantes se les conoce por *De Bruijn generalizados*.

Los digrafos de De Bruijn $B(r, k)$ son r -regulares, tienen diámetro k , orden r^k , $\text{Aut}(B(r, k)) = \mathcal{S}_r$ y son hamiltonianos. Además, $\kappa(B(r, k)) = r - 1$, luego son maximalmente conexos (siendo digrafos con bucles). Nótese que $B(r, k)$ tiene r bucles (incidentes hacia los vértices de la forma (i, \dots, i) , $i \in \mathbb{Z}_r$) y $\binom{r}{2}$ dígonos (entre cada par de vértices de la forma (i, j, i, j, \dots) y (j, i, j, i, \dots) , $i, j \in \mathbb{Z}_r$, $i \neq j$).

En la Figura anterior 1.2 mostrábamos los digrafos de De Bruijn $K_2^+ = B(2, 1)$, $LK_2^+ = B(2, 2)$ y $L^2K_2^+ = B(2, 3)$.

Digrafos de Kautz

Los digrafos *de Kautz*, $K(r, k)$, fueron presentados en [56, 57] en el contexto de redes de interconexión. Actualmente, los digrafos de Kautz son la familia a la que pertenecen mayor número de digrafos densos, esto es, con mayor orden fijados el grado máximo y el diámetro. Son r -regulares, con diámetro k y orden $r^k + r^{k-1}$. Estos digrafos pueden verse como subdigrafos de los digrafos de De Bruijn, $K(r, k) \subset B(r + 1, k)$, y, al igual que estos últimos admiten tres definiciones diferentes todas ellas equivalentes.

Definición 1.3.5 (a partir de secuencias) *Los vértices de $K(r, k)$ son palabras de longitud k construidas a partir de un alfabeto \mathcal{A} de $r + 1$ símbolos, donde $r > 1$. Es decir,*

$$V(K(r, k)) = \{(u_0, u_1, \dots, u_{k-1}) \in V(B(r + 1, k)) : u_i \neq u_{i+1}, i = 0, \dots, k - 2\}.$$

Y un vértice $(u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$ es adyacente hacia los vértices de la forma $(u_1, \dots, u_{k-1}, \alpha)$ para todo $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{u_{k-1}\}$.

Definición 1.3.6 (como línea iterado) *El digrafo $K(r, k)$ se obtiene como digrafo línea iterado del digrafo completo de $r + 1$ vértices, $r > 1$. Es decir, $K(r, k) = L^{k-1}K_{r+1}$.*

Definición 1.3.7 (a partir de congruencias) *Los vértices del $K(r, k)$, $r > 1$, son los elementos del grupo $\mathbb{Z}_{r^k + r^{k-1}}$, y los arcos el conjunto de pares ordenados $(u, -ru - i)$ para todo $u \in \mathbb{Z}_{r^k + r^{k-1}}$ y para $i = 1, \dots, r$.*

Obsérvese que $K(r, k)$ contiene $\binom{r+1}{2}$ dígonos (entre cada par de vértices de la forma (i, j, i, j, \dots) y (j, i, j, i, \dots) , $i, j \in \mathbb{Z}_{r+1}$, $i \neq j$), y no tiene bucles.

Los digrafos de Kautz $K(r, k)$ tienen $\text{Aut}(K(r, k)) = \mathcal{S}_{r+1}$, son hamiltonianos y maximalmente conexos, y en [14] se demuestra que son de Cayley si y sólo si o bien $k = 1$ ($K(r, 1) = K_{r+1}$), o bien $k = 2$ y $r + 1$ es una potencia de un número primo.

Digrafos línea iterados de ciclos generalizados completos

Los *ciclos generalizados completos*, $C(r, m)$, donde $r > 1$, son los digrafos de Cayley:

$$C(r, m) = \text{Cay}(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_m, \{(i, 1) : i \in \mathbb{Z}_r\}).$$

Obsérvese que $m = 1$ corresponde a los digrafos completos con bucles K_r^+ y $m = 2$ a los digrafos bipartitos completos $K_{r,r}^+$. Si $m \geq 2$ es inmediato comprobar que $C(r, m)$ es efectivamente un ciclo generalizado como su terminología indica.

Sea $C(r, m, 1) = C(r, m)$. Se definen de manera recursiva sus digrafos línea iterados $C(r, m, k) = L^{k-1}C(r, m)$ para $k \geq 2$. Obsérvese nuevamente que $C(r, 1, k) = B(r, k)$. No es difícil ver que $C(r, m, k) \simeq C_m \square B(r, k)$.

Praeger en [71] estudia algunas de las propiedades de esta familia:

Teorema 1.3.10 ([71]) *Para $m \geq 2$, los digrafos $C(r, m, k)$ verifican:*

- *tienen diámetro $m + k - 1$*
- *tienen cuello m*
- $\text{Aut}(C(r, m, k)) = \mathcal{S}_r \wr \mathbb{Z}_m$

En [49] se caracterizan los digrafos de Cayley de grupos abelianos que son superconexos, y $C(r, m)$ se infiere que es superconexo. Por lo tanto, sus digrafos línea iterados $C(r, m, k)$ son también superconexos (Teorema 1.3.6).

Además, para $m \geq 2$ dado que $C(r, m)$ es un ciclo generalizado, sus digrafos línea iterados $C(r, m, k)$ también son ciclos generalizados (Corolario 1.3.2).

El estudio de la familia $C(r, m, k)$ aparece en diferentes contextos. Por ejemplo Fiol et. al en [36, 35] los utilizan como modelos de memorias dinámicas vectoriales con ciertas coloraciones, Praeger en [71] estudia su elevada arco transitividad, Brunat et al. en [13] para qué valores de los parámetros $C(r, m, k)$ es un digrafo de Cayley. En cuanto a la versión no dirigida, Delorme y Fahri en [25] los analizan el contexto de construcción de grafos densos.

Digrafos Mariposa

Los digrafos *Mariposa* han recibido una especial atención desde el punto de vista de las comunicaciones, principalmente por su elevada alta transitividad y por su facilidad para adaptar los algoritmos de FFT (Fast Fourier Transform) a su topología [24]. Pankaj y Gallager las utilizan también para modelar redes de fibra óptica [68].

En la literatura han recibido diferentes nombres y definiciones no siempre totalmente equivalentes, como por ejemplo *Sufflenet* [53], *Mariposa* [60, 29] o incluso Ciclos Generalizados [55].

Los utilizaremos en esta memoria en su definición como digrafo regular y nos referiremos a ellos con la notación $But(r, m)$. El digrafo $But(r, m)$ será r -regular, tendrá diámetro $2m - 1$ y orden mr^m .

Definición 1.3.8 *$But(r, m)$ tiene como conjunto de vértices los elementos de $\mathbb{Z}_r^m \times \mathbb{Z}_m$, y como conjunto de arcos los pares*

$$((x_0, \dots, x_{m-1}, i), (x_0, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \dots, x_{m-1}, i + 1))$$

donde $\alpha \in \mathbb{Z}_r$.

No es difícil comprobar que $But(r, m) \simeq C(r, m, m)$ y por lo tanto también $But(r, m) \simeq C_m \square B(r, m)$. En [8] se demuestra que se trata de un digrafo línea iterado de los siguientes digrafos:

$$But(r, m) = L^{m-1}(C_m \square K_r^+) = L^m r C_m$$

A diferencia de las familias anteriores, en que cada nueva iteración representa un nuevo digrafo de la misma familia, el digrafo línea de un digrafo Mariposa no es un digrafo Mariposa.

Capítulo 2

Herramientas para la construcción de recubrimientos k -arco transitivos

2.1 Introducción

En este capítulo introduciremos dos de las herramientas fundamentales en la construcción de digrafos k -arco transitivos que presentaremos en el capítulo siguiente y que es una de las contribuciones más importantes de esta tesis.

Un digrafo es k -arco transitivo si su grupo de automorfismos actúa transitivamente en el conjunto de todos los k -arcos del digrafo (un k -arco de un digrafo, como su terminología indica, es un recorrido de longitud k en el digrafo).

En la primera sección de este capítulo introduciremos los digrafos k -arco transitivos, daremos algunos ejemplos simples de digrafos k -arco transitivos y presentaremos algunas de sus propiedades básicas. En particular, presentaremos una caracterización muy sencilla de los digrafos k -arco transitivos, pero muy útil para nuestra construcción, que es que un digrafo es k -arco transitivo si y sólo si su digrafo k -línea iterado es un digrafo vértice transitivo. En la sección 2.2.1 presentamos también un pequeño estado del arte de otras construcciones de digrafos k -arco transitivos.

La técnica de construcción de digrafos k -arco transitivos del capítulo 3 se basa en dos herramientas fundamentales que son las 1-factorizaciones y recubrimientos de digrafos, y que presentamos en las secciones 2.3 y 2.4 de este capítulo respectivamente.

En la sección 2.3 definimos un 1-factor de un digrafo como un subdigrafo generador 1-regular y una 1-factorización de un digrafo $\Gamma = (V, A)$ como un conjunto de 1-factores de Γ cuyos conjuntos de arcos particionan A .

En la sección 2.4 se define un recubrimiento de un digrafo Γ como un digrafo $\bar{\Gamma}$ tal que existe un homomorfismo de digrafos exhaustivo $\sigma : V(\bar{\Gamma}) \rightarrow V(\Gamma)$ que sea isomorfismo local y tal que $|\sigma^{-1}(u)| = h$ para todo $u \in V(\Gamma)$. (Véase la definición precisa en la sección 2.4).

Una clase particular de recubrimientos de gran importancia en la memoria es la de los recubrimientos de Cayley, que introducimos también en la sección 2.4. Dado un digrafo Γ y $F = \{F_1, \dots, F_r\}$ una 1-factorización de Γ (donde cada F_i es un 1-factor de Γ), cada 1-factor F_i de Γ define una permutación f_i en el conjunto de vértices de Γ de modo natural. Denotamos

G el grupo generado por el conjunto de permutaciones $\{f_1, \dots, f_r\}$. Se define el recubrimiento de Cayley de Γ como el digrafo $\overline{\Gamma}_F \text{Cay}(G, \{f_1, \dots, f_r\})$. En la sección 2.4 se demuestra que efectivamente, el digrafo así definido es un recubrimiento del digrafo de partida Γ .

Sea ahora Γ un digrafo regular conexo. Nuestra construcción de digrafos k -arco transitivos consiste esquemáticamente en lo siguiente. Consideremos $L^k\Gamma$ el digrafo k -línea iterado de Γ y asignemos a este digrafo $L^k\Gamma$ una 1-factorización adecuada, F , de tal modo que el recubrimiento de Cayley $\overline{L^k\Gamma}_F$ sea a su vez un digrafo k -línea iterado de algún digrafo Γ_0 . Entonces, el digrafo Γ_0 es un digrafo k -arco transitivo (por la caracterización de digrafos k -arco transitivos que adelantamos anteriormente) y más aún, como se demostrará en el capítulo 3, es un recubrimiento k -arco transitivo del digrafo original.

Las 1-factorizaciones de digrafos k -línea iterados $L^k\Gamma$ tales que el recubrimiento de Cayley $\overline{L^k\Gamma}_F$ sea a su vez un digrafo k -línea iterado, se definirán la mayor parte de las veces como 1-factorizaciones inducidas por una 1-factorización de Γ y una 1-factorización de un digrafo de De Bruijn. Estudiaremos este concepto de 1-factorización inducida en la sección 2.3.

2.2 Digrafos k -arco transitivos

Para cada entero positivo k un k -arco de un digrafo $\Gamma = (V, A)$ es una secuencia (u_0, \dots, u_k) de $k+1$ vértices tal que para cada $0 \leq i < k$, $(u_i, u_{i+1}) \in A$. Nótese que un 1-arco es simplemente un arco.

Si un subgrupo G de $\text{Aut}(\Gamma)$ actúa transitivamente (respectivamente regularmente) en el conjunto de k -arcos, decimos que Γ es (G, k) -arco transitivo (resp. (G, k) -arco regular). A menudo omitiremos el sufijo G y diremos simplemente que Γ es k -arco transitivo (resp. k -arco regular). Si Γ es k -arco transitivo pero no $(k+1)$ -arco transitivo, entonces decimos que Γ es *exactamente k -arco transitivo*.

Es inmediato de la definición que k -arco transitividad siempre implica $(k-1)$ -arco transitividad, que 1-arco transitividad es lo mismo que arco transitividad, 0-arco transitividad es lo mismo que vértice transitividad, y si cada vértice tiene grado mayor que uno, arco transitividad implica vértice transitividad. En particular, un digrafo finito vértice transitivo es siempre regular, i.e. el grado de salida y de entrada de todos los vértices tiene que ser igual a una misma constante r .

Nótese que los ciclos dirigidos son k -arco transitivos para cada entero positivo k . En consecuencia, a partir de ahora y a lo largo del resto de la memoria, consideraremos siempre digrafos finitos, r -regulares con $r \geq 2$ y (fuertemente) conexos.

A pesar de que la k -arco transitividad parezca una restricción fuerte en un digrafo, se encuentra en muchas familias conocidas. Enumeramos a continuación algunas de ellas.

Ejemplos 2.2.1

- Para $n \geq 2$, C_n es k -arco transitivo $\forall k \geq 1$.
- Para $n \geq 3$, K_n es arco, pero no 2-arco transitivo.
- Para $n \geq 2$, K_n^+ es vértice transitivo, pero no arco transitivo.
- Para $n \geq 2$, $K_{n,n}^+$ es arco, pero no 2-arco transitivo.
- ([71]) Para $m \geq 3$, $C(r, m, k)$ es $(m-k)$ -arco transitivo pero no $(m-k+1)$ -arco transitivo.

La propiedad de ser k -arco transitivo es principalmente de interés si $k \geq 2$. Un digrafo arco transitivo tiene una descripción sencilla como *digrafo orbital*.

Definición 2.2.1 *Sea G un grupo de permutaciones que actúa transitivamente en un conjunto V . Las órbitas de la acción de G en $V \times V$ se llaman orbitales. Si D es un orbital de G , decimos que el digrafo $\Gamma(D) = (V, D)$ es un digrafo orbital. Si D es una unión de orbitales de G , entonces $\Gamma(D) = (V, D)$ es un digrafo orbital generalizado.*

El siguiente teorema es bien conocido:

Teorema 2.2.1 ([80]) *Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo, y sea $G \leq \text{Aut } \Gamma$ tal que Γ es G -vértice transitivo. Entonces A es una unión de orbitales de G en V . Recíprocamente, si G es un grupo de permutaciones que actúa transitivamente en V y A es una unión de orbitales de G en V , entonces el digrafo (V, A) es vértice transitivo. Más aún, G es arco transitivo en Γ si y sólo si Γ es un digrafo orbital en G .*

Entre las diferentes propiedades de simetría con que cabe caracterizar un digrafo, notemos que la k -arco transitividad involucra una condición más fuerte que la k -distancia transitividad y que está fuertemente limitada por el cuello. Biggs [10] demuestra en el caso no dirigido que si Γ es un digrafo k -arista transitivo de grado $r \geq 3$ y cuello g , entonces $k \leq 1 + \frac{g}{2}$. En el caso dirigido, es fácil ver que si Γ es un digrafo k -arco transitivo de grado $r \geq 2$ y cuello g , entonces $k \leq g - 1$.

Consideremos ahora el digrafo k -línea iterado de Γ , $L^k\Gamma$, los vértices de $L^k\Gamma$ son recorridos de longitud k en Γ o equivalentemente k -arcos de Γ . Por el teorema 1.3.4, tenemos que $\text{Aut } L^k\Gamma = \text{Aut } \Gamma$, luego

Observación 2.2.1 *Un digrafo finito regular es k -arco transitivo (resp. k -arco regular) si y sólo si su digrafo i -línea iterado es $(k - i)$ -arco transitivo (resp. $(k - i)$ -arco regular).*

En particular, un digrafo finito regular es k -arco transitivo (resp. k -arco regular) si y sólo si su digrafo k -línea iterado es vértice transitivo (resp. vértice regular).

2.2.1 Estado del arte de construcciones de digrafos k -arco transitivos

La noción análoga de k -arista transitividad en el caso de grafos no dirigidos da lugar a resultados importantes, e incluso sorprendentes comparándolos con los del caso dirigido. Un resultado clásico de Tutte de 1959 afirma que los grafos cúbicos (i.e. de grado 3) no pueden ser k -arista transitivos para $k > 5$ (véase [82]). Años después, en 1981, Weiss demostró que los únicos grafos finitos conexos k -arco transitivos con $k \geq 8$ son los ciclos (véase [85]). De hecho, el resultado de Weiss es el siguiente:

Teorema 2.2.2 ([85]) *Si Γ es un grafo finito regular exactamente k -arco transitivo de grado $r > 2$, entonces $k \leq 5$ o $k = 7$.*

Pero en el caso dirigido, que es en el que nos ocupa en la tesis, la situación es completamente diferente. En 1989, Praeger [71] publica la primera construcción de familias infinitas de digrafos finitos k -arco transitivos para cada entero positivo k . Posteriormente, Conder, Lorimer y Praeger estudiaron nuevas construcciones en [21]. En el caso de digrafos infinitos, Cameron, Praeger y Wormald en [18] dan las primeras construcciones de digrafos infinitos *altamente transitivos*, esto es, digrafos que son k -arco transitivos para todo entero k .

Las construcciones de digrafos k -arco transitivos presentadas en los trabajos anteriores están orientadas hacia la teoría de grupos finitos: el grafo se construye a partir de su grupo de automorfismos. En nuestra tesis, sin embargo, abordaremos el tema desde un punto de vista esencialmente de teoría de grafos: dado cualquier digrafo regular finito, podemos construir a partir de él digrafos del mismo grado k -arco transitivos para cualquier k .

Como ya anunciábamos anteriormente, la primera construcción de digrafos finitos k -arco transitivos de grado r para todo par de enteros positivos $k \geq 2$ y $r \geq 2$, se encuentra en la literatura en un artículo de Praeger de 1989. Se trata de las familias de digrafos línea iterados de los ciclos generalizados completos $C(r, m, s)$, para $r \geq 2$ y $m \geq 3$. Se demuestra en [71], que para cada entero $k = m - s$, los digrafos $C(r, m, s)$ son una familia de digrafos exactamente k -arco transitivos.

La otra construcción más reciente a la que hacíamos referencia, de Conder, Lorimer y Praeger [21] se basa en un método para construir grafos simétricos de Miller descrito en [66]. Dados un grupo G , $H < G$ un subgrupo y $a \in G \setminus H$ un elemento tal que $a^2 \in H$, se define un grafo $\Gamma = \Gamma(G, H, a)$ del modo siguiente: $V(\Gamma)$ es el conjunto de clases laterales a la derecha de H en G , y $E(\Gamma)$ los pares $\{Hg_1, Hg_2\}$ de clases laterales con la propiedad $g_1g_2^{-1} \in HaH$. Entonces, Γ así construido es un grafo regular, en el que G induce un subgrupo de $\text{Aut } \Gamma$ por multiplicación a la derecha, y además es vértice transitivo y arco transitivo. H también resulta ser el estabilizador en G del vértice H .

La construcción de Conder, Lorimer y Praeger utiliza como grupos de partida G los grupos simétrico \mathcal{S}_n y alternado \mathcal{A}_n de grado n . La importancia de esta construcción reside en que algunos de los ejemplos obtenidos no son homeomorfos a ciclos. Sin embargo, los ejemplos de la primera construcción [71] son siempre ciclos generalizados. En el caso infinito, la mayor parte de los digrafos altamente transitivos construidos por Cameron, Praeger y Wormald en [18] son también homeomorfos al camino infinito \mathbb{Z} . Los autores se plantean entonces la cuestión de bajo qué condiciones de finitud local, existen digrafos infinitos altamente transitivos no homeomorfos a un camino infinito (véanse los detalles en [18]). Evans resuelve parcialmente esta cuestión en [30], donde construye digrafos altamente transitivos de grado finito de salida y e infinito de entrada, no homeomorfos a ciclos. En los mismos términos, Praeger en [71] demuestra que si un digrafo altamente transitivo tiene grados de entrada y salida finitos y diferentes, entonces el digrafo es homeomorfo al camino infinito \mathbb{Z} . El caso regular ha sido resuelto positivamente muy recientemente por Malnič, Marušič, Seifter y Zgrablić, con la construcción de digrafos infinitos regulares no homeomorfos al camino infinito \mathbb{Z} (véase [61]).

2.3 Arco-coloraciones o 1-factorizaciones

Definimos en esta sección el concepto de arco-coloración o 1-factorización de un digrafo. Se pueden encontrar estas definiciones en [39, 40].

Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo, no necesariamente simple. Una *arco-coloración* ϕ de Γ con conjunto finito de *colores* C , es un par (C, ϕ) donde ϕ es una aplicación de A en C .

Una arco-coloración de Γ es *propia* si dos arcos incidentes desde un mismo vértice v , así como dos arcos incidentes hacia un mismo vértice v , tienen asignados colores diferentes. Esto es, si la aplicación ϕ restringida a los arcos incidentes desde v , $\phi(v, \cdot) : \Gamma^+(v) \rightarrow C$, es inyectiva $\forall v \in V$, así como la restringida a los arcos incidentes hacia v , $\phi(\cdot, v) : \Gamma^-(v) \rightarrow C$, $\forall v \in V$.

Una arco-coloración de Γ es *perfecta* si es una arco-coloración propia tal que para cada par (v, α) , $v \in V$, $\alpha \in C$, existe un arco de Γ incidente desde v y arco-coloreado α . Esto es,

$\phi(v, \cdot) : \Gamma^+(v) \rightarrow C$ y $\phi(\cdot, v) : \Gamma^-(v) \rightarrow C$ son biyecciones $\forall v \in V$. Si un digrafo admite una arco-coloración perfecta con conjunto de colores C , entonces es un digrafo regular de grado $|C|$.

Por ejemplo, en la Figura 2.1 se muestra el digrafo completo K_4 con dos arco-coloraciones (C, ϕ_1) y (C, ϕ_2) , ambas con el mismo conjunto de colores, C . En el primer caso (F, ϕ_1) se trata de una arco-coloración perfecta de K_4 , y en el segundo (F, ϕ_2) de arco-coloración no propia de K_4 , pues a dos arcos incidentes hacia un mismo vértice $((1, 3)$ y $(2, 3))$ se les asigna el mismo color por ϕ_2 .

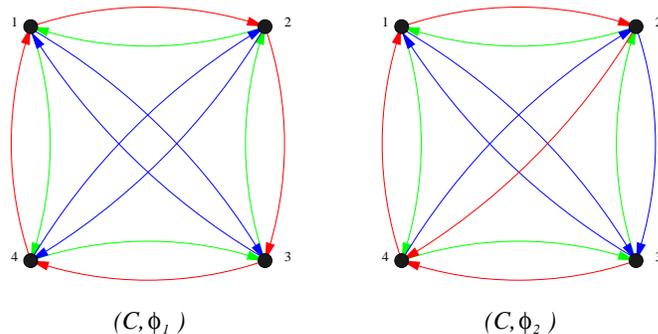


Figura 2.1: Dos arco-coloraciones de K_4

El siguiente es un resultado clásico dentro de la Teoría de Grafos, y es una consecuencia del también clásico Teorema de König-Hall:

Teorema 2.3.1 ([70]) *Todo digrafo r -regular admite como mínimo una arco-coloración perfecta (con r colores).*

De ahora en adelante, en esta memoria consideraremos únicamente digrafos conexos regulares y arco-coloraciones perfectas.

Una arco-coloración (perfecta) ϕ de Γ define un conjunto $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ de permutaciones en V de la siguiente manera:

$$u^{f_i} = v \Leftrightarrow (u, v) \in A \text{ y } \phi(u, v) = i \quad (2.1)$$

Recíprocamente, sea $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ un conjunto de r permutaciones en V que verifican:

- $v^{f_i} \in \Gamma^+(v)$, $i = 1, \dots, r$, $\forall v \in V$, y
- $v^{f_i} \neq v^{f_j}$ siempre que $i \neq j$, $\forall v \in V$

Entonces, F induce una arco-coloración (perfecta) de Γ definida por $\phi(u, v) = i$ si $u^{f_i} = v$. Entonces F se dice una *descomposición en permutaciones* de Γ .

En [76, Teorema 5.3] se demuestra que todo digrafo r -regular $\Gamma = (V, A)$ es la suma de digrafos de permutaciones $F = \{F_1, \dots, F_r\}$ que corresponden a un conjunto $\{f_1, \dots, f_r\}$ de permutaciones. Un conjunto F de estas características se dice que es una *1-factorización* de Γ . Es decir, una 1-factorización es un conjunto de subdigrafos generadores 1-regulares F_i de Γ cuyos conjuntos de arcos particionan A . Cada F_i es un *1-factor* de Γ . Un 1-factor F_i resulta una unión disjunta de ciclos dirigidos, e interpretamos f_i como la permutación correspondiente de V cuya descomposición en ciclos disjuntos es F_i , $1 \leq i \leq r$. Denotaremos igualmente por $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ el conjunto de estas particiones.

Las dos definiciones de arco-coloración perfecta o 1-factorización son equivalentes y en adelante se utilizarán indistintamente. A través de (2.1) identificaremos la arco-coloración (C, ϕ) con el conjunto de permutaciones $F = \{f_1, \dots, f_r\}$. Denotaremos un *digrafo arco-coloreado* Γ por un par (Γ, F) , que es el digrafo Γ junto con la 1-factorización F de Γ .

Dos digrafos arco-coloreados (Γ, F) y (Γ', F') son *isomorfos* si existe un isomorfismo de digrafos $\sigma : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma')$ y una biyección $\delta : F \rightarrow F'$ tal que $\sigma(u^{f_i}) = \sigma(u)^{\delta(f_i)}$ para $i = 1, \dots, r$ y $\forall u \in V(\Gamma)$. En este caso, también se dice que σ es un *isomorfismo arco-coloreado* entre (Γ, F) y (Γ', F') .

De manera similar, un automorfismo σ del digrafo $\Gamma = (V, A)$ se dice que es un *automorfismo arco-coloreado* o *automorfismo permutador de colores* de (Γ, F) si existe una permutación $\delta = \delta_\sigma$ en F tal que $\sigma(u^{f_i}) = \sigma(u)^{f_i^\delta}$ para $i = 1, \dots, r$ y $\forall u \in V$. Cuando δ es la identidad, σ se dice que es un *automorfismo preservador de colores*¹.

No es difícil demostrar que el conjunto de automorfismos arco-coloreados de (Γ, F) , que denotaremos por $\text{Aut}(\Gamma, F)$, constituye un grupo. Asimismo, el conjunto de automorfismos preservadores de colores constituye un subgrupo de $\text{Aut}(\Gamma, F)$, y lo denotaremos por $s - \text{Aut}(\Gamma, F)$.

Los grupos $\text{Aut}(\Gamma, F)$ y $s - \text{Aut}(\Gamma, F)$ se pueden caracterizar en términos de un tercer grupo de permutaciones en V , como veremos en la siguiente sección. El *grupo de permutaciones*² de (Γ, F) (o simplemente de F) es el subgrupo de $\text{Sym}(V)$ generado por el conjunto de permutaciones F y se denota por $G = G(\Gamma, F)$. Como suponemos que los digrafos son (fuertemente) conexos, G actúa transitivamente en V . Luego:

$$|V| \leq |G(\Gamma, F)| \quad (2.2)$$

Obviamente, los grupos de permutaciones de un mismo digrafo con 1-factorizaciones diferentes no son necesariamente isomorfos. En la Figura 2.2 mostramos el digrafo de De Bruijn $B(2, 3)$ con dos 1-factorizaciones que generan dos grupos de permutaciones no isomorfos, en este caso el grupo simétrico \mathcal{S}_8 y el proyectivo lineal $PGL_2(7)$.

Consideremos ahora σ un automorfismo de (Γ, F) permutador de colores. Entonces, existe una permutación $\delta = \delta_\sigma$ en F tal que $\sigma(u^{f_i}) = \sigma(u)^{f_i^\delta}$. La permutación δ_σ puede extenderse a un automorfismo (que denotaremos igualmente por δ_σ) del grupo G de la siguiente manera:

$$(f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_k})^{\delta_\sigma} = f_{i_1}^{\delta_\sigma} \cdots f_{i_k}^{\delta_\sigma} \quad (2.3)$$

La aplicación $\text{Aut}(\Gamma, F) \rightarrow \text{Aut} G$ definido por $\sigma \mapsto \delta_\sigma$ es un homomorfismo de grupos, luego su núcleo, $s - \text{Aut}(\Gamma, F)$, es un subgrupo normal de $\text{Aut}(\Gamma, F)$.

Además, no es difícil ver que $s - \text{Aut}(\Gamma, F)$ es un subgrupo que actúa semiregularmente en V . Como un automorfismo $\sigma \in s - \text{Aut}(\Gamma, F)$ de un digrafo conexo Γ diferente de la identidad no deja ningún vértice fijo, $s - \text{Aut}(\Gamma, F)$ actúa semiregularmente en V . Luego:

$$|s - \text{Aut}(\Gamma, F)| \leq |V| \quad (2.4)$$

Un resultado clásico en Teoría de Grafos en el caso no dirigido es el resultado de Frucht [42] de que todo grupo finito abstracto se puede representar como un grupo de automorfismos de un grafo finito. Desde entonces muchos resultados interesantes se han obtenido en esta línea imponiendo condiciones más restrictivas en los grupos y grafos bajo consideración. Una de

¹En la literatura recibe también los nombres de *automorfismo estrictamente arco-coloreado* o *automorfismo s -arco-coloreado*.

²Los grupos $\text{Aut}(\Gamma, F)$, $s - \text{Aut}(\Gamma, F)$ y $G(\Gamma, F)$ fueron introducidos originariamente por Biggs en [11] en el caso de grafos no dirigidos.

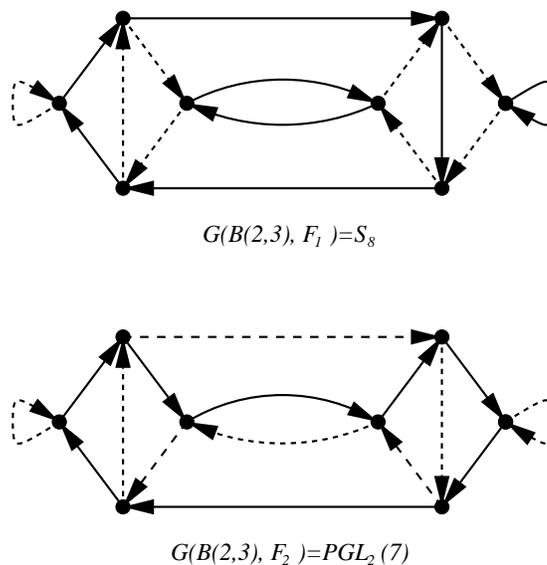


Figura 2.2: Dos grupos de permutaciones de $B(2, 3)$ arco-coloreado

estos resultados trata de la representación de grupos de permutaciones por grafos conexos arco-coloreados y su correspondiente grupo de automorfismos preservador de colores $s - \text{Aut}(\Gamma, F)$. En [7] Behrendt demuestra que todo grupo es isomorfo a $s - \text{Aut}(\Gamma, F)$ de algún grafo arco-coloreado (Γ, F) . En [4] Baumann caracteriza los grupos de permutaciones isomorfos permutacionalmente a $s - \text{Aut}(\Gamma, F)$ de algún grafo arco-coloreado (Γ, F) . En particular, se demuestra que la semiregularidad es una condición suficiente pero no necesaria.

El resultado análogo al de Frucht para digrafos también se verifica:

Proposición 2.3.1 ([15]) *Todo grupo finito es el grupo de automorfismos de un digrafo finito.*

2.3.1 1-factorizaciones de digrafos de Cayley y de Schreier

Desde el resultado de Frucht, los digrafos de Cayley arco-coloreados han jugado un papel fundamental en la construcción digrafos con un grupo de automorfismos predeterminado. Además, veremos a continuación que todo digrafo arco-coloreado (Γ, F) es isomorfo a una generalización de un digrafo de Cayley que es un digrafo de Schreier arco-coloreado.

Los digrafos de Cayley son los ejemplos más sencillos de digrafos arco-coloreados. Dado $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ un digrafo de Cayley de un grupo G . El conjunto de generadores $S = \{s_1, \dots, s_r\}$ define de manera natural una 1-factorización $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ en Γ , con $u^{f_i} = us_i, \forall u \in G, e i = 1, \dots, r$. El grupo de permutaciones $G(\Gamma, F)$ de la 1-factorización F es la representación por la izquierda por permutaciones de G , luego isomorfa al propio grupo G .

En este caso, la relación entre el grupo de permutaciones $G(\Gamma, F)$ y los grupos de simetría de (Γ, F) es la siguiente:

Teorema 2.3.2 (Fiol, Serra, [40]) *Sea (Γ, F) un digrafo de Cayley (fuertemente) conexo, con la coloración natural. Entonces,*

1. $G(\Gamma, F) \simeq G$
2. $s - \text{Aut}(\Gamma, F) \simeq G$

3. $\text{Aut}(\Gamma, F) \simeq G \rtimes_i H$, donde $H = \{\sigma \in \text{Aut } G : S^\sigma = S\}$ y ι es la inclusión natural de H en $\text{Aut } G$.

En particular, $s - \text{Aut}(\Gamma, F)$ es independiente del conjunto de generadores S que define el digrafo de Cayley. Frutch [42] utilizó justamente este resultado para demostrar que todo grupo finito es el grupo de automorfismos de algún grafo (no dirigido).

Luego los digrafos de Cayley tienen $G(\Gamma, F)$ con el mínimo cardinal posible (desigualdad 2.2) y $s - \text{Aut}(\Gamma, F)$ con el máximo (desigualdad 2.4). De hecho, un digrafo arco-coloreado es de Cayley si y sólo si verifica esta propiedad de darse las dos igualdades en las ecuaciones (2.2) y (2.4).

Sea ahora $H < G$ un subgrupo de un grupo G . El *digrafo de Schreier (por la derecha)* de G módulo H con respecto a un conjunto de generadores S , $\text{Sch}(G/H, S)$, tiene como conjunto de vértices $V = \{Hu : u \in G\}$ y como conjunto de arcos $A = \{(Hu, Hus) : u \in G, s \in S\}$. Suponemos siempre que los elementos de S pertenecen a diferentes clases laterales por la derecha de H en G , luego no existen arcos múltiples. En el caso en que H sea trivial $\text{Sch}(G/\{1\}, S) = \text{Cay}(G, S)$.

Al digrafo $\Gamma = \text{Sch}(G/H, S)$ se le asocia una 1-factorización $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ definida por $(Hu)^{f_i} = Hus_i, \forall u \in G, i = 1, \dots, r$.

Se demuestra también en [40] el siguiente teorema. Como en el caso de los digrafos de Cayley, $H = \{\sigma \in \text{Aut } G : S^\sigma = S\}$, y un elemento de H actúa en $G(\Gamma, F)$ como en la ecuación (2.3).

Teorema 2.3.3 (Fiol, Serra, [40]) *Sea (Γ, F) un digrafo de Schreier con la coloración natural. Entonces,*

1. $\Sigma = G(\Gamma, F) \simeq G/H_G$, donde $H_G = \bigcap_{u \in G} u^{-1}Hu$
2. $s - \text{Aut}(\Gamma, F) \simeq N_\Sigma(\Sigma_H)/\Sigma_H$
3. $\text{Aut}(\Gamma, F) \simeq B/\Sigma_S$, donde $B = \{(\gamma, \pi) \in \Sigma \rtimes_i H : \pi(\Sigma_S) = \gamma^{-1}\Sigma_S\gamma\}$.

La importancia de los digrafos de Schreier como ya anunciábamos al comienzo de la sección reside en el siguiente teorema:

Teorema 2.3.4 (Babai, [2]) *Sea (Γ, F) un digrafo regular fuertemente conexo con una 1-factorización F , y $u \in V(\Gamma)$ un vértice arbitrario. Entonces, (Γ, F) es isomorfo al digrafo de Schreier $\text{Sch}(G/G_u, F)$ con la 1-factorización natural.*

Por último, señalamos que resultados análogos a los de esta sección para el caso de grafos pueden encontrarse en [5].

2.3.2 1-factorizaciones inducidas en digrafos línea

En esta sección definiremos 1-factorizaciones de digrafo línea inducidas por 1-factorizaciones del digrafo original, y estudiaremos los grupos obtenidos.

Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo r -regular conexo, consideremos $\Gamma^* = L^k\Gamma$. Sea $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ una 1-factorización de Γ . Identificaremos los vértices de Γ^* , que corresponden a recorridos de longitud k en Γ , con los elementos de $V \times \underbrace{F \times \dots \times F}_k$ de la siguiente manera. Un recorrido de longitud k en Γ de la forma (u_0, u_1, \dots, u_k) se identifica con el elemento $(u_0, h_1, \dots, h_k) \in V \times F^k$

tal que $u_i^{h_{i+1}} = u_{i+1}$ para $i = 0, \dots, k-1$. Como F es una 1-factorización, la identificación anterior es una aplicación 1-1 bien definida entre los dos conjuntos. A través de esta identificación, el vértice (u_0, h_1, \dots, h_k) de Γ^* es adyacente hacia los vértices $(u_0^{h_1}, h_2, \dots, h_k, f_j)$, para $j = 1, \dots, r$.

Sea ahora $F_B = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ una 1-factorización arbitraria del digrafo de De Bruijn $B(r, k)$ (con conjunto de vértices F^k o a partir del alfabeto F). Definimos $F^* = \{f_1^*, \dots, f_r^*\}$ el conjunto de permutaciones en $V \times F^k$ definidas por:

$$(u_0, h_1, \dots, h_k)^{f_i^*} = (u_0^{h_1}, (h_1, \dots, h_k)^{\beta_i})$$

para $(u_0, h_1, \dots, h_k) \in V \times F^k$.

Se demuestra en [39] que F^* es una 1-factorización de Γ^* y se dice que F^* es la 1-factorización inducida por F y F_B .

Además, sean $G = G(\Gamma, F)$, $G_B = G(B(r, k), F_B)$ y $G^* = G(\Gamma^*, F^*)$ los respectivos grupos de permutaciones de las 1-factorizaciones F , F_B y F^* . Se puede caracterizar $G^* = G(\Gamma^*, F^*)$ en términos de $G = G(\Gamma, F)$ y $G_B = G(B(r, k), F_B)$. Consideremos el producto corona $G \wr G_B$, cuyos elementos son $(r^k + 1)$ -tuplas que representamos como $(\lambda_a, a \in F^k; \beta)$ donde $\lambda_a \in G$ para todo subíndice $a \in F^k$, y donde $\beta \in G_B$. El producto corona $G \wr G_B$ actúa en el conjunto de vértices $V \times F^k$ del digrafo k -línea iterado de la siguiente manera. Para cada $(\lambda_a, a \in F^k; \beta) \in G \wr G_B$ y para cada $(u_0, h_1, \dots, h_k) \in V \times F^k$, se define un elemento de $V \times F^k$ como sigue:

$$(u_0, h_1, \dots, h_k)^{(\lambda_a, a \in F^k; \beta)} = (u_0^{\lambda_{(h_1, \dots, h_k)}}, (h_1, \dots, h_k)^\beta)$$

De acuerdo con esta acción, la ley de composición de $G \wr G_B$ es la siguiente:

$$(\lambda'_a, a \in F^k; \beta') * (\lambda_a, a \in F^k; \beta) = (\lambda'_{\alpha\beta} \lambda_a, a \in F^k; \beta' \beta)$$

(Véase el Apéndice de Grupos de permutaciones para más detalles).

Fiol y Serra demuestran entonces:

Teorema 2.3.5 ([39]) $G^* = G(\Gamma^*, F^*)$ es isomorfo al subgrupo del producto corona $G \wr G_B$ generado por $\{(\gamma_a, a \in F^k; \beta_i) : i = 1, \dots, r\}$, donde para cada $a = (a_1, \dots, a_k) \in F^k$ se define $\gamma_a = a_1$.

1-factorizaciones lineales de los digrafos de De Bruijn

En esta memoria consideraremos 1-factorizaciones inducidas en digrafos línea por 1-factorizaciones arbitrarias del digrafo original y 1-factorizaciones lineales de los digrafos de De Bruijn.

Sea (F_0, \cdot) un grupo abeliano de orden $|F|$, y sea $\phi : F \rightarrow F_0$ una biyección. Denotamos por \oplus la operación binaria inducida en F , i.e. $f_1 \oplus f_2 = \phi^{-1}(\phi(f_1) \cdot \phi(f_2))$. Entonces (F, \oplus) es un grupo. Para cada homomorfismo de grupos $\mu : (F, \oplus)^{k-1} \rightarrow (F, \oplus)$, la aplicación $\pi_\mu : (F, \oplus)^k \rightarrow (F, \oplus)^k$ definida por:

$$\pi_\mu(h_1, \dots, h_k) = (h_2, \dots, h_k, \mu(h_2, \dots, h_k) \oplus h_1)$$

es un automorfismo del grupo $(F, \oplus)^k$.

Para $j = 1, \dots, r$, definimos $\beta_j : F^k \rightarrow F^k$ como sigue:

$$(h_1, \dots, h_k)^{\beta_j} = (h_2, \dots, h_k, \mu(h_2, \dots, h_k) \oplus h_1 \oplus f_j). \quad (2.5)$$

Entonces, el conjunto $F_B = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ es una 1-factorización de $B(r, k)$. Nótese que β_j es una permutación en F^k en la que cada vértice de $B(r, k)$ es enviado a un vértice hacia el que

es adyacente. Más aún, las imágenes de un vértice por β_i y por β_j para $i \neq j$, son dos vértices diferentes. Decimos que F_B es la 1-factorización lineal de $B(r, k)$ inducida por (F, \oplus) y μ .

El grupo de permutaciones de las 1-factorizaciones lineales de $B(r, k)$ ha sido calculado anteriormente:

Proposición 2.3.2 ([39]) *Sea $(B(r, k), F_B)$, donde F_B es una 1-factorización lineal de $B(r, k)$ inducida por (F, \oplus) y μ . Sea m el orden de π_μ en $\text{Aut}(F, \oplus)^k$.*

Entonces, $G_B = G(B(r, k), F_B)$ es isomorfo al producto semidirecto $(F, \oplus)^k \rtimes_\phi \mathbb{Z}_m$ con $\phi(i) = \pi_\mu^i \in \text{Aut}(F, \oplus)^k$.

Notemos que no todas las 1-factorizaciones de los digrafos de De Bruijn son 1-factorizaciones lineales. Por ejemplo, consideremos los digrafos de De Bruijn de grado 2, $B(2, k)$. En el caso $k = 1$, el digrafo $B(2, 1) = K_2^+$ admite únicamente una 1-factorización F de K_2^+ (salvo permutaciones de los colores). Recordemos además que sólo existe un grupo de orden 2 que es \mathbb{Z}_2 . Denotemos por 0 el elemento identidad de \mathbb{Z}_2 .

En el caso de $k = 2$, una 1-factorización lineal de $B(2, 2) = \text{LK}_2^+$ viene inducida por una 1-factorización de K_2^+ (que es única) y por un homomorfismo de grupos $\mu : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Sólo hay dos homomorfismos de grupos posibles, $\mu \equiv 0$ (cuando $\mu(x) = 0$ para $x \in \mathbb{Z}_2$), y $\mu = \text{Id}$ (cuando $\mu(x) = x$ para $x \in \mathbb{Z}_2$), luego $B(2, 2)$ admite únicamente dos 1-factorizaciones lineales (salvo permutaciones de colores). Véanse en la Figura siguiente 2.3 las dos 1-factorizaciones lineales de $B(2, 2)$.

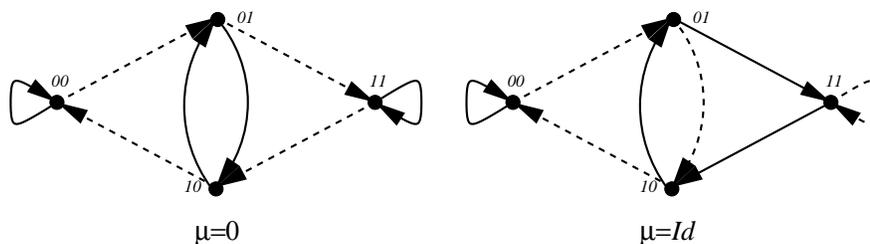


Figura 2.3: 1-factorizaciones lineales de $B(2, 2)$

No es difícil comprobar que son las únicas 1-factorizaciones posibles de $B(2, 2)$.

No sucede lo mismo en el caso $k = 3$. Una 1-factorización lineal de $B(2, 3) = \text{L}^2 K_2^+$ viene inducida por una 1-factorización de K_2^+ y por un homomorfismo de grupos $\mu : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Sólo hay cuatro homomorfismos de grupos posibles:

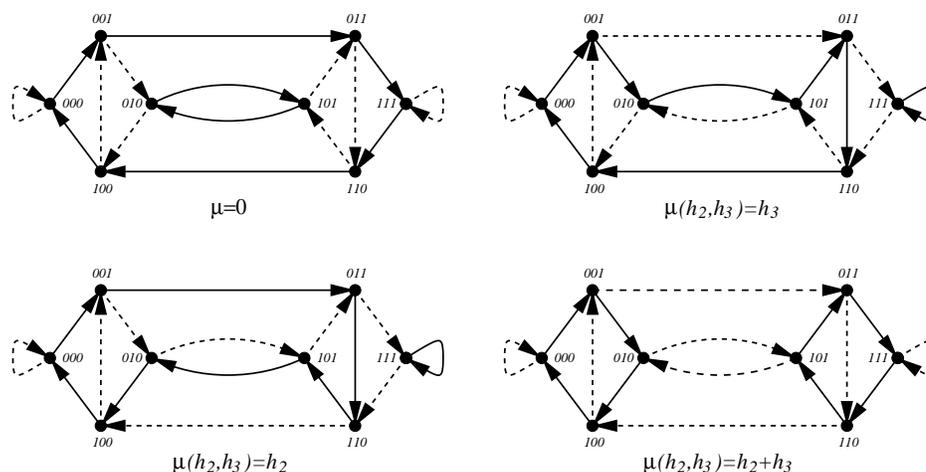
$$\mu \equiv 0, \quad \mu(h_2, h_3) = h_2, \quad \mu(h_2, h_3) = h_3, \quad \mu(h_2, h_3) = h_2 + h_3,$$

luego $B(2, 3)$ admite cuatro 1-factorizaciones lineales (salvo permutaciones de colores). Véanse en la Figura siguiente 2.4 las 1-factorizaciones lineales de $B(2, 3)$.

No es difícil comprobar que $B(2, 3)$ admite ocho 1-factorizaciones diferentes (en la sección 4.2.3 puede verse una demostración de este hecho). Por lo tanto, existen cuatro 1-factorizaciones de $B(2, 3)$ no lineales. En la Figura 2.2 se mostraban dos de estas 1-factorizaciones de $B(2, 3)$ no lineales.

1-factorizaciones normales de los digrafos de De Bruijn

Consideremos ahora $f_1 \in (F, \oplus)$ el elemento neutro de (F, \oplus) . En el caso de que el homomorfismo μ sea el homomorfismo nulo, $\mu \equiv f_1$, hablaremos de 1-factorizaciones (lineales) *normales* de $B(r, k)$.

Figura 2.4: 1-factorizaciones lineales de $B(2,3)$

El grupo de permutaciones de una 1-factorización normal es isomorfo $(F, \oplus)^k \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}_k$, donde $\phi(i)$ el shift cíclico de i posiciones en $(F, \oplus)^k$ (Proposición 2.3.2).

Sea el caso $k = 1$, entonces $B(r, 1) = K_r^+$. Sea (F, \oplus) un grupo de cardinal r y $f_1 \in (F, \oplus)$ su elemento neutro. Consideramos K_r^+ con conjunto de vértices $V = F$. Una 1-factorización normal de K_r^+ inducida por (F, \oplus) verifica que todos los bucles reciben el mismo color f_1 y un arco de la forma (f_1, f_i) recibe el color f_i para $i = 1, \dots, r$.

En [37] se caracterizan digrafos de Cayley arco-coloreados cuyos digrafo línea son también digrafos de Cayley. Para el caso de las 1-factorizaciones normales la caracterización es la siguiente:

Teorema 2.3.6 ([37, 14]) *Sea (Γ, F) un digrafo r -regular con una 1-factorización F . Sea F_B una 1-factorización normal de K_r^+ .*

Entonces, $(L\Gamma, F^)$ es un digrafo de Cayley con la 1-factorización F^* inducida por F y F_B si y sólo si (Γ, F) es un digrafo de Cayley con la 1-factorización natural y F es un grupo de automorfismos de $G(\Gamma, F)$.*

2.4 Recubrimientos de digrafos

Dados digrafos $\Gamma_1 = (V_1, A_1)$ y $\Gamma_2 = (V_2, A_2)$, se dice que Γ_1 es un *recubrimiento* de Γ_2 con *proyección recubridora* σ , si σ es un epimorfismo de digrafos de Γ_1 en Γ_2 , y existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $|\sigma^{-1}(u)| = h$, $\forall u \in V_2$, y σ es un isomorfismo local, i.e. para cada $v \in V_1$ los conjuntos $\Gamma_1^+(v)$ y $\Gamma_2^+(\sigma(v))$ tienen el mismo cardinal. Lo denotaremos entonces por $\Gamma_1 \twoheadrightarrow \Gamma_2$, o por $\Gamma_1 \xrightarrow{\sigma} \Gamma_2$ si la referencia a σ ha de hacerse explícita.

Esto es, Γ_1 es un recubrimiento³ de Γ_2 con proyección recubridora σ , si existe $h \in \mathbb{N}$ tal que σ es un $h - 1$ epimorfismo de Γ_1 en Γ_2 y σ es un isomorfismo local.

Cuando $\Gamma_1 \xrightarrow{\sigma} \Gamma_2$, el conjunto $\sigma^{-1}(u)$ de un vértice $u \in V_2$ recibe el nombre de *fibra* sobre el vértice u .

Las siguientes proposiciones nos proporcionan ejemplos sencillos y útiles de recubrimientos de digrafos:

³En la literatura se dice también que Γ_1 es un h -fold cover de Γ_2 .

Proposición 2.4.1 *Sea Γ un digrafo regular. Entonces $L^k\Gamma$ es un recubrimiento de Γ .*

Demostración. Definimos la aplicación $\sigma_k : V(L^k\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$ como $\sigma_k(u_0, \dots, u_k) = u_k$. Es inmediato comprobar que σ_k es una proyección recubridora de $L^k\Gamma$ en Γ . ■

Si $k = 1$, $\sigma_1 : V(L\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$ es simplemente $\sigma_1(u, v) = v$. Diremos que σ_1 la *proyección recubridora estándar* de $L\Gamma$ en Γ .

Proposición 2.4.2 ([2]) *Sean G un grupo finito y $H < G$ un subgrupo. Sea $|G : H| = h$. Sea S un conjunto de generadores de G , donde no hay dos elementos de S que pertenezcan a la misma clase lateral por la derecha de H en G .*

Entonces $\text{Cay}(G, S)$ es un recubrimiento de digrafo de Schreier $\text{Sch}(G/H, S)$.

Demostración. La aplicación natural $\sigma : u \mapsto Hu$ es una proyección recubridora $h - 1$. ■

Un resultado clásico de teoría espectral que relaciona los recubrimientos de digrafos con sus respectivos espectros es el siguiente:

Proposición 2.4.3 ([2]) *Sea Γ_1 un recubrimiento de Γ_2 , entonces los polinomios mínimo y característico de Γ_2 dividen a los respectivos polinomios mínimo y característico de Γ_1 . En particular, el espectro de Γ_2 está contenido en el espectro de Γ_1 .*

Babai en [2, Teorema 1.3.] mejora el siguiente remarcable resultado de Godsil [45, Teorema 3.1.]:

Teorema 2.4.1 ([45]) *El polinomio mínimo de cualquier matriz de enteros divide el polinomio mínimo de algún digrafo de Cayley.*

La clave de Babai consiste en construir recubrimientos de Cayley arco transitivos de cualquier (multi)digrafo:

Teorema 2.4.2 ([2]) *Todo (multi)digrafo finito regular admite un recubrimiento de Cayley finito arco transitivo.*

Aplicando la Proposición 2.4.3, Babai demuestra que el polinomio mínimo de cualquier matriz de enteros divide el polinomio mínimo de algún digrafo de Cayley arco transitivo. Además, esto responde negativamente al problema planteado por Cameron [15, Problema 9.1] sobre la existencia de digrafos arco transitivos con matrices de adyacencia no diagonalizables sobre los reales.

Babai se pregunta entonces [2, Problema 1.4.] por la construcción de recubrimientos de Cayley 2-arco transitivos de cualquier digrafo. En nuestra tesis, resolveremos este problema hasta entonces abierto con la construcción de recubrimientos de Cayley k -arco transitivos de cualquier digrafo para todo $k \in \mathbb{N}$.

2.4.1 Recubrimientos de Cayley de digrafos arco-coloreados

Los *recubrimientos de Cayley* de digrafos, tal y como los definiremos a continuación, fueron introducidos originariamente por Babai en [2] para construir un recubrimiento arco transitivo de cada digrafo regular.

Dado Γ un digrafo regular y F una 1-factorización de Γ . Sea $G = G(\Gamma, F)$ el grupo de permutaciones de F . Se define el *recubrimiento de Cayley* de (Γ, F) como $\text{Cay}(G, F)$ y lo denotamos por $\overline{\Gamma}_F$ (o simplemente por $\overline{\Gamma}$ si la referencia a F es clara por el contexto). La siguiente proposición justifica la terminología. Tanto el enunciado como la demostración son una versión de los que se encuentran en [2, Proposiciones 2.1,2.2].

Proposición 2.4.4 *Sea F una 1-factorización de un digrafo $\Gamma = (V, A)$ regular (fuertemente) conexo. Entonces, $\overline{\Gamma}_F$ es un recubrimiento de Γ .*

Demostración. Sea $u \in V$. Sea $G = G(\Gamma, F)$ y $\pi : G \rightarrow V$ una aplicación definida por $\pi(g) = u^g$. Como un arco (g, gf) de $\overline{\Gamma}_F$ tiene como imagen el arco $(u^g, (u^g)^f)$ para cada $g \in G$ y $f \in F$, entonces π es un homomorfismo de digrafos de $\overline{\Gamma}_F$ en Γ . Como Γ es conexo, G actúa transitivamente en V . Luego π es un epimorfismo. Ambos digrafos son r -regulares con $r = |F|$ y $|\pi(gF)| = |u^{gF}| = |F|$ para $g \in G$. Luego π es un isomorfismo local. Finalmente, $|\pi^{-1}(v)| = |G_u|$ para $v \in V$, donde G_u es el estabilizador de u en G . ■

Por ejemplo, en la Figura 2.5 se muestra el digrafo de De Bruijn $B(2, 3)$ con una 1-factorización F tal que el grupo de permutaciones de F es isomorfo a $\mathcal{A}_4 \times \mathbb{Z}_2$. También se muestra en la Figura 2.5 el correspondiente recubrimiento de Cayley $\overline{B(2, 3)}_F$ de $B(2, 3)$ con esta 1-factorización F .

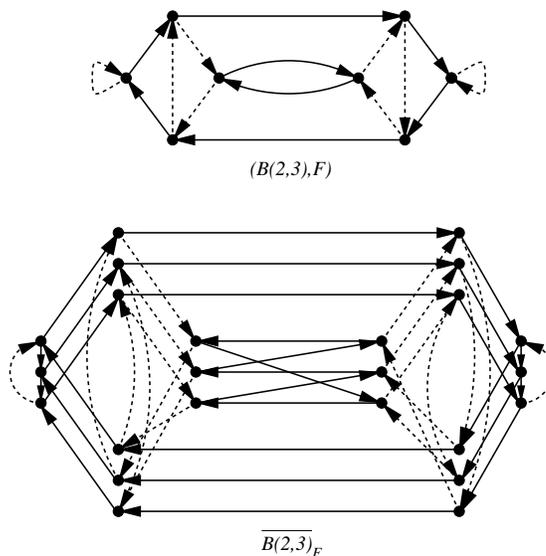


Figura 2.5: $(B(2, 3), F)$ y $\overline{B(2, 3)}_F$

Como todo digrafo regular admite al menos una 1-factorización (Teorema 2.3.1), entonces todo digrafo regular tiene un recubrimiento de Cayley (luego un recubrimiento vértice transitivo).

Los recubrimientos de Cayley de digrafos son interesantes como modelos de redes de interconexión simétricas y también como modelos de *redes de permutaciones*. Una *red de permutaciones* se modela por un digrafo en el cual, en cada unidad de tiempo, los paquetes de cada nodo se envían a uno de los nodos adyacentes, de manera que no tiene lugar ningún conflicto, esto sería, que dos paquetes fueran transferidos a un mismo nodo. Así, el protocolo de red consiste

en el conocimiento de todas las permutaciones posibles y de un algoritmo para producir cada una de ellas en el mínimo cardinal de unidades de tiempo posible. Las 1-factorizaciones que nosotros utilizamos como herramienta principal de recubrimiento de un digrafo, nos devienen entonces útiles para modelar una red de este tipo. Dado un digrafo con 1-factorización (Γ, F) , todo elemento del grupo de permutaciones de $G(\Gamma, F)$ se corresponde con una permutación del conjunto de vértices de Γ que se puede llevar a cabo en una secuencia de permutaciones en F , esto es, usando los arcos del digrafo sin conflicto. Además, un encaminamiento de trayectoria mínima en el recubridor de Cayley $\overline{\Gamma}_F$ del digrafo Γ se traduce en un algoritmo para generar cada una de las permutaciones de $G(\Gamma, F)$, y el diámetro del recubridor $\overline{\Gamma}_F$ es una cota superior del tiempo necesario para generar una permutación. (Véase a este respecto [29] donde se estudian los recubrimientos de Cayley de digrafos de De Bruijn como modelos de redes de permutaciones).

2.4.2 Equialcanzabilidad

Los resultados de esta sección fueron presentados en las *I Jornades de Matemàtica Discreta i Algorísmica* y se encuentran en los proceedings correspondientes [65].

Proposición 2.4.5 *Sea Γ_1 un recubrimiento de un digrafo conexo Γ . Si Γ un m -ciclo generalizado para $m \geq 2$, entonces $\Gamma_1 = (V_1, A_1)$ es también un m -ciclo generalizado.*

Demostración. Si $\Gamma = (V, A)$ es un m -ciclo generalizado entonces existe un homomorfismo de digrafos $\sigma : V \rightarrow \mathbb{Z}_m$ (véase la Proposición 1.2.1).

Sea $\sigma_1 : V_1 \rightarrow V$ la proyección recubridora de Γ_1 en Γ . Entonces, $\sigma\sigma_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{Z}_m$ es un homomorfismo de digrafos, luego Γ_1 es un m -ciclo generalizado. ■

Dado Γ un digrafo r -regular conexo, consideremos ahora $\Gamma^* = L^k\Gamma$. Sean $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ una 1-factorización de Γ , $F_B = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ una 1-factorización de $B(r, k)$ y F^* la 1-factorización de Γ^* inducida por F y F_B . Entonces, se verifican los siguientes resultados:

Proposición 2.4.6 *$\overline{\Gamma^*}_{F^*}$ es un recubrimiento de $\overline{B(r, k)}_{F_B}$.*

Demostración. Por definición $\overline{\Gamma^*}_{F^*} = \text{Cay}(G^*, F^*)$. Por la Proposición 2.3.5 G^* está generado por $\{(\gamma_a, a \in F^k; \beta_i) : i = 1, \dots, r\}$ en $G \wr G_B$, donde γ_a para $a = (a_1, \dots, a_k) \in F^k$ viene definida por $\gamma_a = a_1$.

Entonces, la aplicación natural $\sigma : (\gamma; \beta) \mapsto \beta$ es una proyección recubridora de $\overline{\Gamma^*}_{F^*}$ en $\overline{B(r, k)}_{F_B}$. ■

Proposición 2.4.7 *Sea F_B una 1-factorización lineal de $B(r, k)$ inducida por un grupo abeliano (F, \oplus) de orden r y un homomorfismo de grupos $\mu : (F, \oplus)^{k-1} \rightarrow (F, \oplus)$.*

Entonces, $\overline{B(r, k)}_{F_B}$ es un ciclo generalizado para $k \geq 2$.

Demostración. Por la Proposición 2.3.2 $G_B \simeq (F, \oplus)^k \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}_m$, donde

$$\pi_{\mu}(h_1, \dots, h_k) = (h_2, \dots, h_k, \mu(h_2, \dots, h_k) \oplus h_1)$$

$\phi(i) = \pi_{\mu}^i \in \text{Aut}(F, \oplus)^k$, y m es el orden de $\pi_{\mu} \in \text{Aut}(F, \oplus)^k$

Entonces, la aplicación $\sigma : (\gamma; i) \mapsto i$ para $\gamma \in (F, \oplus)^k$ e $i \in \mathbb{Z}_m$, es un homomorfismo de digrafos de $\overline{B(r, k)}_{F_B}$ en C_m , luego $\overline{B(r, k)}_{F_B}$ es un m -ciclo generalizado (por la caracterización

de ciclos generalizados de la Proposición 1.2.1). Si $k \geq 2$, entonces $m > 1$ y $\overline{B(r, k)}_{F_B}$ es un ciclo generalizado. ■

Como corolario inmediato de las dos proposiciones se tiene:

Corolario 2.4.1 *Dados $\Gamma = (V, A)$ y $\Gamma^* = L^k \Gamma$, con $k \geq 2$. Sean F una 1-factorización de Γ , F_B una 1-factorización lineal de $B(r, k)$ y F^* la 1-factorización de Γ^* inducida por F y F_B . Entonces, $\overline{\Gamma^*}_{F^*}$ es un ciclo generalizado.*

Demostración. Se aplica la Proposición 2.4.5. ■

Capítulo 3

Técnica de construcción de recubrimientos k -arco transitivos

3.1 Introducción

En este capítulo presentamos una construcción de recubrimientos k -arco transitivos de un digrafo conexo regular arbitrario para cada entero positivo k . Como el digrafo de partida es arbitrario, la construcción nos proporciona al mismo tiempo una técnica de construcción de digrafos k -arco transitivos para cada grado y cada entero positivo k . Esta construcción fue introducida por primera vez en [63] y en este capítulo presentamos algunos de los resultados ligeramente mejorados.

La principal distinción entre nuestra técnica de construcción de digrafos k -arco transitivos y las que mencionábamos en el estado del arte sobre el tema (sección 2.2.1), es que las construcciones de digrafos k -arco transitivos conocidas hasta el momento se orientaban hacia la teoría de grupos, el digrafo k -arco transitivo era construido a partir de su grupo de automorfismos.

Nuestra técnica se basa en la observación elemental de que un digrafo Γ es k -arco transitivo si y sólo si su digrafo k -línea iterado es vértice transitivo. Recordemos que los k -arcos de Γ son vértices en $L^k\Gamma$ y que los grupo de automorfismos de un digrafo y de su digrafo línea son isomorfos (véase la sección 1.3.3).

Generalizando un resultado de Gross [47], Babai en [2] demuestra que todo digrafo regular es un digrafo de Schreier de un grupo finito (el digrafo cociente de un digrafo de Cayley $\text{Cay}(G, S)$ por un subgrupo H de G). Esto es, que todo digrafo regular admite un recubrimiento vértice transitivo.

Inspirándonos en este hecho, nuestra idea consiste en escoger recubrimientos vértice transitivos “apropiados” de un digrafo k -línea iterado, de manera que estos recubrimientos sean también digrafos k -línea iterados. Además, los digrafos k -arco transitivos de los que son k -línea iterados resultan ser también recubrimientos del digrafo de partida.

Los recubrimientos vértice transitivos “apropiados” de digrafos k -línea iterados que consideramos son los recubrimientos de Cayley del digrafo con 1-factorizaciones k -uniformes. En la sección 3.3 definiremos las 1-factorizaciones k -uniformes y probaremos que todo digrafo k -línea iterado regular admite 1-factorizaciones k -uniformes. A modo de presentación informal, diremos aquí que 1-factorizaciones k -uniformes de digrafos k -línea iterados son justamente aquellas 1-factorizaciones tales que el recubrimiento de Cayley del digrafo con esta 1-factorización es

también un digrafo k -línea iterado. Para entender la naturaleza de las 1-factorizaciones k -uniformes nos será muy útil la caracterización de digrafos de Cayley k -arco transitivos de la sección 3.2.

Nuestra construcción de recubrimientos k -arco transitivos de un digrafos arbitrario es, por lo tanto, una generalización de los resultados de Babai [2], que corresponden a los casos $k = 0, 1$ de nuestra construcción. De hecho, los mencionados resultados de Babai proporcionan una cadena infinita de recubrimientos arco transitivos del digrafo original. Con nuestra construcción podemos manufacturar también una cadena infinita de recubrimientos k -arco transitivos de un digrafo Γ en la que el recubrimiento i -ésimo de la cadena Γ_{k+i} es el recubrimiento $(k+i)$ -arco transitivo de Γ que nos proporciona nuestra construcción. Encontramos la dificultad técnica de que Γ_{k+i} no necesariamente es un recubrimiento Γ_{k+j} cuando $i > j$. Discutiremos esta dificultad y algunas otras en la sección 3.6 y presentaremos una construcción alternativa de cadena de recubrimientos k -arco transitivos de un digrafo arbitrario en la sección 3.6.1.

Esta construcción alternativa se basa en la construcción de elevaciones de un digrafo por asignaciones de voltaje (véase la definición en la la sección 3.6.1). El resultado clave es que la elevación de un digrafo k -arco transitivo por una asignación de voltaje apropiada es a su vez un digrafo k -arco transitivo que recubre el digrafo de partida. La construcción de una cadena infinita de recubrimientos k -arco transitivos mediante la construcción de elevaciones de digrafos es más práctica que la propuesta anteriormente, aunque no siendo una técnica de construcción de recubrimientos k -arco transitivos de digrafos arbitrarios, sino únicamente de digrafos k -arco transitivos, toma igualmente como primer elemento de la cadena el recubrimiento k -arco transitivo Γ_k de Γ obtenido mediante nuestra construcción.

3.2 Digrafos de Cayley k -línea iterados

Nos será muy útil a lo largo del capítulo la siguiente reformulación de la caracterización de Heuchenne (Teorema 1.3.2) para digrafos de Cayley línea iterados.

Teorema 3.2.1 *Sea $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ un digrafo de Cayley con $|S| = r$. Existe un (multi)digrafo r -regular Γ_0 (posiblemente con arcos múltiples) tal que $\Gamma = L^k \Gamma_0$ si y sólo si existe un subgrupo H_k de G tal que $H_k = xS^{-k}$ para algún $x \in S^k$ y $|H_k| = r^k$.*

Más aún, Γ_0 tiene arcos múltiples si y sólo si $H_k \cap S^{-1}S \neq \{1\}$.

Demostración. *Necesidad:* Supongamos en primer lugar que $\Gamma = L^k \Gamma_0$ para algún (multi)digrafo Γ_0 . Consideremos el conjunto xS^{-k} para $x \in S^k$. Para cada $y \in S^k$, se verifica:

$$1 \in xS^{-k} \cap yS^{-k} = \Gamma^{-k}(x) \cap \Gamma^{-k}(y)$$

Entonces, el Corolario 1.3.1 implica

$$H_k = xS^{-k} = yS^{-k} = S^k S^{-k} \text{ y } |H_k| = r^k \quad (3.1)$$

En particular, $H_k = xS^{-k}$ para cada $x \in S^k$, así como $H_k = S^k z$ para cada $z \in S^{-k}$. Luego, $H_k^2 = (S^k x^{-1})(xS^{-k}) = H_k$, y por tanto H_k es un subgrupo de G .

Suficiencia: Supongamos que xS^{-k} es un subgrupo H_k de orden $|S|^k$ para algún $x \in S^k$. Entonces $\{\Gamma^{-k}(g) : g \in G\}$ coincide con la partición de G en clases laterales por la izquierda de H_k en G

$$\Gamma^{-k}(g) = gS^{-k} = gx^{-1}xS^{-k} = gx^{-1}H_k$$

para $g \in G$ arbitrario. Por el Teorema 1.3.2 y las Observaciones 1.3.1, el digrafo Γ es un digrafo k -línea iterado.

En lo que se refiere a la última parte del enunciado, por el Teorema 1.3.2 y las Observaciones 1.3.1, Γ_0 tiene arcos múltiples si y sólo si $|\Gamma^{-k-1}(s^k)| = |H_k S^{-1}| < |S|^{k+1}$. Entonces, Γ_0 tiene arcos múltiples si y sólo si existen elementos $u, v \in S$, $u \neq v$, tales que $H_k u^{-1} = H_k v^{-1}$. Esto es,

$$1 \neq v^{-1}u, u^{-1}v \in H_k \cap S^{-1}S$$

■

Como consecuencia directa de aplicar el teorema anterior al digrafo inverso de Γ , Γ^{-1} , y de las Observaciones 1.3.1 se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 3.2.1 *Sea $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ un digrafo de Cayley con $|S| = r$. Existe un (multi)digrafo r -regular Γ_0 (posiblemente con arcos múltiples) tal que $\Gamma = L^k \Gamma_0$ si y sólo si existe un subgrupo K_k de G tal que $K_k = xS^k$ para algún $x \in S^{-k}$ y $|K_k| = r^k$.*

Más aún, Γ_0 tiene arcos múltiples si y sólo si $K_k \cap SS^{-1} \neq \{1\}$.

La siguiente proposición relaciona los grupos H_k y K_k de un digrafo de Cayley k -línea iterado:

Proposición 3.2.1 *Sea $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ un digrafo de Cayley k -línea iterado. Entonces los grupos H_k y K_k son grupos conjugados en G .*

Demostración. Sea $K_k = S^{-k}S^k$. Por 3.1 tenemos $H_k = s^k S^{-k} = S^k s^{-k}$ para todo $s \in S$. Entonces:

$$s^k K_k s^{-k} = s^k S^{-k} S^k s^{-k} = H_k H_k = H_k$$

■

En particular, si Γ es un digrafo de Cayley k -línea iterado tal que $\Gamma = L^k \Gamma_0$ para un (multi)digrafo Γ_0 , entonces $sH_k s^{-1} \supseteq sH_1 s^{-1} = K_1$. En consecuencia, si $H_k \cap sH_k s^{-1} = \{1\}$ para $s \in S$ arbitrario, entonces Γ_0 no tiene arcos múltiples.

En el capítulo 4 estudiaremos la estructura de los grupos H_k y K_k de digrafos de Cayley k -línea iterados de grado pequeño.

3.3 1-factorizaciones k -uniformes de digrafos k -línea iterados

Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo r -regular conexo k -línea iterado. Introduciremos a continuación una clase de 1-factorizaciones de Γ tales que los recubrimientos de Cayley resultantes sean a su vez digrafos k -línea iterados.

Para cada $u \in V$ y $i \in \{0, \dots, k\}$, definimos el conjunto $U_i(u) = \Gamma^{-k+i}(\Gamma^k(u))$. Por el Corolario 1.3.1, el cardinal de cada conjunto es $|U_i(u)| = r^k$.

Definimos el digrafo Γ_u^k como el digrafo con conjunto de vértices

$$V_u = \bigcup_{i=0}^k (U_i(u) \times \{i\})$$

y tal que existe un arco $((x, i), (y, j))$ de Γ_u^k si y sólo si $(x, y) \in A$ y $j = i + 1$. Obsérvese que por la caracterización de Heuchenne de digrafos k -línea iterados (Teorema 1.3.2), el digrafo Γ_u^k depende únicamente del orden k para el cual Γ es un digrafo k -línea iterado de algún digrafo Γ_0 ($\Gamma = L^k \Gamma_0$), y no depende del digrafo Γ_0 de partida. Véase en la Figura 3.1 el digrafo Γ_u^2 de un digrafo Γ que sea 3-regular 2-línea iterado, y donde $u \in V$.

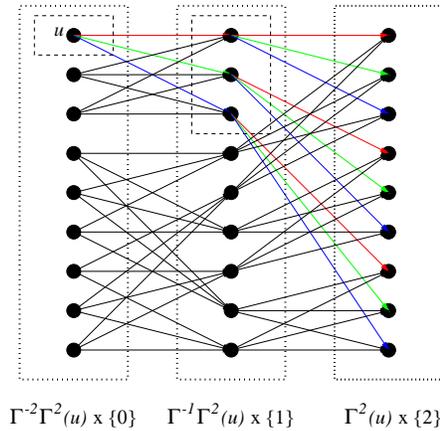


Figura 3.1: Digrafo Γ_u^2

Sea F una 1-factorización de un digrafo $\Gamma = (V, A)$ regular conexo k -línea iterado. Diremos que F es una 1-factorización k -uniforme de Γ si para cada par de vértices $u, v \in V$ existe un isomorfismo ϕ de Γ_u^k en Γ_v^k tal que $\phi(u, 0) = (v, 0)$ y ϕ preserva la 1-factorización dada por F , esto es, si $((z, i)(z^f, i + 1))$ es un arco de Γ_u^k y $\phi(z, i) = (w, i)$ entonces $\phi(z^f, i + 1) = (w^f, i + 1)$.

Lema 3.3.1 *Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo regular conexo k -línea iterado y F una 1-factorización de Γ . Entonces F es una 1-factorización k -uniforme de Γ si y sólo si para cada par de vértices $u, v \in V$ existe un isomorfismo ϕ de Γ_u^k en Γ_v^k tal que $\phi(u, 0) = (v, 0)$ y $\phi(u^f, i) = (v^f, i)$ para cada $f \in F^k F^{-k+i}$ y para cada $0 \leq i \leq k$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que F es una 1-factorización k -uniforme de Γ . En particular, $\phi(u^{f_1}, 1) = (v^{f_1}, 1)$ para cada $f_1 \in F$ y reiterando el proceso

$$\phi(u^{f_1 f_2 \dots f_k}, k) = (v^{f_1 f_2 \dots f_k}, k)$$

para $f_1, \dots, f_k \in F$ cualesquiera. Más aún, para cualquier $f \in F^k$ se verifica

$$\phi(u^{f f_1^{-1}}, k - 1) = (v^{f f_1^{-1}}, k - 1)$$

para $f_1 \in F$ arbitraria. Reiterando de nuevo tenemos $\phi(u^f, i) = (v^f, i)$ para todo $f \in F^k F^{-k+i}$.

Supongamos ahora que para cada par de vértices $u, v \in V$ existe un isomorfismo ϕ de Γ_u^k en Γ_v^k tal que $\phi(u, 0) = (v, 0)$ y $\phi(u^f, i) = (v^f, i)$ para cada $f \in F^k F^{-k+i}$. En particular se verifica

$$\phi(u^{f f_1}, i + 1) = (v^{f f_1}, i + 1)$$

para cualquier $f_1 \in F$ y $0 \leq i \leq k - 1$, con lo que F es una 1-factorización k -uniforme de Γ . ■

Teorema 3.3.1 Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo r -regular conexo k -línea iterado y F una 1-factorización de Γ . Entonces, $\overline{\Gamma}_F$ es un digrafo k -línea iterado si y sólo si F es una 1-factorización k -uniforme.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\overline{\Gamma}_F$ es un digrafo k -línea iterado. Sea $u \in V$, es suficiente probar que existe un isomorfismo Ψ_u de $(\overline{\Gamma}_F)_{Id}^k$ en Γ_u^k que preserve la 1-factorización dada por F . En efecto, en este caso, para cualquier par de vértices $u, v \in V$, la aplicación $\Psi_u \Psi_v^{-1}$ es un isomorfismo de Γ_v^k en Γ_u^k que preserve la 1-factorización dada por F .

Consideremos la aplicación

$$\Psi_u : V((\overline{\Gamma}_F)_{Id}^k) \longrightarrow V_u$$

definida por $\Psi_u(f, i) = (x^f, i)$. Sea $((f, i), (ff_i, i+1))$ un arco cualquiera en $(\overline{\Gamma}_F)_{Id}^k$, entonces $\Psi_u((f, i), (ff_i, i+1)) = ((x^f, i), (x^{ff_i}, i+1))$ es un arco de Γ_u^k , luego Ψ_u es un homomorfismo de digrafos. Más aún, Ψ_u es una aplicación exhaustiva y un isomorfismo local entre digrafos finitos del mismo orden. Entonces, Ψ_u es un isomorfismo de $(\overline{\Gamma}_F)_{Id}^k$ en Γ_u^k y claramente preserve la 1-factorización dada por F .

Por otra parte, supongamos que F es una 1-factorización k -uniforme de Γ . Veamos en primer lugar que $\Gamma_u^k \simeq (\overline{\Gamma}_F)_{Id}^k$ para $u \in V$ arbitraria.

Definimos la aplicación

$$\Theta_u : V_u \longrightarrow V((\overline{\Gamma}_F)_{Id}^k)$$

por $\Theta_u(u^f, i) = (f, i)$ para $f \in F^k F^{-k+i}$. Comprobemos que Θ_u está bien definida. Supongamos que existan $(u^f, i), (u^g, i) \in \Gamma_u^k$ tales que $(u^f, i) = (u^g, i)$, tenemos que probar entonces que $f = g$. Supongamos lo contrario $f \neq g$. Entonces existe $v \in V$ tal que $v^f \neq v^g$. Como por hipótesis F es una 1-factorización k -uniforme de Γ , por el Lema anterior 3.3.1 existe un isomorfismo ϕ de Γ_u^k en Γ_v^k tal que $\phi((x, 0)) = (y, 0)$ y $\phi(u^f, i) = (v^f, i)$ para $f \in F^k F^{-k+i}$ arbitrario. Pero entonces $\phi(u^f, i) = (v^f, i) \neq (v^g, i) = \phi(u^g, i)$ es una contradicción con $(u^f, i) = (u^g, i)$.

Claramente la aplicación Θ_u así definida es un homomorfismo de digrafos, inyectivo e exhaustivo, luego un isomorfismo de Γ_u^k en $(\overline{\Gamma}_F)_{Id}^k$.

En particular, $|(\overline{\Gamma}_F)^k(Id)| = |u^{F^k}| = r^k$ y $(\overline{\Gamma}_F)^k(Id) = (\overline{\Gamma}_F)^k(z)$ para todo $z \in F^k F^{-k}$. Como además $\overline{\Gamma}_F$ es vértice transitivo, la caracterización de Heuchenne de digrafos k -línea iterados (Teorema 1.3.2) implica que $\overline{\Gamma}_F$ es un digrafo k -línea y concluimos la demostración. ■

En el siguiente capítulo estudiaremos más detalladamente las 1-factorizaciones k -uniformes de digrafos de grado pequeño.

Veamos un primer ejemplo de 1-factorizaciones k -uniformes que son las 1-factorizaciones lineales de los digrafos de De Bruijn que definimos en la sección 2.3.2.

Tomamos $\Gamma = K_r^+ = LK_r^+$ el digrafo completo con bucles, que recordemos es un digrafo línea del digrafo con un único vértice y r bucles. Sea (F, \oplus) un grupo abeliano de orden r . Entonces el digrafo de Cayley $\text{Cay}(F, F)$ es isomorfo a K_r^+ y el conjunto de los elementos de $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ define una 1-factorización natural en Γ . El digrafo $(k-1)$ -línea iterado $L^{k-1}K_r^+$ de K_r^+ es el digrafo de De Bruijn $B(r, k)$. Escribimos los vértices de $B(r, k)$ como elementos de F^k , donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ es adyacente hacia los vértices de la forma (x_2, \dots, x_k, x) con $x \in F$. Dado $\mu : F^{k-1} \rightarrow F$ un homomorfismo de grupos, consideremos $F_B = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ la 1-factorización lineal de $B(r, k)$ inducida por F y μ . Esto es,

$$(x_1, \dots, x_k)^{\beta_i} = (x_2, \dots, x_k, \mu(x_2, \dots, x_k) \oplus x_1 \oplus f_i)$$

Afirmamos que F_B es una 1-factorización k -uniforme de $B(r, k)$, o lo que es equivalente por el Teorema 3.3.1, que $\overline{B(r, k)}_{F_B}$ es un digrafo k -línea iterado. Con estas notaciones,

Teorema 3.3.2 *Sea $F_B = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ una 1-factorización lineal del digrafo de De Bruijn $B(r, k) = L^k K_1^r$ inducida por (F, \oplus) y μ . Entonces, F_B es una 1-factorización k -uniforme de $B(r, k)$.*

Demostración. Sea $\Gamma = B(r, k) = (V, A)$. Necesitamos demostrar que, para cada par de vértices $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, existe un isomorfismo de digrafos $\phi_{\mathbf{x}\mathbf{y}} : V_{\mathbf{x}} \rightarrow V_{\mathbf{y}}$ que preserve los colores dados por F_B .

Para cada $0 \leq i \leq k$ y cada elemento $\mathbf{z} \in (\Gamma)^{-i}(\Gamma)^k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{(F_B)^k(F_B)^{-i}}$, existe una permutación $g \in (F_B)^k(F_B)^{-i}$ tal que $\mathbf{z} = \mathbf{x}^g$. Fijado i , afirmamos que esta permutación de $(F_B)^k(F_B)^{-i}$ es única.

Para $f \in F$, denotemos por $\ominus f$ el inverso del elemento f en (F, \oplus) . Con estas notaciones se verifica

$$(x_1, \dots, x_k)^{(\beta_i)^{-1}} = (x_k \ominus \mu(x_1, \dots, x_{k-1}) \ominus f_i, x_1, \dots, x_{k-1}).$$

Para i dado, una permutación $g \in (F_B)^k(F_B)^{-i}$ se escribe como

$$g = \left(\prod_{j=1}^k \beta_{u_j} \right) \left(\prod_{j=1}^i (\beta_{u_{k+j}})^{-1} \right),$$

para ciertos elementos $\beta_{u_1}, \dots, \beta_{u_{k+i}} \in F_B$ si $i \geq 1$, y como

$$g = \left(\prod_{j=1}^k \beta_{u_j} \right),$$

para ciertos elementos $\beta_{u_1}, \dots, \beta_{u_k} \in F_B$ si $i = 0$.

Denotemos

$$y_1 = \mu(x_2, \dots, x_k) \oplus x_1 \oplus f_{u_1}, \quad y_2 = \mu(x_3, \dots, x_k, y_1) \oplus x_2 \oplus f_{u_2}, \quad (3.2)$$

y definimos de manera recursiva

$$y_j = \mu(x_{j+1}, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{j-1}) \oplus x_j \oplus f_{u_j} \quad (3.3)$$

desde $3 \leq j \leq k$.

Entonces, si $i = 0$ tenemos $\mathbf{x}^g = (y_1, \dots, y_k)$.

Denotemos

$$y_{k+1} = y_k \ominus \mu(y_1, \dots, y_{k-1}) \ominus f_{u_{k+1}}, \quad (3.4)$$

y definimos de manera recursiva

$$y_{k+j} = y_{k+1-j} \ominus \mu(y_{k+j-1}, \dots, y_{k+1}, y_1, \dots, y_{k-j}) \ominus f_{u_{k+j}} \quad (3.5)$$

para $2 \leq j \leq i$.

Iterando el procedimiento anterior, si $1 \leq i \leq k$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^g &= (x_1, \dots, x_k)^g = (y_1, \dots, y_k) \left(\prod_{j=1}^i (g_{u_{k+j}})^{-1} \right) = \\ &= (y_{k+i}, \dots, y_{k+1}, y_1, \dots, y_{k-i}), \end{aligned}$$

Notemos que cada elemento y_j depende únicamente de \mathbf{x} y de los elementos y_l con $l < j$. En consecuencia, si $g' = (\prod_{j=1}^k \beta_{v_j})(\prod_{j=1}^i (\beta_{v_{k+j}})^{-1}) \in (F_B)^k (F_B)^{-i}$ satisface $\mathbf{x}^g = \mathbf{x}^{g'}$, entonces de (3.2) se deduce $v_1 = u_1$ y $v_2 = u_2$. De forma similar, de (3.3), (3.4) y (3.5) se deduce $v_j = u_j$ para $2 < j \leq k+i$, por lo que $g' = g$.

Definimos ahora

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{xy}} : V_{\mathbf{x}} &\rightarrow V_{\mathbf{y}} \\ (\mathbf{x}^g, i) &\mapsto (\mathbf{y}^g, i) \end{aligned}$$

cuando $g \in (F_B)^k (F_B)^{-k+i}$. Nótese que el conjunto $\{(\mathbf{x}^g, i) : i = 0, \dots, k, g \in (F_B)^k (F_B)^{-k+i}\}$ comprende todos los vértices de $V_{\mathbf{x}} = \cup_{i=0}^k (\mathbf{x}^{(F_B)^k (F_B)^{-k+i}} \times \{i\})$.

Como cada permutación g determina unívocamente un elemento de $\Gamma^{-k+i} \Gamma^k(\mathbf{x}) \times \{i\}$ para cada vértice $\mathbf{x} \in V$, la aplicación está bien definida. Además, como $\phi_{\mathbf{xy}}$ es inversible entonces es biyectiva.

Más aún, por definición, si $(\mathbf{x}^g, i) \in V_{\mathbf{x}} \setminus \{\Gamma^k(\mathbf{x}) \times \{k\}\}$ entonces

$$\phi_{\mathbf{xy}}(\mathbf{x}^{g\beta_j}, i+1) = (\mathbf{y}^{g\beta_j}, i+1) = \phi_{\mathbf{xy}}(\mathbf{x}^g, i)^{\beta_j}$$

para cada $\beta_j \in F_B$, y por lo tanto $\phi_{\mathbf{xy}}$ preserva los colores dados por F_B . Esto concluye la demostración. ■

3.4 Construcción de recubrimientos k -arco transitivos

La idea de la técnica de construcción de recubrimientos k -arco transitivos se basa en la sencilla observación de que un digrafo Γ es k -arco transitivo si y sólo si su digrafo k -línea iterado es vértice transitivo (véase la sección 2.2). Generalizando un resultado de Gross [47], Babai [2] demuestra que todo digrafo regular es un digrafo de Schreier de un grupo finito (véase la sección 2.3.1). Con otras palabras, que todo digrafo regular admite un recubrimiento vértice transitivo. Nuestra idea clave consiste en escoger recubrimientos vértice transitivos apropiados de un digrafo k -línea iterado, de manera que estos recubrimientos sean también digrafos k -línea iterados. Además, los digrafos k -arco transitivos de los que son k -línea iterados resultan ser también recubrimientos del digrafo de partida.

El resultado principal de esta sección puede enunciarse de la siguiente manera.

Teorema 3.4.1 *Sea Γ un digrafo regular. Para cada entero positivo k existe un recubrimiento Γ_k de Γ que es un digrafo k -arco transitivo.*

El enunciado anterior es una generalización de los resultados de Babai [2], que corresponden a los casos $k = 0, 1$ del Teorema 3.4.1.

La demostración del Teorema 3.4.1 se basa en dos resultados técnicos que presentamos a continuación.

Teorema 3.4.2 *Sea Γ un digrafo r -regular (fuertemente) conexo y F una 1-factorización de Γ . Sea (F_0, \cdot) un grupo de orden r , y $\Phi : F \rightarrow F_0$ una biyección. Consideremos \oplus la operación binaria inducida en F a través de Φ tal que (F, \oplus) es un grupo. Sea $F_B = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ una 1-factorización del digrafo de De Bruijn $B(r, k)$ con conjunto de vértices las palabras de longitud k a partir del alfabeto F .*

Entonces, la 1-factorización $F^* = \{f_1^*, \dots, f_r^*\}$ de $\Gamma^* = L^k \Gamma$ inducida por F y F_B es una 1-factorización k -uniforme de Γ^* si y sólo si F_B es una 1-factorización k -uniforme de $B(r, k)$.

Demostración. Denotemos $V^* = V(\Gamma^*)$ y escribamos los vértices $\mathbf{x} \in V^*$ como elementos de $V(\Gamma) \times F^k$, i.e. $\mathbf{x} = (x, x_1, \dots, x_k) \in V(\Gamma) \times F^k$ para $x \in V(\Gamma)$ y $x_j \in F$ para todo $1 \leq j \leq k$.

Para $f \in F$, denotemos por $\ominus f$ el elemento inverso del elemento f en (F, \oplus) .

Recordemos que

$$(x, x_1, \dots, x_k)^{f_i^*} = (x^{x_1}, (x_1, \dots, x_k)^{\beta_i})$$

para cada $1 \leq i \leq r$.

Con estas notaciones se verifica,

$$(x, x_1, \dots, x_k)^{f_i^{*-1}} = (x^{\ominus y_1}, y_1, \dots, y_k)$$

donde $(y_1, \dots, y_k) = (x_1, \dots, x_k)^{\beta_i^{-1}}$.

Dado $\mathbf{x} = (x, x_1, \dots, x_k) \in V^*$, definimos la aplicación $\pi_{\mathbf{x}} : (V^*)_{\mathbf{x}} \rightarrow V(B(r, k))_{(x_1, \dots, x_k)}$ como $\pi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^g, i) = ((y_1, \dots, y_k), i)$ cuando $g \in (F^*)^k (F^*)^{-k+i}$ y $\mathbf{x}^g = (y, y_1, \dots, y_k) \in V(\Gamma) \times F^k$. Nótese que el conjunto $\{(\mathbf{x}^g, i) : i = 0, \dots, k, g \in (F^*)^k (F^*)^{-k+i}\}$ comprende todos los vértices de $(V^*)_{\mathbf{x}} = \cup_{i=0}^k (\mathbf{x}^{(F^*)^k (F^*)^{-k+i}} \times \{i\})$.

Afirmamos que la aplicación $\pi_{\mathbf{x}}$ es un isomorfismo de $((\Gamma^*)_{\mathbf{x}}^k, F^*)$ en $((B(r, k))_{(x_1, \dots, x_k)}^k, F_B)$. Veamos en primer lugar que la aplicación $\pi_{\mathbf{x}}$ está bien definida. Tenemos $\pi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, 0) = ((x_1, \dots, x_k), 0)$ y, más aún, $\pi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{f_i^*}, 1) = ((x_1, \dots, x_r)^{\beta_i}, 1)$ para todo $1 \leq i \leq r$.

En general, una permutación $g \in (F^*)^k (F^*)^{-k+i}$ se escribe como

$$g = \left(\prod_{j=1}^k f_{u_j}^* \right) \left(\prod_{j=1}^{k-i} (f_{u_{k+j}}^*)^{-1} \right),$$

para ciertos elementos $f_{u_1}^*, \dots, f_{u_{2k-i}}^* \in F^*$ si $0 \leq i < k$, y como

$$g = \left(\prod_{j=1}^k f_{u_j}^* \right),$$

para ciertos elementos $f_{u_1}^*, \dots, f_{u_k}^* \in F^*$ si $i = k$.

Luego,

$$\pi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^g, i) = ((x_1, \dots, x_k)^{(\prod_{j=1}^k \beta_{u_j}) (\prod_{j=1}^{k-i} \beta_{u_{k+j}})^{-1}}, i)$$

si $0 \leq i < k$, y

$$\pi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^g, k) = ((x_1, \dots, x_k)^{\prod_{j=1}^k \beta_{u_j}}, k).$$

En particular, la aplicación $\pi_{\mathbf{x}}$ no sólo está bien definida sino que es una biyección pues $(\Gamma^*)_{\mathbf{x}}^k$ y $(B(r, k))_{(x_1, \dots, x_k)}^k$ son digrafos del mismo orden. Además, $\pi_{\mathbf{x}}$ es un homomorfismo de $((\Gamma^*)_{\mathbf{x}}^k, F^*)$ en $((B(r, k))_{(x_1, \dots, x_k)}^k, F_B)$, luego un isomorfismo.

Entonces, si la 1-factorización F^* es una 1-factorización k -uniforme de Γ^* , para todo par de vértices $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V^*$ existe un isomorfismo de digrafos $\phi_{\mathbf{xy}} : (V^*)_{\mathbf{x}} \rightarrow (V^*)_{\mathbf{y}}$ que preserve los colores dados por F^* . Si $\mathbf{x} = (x, x_1, \dots, x_k)$ e $\mathbf{y} = (y, y_1, \dots, y_k)$, entonces $\pi_{\mathbf{y}} \phi_{\mathbf{xy}} \pi_{\mathbf{x}}^{-1}$ es un isomorfismo de $(B(r, k))_{(x_1, \dots, x_k)}^k$ en $(B(r, k))_{(y_1, \dots, y_k)}^k$ que preserve los colores dados por F_B .

A la inversa, si la 1-factorización F_B es una 1-factorización k -uniforme de $B(r, k)$, para todo par de vértices $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in V(B(r, k))$ existe un isomorfismo de digrafos

$$\phi_{(x_1, \dots, x_k)(y_1, \dots, y_k)} : V(B(r, k))_{(x_1, \dots, x_k)} \rightarrow V(B(r, k))_{(y_1, \dots, y_k)}$$

que preserve los colores dados por F_B . Entonces, si $\mathbf{x} = (x, x_1, \dots, x_k)$ e $\mathbf{y} = (y, y_1, \dots, y_k)$ son dos vértices cualesquiera de $V^* = V \times F^k$, la aplicación $\pi_{\mathbf{y}}^{-1} \phi_{(x_1, \dots, x_k)(y_1, \dots, y_k)} \pi_{\mathbf{x}}$ es un isomorfismo de $(\Gamma^*)_{\mathbf{x}}^k$ en $(\Gamma^*)_{\mathbf{y}}^k$ que preserva los colores dados por la 1-factorización inducida F^* . ■

Como corolario inmediato, se obtiene:

Corolario 3.4.1 *Todo digrafo k -línea iterado regular admite 1-factorizaciones k -uniformes.*

Demostración. Como todo digrafo k -línea iterado regular de grado r admite 1-factorizaciones inducidas por 1-factorizaciones lineales del digrafo de De Bruijn $B(r, k)$, y por el Teorema 3.3.2 1-factorizaciones lineales de $B(r, k)$ son 1-factorizaciones k -uniformes. Por el Teorema 3.4.2, esto implica que todo digrafo k -línea iterado regular admite 1-factorizaciones k -uniformes. ■

En particular, como todo digrafo k -línea iterado admite 1-factorizaciones k -uniformes, se verifica que para cualquier digrafo Γ que sea k -línea iterado, los digrafos correspondientes Γ_u^k para $u \in V(\Gamma)$ son siempre isomorfos. Pero es solamente cuando asignamos al digrafo Γ una 1-factorización F que sea k -uniforme, que los respectivos isomorfismos entre los digrafos Γ_u^k preservarán los colores dados por F .

Presentemos a continuación el otro resultado necesario para la demostración del Teorema 3.4.1.

Proposición 3.4.1 *Sean Γ, Γ' dos digrafos conexos regulares. Entonces Γ es un recubrimiento de Γ' si y sólo si $\text{L}\Gamma$ es un recubrimiento de $\text{L}\Gamma'$.*

Demostración. Sea $\Gamma \xrightarrow{\pi} \Gamma'$ un recubrimiento con proyección recubridora π . Definimos $\pi_L : V(\text{L}\Gamma) \rightarrow V(\text{L}\Gamma')$ como $\pi_L(u, v) = (\pi(u), \pi(v))$ para $(u, v) \in V(\text{L}\Gamma)$. Es fácil comprobar que π_L es una proyección recubridora de $\text{L}\Gamma$ en $\text{L}\Gamma'$.

A la inversa, sea $\pi_L = V(\text{L}\Gamma) \rightarrow V(\text{L}\Gamma')$ una proyección recubridora de $\text{L}\Gamma$ en $\text{L}\Gamma'$. Sean σ y σ' las proyecciones recubridoras estándar de $\text{L}\Gamma$ en Γ y de $\text{L}\Gamma'$ en Γ' respectivamente.

Definimos $\pi : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma')$ como $\pi = \sigma' \pi_L \sigma^{-1}$ y afirmamos que π es una proyección recubridora de Γ en Γ' . Veamos en primer lugar que está bien definida. Sean $u_1, u_2 \in V(\text{L}\Gamma)$ tales que $\sigma(u_1) = \sigma(u_2)$. Entonces $\text{L}\Gamma^+(u_1) = \text{L}\Gamma^+(u_2)$, y por lo tanto $\text{L}\Gamma'^+(\pi_L(u_1)) = \text{L}\Gamma'^+(\pi_L(u_2))$. En consecuencia $\sigma'(\pi_L(u_1)) = \sigma'(\pi_L(u_2))$.

Veamos también que si $|\pi_L^{-1}(u, v)| = h$ para todo $(u, v) \in V(\text{L}\Gamma')$, entonces $|\pi^{-1}(v)| = h$ para todo $v \in V(\Gamma')$.

Sea $(u, v) \in \sigma'^{-1}(v)$, entonces $|\pi_L^{-1}(u, v)| = h$. Probaremos en primer lugar que $|\sigma(\pi_L^{-1}(u, v))| = h$. En caso contrario, existen en $\text{L}\Gamma$ dos vértices de la forma $(u_1, w), (u_2, w) \in \pi_L^{-1}(u, v)$, lo cual contradice el hecho de que π_L sea isomorfismo local, pues $|\text{L}\Gamma'^-(\pi_L(w, z))| < |\text{L}\Gamma^-(w, z)|$ para cualquier vértice de la forma $(w, z) \in V(\text{L}\Gamma)$. Finalmente, $\sigma(\pi_L^{-1}(u_1, v)) = \sigma(\pi_L^{-1}(u_2, v))$ para cualesquiera $(u_1, v), (u_2, v) \in \sigma'^{-1}(v)$.

Además, π es claramente un homomorfismo de digrafos e isomorfismo local, con lo que acabamos de demostrar que es una proyección recubridora.

En ambos casos, el diagrama siguiente es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \text{L}\Gamma & \xrightarrow{\pi_L} & \text{L}\Gamma' \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma' \\ \Gamma & \xrightarrow{\pi} & \Gamma' \end{array}$$

■

Aplicando el Teorema 3.4.2 y la Proposición anterior, podemos probar el Teorema principal de la sección.

Demostración del Teorema 3.4.1

Demostración. Sea Γ un digrafo r -regular. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que Γ es (fuertemente) conexo. Sea F una 1-factorización arbitraria de Γ y F_B una 1-factorización k -uniforme del digrafo de De Bruijn $B(r, k)$ con conjunto de vértices las palabras de longitud k a partir del alfabeto F . (Por el Teorema 3.3.2 podemos tomar F_B una 1-factorización lineal de $B(r, k)$ a partir de una operación de grupo \oplus definida en F).

Sea F^* una 1-factorización de $L^k\Gamma$ inducida por F y F_B .

Consideremos σ_k la proyección recubridora estándar de $L^k\Gamma$ en Γ y π_k la proyección recubridora de $\overline{L^k\Gamma}_{F^*}$ en $L^k\Gamma$. Por el Teorema 3.4.2, el digrafo $\overline{L^k\Gamma}_{F^*}$ es un digrafo k -línea iterado de un digrafo Γ_k , es decir $\Gamma_k = L^{-k}(\overline{L^k\Gamma}_{F^*})$. Por la Proposición 3.4.1, como $\overline{L^k\Gamma}_{F^*}$ es un recubrimiento de $L^k\Gamma$, entonces Γ_k es un recubrimiento de Γ y existe $\pi : V(\Gamma_k) \rightarrow V(\Gamma)$ una proyección recubridora. Sea $\overline{\sigma}_k$ la proyección recubridora de $\overline{L^k\Gamma}_{F^*}$ en Γ_k .

Entonces, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma, F & \xleftarrow{\pi} & \Gamma_k = L^{-k}(\overline{L^k\Gamma}_{F^*}) \\ \sigma_k \uparrow & & \uparrow \overline{\sigma}_k \\ L^k\Gamma, F^* & \xleftarrow{\pi_k} & \overline{L^k\Gamma}_{F^*} \end{array}$$

Finalmente, por la Observación 2.2.1, Γ_k es un digrafo k -arco transitivo pues su digrafo k -línea iterado es un digrafo de Cayley. ■

Observemos que esta construcción de recubrimientos k -arco transitivos de un digrafo regular Γ es válida siempre que al digrafo k -línea iterado $L^k\Gamma$ se le asigna una 1-factorización k -uniforme, no necesariamente inducida por alguna de 1-factorización de Γ . Nos ocuparemos de esta cuestión para digrafos regulares de grado pequeño en el capítulo 4 .

Además, notemos que la construcción tiene interés no sólo como técnica de construcción de recubrimientos con unas propiedades determinadas, sino también como método de construcción de digrafos k -arco transitivos de grado arbitrario. Véase el estado del arte de construcción de digrafos k -arco transitivos en la sección 2.2.1.

En principio, todos los digrafos k -arco regulares pueden obtenerse con esta construcción. Sea Γ un digrafo k -arco regular, y sea G el subgrupo de $\text{Aut}(\Gamma)$ que actúa regularmente en el conjunto de k -arcos de Γ . Consideremos el digrafo k -línea iterado de Γ , $L^k\Gamma$. Por la caracterización de Sabidussi de los digrafos de Cayley (Teorema 1.2.1) y la Observación 2.2.1, $L^k\Gamma$ es un digrafo de Cayley del grupo G definido por algún conjunto de generadores S de G . Tomemos F la 1-factorización de $L^k\Gamma$ dada por S de manera natural. Entonces $\overline{L^k\Gamma}_F = L^k\Gamma$ y el mismo digrafo $\Gamma_k = \Gamma$ de partida es el recubrimiento k -arco transitivo de Γ que obtenemos con nuestra construcción. Luego todos los digrafos k -arco regulares pueden obtenerse con esta construcción.

3.5 Recubrimientos k -arco transitivos de algunas familias de digrafos

Daremos a continuación algunos ejemplos de construcciones explícitas de digrafos k -arco transitivos utilizando los resultados anteriores.

3.5.1 Recubrimientos k -arco transitivos de los digrafos completos con bucles

En nuestro primer ejemplo, tomamos $\Gamma = K_r^+$ el digrafo completo con bucles. Sea (F, \oplus) un grupo abeliano de orden r . Entonces K_r^+ es isomorfo al digrafo de Cayley $\text{Cay}(F, F)$ y el conjunto de los elementos de $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ define una 1-factorización natural en K_r^+ . El digrafo k -línea iterado $L^k K_r^+$ es el digrafo de De Bruijn $B(r, k+1)$ de grado r y diámetro $k+1$. Los vértices de $B(r, k+1)$ se pueden escribir como elementos de F^{k+1} , donde $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_k)$ es adyacente hacia los vértices de la forma (x_1, \dots, x_k, x) con $x \in F$. Dado $\mu : F^k \rightarrow F$ un homomorfismo de grupos, consideremos $F_B = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ la 1-factorización lineal de $B(r, k+1)$ inducida por F y μ . Esto es,

$$(x_0, \dots, x_k)^{\beta_i} = (x_1, \dots, x_k, \mu(x_1, \dots, x_k) \oplus x_0 \oplus f_i)$$

Por el Teorema 3.3.2, F_B es una 1-factorización $(k+1)$ -uniforme de $B(r, k+1)$, o lo que es equivalente $\overline{B(r, k+1)}_{F_B}$ es un digrafo $(k+1)$ -línea iterado.

Definimos π_μ el automorfismo de F^{k+1} por

$$(x_0, \dots, x_k)^{\pi_\mu} = (x_1, \dots, x_k, \mu(x_1, \dots, x_k) \oplus x_0)$$

Sea m el orden de π_μ en $\text{Aut}(F^{k+1})$ (lo que implica $m \geq k+1$). Sea G^* el producto semidirecto $F^{k+1} \rtimes_\phi \mathbb{Z}_m$ donde $\phi : \mathbb{Z}_m \rightarrow \text{Aut}(F^{k+1})$ viene dada por $\phi(i) = \pi_\mu^i$.

Definimos una acción de G^* en F^{k+1} como

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{y}, j)} = \mathbf{x}^{\phi(j)} \oplus \mathbf{y} \tag{3.6}$$

donde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F^{k+1}$ y la operación \oplus se define coordenada a coordenada.

No es difícil ver que el grupo G^* está generado por el conjunto $F^* = \langle f_1^*, \dots, f_r^* \rangle$ donde

$$f_i^* = (0, \dots, 0, f_i, 1) \in F^{k+1} \rtimes_\phi \mathbb{Z}_m, \quad i = 1, \dots, r$$

y donde 0 denota el elemento identidad de (F, \oplus) . Más aún, la biyección $F^* \rightarrow F_B$ tal que $f_i^* \mapsto \beta_i$, extiende a un isomorfismo de grupos entre G^* y el grupo de permutaciones G_B de F_B . Además, la 1-factorización de $L^k K_r^+$ definida por F^* a través de la acción dada por (3.6) y F_B coinciden, luego G^* y G_B son permutacionalmente equivalentes. Véase [39] para más detalles.

Probemos a continuación que el recubrimiento de Cayley $\overline{B(r, k+1)}_{F_B}$ es un digrafo k -línea iterado del ciclo completo generalizado $C(r, m)$. (Por lo tanto, $\overline{B(r, k+1)}_{F_B}$ es un digrafo $(k+1)$ -línea iterado de un multidigrafo que corresponde a un ciclo de orden m donde cada arco ha sido sustituido por r arcos múltiples).

Teorema 3.5.1 ([29]) *Sea (F, \oplus) un grupo abeliano de orden r y $\mu : F^k \rightarrow F$ un homomorfismo de grupos.*

El recubrimiento de Cayley $\overline{B(r, k+1)}_{F_B}$ de $B(r, k+1)$ con la 1-factorización lineal F_B inducida por F y μ es isomorfo al digrafo k -línea iterado $C(r, m, k+1)$.

Demostración. Definimos la biyección $\Phi : G^* \rightarrow V(\mathbb{L}^k C(r, m))$ como

$$(x_0, \dots, x_k, i) \mapsto (x_0, i)(x_1, i+1) \cdots (x_k, i+k)$$

Afirmamos que Φ es un isomorfismo de digrafos de $\overline{B(r, k+1)}_{F_B} \simeq \text{Cay}(G^*, F^*)$ en $C(r, m, k+1) = \mathbb{L}^k C(r, m)$. Es suficiente demostrar que preserva las adyacencias. Esto es,

$$\begin{aligned} & \Phi((x_0, \dots, x_k, i), (x_1, \dots, x_k, \mu(x_1, \dots, x_k) \oplus x_0 \oplus f_j, i+1)) = \\ & = ((x_0, i)(x_1, i+1) \cdots (x_k, i+k), (x_1, i+1) \cdots (x_k, i+k)(\mu(x_1, \dots, x_k) \oplus x_0 \oplus f_j, i+k+1)). \end{aligned}$$

■

En particular, cuando la 1-factorización de $B(r, k+1)$ es normal (i.e., cuando el homomorfismo de grupos $\mu : F^k \rightarrow F$ es el homomorfismo nulo), el automorfismo $\pi_\mu : F^k \rightarrow F^k$ es simplemente un shift cíclico de una posición en F^k . Así, $m = k+1$, y el recubrimiento correspondiente $\overline{B(r, k+1)}$ es isomorfo a $C(r, k+1, k+1)$, que es el digrafo mariposa $But(r, k+1)$.

En [29] Espona y Serra estudian algunas propiedades de estos recubrimientos de Cayley de los digrafos de De Bruijn, como el diámetro, el cuello y el grupo de automorfismos, y se dan algunas aplicaciones de dichos digrafos al diseño de redes de permutaciones.

Teorema 3.5.2 ([29]) *Sea (F, \oplus) un grupo abeliano de orden r y $\mu : F^k \rightarrow F$ un homomorfismo de grupos.*

El recubrimiento de Cayley $\overline{B(r, k+1)}_{F_B}$ de $B(r, k+1)$ con la 1-factorización lineal F_B inducida por F y μ verifica:

- *es superconexo*
- *es hamiltoniano*
- *tiene diámetro $m+k$*
- *tiene cuello m*
- *tiene encaminamientos mínimos*
- *$\text{Aut}(\overline{B(r, k+1)}_{F_B}) = \mathcal{S}_r^{k+1} \rtimes_\rho \mathbb{Z}_m$, donde $\rho(i)$ es el shift cíclico de i posiciones en \mathcal{S}_r^{k+1} .*

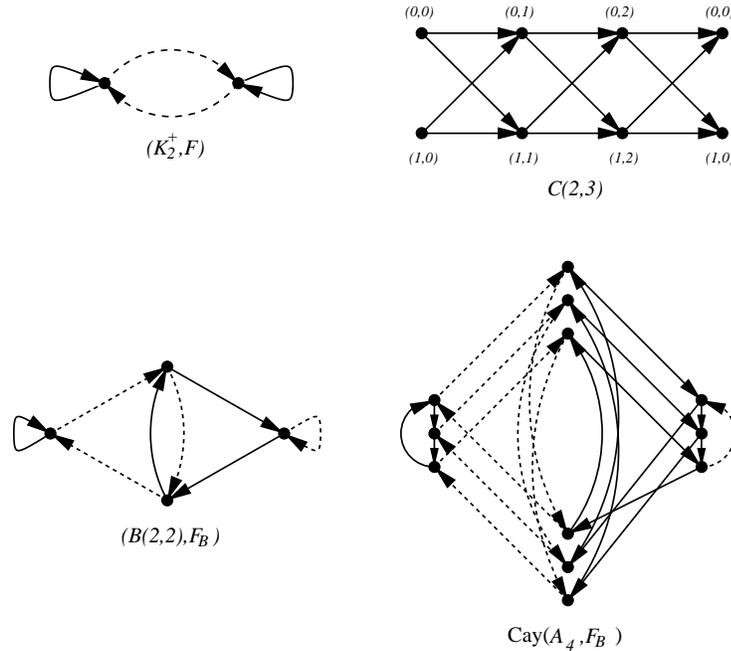
En la Figura 3.2 se muestra el esquema de la construcción de recubrimientos k -arco transitivos de los digrafos de De Bruijn con 1-factorizaciones lineales, que acabamos de ver que son los ciclos completos generalizados $C(r, m)$. Recordemos que esta familia de digrafos fue el primer ejemplo de familia digrafos k -arco transitivos estudiado por Praeger en [71]. Véanse las propiedades básicas de $C(r, m)$ en la sección 1.3.4.

En la Figura 3.3 mostramos un ejemplo de construcción de un recubrimiento arco transitivo de K_2^+ . Sea $K_2^+ = \text{Cay}(\mathbb{Z}_2, \{0, 1\})$ y F la 1-factorización natural del digrafo de Cayley. Asignamos a $B(2, 2) = \mathbb{L}K_2^+$ la 1-factorización lineal F_B inducida por F y por $\mu : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ definida como $\mu(f) = f$. Entonces el correspondiente automorfismo $\pi_\mu : \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$ tiene orden $m = 3$ y

$$G = G(B(2, 2), F_B) \simeq \mathbb{Z}_2^2 \rtimes_\phi \mathbb{Z}_3 \simeq \mathcal{A}_4$$

donde $\phi(i) = \pi_\mu^i$. Finalmente, el recubrimiento arco transitivo de K_2^+ es isomorfo a $C(2, 3)$.

$$\begin{array}{ccc}
K_r^+, F & \leftarrow & C(r, m) = L^{-k}C(r, m, k+1) \\
\uparrow & & \uparrow \\
B(r, k+1) = L^k K_r^+, F_B & \leftarrow & \overline{B(r, k+1)}_{F_B} = C(r, m, k+1)
\end{array}$$

Figura 3.2: Diagrama de la construcción de recubrimientos de K_r^+ Figura 3.3: Construcción de un recubrimiento arco transitivo de K_2^+

3.5.2 Recubrimientos k -arco transitivos de los digrafos completos

Tomemos $\Gamma = K_{r+1}$ el digrafo completo, cuando $r+1 = p^n$ es una potencia de un número primo p . Sea $(\mathbb{F}_{r+1}, +, \cdot)$ un cuerpo de orden $r+1$. Denotemos por 0 el elemento neutro del grupo aditivo de \mathbb{F}_{r+1} , y por 1 el elemento neutro del grupo multiplicativo de \mathbb{F}_{r+1} . Entonces el digrafo completo K_{r+1} es isomorfo al digrafo de Cayley del grupo aditivo de \mathbb{F}_{r+1} definido por el conjunto de generadores $\mathbb{F}_{r+1}^* = \mathbb{F}_{r+1} \setminus \{0\}$. Esto es, $K_{r+1} = \text{Cay}(\mathbb{F}_{r+1}, \mathbb{F}_{r+1}^*)$.

Consideremos la 1-factorización F de K_{r+1} dada por $\mathbb{F}_{r+1}^* = \{1 = f_1, \dots, f_r\}$. Es decir, la 1-factorización definida por

$$x^{f_i} = x + f_i, \quad x \in \mathbb{F}_{r+1}.$$

El digrafo k -línea iterado $L^k K_{r+1}$ es el digrafo de Kautz $K(r, k+1)$ de grado r y diámetro $k+1$. Consideremos $F^* = \{f_1^*, \dots, f_r^*\}$ la 1-factorización de $L^k K_{r+1}$ inducida por F y por la 1-factorización normal de $B(r, k)$. Con las notaciones de la sección 2.3.2, tenemos

$$(x, h_0, h_1, \dots, h_{k-1})^{f_i^*} = (x + h_0, h_1, \dots, h_{k-1}, h_0 f_i), \quad 1 \leq i \leq r$$

para cada v3rtice $(x, h_0, h_1, \dots, h_{k-1}) \in \mathbb{F}_{r+1} \times F^k = V(L^k K_{r+1})$. O equivalentemente, cuando escribimos los v3rtices de $L^k K_{r+1}$ como secuencias de v3rtices de K_{r+1} , la 1-factorizaci3n F^* es tal que

$$(x, x_1, \dots, x_k)^{f_i^*} = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_k + (x_1 - x_0)f_i), \quad 1 \leq i \leq r$$

para cada $(x, x_1, x_2, \dots, x_k) \in (\mathbb{F}_{r+1})^{k+1} = V(L^k K_{r+1})$. V3ase en la Figura 3.4 el digrafo de Kautz $K(2, 2)$ con la 1-factorizaci3n inducida por F . En este caso, $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}_3$.

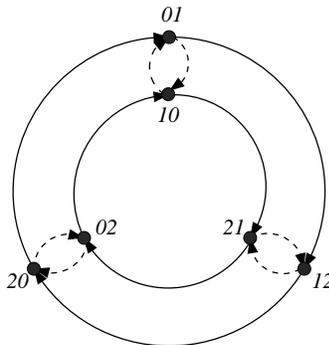


Figura 3.4: $(K(2, 2), F^*)$

Como la 1-factorizaci3n normal de $B(r, k)$ es un caso particular de 1-factorizaci3n lineal de $B(r, k)$, por el Teorema 3.3.2, es una 1-factorizaci3n k -uniforme.

As3, por el Teorema 3.4.2, como la 1-factorizaci3n F^* de $K(r, k + 1)$ es una 1-factorizaci3n inducida por F y una 1-factorizaci3n k -uniforme del digrafo de De Bruijn, F^* es una 1-factorizaci3n k -uniforme de $K(r, k + 1)$, luego podemos aplicar la t3cnica de construcci3n de recubrimientos k -arco transitivos.

Veremos en esta secci3n que el recubrimiento k -arco transitivo de K_{r+1} resultante es

$$L^{-k}(\overline{L^k \Gamma_{F^*}}) = \text{Cay}((\mathbb{F}_{r+1})^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k, S), \quad (3.7)$$

donde $S = \{\hat{f}_i = (0, \dots, 0, f_i, 1) \in (\mathbb{F}_{r+1})^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k, \quad 1 \leq i \leq r\}$, ρ denota el automorfismo rotaci3n de $(\mathbb{F}_{r+1})^k$ (o shift c3clico de una posici3n) definido por

$$(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})^{\rho} = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_0)$$

y, si no hay lugar a confusi3n, denotaremos tambi3n por $\rho : \mathbb{Z}_k \rightarrow \text{Aut}((\mathbb{F}_{r+1})^k)$ el homomorfismo de grupos $\rho(i) = \rho^i$. La Figura 3.5 nos muestra el digrafo resultante cuando $r + 1 = 3$ y $k = 2$.

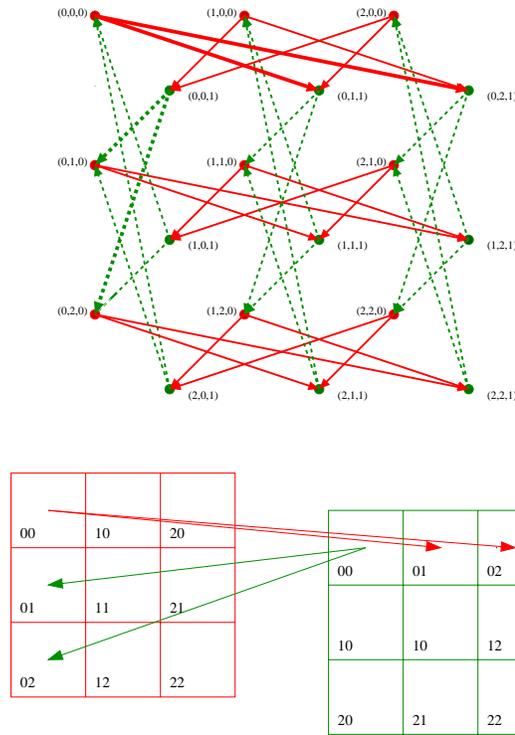
En primer lugar, describamos el grupo de permutaciones de la 1-factorizaci3n F^* de $K(r, k + 1)$. Sea Ω el producto semidirecto $\mathbb{F}_{r+1} \rtimes F$, donde los elementos de F act3an como automorfismos del grupo aditivo de \mathbb{F}_{r+1} del modo natural por multiplicaci3n. Denotemos por $*$ la operaci3n de Ω . Entonces,

$$(x_0, f) * (y_0, g) = (x_0 + f y_0, f g)$$

para $(x_0, f), (y_0, g) \in \Omega$.

Sea $G' = \Omega^k \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}_k$, donde ϕ es el automorfismo rotaci3n de Ω^k

$$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)^{\rho} = (\omega_2, \dots, \omega_k, \omega_1)$$

Figura 3.5: Recubrimiento 2-arco transitivo de K_3

y, nuevamente si no hay lugar a confusión, denotaremos también por $\phi : \mathbb{Z}_k \rightarrow \text{Aut}(\Omega^k)$ el homomorfismo de grupos $\phi(i) = \phi^i$.

Consideremos la acción de G' en Ω^k dada por

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{y}, i)} = \mathbf{x}^{\phi^i} * \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega^k \quad (3.8)$$

donde la operación $*$ se define coordenada a coordenada. Más detalladamente, si

$$\mathbf{x} = ((x_0, f_{u_0}), \dots, (x_{k-1}, f_{u_{k-1}})) \in \Omega^k$$

y

$$(\mathbf{y}, i) = ((y_0, f_{v_0}), \dots, (y_{k-1}, f_{v_{k-1}}), i) \in \Omega^k \rtimes \mathbb{Z}_k,$$

entonces

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{y}, i)} = ((x_i + f_{u_i} y_0, f_{u_i} f_{v_0}), \dots, (x_{i+k-1} + f_{u_{i+k-1}} y_{k-1}, f_{u_{i+k-1}} f_{v_{k-1}})), \quad (3.9)$$

donde los subíndices se toman módulo k .

Además, claramente la acción de G' en el conjunto Ω^k es transitiva.

Proposición 3.5.1 *El grupo de permutaciones $G^* = G(\mathbb{L}^k K_{r+1}, F^*)$ de la 1-factorización F^* de $\mathbb{L}^k K_{r+1}$ inducida por F es permutacionalmente isomorfo a G' .*

Demostración. Definamos $\alpha : \Omega^k \rightarrow \mathbb{F}_{r+1} \times F^k$ por

$$\alpha((x_0, f_{u_0}), \dots, (x_{k-1}, f_{u_{k-1}})) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} x_j, f_{u_0}, \dots, f_{u_{k-1}} \right).$$

Por la acción dada por (3.8), tenemos claramente $\alpha(\mathbf{x}^{(\mathbf{y},i)}) = \alpha((\mathbf{x}')^{(\mathbf{y},i)})$ siempre que $\alpha(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}')$. Así, la partición

$$\mathcal{P} = \{\alpha^{-1}(x, f_{u_0}, \dots, f_{u_{k-1}}) : (x, f_{u_0}, \dots, f_{u_{k-1}}) \in \mathbb{F}_{r+1} \times F^k\}$$

es un sistema completo de bloques de G' .

Además, el único elemento de G' que fija cada bloque de \mathcal{P} es la identidad.

También, si $(\mathbf{y}, i) \in \Omega^k \rtimes \mathbb{Z}_k$ satisface $\alpha(\mathbf{x}^{(\mathbf{y},i)}) = \alpha(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega^k$, entonces, usando la notación de (3.9), tenemos

$$\sum_{j=0}^{k-1} y_j f_{u_{i+j}} = 0 \text{ y } f_{v_j} f_{u_{i+j}} = f_{u_j}$$

para todas las elecciones de $(f_{u_0}, \dots, f_{u_{k-1}}) \in F^k$ y $0 \leq j \leq k-1$. Luego, $y_0 = \dots = y_{k-1} = 0$, $f_{v_0} = \dots = f_{v_{k-1}} = 1$ y $i = 0$.

Finalmente, si $\mathbf{f}_i = ((0, 1), \dots, (0, 1), (1, f_i), 1)$, $1 \leq i \leq r$, entonces

$$\alpha(\mathbf{x}^{\mathbf{f}_i}) = (\alpha(\mathbf{x}))^{f_i^*}, \quad 1 \leq i \leq r.$$

En consecuencia, el grupo G^* es isomorfo al subgrupo de G' generado por $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r$ que denotamos por G'_0 . En particular, como G^* actúa transitivamente en $\mathbb{F}_{r+1} \times F^k$, entonces G'_0 actúa transitivamente en Ω^k . Afirmamos que el subgrupo G'_0 coincide con el grupo G' . Sea $\mathbf{e} = ((0, 1), \dots, (0, 1)) \in \Omega^k$ el elemento neutro de Ω^k . Entonces los elementos $(\mathbf{e}, 1)^i = (\mathbf{e}, i)$ para $0 \leq i \leq k$ son k elementos diferentes de G'_0 que pertenecen al estabilizador del elemento \mathbf{e} , denotado por $(G'_0)_{\mathbf{e}}$. Entonces, $|G'_0| = |\Omega^k|(G'_0)_{\mathbf{e}} \geq |\Omega^k|k = |G'|$, lo cual implica que G'_0 coincide con G' . ■

En particular, el recubrimiento de Cayley $\overline{L^k \Gamma}_{F^*}$ es isomorfo al digrafo $\text{Cay}(G', \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r\})$.

Por último, la igualdad (3.7) se sigue de hecho de que el último digrafo es isomorfo a $L^k \text{Cay}((\mathbb{F}_{r+1})^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k, S)$, como se demuestra a continuación.

Proposición 3.5.2 $\overline{K(r, k+1)}_{F^*}$ es isomorfo a $L^k \text{Cay}((\mathbb{F}_{r+1})^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k, S)$, donde $S = \{\hat{f}_i = (0, \dots, 0, f_i, 1) \in (\mathbb{F}_{r+1})^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k, 1 \leq i \leq r\}$.

Demostración. Afirmamos que la aplicación

$$\Phi : G' \rightarrow ((\mathbb{F}_{r+1})^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k) \times S^k,$$

definida por

$$\Phi(\mathbf{x}, i) = ((x_0, \dots, x_{k-1}, i), \hat{f}_{u_0}, \dots, \hat{f}_{u_{k-1}})$$

es un isomorfismo de digrafos de $\text{Cay}(G', \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r\})$ en $L^k \text{Cay}((\mathbb{F}_{r+1})^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k, S)$. Basta comprobar que preserva las adyacencias. Esto es,

$$\begin{aligned} \Phi(((x_0, f_{u_0}), \dots, (x_{k-1}, f_{u_{k-1}}), i)((x_1, f_{u_1}), \dots, (x_{k-1}, f_{u_{k-1}}), (x_0 + f_{u_0}, f_{u_0} f_j), i+1) = \\ ((x_0, \dots, x_{k-1}, i), \hat{f}_{u_0}, \dots, \hat{f}_{u_{k-1}}), ((x_1, \dots, x_{k-1}, x_0 + f_{u_0}, i+1), \hat{f}_{u_1}, \dots, \hat{f}_{u_{k-1}}, \hat{f}_z) \end{aligned}$$

donde el subíndice z es tal que $f_{u_0} f_j = f_z$. ■

Esta familia de recubrimientos k -arco transitivos de K_{r+1} se corresponde con un caso particular de los digrafos $C_k(v, s; \Delta)$ definidos por Praeger, para $s = k$, $v = r+1$ y $\Delta = K_{r+1}$. La definición de los digrafos de la familia $C_k(v, s; \Delta)$ es la que sigue.

Definición 3.5.1 ([71]) Sea $v \geq 2$ y $s \geq 3$ enteros y sea r un múltiplo de s . Sea Δ un grafo (no dirigido) H -arista transitivo con conjunto de vértices \mathbb{Z}_v . Se define el digrafo $C_r(v, s; \Delta)$ como el digrafo con conjunto de vértices $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_v^s$ y con conjunto de arcos el conjunto de elementos $((i, \mathbf{x}), (j, \mathbf{y}))$, donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_s)$, si y sólo si $j = i + 1$ e $\mathbf{y} = (y_1, x_1, \dots, x_{s-1})$ donde $y_1 \in \Delta(x_s)$.

En [71] se prueba que $\text{Cay}((\mathbb{F}_{r+1})^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k, S)$ tiene grupo de automorfismos isomorfo a $S_{r+1}^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k$ donde $\rho(i)$ es el shift cíclico de i posiciones en S_{r+1}^k (o equivalentemente $S_{r+1} \wr \mathbb{Z}_k$).

Para cada $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}, i) \in S_{r+1} \wr \mathbb{Z}_k$ y cada $(x_0, \dots, x_{k-1}, j) \in \mathbb{F}_{r+1}^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k$ de define la acción del grupo de automorfismos en el conjunto de vértices como

$$(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, j)^{\sigma} = (x_0^{\sigma_0}, \dots, x_{k-1}^{\sigma_{k-1}}, j + i).$$

Se deduce claramente que $\text{Cay}(\mathbb{F}_{r+1}^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k, S)$ es k -arco transitivo pero no $k + 1$. Esto es, es un digrafo exactamente k -arco transitivo.

Además, de la definición de Γ_k se infiere claramente que es un k -ciclo generalizado con conjuntos estables $\mathbb{F}_{r+1}^k \times \{i\}$, $0 \leq i \leq k - 1$.

Probemos otras propiedades sencillas de los recubrimientos k -arco transitivos de K_{r+1} .

Proposición 3.5.3 Si $k > 1$, el digrafo $\Gamma_k = \text{Cay}(\mathbb{F}_{r+1}^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k, S)$ tiene parámetro l igual a k , cuello $2k$, diámetro $3k - 1$, y es maximalmente conexo.

En particular, el parámetro l , el cuello y el diámetro de estos recubridores no depende del grado del digrafo original K_{r+1} .

Demostración. Como Γ_k es vértice transitivo, es suficiente calcular el camino más corto conteniendo el vértice $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0, 0)$ y la máxima distancia de $\mathbf{0}$ a otro vértice del digrafo para calcular el cuello y el diámetro respectivamente.

Observemos que $\Gamma_k^+(\mathbf{0}) = (0, 0, \dots, i_0, 1)$ for $i_0 \in \mathbb{F}_{r+1} \setminus \{0\}$.

Análogamente,

$$\Gamma_k^{k-1}(\mathbf{0}) = (0, i_0, i_1, \dots, i_{k-2}, k - 1)$$

$$\Gamma_k^k(\mathbf{0}) = (i_0, i_1, \dots, i_{k-2}, i_{k-1}, 0)$$

$$\Gamma_k^{k+1}(\mathbf{0}) = (i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_0 + j_0, 1)$$

para $i_1, \dots, i_{k-1}, j_0 \in \mathbb{F}_{r+1} \setminus \{0\}$.

Observemos ahora que para cualquier grupo aditivo de un cuerpo \mathbb{F}_{r+1} el elemento neutro 0 puede escribirse como suma de dos elementos no nulos. Más aún, como el cuerpo tiene orden $r + 1 \geq 3$ existen al menos dos maneras diferentes de escribir 0 como suma de dos elementos no nulos. Así, existen al menos dos caminos diferentes de longitud $k + 1$ desde el vértice $\mathbf{0}$ a $(1, \dots, 1, 0, 1)$ en Γ_k , luego el parámetro l de Γ_k es exactamente k .

Iterando nuevamente tenemos

$$\Gamma_k^{2k-1}(\mathbf{0}) = (i_{k-1}, i_0 + j_0, \dots, i_{k-2} + j_{k-2}, k - 1)$$

$$\Gamma_k^{2k}(\mathbf{0}) = (i_0 + j_0, \dots, i_{k-1} + j_{k-1}, 0)$$

para $j_1, \dots, j_{k-1} \in \mathbb{F}_{r+1} \setminus \{0\}$.

Y escribiendo una vez más 0 como suma de dos elementos no nulos, se deduce claramente que el cuello es exactamente $2k$.

Observemos que en el paso $2k$ no se ha alcanzado ningún vértice con las k primeras coordenadas iguales a 0 (excepto el $\mathbf{0}$). Ya en el siguiente paso $2k + 1$ se alcanzan todos los vértices con las k primeras coordenadas iguales a 0 y la última igual a 1 :

$$\Gamma_k^{2k+1}(\mathbf{0}) = (i_1 + j_1, \dots, i_0 + j_0 + l_0, 1)$$

para $l_0 \in \mathbb{F}_{r+1} \setminus \{0\}$.

Y no es hasta el paso $3k-1$ que se alcanza por primera vez desde el $\mathbf{0}$ el vértice $(0, \dots, 0, k-1)$, mientras todos los otros han sido ya alcanzados desde el $\mathbf{0}$ en otro paso anterior. Así, el diámetro de Γ_k es $3k - 1$.

Finalmente, para $k \geq 1$ el digrafo es arco transitivo (y regular), y se sigue de un resultado de Hamidoune [48] que su (vértice) conectividad es igual al grado. ■

Si $k = 0, 1$ el recubrimiento k -arco transitivo de K_{r+1} resulta ser él mismo, y recordemos que K_{r+1} tiene diámetro y parámetro l iguales a uno y cuello igual a dos.

Estas propiedades pueden verificarse de manera sencilla en el recubrimiento 3-arco transitivo de K_3 resultante, que se muestra en la Figura 3.6.

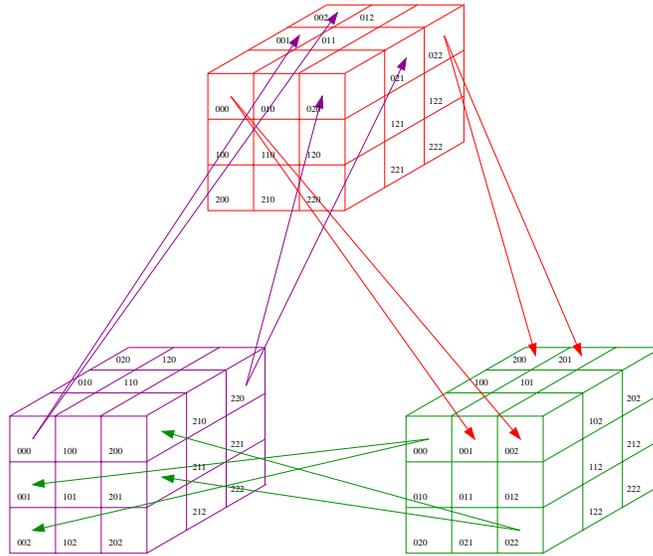


Figura 3.6: Recubrimiento 3-arco transitivo de K_3

Aplicando las propiedades básicas de los digrafos línea de la sección 1.3.3, podemos obtener las propiedades análogas de los recubrimientos de Kautz correspondientes.

Corolario 3.5.1 Sea $\overline{K(r, k+1)}_{F^*} = L^k(\Gamma_k)$ el recubrimiento del digrafo de Kautz $K(r, k+1)$ con la 1-factorización F^* definida como anteriormente. Si $k > 1$, entonces $\overline{K(r, k+1)}_{F^*}$ verifica

- es un k -ciclo generalizado,
- es maximalmente conexo,
- tiene diámetro $4k - 1$,

- tiene parámetro l igual a $2k$,
- es un digrafo hamiltoniano,
- tiene grupo de automorfismos isomorfo a $S_{r+1} \wr \mathbb{Z}_k$,
- tiene cuello $2k$.

Generalización de los resultados para algunas familias de digrafos

En esta sección calcularemos los recubrimientos k -arco transitivos de algunas familias de digrafos de Cayley $\text{Cay}(G, S)$, donde G sea un grupo abeliano, $S \subseteq G$ un conjunto de generadores de G , y para los cuales exista un subgrupo $H \leq \text{Aut}(G)$ que actúe regularmente en el conjunto S .

Bajo estas hipótesis, si $S = \{s_1, \dots, s_r\}$, podemos escribir H sin pérdida de generalidad como $H = \{\kappa_1, \dots, \kappa_r\}$, donde $\kappa_i(s_1) = s_i$ para $i = 1, \dots, r$. En particular $\kappa_1(g) = g$ para todo $g \in G$.

Consideremos el digrafo $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ con la 1-factorización natural $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ inducida por el conjunto de generadores. Es decir, $g^{f_i} = g + s_i$ para $g \in G$ y $i = 1, \dots, r$. Además, definimos en F la operación binaria \oplus dada por $s_i \oplus s_j = \kappa_i(s_j)$. El par (F, \oplus) definido de esta manera es claramente un subgrupo isomorfo a H .

Consideremos el digrafo de De Bruijn $B(r, k)$ con los vértices como palabras de longitud k a partir del alfabeto S . Sea $F_B = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ la 1-factorización normal de $B(r, k)$. Entonces,

$$(s_{u_1}, \dots, s_{u_r})^{\beta_i} = (s_{u_2}, \dots, s_{u_r}, \kappa_{u_1}(s_i)) = (s_{u_2}, \dots, s_{u_r}, s_{u_1} \oplus s_i)$$

para $s_{u_1}, \dots, s_{u_r} \in S$ y $i = 1, \dots, r$.

Consideremos la 1-factorización $F^* = \{f_1^*, \dots, f_r^*\}$ de $L^k \Gamma$ inducida por las 1-factorizaciones F y F_B . Esto es,

$$(g, s_{u_1}, \dots, s_{u_r})^{f_i^*} = (g + s_{u_1}, s_{u_2}, \dots, s_{u_r}, s_{u_1} \oplus s_i)$$

para $(g, s_{u_1}, \dots, s_{u_r}) \in V(L^k \Gamma)$ y $i = 1, \dots, r$.

Sea Ω el producto semidirecto $G \rtimes_\iota H$ con $\iota : H \rightarrow \text{Aut}(G)$ la inyección canónica de H en $\text{Aut}(G)$. Definamos $P = \Omega^k \rtimes_\rho \mathbb{Z}_k$, donde $\rho : \mathbb{Z}_k \rightarrow \text{Aut}(\Omega^k)$ es tal que $\rho(i) = \rho^i$ es el shift cíclico de i posiciones en Ω^k . Definamos

$$p_i = ((0, \kappa_1), \dots, (0, \kappa_1), (s_1, \kappa_i), 1)$$

para $1 \leq i \leq r$. No es difícil comprobar que $\{p_1, \dots, p_r\}$ es un conjunto de generadores de P . Definamos la acción de P en Ω^k como

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{y}, i)} = \mathbf{x}^{\rho^i} * \mathbf{y} \quad (3.10)$$

y donde la operación $*$ se define coordenada a coordenada.

De manera similar a la demostración de la Proposición 3.5.1 se prueba el siguiente hecho:

Proposición 3.5.4 *El grupo de permutaciones $G^* = G(L^k \Gamma, F^*)$ de $L^k \Gamma$ es permutacionalmente isomorfo al subgrupo de P generado por el subconjunto $\{p_1, \dots, p_r\}$.*

Más aún, el recubrimiento de Cayley $\overline{L^k \Gamma}_{F^}$ es isomorfo a una de las componentes conexas del digrafo $\text{Cay}(P, \{p_1, \dots, p_r\})$.*

Demostración. Definamos $\alpha : \Omega^k \longrightarrow V(\mathbb{L}^k \Gamma)$ por

$$\alpha((g_1, \kappa_{u_1}), \dots, (g_k, \kappa_{u_k})) = \left(\sum_{i=1}^k g_i, s_{u_1}, \dots, s_{u_k} \right)$$

Claramente, α es una aplicación exhaustiva. Por la acción dada por (3.10), tenemos $\alpha(\mathbf{x}^{(\mathbf{y}, i)}) = \alpha((\mathbf{x}')^{(\mathbf{y}, i)})$ siempre que $\alpha(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}')$. Así, la partición

$$\mathcal{P} = \{ \alpha^{-1}(g, s_{u_0}, \dots, s_{u_{k-1}}) : (g, s_{u_0}, \dots, s_{u_{k-1}}) \in G \times S^k \}$$

es un sistema completo de bloques de P .

Además, el único elemento de P que fija cada bloque de \mathcal{P} es la identidad.

También, si

$$(\mathbf{y}, i) = (((h_1, \kappa_{v_1}), \dots, (h_k, \kappa_{v_k})), i) \in \Omega^k \rtimes \mathbb{Z}_k$$

satisface $\alpha(\mathbf{x}^{(\mathbf{y}, i)}) = \alpha(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega^k$, entonces, tenemos

$$\sum_{j=0}^{k-1} \kappa_{u_{i+j}}(h_j) = 0 \text{ y } \kappa_{v_j} \circ \kappa_{u_{i+j}} = \kappa_{u_j}$$

para todas las elecciones de $(\kappa_{u_0}, \dots, \kappa_{u_{k-1}}) \in H^k$ y $0 \leq j \leq k-1$. Luego, $h_0 = \dots = h_{k-1} = 0$, $\kappa_{v_0} = \dots = \kappa_{v_{k-1}} = 1$ y $i = 0$.

Finalmente, si $p_i = ((0, \kappa_1), \dots, (0, \kappa_1), (s_1, \kappa_i), 1)$, $1 \leq i \leq r$, entonces

$$\alpha(\mathbf{x}^{p_i}) = (\alpha(\mathbf{x}))^{f_i^*}, \quad 1 \leq i \leq r.$$

En consecuencia, el grupo G^* es isomorfo al subgrupo de P generado por p_1, \dots, p_r . ■

Bajo las mismas hipótesis, obtenemos que el recubrimiento k -arco transitivo Γ_k del digrafo de Cayley $\text{Cay}(G, S)$ es el siguiente:

Proposición 3.5.5 *Definimos $e_i = (0, \dots, 0, s_i, 1)$ para $i = 1, \dots, r$. Entonces $\overline{\mathbb{L}^k \Gamma}_{F^*}$ es isomorfo a una de las componentes conexas de $\mathbb{L}^k \text{Cay}(G^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k, \{e_1, \dots, e_r\})$ donde $\rho(i)$ es el shift cíclico de i posiciones de G^k , o equivalentemente, Γ_k es isomorfo a una de las componentes conexas de $\text{Cay}(G^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k, \{e_1, \dots, e_r\})$.*

Demostración. Definamos la aplicación Φ como sigue:

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Cay}(P, \{p_1, \dots, p_r\}) &\longrightarrow \mathbb{L}^k \text{Cay}(G^k \rtimes_{\rho} \mathbb{Z}_k, \{e_1, \dots, e_r\}) \\ ((g_1, \kappa_{u_1}), \dots, (g_k, \kappa_{u_k}), j) &\mapsto ((g_1, \dots, g_k, j), e_{u_1}, \dots, e_{u_k}) \end{aligned}$$

Φ es claramente una biyección, lo que es más, un homomorfismo de digrafos preservador de colores:

$$\begin{aligned} \Phi([((g_1, \kappa_{u_1}), \dots, (g_k, \kappa_{u_k}), j), ((g_2, \kappa_{u_2}), \dots, (g_k, \kappa_{u_k}), (g_1 + s_{u_1}, \kappa_{u_1} \circ \kappa_{u_i}, j + 1))]) = \\ [((g_1, \dots, g_k, j), e_{u_1}, \dots, e_{u_k}), ((g_2, \dots, g_k, g_1 + s_{u_1}, j + 1), e_{u_2}, \dots, e_{u_k}, (0, \dots, 0, \kappa_{u_1}(s_i), 1))] \end{aligned}$$

■

Observemos que los digrafos completos K_{r+1} cuando $r+1$ es una potencia de un número primo, se reobtienen como un caso particular de estos digrafos de Cayley. Si $(\mathbb{F}_{r+1}, +, \cdot)$ es un

cuerpo de orden $r + 1$, vimos al comienzo de la sección que el digrafo completo K_{r+1} se escribe como $K_{r+1} = \text{Cay}((\mathbb{F}_{r+1}, +), \mathbb{F}_{r+1}^*)$. Basta tomar $G = (\mathbb{F}_{r+1}, +)$ como grupo abeliano, $S = \mathbb{F}_{r+1}^*$ como el conjunto de generadores de G , y el subgrupo $H \leq \text{Aut}(G)$ que actúa regularmente en S como los elementos de S considerados como automorfismos de G por multiplicación a la izquierda.

3.6 Cadenas infinitas de recubrimientos k -arco transitivos

En este capítulo hemos introducido una técnica de Teoría de Grafos para construir recubrimientos k -arco transitivos de un digrafo dado. Dado un digrafo de partida (fuertemente) conexo regular Γ , se utiliza para construir digrafos k -arco transitivos del mismo grado para cualquier entero positivo k . Dado Γ , consideramos el digrafo línea iterado de Γ , $L^k\Gamma$, y asociamos a $L^k\Gamma$ una 1-factorización k -uniforme F de tal modo que el recubrimiento de Cayley $\overline{L^k\Gamma}_F$ resulte un digrafo k -línea iterado de algún digrafo Γ_k . Este digrafo resultante Γ_k se demuestra que por construcción es un recubrimiento k -arco transitivo del digrafo original Γ .

Dicha construcción de recubrimientos propuesta en este capítulo, proporciona cadenas infinitas de recubrimientos k -arco transitivos de un digrafo Γ

$$\Gamma_k \rightarrow \Gamma_{k+1} \rightarrow \Gamma_{k+2} \rightarrow \cdots$$

donde Γ_{k+i} es un recubrimiento $(k+i)$ -arco transitivo de Γ obtenido con nuestra técnica, para $i \geq 0$.

Notemos que eventualmente podría suceder que en una cadena de recubrimientos de Γ

$$\Gamma_k \rightarrow \Gamma_{k+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \Gamma_{k+i} \simeq \Gamma_{k+i+1} \simeq \Gamma_{k+i+2} \simeq \cdots$$

para algún índice $i \geq 0$. Esto es, que $\Gamma_{k+i} \simeq \Gamma_{k+j}$ para índices $j \geq i$. Veamos que es una situación que no puede repetirse ad infinitum. Por construcción si $k+i \geq 2$, entonces Γ_{k+i} es un digrafo tal que $L^{k+i}\Gamma_{k+i}$ es un digrafo de Cayley, luego $L^{k+i}\Gamma_{k+i}$ es al menos vértice transitivo. Entonces, como Γ_{k+i} tiene cuello finito, Γ_{k+i} no es altamente transitivo, sino que existe un entero positivo $k' \geq k+i$ tal que Γ_{k+i} es exactamente k' -arco transitivo. Así, $\Gamma_{k+i} \not\simeq \Gamma_{k'+1}$, con lo que queda probado que la cadena de isomorfismos no se repite infinitamente. En cualquier caso, no elimina la posibilidad de que $\Gamma_{k+i} \simeq \Gamma_{k+i+1}$.

Por otra parte, sean $\text{Cay}(G_1, F_1) = L^{k+i}\Gamma_{k+i}$ y $\text{Cay}(G_2, F_2) = L^{k+i+1}\Gamma_{k+i+1}$. Observemos que si $\Gamma_{k+i} \simeq \Gamma_{k+i+1}$ para algún índice i , entonces se verifica $L(\text{Cay}(G_1, F_1)) \simeq \text{Cay}(G_2, F_2)$. Esta es una situación muy particular, en el Teorema 2.3.6 se daba una caracterización en términos de las 1-factorizaciones naturales F_1 y F_2 de los respectivos digrafos de Cayley, para que el digrafo línea del primer digrafo de Cayley sea a su vez otro digrafo de Cayley.

En cualquier caso, si $\Gamma_k \rightarrow \Gamma_{k+1} \rightarrow \cdots$ es una cadena de recubrimientos de Γ construida con nuestra técnica, los digrafos Γ_{k+i} no son digrafos exactamente k -arco transitivos, excepto quizás el primer digrafo de la cadena Γ_k .

Esta construcción presenta otra dificultad técnica. Sean $\Gamma_k, \Gamma_{k'}$ los recubrimientos k -arco transitivo y k' -arco transitivo respectivamente obtenidos con nuestra técnica. Sea $k' > k$. Entonces, aunque $\Gamma_k \twoheadrightarrow \Gamma$ y $\Gamma_{k'} \twoheadrightarrow \Gamma$, no necesariamente se verifica que $\Gamma_{k'} \twoheadrightarrow \Gamma_k$.

La solución a esta dificultad reside en definir de manera iterativa para $i > 1$, el digrafo Γ_{k+i} como el recubrimiento $(k+i)$ -arco transitivo del digrafo inmediatamente anterior Γ_{k+i-1} , (y no del digrafo de partida Γ). Bajo estas condiciones, podemos asegurar que la cadena de recubrimientos k -transitivos obtenida para un digrafo Γ verifica:

$$\cdots \twoheadrightarrow \Gamma_{k+2} \twoheadrightarrow \Gamma_{k+1} \twoheadrightarrow \Gamma_k \twoheadrightarrow \Gamma$$

En esta sección estudiaremos una construcción alternativa de digrafos recubridores más sencilla que la anterior y que evita en gran parte las dificultades que presentábamos más arriba. La nueva construcción también nos permite manufacturar una cadena infinita de recubrimientos k -arco transitivos (resp. k -arco regulares) de un digrafo Γ , pero siempre partiendo de un digrafo base que sea k -arco transitivo (resp. k -arco regular). Así, al iniciar la cadena tomaremos igualmente como primer eslabón el recubrimiento k -arco transitivo Γ_k de Γ obtenido con nuestra técnica. Estos resultados han sido publicados en [64].

3.6.1 Asignaciones de voltaje y elevaciones de digrafos

Esta nueva técnica de construcción de recubrimientos de digrafos fue utilizada por primera vez en este contexto por J.H. Conway, para demostrar que existen infinitos grafos cúbicos conexos 5-rama transitivos. Una versión general de esta construcción en el caso no dirigido se encuentra en [10]. La mayor parte de la teoría se puede transferir directamente a digrafos, aunque en esta sección se apuntan también algunos resultados nuevos.

Sean $\Gamma = (V, A)$ un digrafo y G un grupo arbitrario. Cualquier aplicación del conjunto de arcos A en G , $\alpha : A \rightarrow G$, se dice que es una *asignación de voltaje* de Γ en G . La *elevación* de Γ por la asignación de voltaje α , denotada por Γ^α , es el digrafo definido como sigue:

$$V(\Gamma^\alpha) = G \times V$$

y

$$A(\Gamma^\alpha) = \{((g, u), (h, v)) : (u, v) \in A \text{ y } h = g\alpha(u, v)\}.$$

Sea $\pi : V(\Gamma^\alpha) \rightarrow V$ la *proyección natural* que elimina las primeras coordenadas, i.e. $\pi(g, u) = u$ para cada $g \in G$ y para cada $u \in V$. Entonces π es una proyección recubridora de Γ^α en Γ , luego la elevación Γ^α es un recubrimiento de Γ . Al digrafo Γ se le conoce entonces como *digrafo base* de la elevación Γ^α .

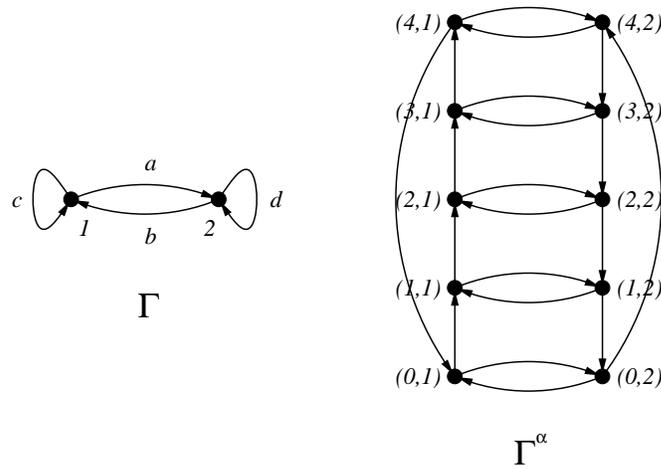
Como ejemplo, véase la Figura 3.7 donde $\Gamma = K_2^+ = (\{1, 2\}, \{a, b, c, d\})$, $G = \mathbb{Z}_5$ y $\alpha : A \rightarrow \mathbb{Z}_5$ viene definida como $\alpha(a) = \alpha(b) = 0$, $\alpha(c) = 1$, $\alpha(d) = 4$.

Supongamos ahora que un grupo K actúa como grupo de automorfismos del grupo G . Esto es, para cada $k \in K$ existe un automorfismo \mathbf{k} de G tal que la aplicación $k \mapsto \mathbf{k}$ es un homomorfismo de grupos de K en $\text{Aut}(G)$. En esta situación definimos el producto semidirecto $G \rtimes K$, como el grupo cuyos elementos son los pares ordenados $(h, k) \in G \times K$ con la operación de grupo dada por :

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1^{\mathbf{k}_2} h_2, k_1 k_2)$$

(Véase el Apéndice de Grupos de permutaciones para la definición de producto semidirecto si es necesario).

Dado $\Gamma = (V, A)$ un digrafo y α una asignación de voltaje de Γ en un grupo G . Sea $K = \text{Aut}(\Gamma)$, entonces K actúa en el conjunto de arcos A de modo natural por $(u, v)^k = (u^k, v^k)$ para $(u, v) \in A$ y para cada $k \in K$. Supongamos que K actúa también como grupo de automorfismos de G . Diremos que una asignación de voltaje es *compatible* con las acciones de K en G y en A , si el siguiente diagrama es conmutativo para todo $k \in K$.

Figura 3.7: Γ y Γ^α

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\alpha} & G \\
 k \downarrow & & \downarrow \mathbf{k} \\
 A & \xrightarrow{\alpha} & G
 \end{array}$$

Esto es, cuando $\alpha((u, v)^k) = \alpha(u, v)^{\mathbf{k}}$ para todo $(u, v) \in A$ y $k \in K$.

Proposición 3.6.1 Sea Γ un digrafo y $K = \text{Aut}(\Gamma)$. Supongamos que K actúa como grupo de automorfismos de un grupo G y que existe una asignación de voltaje $\alpha : A \rightarrow G$ compatible con las acciones de K en G y en A .

Entonces $G \rtimes K < \text{Aut}(\Gamma^\alpha)$.

Demostración. Definamos la acción de un elemento $(h, k) \in G \rtimes K$ en un vértice $(g, u) \in V(\Gamma^\alpha)$ como

$$(g, u)^{(h, k)} = (hg^{\mathbf{k}}, u^k).$$

Es fácil comprobar que esta permutación de (h, k) en $V(\Gamma^\alpha)$ define de hecho un automorfismo de la elevación Γ^α . Es suficiente con probar que preserva las adyacencias de Γ^α . Sea $((g_1, u_1), (g_2, u_2)) \in A(\Gamma^\alpha)$ entonces:

$$g_2 = g_1 \alpha(u_1, u_2)$$

$$g_2^{\mathbf{k}} = g_1^{\mathbf{k}} \alpha(u, v)^{\mathbf{k}}$$

$$hg_2^{\mathbf{k}} = hg_1^{\mathbf{k}} \alpha(u_1^k, u_2^k)$$

con lo que $((g_1, u_1)^{(h, k)}, (g_2, u_2)^{(h, k)}) \in A(\Gamma^\alpha)$. ■

Como consecuencia directa de la caracterización de Sabidussi de digrafos de Cayley (Teorema 1.2.1), se tiene que si Γ es un digrafo de Cayley entonces la elevación Γ^α del digrafo $\Gamma = \text{Cay}(G_1, S)$ por la asignación de voltaje $\alpha : A(\Gamma) \rightarrow G_1$ dada por $\alpha(g, gs) = s$ para

$(g, gs) \in A(\Gamma)$, es también un digrafo de Cayley. En efecto, $G_1 < \text{Aut}(\Gamma)$ actúa regularmente en $V(\Gamma)$, luego $G \times G_1 < \text{Aut}(\Gamma^\alpha)$ actúa regularmente en $V(\Gamma^\alpha) = G \times V(\Gamma)$.

La utilidad de esta construcción de recubrimientos reside en un resultado más fuerte que el anterior, que enunciamos inmediatamente a continuación:

Teorema 3.6.1 *En las condiciones de la Proposición 3.6.1, si Γ es t -arco transitivo (resp. t -arco regular), entonces Γ^α es también t -arco transitivo (resp. t -arco regular).*

Demostración. Sean $((g_0, v_0), \dots, (g_t, v_t))$ y $((g'_0, v'_0), \dots, (g'_t, v'_t))$ dos t -arcos arbitrarios de la elevación Γ^α . Entonces (v_0, \dots, v_t) y (v'_0, \dots, v'_t) son t -arcos de Γ . Así existe un elemento $k \in \text{Aut}(\Gamma)$ tal que $v_i^k = v'_i$ para $0 \leq i \leq t$.

Sea $g^* = g'_0(g_0^k)^{-1} \in G$. Probaremos por inducción que $(g_i, v_i)^{(g^*, k)} = (g'_i, v'_i)$ para $0 \leq i \leq t$. Consideremos el primer caso $i = 0$, entonces

$$(g_0, v_0)^{(g^*, k)} = (g^* g_0^k, v_0^k) = (g'_0, v'_0).$$

Supongamos que $(g_i, v_i)^{(g^*, k)} = (g'_i, v'_i)$ para $i < t$ y demostrémoslo para $i + 1$. Se verifica entonces

$$\begin{aligned} (g_{i+1}, v_{i+1})^{(g^*, k)} &= (g^* g_{i+1}^k, v_{i+1}^k) = (g^* (g_i \alpha(v_i, v_{i+1}))^k, v_{i+1}^k) = \\ &= (g^* g_i^k \alpha(v_i, v_{i+1})^k, v_{i+1}^k) = (g'_i \alpha(v_i^k, v_{i+1}^k), v_{i+1}^k) = (g'_i \alpha(v'_i, v'_{i+1}), v'_{i+1}) = (g'_{i+1}, v'_{i+1}) \end{aligned}$$

luego efectivamente Γ^α es t -arco transitivo. Más aún, si $G_1 < \text{Aut}(\Gamma)$ actúa regularmente en el conjunto de k -arcos de Γ , entonces $G \times G_1 < \text{Aut}(\Gamma^\alpha)$ actúa regularmente en el conjunto de k -arcos de Γ^α . ■

Dados un digrafo Γ y un grupo G arbitrarios, es probable que las todas las elevaciones Γ^α que admita Γ sea isomorfas a $|G|$ componentes conexas, cada una de ellas isomorfa a Γ (diremos entonces que las elevaciones son *triviales*). Además, el requisito de que exista una asignación de voltaje α compatible con las acciones de K en G y en $A(\Gamma)$ es bastante restrictivo.

Sin embargo, es posible elegir el grupo G (dependiendo del digrafo Γ) de manera que exista siempre un elevaciones Γ^α no trivial. Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo t -arco transitivo. Definimos G como el \mathbb{Z}_2 -módulo libre en el conjunto de arcos A (de hecho, G es un \mathbb{Z}_2 -espacio vectorial). Esto es, G es el producto directo de $|A|$ copias de \mathbb{Z}_2 y sus elementos son los productos formales $x = \prod_{a \in A} a^{x_a}$ con $x_a \in \{0, 1\}$. Entonces $\text{Aut}(\Gamma)$ actúa en G de modo natural por su acción en el conjunto de arcos A , es decir, la acción de $\text{Aut}(\Gamma^\alpha)$ en G se define para cada $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma^\alpha)$ y para cada $\prod_{a \in A} a^{x_a} \in G$ como $(\prod_{a \in A} a^{x_a})^\sigma = \prod_{a \in A} (a^\sigma)^{x_a}$. Más aún, existe una asignación de voltaje de Γ en G definida por $\alpha(u, v) = a$ donde $a = (u, v) \in A$ se considera ahora como elemento de G . La asignación de voltaje α así definida es compatible con las acciones de $\text{Aut}(\Gamma)$ en G y en A (i.e. $\alpha(a^k) = \alpha(a)^k$). Así, por el Teorema 3.6.1 la elevación Γ^α , es un digrafo t -arco transitivo.

Consideremos ahora, $C^1 = (u = u_0, u_1, \dots, u_l = u)$ y $C^2 = (v = v_0, v_1, \dots, v_m = v)$ las secuencias de vértices de dos ciclos (dirigidos) en Γ . Diremos que los ciclos C^1 y C^2 son *independientes* si sus respectivas secuencias de arcos $((u, u_1) \cdots (u_{l-1}, u))$ y $(v, v_1) \cdots (v_{m-1}, v)$ consideradas como elementos del \mathbb{Z}_2 -espacio vectorial G son independientes.

En el caso no dirigido, el número de ciclos independientes t coincide con el llamado *co-rango* del grafo y el cardinal $|A| - t$ coincide con el llamado *rango* del grafo, por afán de completitud definimos a continuación.

Dado $\Gamma = (V, E)$ un grafo no dirigido, sean $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ el conjunto de vértices y $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ el conjunto de aristas. Asignemos una orientación arbitraria a Γ . Esto es,

asignamos una orientación $\vec{}$ a cada arista $e_j = \{v_i, v_l\} \in E$. Diremos que $\vec{e}_j = (v_i, v_l)$ si la orientación de la arista e_j es tal que v_i es adyacente hacia v_l , o bien $\vec{e}_j = (v_l, v_i)$ en el otro caso.

Definimos la matriz de incidencia $D(\Gamma)$ del grafo Γ con respecto a la orientación dada a Γ , como la matriz con entradas de medida $n \times m$ cuyas entradas d_{ij} son:

$$d_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si } \vec{e}_j = (v_i, v) \\ -1 & \text{si } \vec{e}_j = (v, v_i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea Γ un grafo no dirigido de orden n y tamaño m , con c componentes conexas. Se definen el *rango* y el *co-rango* de Γ como $r(\Gamma) = n - c$ y $s(\Gamma) = m - n + c$ respectivamente.

En [10] se demuestra que la matriz $D(\Gamma)$ definida anteriormente define una aplicación lineal, cuyo ker es un espacio vectorial de dimensión igual al co-rango de Γ . Además, si Q es un ciclo en Γ , entonces la representación de Q en la base $\{e_1, \dots, e_m\}$, pertenece al ker de la aplicación lineal definida por $D(\Gamma)$.

En el caso de un digrafo $\Gamma = (V, A)$ de cuello $g \geq 3$, podemos considerar la teoría anterior aplicada al grafo subyacente de Γ . Asignemos al grafo subyacente de Γ la orientación dada por el conjunto de arcos $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Entonces, un ciclo dirigido C en Γ tiene representación en la base $\{a_1, \dots, a_m\}$ con coeficientes todos positivos (o nulos). Además, el ker de la aplicación lineal definida por $D(\Gamma)$ contiene también los ciclos no dirigidos del grafo subyacente. Por eso en este caso, hablamos en el Teorema siguiente 3.6.2 del número de ciclos dirigidos independientes t , y no de $s(\Gamma)$ el co-rango de Γ .

En estas condiciones, se verifica el siguiente Teorema:

Teorema 3.6.2 *Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo conexo t -arco transitivo y s el número de ciclos (dirigidos) independientes en Γ . Entonces, con G , $K = \text{Aut}(\Gamma)$ y α definidos como anteriormente, el recubrimiento Γ^α consta de $2^{|A|-s}$ componentes conexas isomorfas, cada una de las cuales de orden $2^s|V|$.*

Demostración. Sea $v \in \Gamma$ y Γ_0^α la componente conexa de Γ^α que contiene el vértice $(1, v)$. Si:

$$v = u_0, u_1, \dots, u_l = v$$

son los vértices de un ciclo en Γ , con arcos $a_i = (u_{i-1}, u_i)$, entonces Γ_0^α contiene el siguiente camino

$$(1, v), (a_1, u_1), (a_1 a_2, u_2), \dots, (a_1 a_2 \dots a_l, v)$$

De manera similar, si $v = u_0, u_1, \dots, u_l = v$ es un recorrido cerrado en Γ y g es la secuencia de arcos $(v, u_1) \dots (u_{l-1}, v)$ considerada como elemento de G , entonces $((v, u_1) \dots (u_{l-1}, v), v)$ pertenece a la componente conexa de $(1, v)$, Γ_0^α .

A la inversa, si un vértice $(g, v) \in V(\Gamma^\alpha)$ pertenece a la componente conexa Γ_0^α entonces existe un camino de $(1, v)$ a (g, v) en Γ_0^α , y por lo tanto g representa a un recorrido cerrado conteniendo a v en Γ . Como existen s ciclos independientes Γ , entonces existen 2^s elementos g en G tales que $(g, v) \in \Gamma_0^\alpha$. Esto implica que $|V(\Gamma^\alpha)| = 2^s|V|$.

Además, Γ^α es vértice transitivo por el Teorema 3.6.1, luego cada componente conexa tiene el mismo orden. Finalmente,

$$|V(\Gamma^\alpha)| = |V||G| = 2^{|A|}|V|$$

implica que hay un total de $2^{|A|-s}$ componentes (fuertemente) conexas. ■

Notemos que como suponemos que Γ es conexo, entonces $s > 0$ y las componentes conexas Γ_0^α no son isomorfas al digrafo de base Γ .

Este resultado cumple el objetivo de esta sección, que es la construcción de una cadena de infinita de recubrimientos k -arco transitivos de un digrafo regular conexo arbitrario.

Sea Γ un digrafo regular conexo y sea Γ_k un recubrimiento k -arco transitivo de Γ obtenido con nuestra técnica (Teorema 3.4.1). Sea G el \mathbb{Z}_2 -módulo libre en el conjunto de arcos $A(\Gamma_k)$ y α la asignación de voltaje de Γ_k en G definida por $\alpha(u, v) = a$ donde $a = (u, v) \in A(\Gamma_k)$ se considera ahora como elemento de G . Sea $(\Gamma_k)^\alpha$ la elevación de Γ_k por la asignación de voltaje α . Entonces, por el Teorema 3.6.1, $(\Gamma_k)^\alpha$ es un digrafo k -arco transitivo y por el Teorema 3.6.2, una componente conexa de $(\Gamma_k)^\alpha$ arbitraria, $(\Gamma_k)_0^\alpha$, no es isomorfa a Γ_k (y $(\Gamma_k)_0^\alpha$ es un digrafo k -arco transitivo).

Así, tenemos

$$(\Gamma_k)_0^\alpha \longrightarrow \Gamma_k \longrightarrow \Gamma$$

una cadena de recubrimientos k -arco transitivos de Γ .

Denotemos $\Gamma_{k+1} = (\Gamma_k)_0^\alpha$, y sea ahora G_1 el \mathbb{Z}_2 -módulo libre en el conjunto de arcos $A(\Gamma_{k+1})$ y α_1 la asignación de voltaje de Γ_{k+1} en G_1 definida por $\alpha_1(u, v) = a$ donde $a = (u, v) \in A(\Gamma_{k+1})$ se considera ahora como elemento de G_1 . Entonces la elevación $(\Gamma_{k+1})^{\alpha_1}$ es un digrafo k -arco transitivo y una componente conexa de $(\Gamma_{k+1})^{\alpha_1}$ arbitraria, $(\Gamma_{k+1})_0^{\alpha_1}$, no es isomorfa a Γ_{k+1} . Denotamos $\Gamma_{k+2} = (\Gamma_{k+1})_0^{\alpha_1}$ y definimos iterativamente recubrimientos k -arco transitivos Γ_{k+i} de Γ_{k+i-1} para $i \geq 3$.

En definitiva, obtenemos una cadena infinita de recubrimientos k -arco transitivos del digrafo de partida Γ

$$\cdots \Gamma_{k+i} \longrightarrow \Gamma_{k+i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma_{k+2} \longrightarrow \Gamma_{k+1} \longrightarrow \Gamma_k \longrightarrow \Gamma$$

donde $\Gamma_{k+i} \not\cong \Gamma_{k+i-1}$ para $i \geq 1$.

En cualquier caso, observemos que la técnica de construcción elevaciones por una asignación de voltaje no es una técnica de construcción de digrafos k -arco transitivos. Para construir una cadena infinita de recubrimientos k -arco transitivos de un digrafo regular, necesitamos igualmente construir un primer recubrimiento k -arco transitivo de Γ , que nos proporciona nuestra técnica.

Capítulo 4

Construcción de recubrimientos k -arco transitivos de grado pequeño

4.1 Introducción

El conocimiento de todas las 1-factorizaciones k -uniformes de un digrafo k -línea iterado $L^k\Gamma$ nos permite encontrar todos los recubrimientos k -arco transitivos de Γ que podemos construir con nuestra técnica. En el capítulo anterior hemos visto que las 1-factorizaciones k -uniformes del digrafo k -línea iterado $L^k\Gamma$ son justamente aquellas 1-factorizaciones F tal que el recubrimiento de Cayley $\overline{L^k\Gamma}_F$ es a su vez un digrafo k -línea iterado de algún digrafo Γ_0 . Recordemos además que este digrafo Γ_0 es un digrafo k -arco transitivo y un recubrimiento del digrafo de partida Γ .

En este capítulo, daremos una caracterización de las 1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea en términos de cuadrados latinos uniformes y una fórmula para conocer el cardinal de 1-factorizaciones 1-uniformes de un digrafo línea r -regular en función del cardinal de cuadrados latinos uniformes de orden r (Teorema 4.2.3). Si S es un conjunto de cardinal r , definimos un cuadrado latino de orden r como una matriz cuadrada de orden r con entradas en S tal que cada fila y cada columna contienen una sólo vez cada uno de los elementos de S . Diremos que un cuadrado latino es uniforme si para cualesquiera $1 \leq i, j \leq r$, $i \neq j$, la columna i -ésima la podemos permutar con la j -ésima, y mediante filas permutaciones de filas y permutaciones de columnas (menos la columna j -ésima), podemos obtener de nuevo el cuadrado latino original. (Véanse las definiciones precisas en la sección siguiente).

Además, en este capítulo presentaremos una caracterización de los cuadrados latinos uniformes con la que es prácticamente inmediato determinar si un cuadrado latino es uniforme o no. La caracterización enuncia que un cuadrado latino es uniforme si y sólo si un determinado conjunto de permutaciones que se asocia al cuadrado latino forma un grupo (Teorema 4.2.2).

En la sección 4.2.3 utilizamos esta caracterización para determinar todos los cuadrados latinos de orden r con $r \leq 5$. Esto nos permite calcular todos los recubrimientos arco transitivos de digrafos línea de grado r con $r \leq 5$, y en particular, aplicaremos el resultado a las familias de digrafos completos con bucles y de digrafos bipartitos completos.

Por último en este capítulo, estudiaremos el problema de determinar cuándo un grupo de permutaciones es el grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme de un digrafo

línea. (Nos limitaremos a grupos de permutaciones transitivos de grado menor o igual que 7). Con este propósito, presentaremos una nueva caracterización de los digrafos Cayley línea de grado pequeño que generaliza el Teorema 3.2.1 en estos casos.

4.2 1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea

En esta sección daremos una caracterización de las 1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea en términos de cuadrados latinos, que nos será muy útil a nivel práctico para calcular todos los recubrimientos arco transitivos de un digrafo dado que se pueden obtener con nuestra técnica.

4.2.1 Preliminares sobre cuadrados latinos

Utilizaremos para esta sección la notación de cuadrados latinos y automorfismos de [83].

Un *cuadrado latino de orden r* es una cuatrupla $(R, C, S; L)$ donde R , C y S son conjuntos de cardinal r y L es una aplicación $L : R \times C \rightarrow S$ tal que para cada $i \in R$ y $x \in S$, la ecuación

$$L(i, j) = x$$

tiene una única solución $j \in C$, y para cada $j \in C, x \in S$ la misma ecuación tiene una única solución $i \in R$. Esto es, cualesquiera dos de $i \in R, j \in C, x \in S$ determinan de forma única un tercero de manera que $L(i, j) = x$.

Sea $(R, C, S; L)$ un cuadrado latino, los elementos de R se llaman *filas*, los elementos de C se llaman *columnas*, y los elementos de S son los *símbolos* o *entradas* del cuadrado latino.

Un cuadrado latino lo representaremos normalmente como una matriz $r \times r$ donde la entrada (i, j) es el símbolo $L(i, j)$. En la siguiente figura mostramos un ejemplo de un cuadrado latino de orden 5, cuya construcción generaliza de manera obvia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sea ahora $(R, C, S; L)$ un cuadrado latino de orden r . Sea Q un conjunto de cardinal r y π_R, π_C, π_S biyecciones de R, C, S en Q . Entonces, esta terna de biyecciones induce una operación binaria \oplus en Q de la siguiente manera:

$$q_1 \oplus q_2 = \pi_S(L(\pi_R^{-1}(q_1), \pi_C^{-1}(q_2)))$$

para $q_1, q_2 \in Q$.

La definición de cuadrado latino nos asegura entonces que (Q, \oplus) es un semigrupo. Diremos entonces que (Q, \oplus) es un semigrupo *asociado* a $(R, C, S; L)$. En general, diferentes elecciones de biyecciones π_R, π_C, π_S dan lugar a diferentes semigrupos. Diremos que el cuadrado latino $(R, C, S; L)$ es *la tabla de composición de un grupo* (H, \cdot) cuando un semigrupo (Q, \oplus) asociado a $(R, C, S; L)$ es isomorfo a (H, \cdot) (y entonces todo semigrupo con elemento identidad asociado al mismo cuadrado latino es también isomorfo a (H, \cdot)). Para más detalles al respecto véase [6].

Dados ahora $(R, C, S; L)$ un cuadrado latino de orden r y

$$\sigma : R \longrightarrow R'$$

$$\tau : C \longrightarrow C'$$

$$\pi : S \longrightarrow S'$$

biyecciones entre conjuntos, podemos definir la aplicación $L' : R' \times C' \rightarrow S'$ de la siguiente manera

$$L'(i, j) = \pi(L(\sigma^{-1}(i), \tau^{-1}(j)))$$

para $(i, j) \in R' \times S'$. Es inmediato que la cuatrupla $(R', C', S'; L')$ así definida es también un cuadrado latino. Estos dos cuadrados latinos $(R, C, S; L)$ y $(R', C', S'; L')$ se dicen entonces *equivalentes* o *isomorfos*, lo cual claramente es una relación de equivalencia. En el caso particular en que $S = S'$ y π sea la identidad, diremos que los cuadrados latinos son *estrictamente isomorfos* o *s-isomorfos*.

En particular, el *cuadrado latino de la tabla de composición* de un grupo (H, \cdot) se define como $R = C = S = H$ y $L(r, c) = rc$. Un cuadrado latino $(R, C, S; L)$ es la tabla de composición de un grupo (H, \cdot) si y sólo si el cuadrado latino de la tabla de composición de (H, \cdot) es isomorfo a $(R, C, S; L)$.

Con esta noción de isomorfía entre cuadrados latinos, a partir de ahora podemos asumir sin pérdida de generalidad que los cuadrados latinos tienen como conjuntos $R = C = S = \{1, 2, \dots, r\}$ y $L(1, j) = L(j, 1) = j$ para $1 \leq j \leq r$, es decir, la primera columna y la primera fila tienen los enteros de 1 a r en este orden. En este caso, se dice que el cuadrado latino está *normalizado* (o también *reducido* o en *forma estándar*).

De manera similar se define el *grupo de automorfismos de un cuadrado latino* $(R, C, S; L)$, como el conjunto de ternas de biyecciones

$$\sigma : R \rightarrow R, \tau : C \rightarrow C \text{ y } \pi : S \rightarrow S$$

tal que $L(\sigma(i), \tau(j)) = \pi(L(i, j))$ (y se demuestra que efectivamente forman un grupo con la operación binaria dada por la composición de cada una de las biyecciones). Denotaremos el grupo de automorfismos de un cuadrado latino $(R, C, S; L)$ por $\text{Aut}(R, C, S; L)$.

Análogamente, se define el grupo de automorfismos $s - \text{Aut}(R, C, S; L)$ de un cuadrado latino $(R, C, S; L)$, como el conjunto de automorfismos $(\sigma, \tau, \pi) \in \text{Aut}(R, C, S; L)$ tales que π es la identidad en el conjunto de símbolos S . Se demuestra fácilmente que $s - \text{Aut}(R, C, S; L)$ es un subgrupo normal de $\text{Aut}(R, C, S; L)$.

Nótese que ambos grupos de automorfismos $\text{Aut}(R, C, S; L)$ y $s - \text{Aut}(R, C, S; L)$ de un cuadrado latino $(R, C, S; L)$ actúan de manera natural en el conjunto de columnas C y en el conjunto de filas R . Más aún, el grupo $s - \text{Aut}(R, C, S; L)$ actúa semiregularmente en conjunto de filas (o de columnas) del cuadrado latino. Si $(\sigma, \tau, \pi) \in s - \text{Aut}(R, C, S; L)$ y $\sigma(i) = i$ para algún $i \in R$, entonces $L(\sigma(i), \tau(j)) = L(i, \tau(j)) = L(i, j)$ implica que $\tau(j) = j$ para todo $j \in C$, y entonces $L(\sigma(r), \tau(j)) = L(\sigma(r), j) = L(r, j)$ implica que $\sigma(r) = r$ para todo $r \in R$.

4.2.2 Cuadrados latinos uniformes y 1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea

Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo r -regular conexo línea y $u \in V$. Entonces el digrafo Γ_u^1 es un digrafo bipartito semicompleto $K_{r,r}$, con conjuntos estables $V_0 = \{\Gamma^- \Gamma^+(u) \times \{0\}\}$ y $V_1 = \{\Gamma^+(u) \times \{1\}\}$, y con conjunto de arcos todos los arcos posibles de V_0 a V_1 .

Dado $u \in V$, una 1-factorización F de Γ induce una 1-factorización de Γ_u^1 , (F, ϕ) , de modo natural, con $\phi : A(\Gamma_u^1) \rightarrow F$ la aplicación definida por $((x, i), (x^f, i + 1)) \mapsto f$ para cada arco $((x, i), (x^f, i + 1))$ de Γ_u^1 .

Recíprocamente, por la caracterización de Heuchenne de digrafos línea (Teorema 1.3.2), tenemos que $\{\Gamma^- \Gamma^+(u) : u \in V\}$ es una partición del conjunto de vértices V . Sea $\mathcal{R} = \{u_1, \dots, u_s\}$ un conjunto minimal de vértices de Γ con respecto a la propiedad $V = \cup_{u_i \in \mathcal{R}} \Gamma^- \Gamma^+(u_i)$. Entonces $s = \frac{|V|}{r}$.

Observemos que una 1-factorización de uno de los digrafos $\Gamma_{u_i}^1$ induce de modo natural una asignación de colores en un subconjunto de arcos de Γ . Dados $(\Gamma_{u_1}^1, F_1), \dots, (\Gamma_{u_s}^1, F_s)$, con F_i una 1-factorización de $\Gamma_{u_i}^1$, entonces $(\Gamma_{u_1}^1, F_1), \dots, (\Gamma_{u_s}^1, F_s)$ induce de modo natural una 1-factorización F de Γ . Para cada arco $(u, v) \in A$, existe un único $u_i \in \mathcal{R}$ tal que $u \in \Gamma^- \Gamma^+(u_i)$ y definimos el color de (u, v) como f_j si $(u, 0)^{f_{ij}} = (v, 1)$, donde $F_i = \{f_{i1}, \dots, f_{ir}\}$.

Con esta notación, una 1-factorización de Γ será 1-uniforme si y sólo si Γ verifica los siguientes dos puntos:

- los digrafos arco-coloreados $(\Gamma_{u_j}^1, F_j)$, con F_j la 1-factorización natural dada por F , son isomorfos a uno cualquiera de ellos, p. ej. $(\Gamma_{u_1}^1, F_1)$, para todo $u_j \in \mathcal{R}$, y
- para cada $u \in \Gamma^- \Gamma^+(u_1)$, también $(\Gamma_u^1, F_u) \simeq (\Gamma_{u_1}^1, F_1)$, con F_u la 1-factorización de Γ_u^1 dada por F .

Dado $u \in V$, diremos que una 1-factorización F_u de Γ_u^1 es *uniforme* si verifica que para cada $v \in \Gamma^- \Gamma^+(u)$, existe $\phi \in s - \text{Aut}(\Gamma_u^1, F_u)$ tal que $\phi(u, 0) = (v, 0)$. Con otras palabras, si existe un automorfismo ϕ de Γ_u^1 que preserva la 1-factorización F_u y tal que $\phi(u, 0) = (v, 0)$.

Por otro lado, podemos asociar a cada digrafo arco-coloreado (Γ_u^1, F_u) un cuadrado latino $(V_0, V_1, F_u; L)$ donde

$$L : V_0 \times V_1 \longrightarrow F_u$$

es la aplicación definida por $L((x, 0), (y, 1)) = f$ si $(x, 0)^f = (y, 1)$.

Teorema 4.2.1 *Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo línea regular y $u \in V$. Sea F_u una 1-factorización de Γ_u^1 , y $(V_0, V_1, F_u; L)$ el cuadrado latino asociado a (Γ_u^1, F_u) .*

Entonces, F_u es una 1-factorización uniforme de Γ_u^1 si y sólo si el grupo de automorfismos $s - \text{Aut}(V_0, V_1, F_u; L)$ del cuadrado latino $(V_0, V_1, F_u; L)$ actúa regularmente en el conjunto de filas V_0 .

Demostración. Recordemos que si $K_{r,r}$ es un digrafo bipartito semicompleto con conjuntos estables V_0 y V_1 , entonces $\text{Aut}(K_{r,r}) = \mathcal{S}_r \times \mathcal{S}_r$, donde $(\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_r \times \mathcal{S}_r$ actúa en $V_0 \sqcup V_1$ como $\sigma(x)$ cuando $x \in V_0$, y como $\tau(y)$ cuando $y \in V_1$.

Consideremos la aplicación

$$\Phi : s - \text{Aut}(\Gamma_u^1, F_u) \longrightarrow s - \text{Aut}(V_0, V_1, F_u; L)$$

tal que $\phi \mapsto (\sigma, \tau, Id)$, donde $\sigma(x) = \phi(x)$ para $x \in V_0$, y $\tau(y) = \phi(y)$ para $y \in V_1$. La aplicación Φ está bien definida en tanto que cualquier automorfismo ϕ del digrafo bipartito semicompleto Γ_u^1 verifica necesariamente $\phi(V_0) = V_0$ y $\phi(V_1) = V_1$. Además, claramente Φ es una biyección pues Γ_u^1 se identifica con el cuadrado latino $(V_0, V_1, F_u; L)$ y a través de esta identificación se identifican a su vez los automorfismos de Γ_u^1 preservadores de la 1-factorización F_u con los s -automorfismos del cuadrado latino. También es inmediato comprobar que ϕ es un homomorfismo de grupos, luego un isomorfismo. Más aún, las acciones de $s - \text{Aut}(\Gamma_u^1, F_u)$ y de $s - \text{Aut}(V_0, V_1, F_u; L)$ en V_0 son permutacionalmente equivalentes.

Si F_u es una 1-factorización uniforme de Γ_u^1 , para cada $(v, 0) \in V_0$ existe $\phi \in s - \text{Aut}(\Gamma_u^1, F_u)$ tal que $\phi(u, 0) = (v, 0)$. Esto implica que el grupo de automorfismos preservador de colores $s - \text{Aut}(\Gamma_u^1, F_u)$ actúa transitivamente en el subconjunto de vértices V_0 .

Más aún, afirmamos que $s - \text{Aut}(\Gamma_u^1, F_u)$ actúa regularmente en V_0 . Dados $(u, 0), (v, 0) \in V_0$ cualesquiera, veamos que existe un único $\phi \in s - \text{Aut}(\Gamma_u^1, F_u)$ tal que $\phi(u, 0) = (v, 0)$. Por un lado, $\phi((u, 0)^f) = (v, 0)^f$ para cada $f \in F_u$, con lo que imagen de ϕ de cada elemento de V_1 queda determinada. Y por otro lado, si fijamos $z \in V_1$, entonces $\phi(z^{f'^{-1}}) = \phi(z)^{f'^{-1}}$ para cada $f' \in F_u$, lo que determina las imágenes por ϕ de cada elemento de V_0 .

Finalmente, a través del isomorfismo Φ , el grupo $s - \text{Aut}(\Gamma_u^1, F_u)$ actúa regularmente en V_0 si y sólo si $s - \text{Aut}(V_0, V_1, F_u; L)$ actúa regularmente en el conjunto de filas V_0 . ■

Sea $(R, C, S; L)$ un cuadrado latino, diremos que $(R, C, S; L)$ es *uniforme* si $s - \text{Aut}(R, C, S; L)$ actúa regularmente en R . De hecho, nótese que $s - \text{Aut}(R, C, S; L)$ actúa regularmente en R si y sólo si actúa regularmente en C .

Se pueden caracterizar los cuadrados latinos uniformes en términos de permutaciones discordantes.

Decimos que dos permutaciones de un conjunto de símbolos S son *discordantes* si ningún símbolo tiene la misma imagen bajo ambas permutaciones. Como ejemplo de conjunto de permutaciones discordantes dos a dos, tomemos (Γ, F) un digrafo arco-coloreado sin bucles. La 1-factorización $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ como conjunto de permutaciones en el conjunto de vértices del digrafo es un conjunto de permutaciones discordantes dos a dos.

Sea r el cardinal del conjunto S . Decimos que un conjunto de permutaciones discordantes dos a dos en S es *completo* si tiene cardinal r .

En [26] se establece una correspondencia 1-1 entre cuadrados latinos de orden r y conjuntos completos de permutaciones discordantes de grado r de la siguiente manera. Identificaremos cada fila $i \in R$ del cuadrado latino con la permutación $\delta_i \in S_r$ tal que $j^{\delta_i} = L(i, j)$ para cada $j \in C$. Es inmediato comprobar que efectivamente el conjunto de las permutaciones correspondientes a las filas de un cuadrado latino, $\{\delta_1, \dots, \delta_r\}$, forma un conjunto completo de permutaciones discordantes.

Por ejemplo, el siguiente cuadrado latino

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Figura 4.1: Cuadrado latino de orden 5 no uniforme

se corresponde con el conjunto completo de permutaciones discordantes siguiente:

$$\{(), (1, 2)(3, 4, 5), (1, 3, 5)(2, 4), (1, 4, 3)(2, 5), (1, 5, 4)(2, 3)\}.$$

Teorema 4.2.2 *Sea $(R, C, S; L)$ un cuadrado latino normalizado de orden r . Entonces $(R, C, S; L)$ es uniforme si y sólo si el conjunto completo de permutaciones discordantes asociado a $(R, C, S; L)$ es un subgrupo de S_r permutacionalmente equivalente a la acción de $s - \text{Aut}(R, C, S; L)$ en C .*

Demostración. Si $(R, C, S; L)$ es uniforme, entonces $s - \text{Aut}(R, C, S; L)$ actúa regularmente en C y en R . Consideremos

$$s - \text{Aut}(R, C, S; L) = \{(\sigma_1, \tau_1, Id), \dots, (\sigma_r, \tau_r, Id)\}$$

donde los automorfismos están ordenados de manera que $\sigma_i(i) = 1$.

Entonces, para cada $r_0 \in R$, la biyección τ_{r_0} queda determinada de la siguiente manera

$$L(r_0, i) = L(\sigma_{r_0}(r_0), \tau_{r_0}(i)) = L(1, \tau_{r_0}(i)) = \tau_{r_0}(i)$$

lo que es justamente la fila r_0 considerada como permutación de \mathcal{S}_r .

Por otra parte, si el conjunto de permutaciones correspondientes a las filas de $(R, C, S; L)$ es un subgrupo de \mathcal{S}_r , como son permutaciones discordantes, entonces es un subgrupo que actúa regularmente en $\{1, \dots, r\}$. Así, $s - \text{Aut}(R, C, S; L)$ también actúa regularmente en C (luego en R), y $(R, C, S; L)$ es uniforme. ■

Esta proposición es una herramienta muy útil para determinar si un cuadrado latino normalizado es uniforme o no. Por ejemplo, el cuadrado latino de la Figura 4.1 no es uniforme por el Teorema anterior 4.2.2, pues el conjunto completo de permutaciones discordantes asociado no es un subgrupo de \mathcal{S}_r .

Como corolario inmediato del Teorema 4.2.2, se caracterizan los cuadrados latinos uniformes como los cuadrados latinos que sean la tabla de composición de algún grupo.

Corolario 4.2.1 *Sea Q un cuadrado latino $(R, C, S; L)$ normalizado de orden r . Entonces Q es un cuadrado latino uniforme si y sólo si Q es la tabla de composición de un grupo (H, \cdot) . En tal caso, H es isomorfo al grupo formado por el conjunto completo de permutaciones discordantes asociado a Q .*

Demostración. Supongamos en primer lugar que Q es la tabla de composición de un grupo (H, \cdot) . Entonces existen π_R, π_C, π_S biyecciones de R, C, S en el conjunto de elementos del grupo H , tales que la operación binaria de composición de H es la siguiente:

$$h_1 \cdot h_2 = \pi_S(L(\pi_R^{-1}(h_1), \pi_C^{-1}(h_2)))$$

para cualesquiera $h_1, h_2 \in H$.

Consideremos el conjunto completo de permutaciones discordantes $\{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ asociado a Q donde cada permutación $\delta_i \in \mathcal{S}_r$ viene definida por $j^{\delta_i} = L(i, j)$ para cada $i \in R$ y cada $j \in C$.

A través de las biyecciones π_R, π_C, π_S , cada permutación δ_i se corresponde con una permutación $\gamma_{\pi_R(i)} \in \text{Sym}(H)$ definida por $h^{\gamma_{\pi_R(i)}} = \pi_S(\pi_C^{-1}(h)^{\delta_i})$ para cada $h \in H$. Pero,

$$h^{\gamma_{\pi_R(i)}} = \pi_S(\pi_C^{-1}(h)^{\delta_i}) = \pi_S(L(i, \pi_C^{-1}(h))) = \pi_R(i) \cdot h$$

Esto es, el conjunto completo de permutaciones discordantes está en correspondencia con la representación por permutaciones a la izquierda del grupo H . Entonces, como el conjunto de permutaciones $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ es un subgrupo de $\text{Sym}(H)$ isomorfo a H , el conjunto completo de permutaciones discordantes es un subgrupo de \mathcal{S}_r (isomorfo a H). Por el Teorema 4.2.2, Q es un cuadrado latino uniforme.

Supongamos ahora que Q es un cuadrado latino uniforme y veamos que es la tabla de composición de un grupo (H, \cdot) . Tomemos $H = \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ el conjunto completo de permutaciones discordantes asociado a Q , donde $\delta_i \in \mathcal{S}_r$ se define como $j^{\delta_i} = L(i, j)$ para cada $i \in R$ y cada $j \in C$. Por el Teorema 4.2.2, H así definido es un subgrupo de \mathcal{S}_r . Notemos que δ_i verifica $1^{\delta_i} = i$, luego $\delta_k \circ \delta_i = \delta_r$ con $r = 1^{\delta_i \delta_k}$.

Sean $\pi_R, \pi_C, \pi_S : \{1, \dots, r\} \rightarrow H$ las biyecciones definidas como $\pi_R(i) = \pi_C(i) = \pi_S(i) = \delta_i$ para $i \in \{1, \dots, r\}$. Entonces,

$$\delta_k \circ \delta_i = \pi_S(L(\pi_R^{-1}(\delta_k), \pi_C^{-1}(\delta_i))) = \delta_{L(k,i)} = \delta_{1^{\delta_i \delta_k}},$$

con lo que demostramos que Q es la tabla de composición de H . ■

A continuación, veremos que el cómputo general de todas las 1-factorizaciones 1-uniformes de un digrafo línea regular de grado r , puede hacerse si conocemos todos los cuadrados latinos uniformes de orden r . En el caso general, Brunat [12] demuestra que el número de 1-factorizaciones (salvo permutaciones de colores) de un digrafo línea regular de orden n y grado r es $L(r)^{\frac{n}{r}}$, donde $L(r)$ es el número de cuadrados latinos de orden r (sin normalizar).

Sea Γ un digrafo línea r -regular conexo de orden n , y sea $\mathcal{R} = \{u_1, \dots, u_{n/r}\}$ un conjunto de vértices de Γ tal que

$$V = \bigcup_{u_i \in \mathcal{R}} \Gamma^- \Gamma^+(u_i),$$

o equivalentemente,

$$\Gamma^- \Gamma^+(u_i) \cap \Gamma^- \Gamma^+(u_j) = \emptyset$$

siempre que $i \neq j$.

Vimos anteriormente que una 1-factorización F de Γ induce una 1-factorización F_i de Γ_{u_i} para cada $1 \leq i \leq \frac{n}{r}$. Sea Q_i el cuadrado latino correspondiente a (Γ_{u_i}, F_i) . Entonces, si la 1-factorización F de Γ es 1-uniforme, los cuadrados latinos Q_1, \dots, Q_r son estrictamente isomorfos a uno cualquiera de ellos, Q_i , que es un cuadrado latino uniforme.

Recíprocamente, un conjunto de digrafos arco-coloreados $(\Gamma_{u_1}^1, F_1), \dots, (\Gamma_{u_{n/r}}^1, F_s)$ induce de modo natural una 1-factorización F de Γ .

Sea Q un cuadrado latino normalizado uniforme de orden r arbitrario. Si asociamos a cada digrafo $\Gamma_{u_i}^1$ una 1-factorización F_i tal que el cuadrado latino normalizado correspondiente Q_i es isomorfo a Q , entonces la 1-factorización F de Γ obtenida es 1-uniforme.

El enunciado del Teorema de enumeración de 1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea está formulado en términos del cardinal L_r de cuadrados latinos normalizados. Por cuadrados latinos diferentes entendemos simplemente que, si los representamos como matrices $r \times r$, tienen al menos una entrada diferente (luego varias entradas diferentes). Veremos a lo largo de la sección que

$$L_2 = 1, L_3 = 1, L_4 = 4, L_5 = 6, L_6 = 60.$$

Observamos que dos cuadrados latinos normalizados diferentes pueden ser isomorfos. Por ejemplo, veamos que los siguientes cuadrados latinos normalizados de orden 4 son diferentes e isomorfos :

$$Q_1 = (R_1, C_1, S_1; L_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = (R_2, C_2, S_2; L_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean $\sigma : R_1 \rightarrow R_2, \tau : C_1 \rightarrow C_2, \pi : S_1 \rightarrow S_2$ las biyecciones definidas por las permutaciones $\sigma = (1423), \tau = (34), \pi = (1423)$. Entonces (σ, τ, π) es un isomorfismo de Q_1 en Q_2 .

Notemos además que si el cardinal de cuadrados latinos normalizados de un cierto orden r es mayor que uno, entonces los digrafos línea r -regulares de orden estrictamente mayor que

r admiten 1-factorizaciones no 1-uniformes. Por ejemplo, tomemos Q_1 y Q_2 dos cuadrados latinos normalizados de orden 4 diferentes. Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo línea de grado 4 con orden n , $n > 4$ (entonces $n \geq 8$). En particular, existen $u_1, u_2, \dots, u_{n/r} \in V$ tales que $\Gamma^- \Gamma^+(u_i) \cap \Gamma^- \Gamma^+(u_j) = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. Sea F_1 una 1-factorización de $\Gamma_{u_1}^1$ tal que el cuadrado latino asociado a $(\Gamma_{u_1}^1, F_1)$ sea isomorfo a Q_1 , sea F_2 una 1-factorización de $\Gamma_{u_2}^1$ tal que el cuadrado latino asociado a $(\Gamma_{u_2}^1, F_2)$ sea isomorfo a Q_2 , y sean

$$(\sigma_1, \tau_1, \pi_1) : (\Gamma^- \Gamma^+(u_1) \times \{0\}, \Gamma^+(u_1) \times \{1\}, L_1; F_{u_1}) \longrightarrow Q_1$$

$$(\sigma_2, \tau_2, \pi_2) : (\Gamma^- \Gamma^+(u_1) \times \{0\}, \Gamma^+(u_2) \times \{1\}, L_2; F_{u_2}) \longrightarrow Q_1$$

los isomorfismos correspondientes. Escribamos $F_1 = \{f_1^1, \dots, f_4^1\}$ y $F_2 = \{f_1^2, \dots, f_4^2\}$ de modo que $\pi_1(f_i^1) = i$ y $\pi_2(f_i^2) = i$.

Sean F_i arco-coloraciones arbitrarias del resto de los Γ_{u_i} .

Definimos $F = \{f_1, \dots, f_4\}$ la 1-factorización de Γ dada por $(\Gamma_{u_1}^1, F_1), \dots, (\Gamma_{u_4}^1, F_4)$, donde f_i es inducida por f_i^1 en $\Gamma_{u_1}^1$ y por f_i^2 en $\Gamma_{u_1}^2$ para cada $1 \leq i \leq 4$. Entonces F es una 1-factorización no 1-uniforme de Γ , puesto que $(\Gamma_{u_1}^1, F_1)$ y $(\Gamma_{u_2}^1, F_1)$ no son estrictamente isomorfos.

Esta construcción de 1-factorizaciones no 1-uniformes de un digrafo, generaliza fácilmente para grado mayor, pues los cuadrados latinos normalizados uniformes de orden mayor no son únicos.

Teorema 4.2.3 *Sea $\Gamma = (V, A)$ un digrafo r -regular conexo línea de orden n y L_r el número de cuadrados latinos normalizados uniformes de orden r (no necesariamente no isomorfos).*

Entonces, el número de 1-factorizaciones 1-uniformes de Γ es

$$(r-1)! \frac{n}{r} r! \frac{n}{r} - 1 L_r$$

Demostración. Sea Q un cuadrado latino normalizado uniforme de orden r y $\mathcal{R} = \{u_1, \dots, u_{n/r}\}$ un conjunto de vértices de Γ tal que $V = \cup_{u_i \in \mathcal{R}} \Gamma^- \Gamma^+(u_i)$. Calcularemos por separado el número de 1-factorizaciones uniformes de cada Γ_{u_i} con cuadrado latino isomorfo a Q .

Fijemos $u_1 \in \mathcal{R}$, y consideremos $\Gamma^+(u_1)$. Podemos fijar los colores de los arcos de u_1 a $\Gamma^+(u_1)$ sin pérdida de generalidad, y obtener todas las 1-factorizaciones de Γ (salvo permutaciones de colores).

Fijados los colores de los arcos de u_1 a $\Gamma^+(u_1)$, faltan por determinar los colores de todos los arcos de $\Gamma_{u_1}^1$ incidentes desde $V_0 \setminus \{(u_1, 0)\}$. Para un cuadrado latino Q fijado, esto es equivalente a asignar a cada vértice de $V_0 \setminus \{(u_1, 0)\}$ un número de fila (menos la de $(u_1, 0)$). Hay $(r-1)!$ maneras diferentes de asignar las filas restantes a estos $r-1$ vértices.

Para el resto de los digrafos Γ_{u_i} con $i \neq 1$, únicamente podemos fijar la fila de un vértice del primer conjunto estable, por ejemplo $(u_i, 0)$. Entonces hay $(r-1)!$ maneras diferentes de asignar un número de fila a los vértices de $V_0 \setminus \{(u_i, 0)\}$, y $r!$ maneras diferentes de asignar un número de columna a los vértices de V_1 . En total, $(r-1)!r!$ maneras diferentes de posicionar $V(\Gamma_{u_i}^1) \setminus \{(u_i, 0)\}$.

Entonces, para un cuadrado latino Q dado el número de 1-factorizaciones de Γ (asociadas a Q) es:

$$(r-1)! \prod_{i=2}^{n/r} ((r-1)!r!) = (r-1)! \frac{n}{r} r! \frac{n}{r} - 1 \blacksquare$$

En particular, el número de 1-factorizaciones 1-uniformes de un digrafo línea depende únicamente de su grado y su orden. Así, dos digrafos línea del mismo grado y con el mismo orden tienen el mismo número de 1-factorizaciones 1-uniformes.

Por último, notemos que el grupo de automorfismos de un digrafo actúa de modo natural en el conjunto de 1-factorizaciones del digrafo. Dado $\Gamma = (V, A)$ un digrafo, la acción de $\text{Aut}(\Gamma)$ en el conjunto de 1-factorizaciones de Γ es la siguiente. Para cada $\sigma \in \text{Aut}(\Gamma)$ y cada 1-factorización (F, ϕ) de Γ , definimos (F, ϕ_σ) como la 1-factorización de Γ donde $\phi_\sigma : A \rightarrow F$ es tal que como $\phi_\sigma(u, v) = \phi(\sigma^{-1}(u), \sigma^{-1}(v))$ para $(u, v) \in A$.

Además, obsérvese que cuando el digrafo Γ es k -línea iterado, la acción de $\text{Aut}(\Gamma)$ en el conjunto de 1-factorizaciones de Γ envía 1-factorizaciones k -uniformes a 1-factorizaciones k -uniformes. Diremos que dos 1-factorizaciones F_1 y F_2 de un digrafo son *equivalentes* si existe un automorfismo del digrafo que envía F_1 a F_2 . En particular, si dos 1-factorizaciones de un digrafo son equivalentes, se verifica que los cuadrados latinos asociados asociados son isomorfos. Obviamente, 1-factorizaciones equivalentes generan grupos de permutaciones isomorfos, y lo que es más, los recubridores de Cayley correspondientes a 1-factorizaciones equivalentes son isomorfos.

4.2.3 1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea de grado pequeño

En esta sección, calcularemos el número de cuadrados latinos normalizados de orden r con $2 \leq r \leq 5$. Aplicaremos los resultados al cálculo de todas las 1-factorizaciones 1-uniformes de algunos digrafos línea de estos grados, como el digrafo de Kautz $K(3, 2)$, los digrafos completos con bucles K_r^+ , o los digrafos bipartitos completos $K_{r,r}^+$, para $2 \leq r \leq 5$. Además, calcularemos algunas propiedades de los recubridores de Cayley resultantes.

1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea de grados 2 y 3

Hay un único cuadrado latino normalizado de orden 2 y un único cuadrado latino normalizado de orden 3, que son los siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

En el primer caso el conjunto completo de permutaciones discordantes asociado es $\{(), (1, 2)\}$, y en el segundo $\{(), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$. En ambos casos se trata obviamente de cuadrados latinos uniformes.

En particular, como los cuadrados latinos normalizados de orden 2 y orden 3 son únicos, todas las 1-factorizaciones de digrafos línea de estos grados son 1-uniformes. Por el Teorema 3.3.1, esto es equivalente a que todos los recubridores de Cayley de un digrafo línea de grado 2 o grado 3 sean a su vez digrafos línea.

Además, como la demostración del Teorema 4.2.3 es constructiva, sabemos cómo calcular explícitamente todas las 1-factorizaciones 1-uniformes de un digrafo línea. Aplicamos esta construcción al digrafo completo con bucles de grado 3, K_3^+ , y al digrafo de Kautz de grado 3 y diámetro 2, $K(3, 2)$. Son digrafos línea del (multi)digrafo completo con un único vértice y tres bucles, K_1^3 , y del digrafo completo K_4 , respectivamente.

Consideremos en primer lugar $\Gamma = K_3^+ = LK_1^3$ y $u \in V(\Gamma)$ arbitrario. Entonces como $\frac{n}{r} = \frac{|V(\Gamma)|}{3} = 1$, una 1-factorización (1-uniforme) de Γ se corresponde con una 1-factorización

$G = G(K_3^+, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones	Clases de equivalencia	$\text{Aut}(K_3^+, F)$
\mathbb{Z}_3	3	1	1	\mathcal{S}_3
\mathcal{S}_3	6	1	1	\mathcal{S}_3

Tabla 4.1: 1-factorizaciones 1-uniformes de K_3^+

(uniforme) de Γ_u^1 (que es isomorfo a $K_{3,3}$). Fijemos los colores de los arcos de u hacia $\Gamma^+(u)$ (esto es, fijemos los colores de los arcos de $(u, 0)$ hacia $(v, 1)$ en $K_{3,3}$). Entonces hay dos 1-factorizaciones diferentes en $K_{3,3}$. Es decir, $K_{3,3}$ sólo se puede arco-colorear de dos maneras diferentes (salvo permutaciones de colores). Véanse los grupos de permutaciones resultantes de estas 1-factorizaciones de K_3^+ resultantes en la Tabla 4.1. Los grupos de permutaciones de estas 1-factorizaciones así como del resto de las Tablas de esta sección han sido calculados implementado diversas rutinas en el sistema GAP de teoría computacional de grupos (véase [43]).

Sea ahora $\Gamma = K(3, 2) = \text{LK}_4$. El digrafo Γ tiene orden 12, luego son $\frac{12}{3} = 4$ bloques en la partición $\{\Gamma^-\Gamma^+(u) : u \in V(\Gamma)\}$. Sean $u_1, u_2, u_3, u_4 \in V(\Gamma)$ tales que $V(\Gamma) = \cup_{i=1}^4 \Gamma^-\Gamma^+(u_i)$. Entonces una 1-factorización de Γ se corresponde con 1-factorizaciones cualesquiera F_1, F_2, F_3, F_4 de $\Gamma_{u_1}, \Gamma_{u_2}, \Gamma_{u_3}, \Gamma_{u_4}$ respectivamente.

Fijemos los colores de los arcos de u_1 hacia $\Gamma^+(u_1)$ en Γ . Esto equivale a fijar los colores de $(u_1, 0)$ hacia los vértices de V_1 en $\Gamma_{u_1}^1$. Entonces hay $(r-1)! = 2! = 2$ maneras diferentes de colorear los arcos restantes de $\Gamma_{u_1}^1$.

Sea Γ_{u_i} con $u_i \neq u_1$. Entonces hay $r!(r-1)! = 6 \cdot 2 = 12$ arco-coloraciones diferentes de Γ_{u_i} . Esto da un total de $2 \cdot 12^3 = 3456$ arco-coloraciones diferentes de Γ , salvo permutaciones de colores. Véanse los grupos de permutaciones resultantes en la Tabla 4.2. Obsérvese que se encuentran al menos tres grupos de permutaciones no isomorfos de cardinal 96. Comprobaremos más adelante también en otras tablas que grupos de permutaciones del mismo cardinal no son necesariamente isomorfos. También es destacable el hecho de que 1-factorizaciones generan el mismo grupo de permutaciones pueden tener grupos de automorfismos coloreados distintos.

En lo que se refiere a las clases de equivalencia de 1-factorizaciones 1-uniformes, consideremos de nuevo los ejemplos anteriores K_3^+ y $K(3, 2)$. Sabemos que los grupos de automorfismos de ambos son no nulos, en el primer caso $\text{Aut}(K_3^+) = \mathcal{S}_3$ y en el segundo $\text{Aut}(K(3, 2)) = \mathcal{S}_4$. Es fácil comprobar computacionalmente una vez conocemos los grupos de automorfismos de ambos digrafos, que las dos 1-factorizaciones de K_3^+ no son equivalentes, y que las 3456 arco-coloraciones de $K(3, 2)$ se distribuyen en 190 clases de equivalencia distintas. Véanse cómo se distribuyen estas clases de equivalencia en mismas las Tablas 4.1 y 4.2, en las que consta además el grupo de automorfismos arco-coloreados $\text{Aut}(\Gamma, F)$ de los diferentes digrafos arco-coloreados (Γ, F) (entre paréntesis escribimos el número de 1-factorizaciones que dan lugar al mismo grupo de automorfismos arco-coloreados).

1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea de grado 4

Consideremos ahora digrafos línea de grado 4. Existe cuatro cuadrados latinos normalizados de orden 4 diferentes que son los siguientes¹ :

¹Éstos son los únicos cuadrados latinos normalizados de orden $r = 4$, pero el número crece rápidamente. Por ejemplo, para $r = 5$ el número de cuadrados latinos normalizados es 56, para $r = 6$ es 9408 y para $r = 7$ es

$G = G(K(3, 2), F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones	Clases de equivalencia	$\text{Aut}(K(3, 2), F)$
\mathcal{A}_4	12	1	1	\mathcal{S}_4
al menos 3 no iso	96	7	3	$D(8) (2), \mathcal{S}_4 (1)$
?	120	6	1	\mathbb{Z}_4
$\frac{1}{3}[\mathbb{Z}_3^4] \rtimes \mathcal{A}_4$	324	4	1	\mathcal{S}_3
$\mathbb{Z}_3 \wr \mathcal{A}_4$	972	16	2	\mathbb{Z}_3
$\mathbb{Z}_2^5 \rtimes PSL_2(5)$	1920	6	1	V_4
$\mathbb{Z}_3 \wr \mathcal{S}_4$	1944	24	4	$\mathbb{Z}_3 (2), \mathcal{S}_3 (2)$
$\mathbb{Z}_2^5 \rtimes PGL_2(5)$	3840	12	2	V_4
$\mathbb{Z}_2^5 \rtimes \mathcal{A}_6$	11520	12	2	$V_4 (1), \mathbb{Z}_4 (1)$
$\frac{1}{2}[\mathcal{S}_3^4] \rtimes \mathcal{S}_4$	15552	48	4	\mathbb{Z}_2
$\mathbb{Z}_2^5 \rtimes \mathcal{S}_6$	23040	24	2	\mathbb{Z}_2
$M(12)$	95040	44	4	$\mathbb{Z}_2 (3), \mathbb{Z}_3 (1)$
\mathcal{A}_{12}	$12!/2$	1572	81	$\mathbb{Z}_3 (1), \mathcal{S}_3 (1), \mathbb{Z}_2 (28), \mathbb{Z}_1 (51)$
\mathcal{S}_{12}	$12!$	1680	82	$\mathbb{Z}_3 (2), \mathcal{S}_3 (2), \mathbb{Z}_2 (18), \mathbb{Z}_1 (59)$

Tabla 4.2: 1-factorizaciones 1-uniformes de $K(3, 2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que los tres primeros cuadrados latinos corresponden a la tabla de composición del grupo \mathbb{Z}_4 y el último a la del grupo de Klein $V_4 = \mathbb{Z}_2^2$, luego, a pesar de ser cuadrados latinos diferentes, los tres primeros son isomorfos entre sí.

En cualquier caso, los conjuntos completos de permutaciones discordantes de los cuadrados latinos anteriores son respectivamente:

$$\{(), f = (1, 2, 3, 4), f^2, f^3\}$$

$$\{(), f = (1, 2, 4, 3), f^3, f^2\}$$

$$\{(), f^2, f = (1, 3, 2, 4), f^3\}$$

$$\{(), (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}.$$

En todos los casos los conjuntos completos de permutaciones discordantes forman un grupo, luego todos los cuadrados latinos normalizados de orden 4 son uniformes.

Apliquemos este resultado a un digrafo línea de grado 4 como es el digrafo completo con bucles K_4^+ . Es un digrafo línea de un (multi)digrafo con un único vértice y cuatro arcos múltiples, K_1^4 . Por la fórmula del Teorema 4.2.3, sabemos que existen $3! \cdot 4 = 24$ arco-coloraciones uniformes

$G = G(K_4^+, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones	Clases de equivalencia	$\text{Aut}(K_4^+, F)$
$V_4 = \mathbb{Z}_2^2$	4	1	1	\mathcal{S}_4
\mathbb{Z}_4	4	3	1	$D(8)$
$D(8)$	8	6	2	$D(8)$
\mathcal{A}_4	12	2	1	\mathcal{A}_4
\mathcal{S}_4	24	12	1	\mathbb{Z}_2

Tabla 4.3: 1-factorizaciones 1-uniformes K_4^+

diferentes de K_4^+ . También conocemos el grupo de automorfismos de K_4^+ que es $\text{Aut}(K_4^+) = \mathcal{S}_4$, luego podemos calcular las diferentes clases de equivalencia de 1-factorizaciones por el grupo de automorfismos. En este caso, las 1-factorizaciones se distribuyen en 6 clases diferentes de equivalencia. Tres clases de equivalencia se encuentran con 1-factorizaciones dadas por cualquiera de los tres primeros cuadrados latinos, y las otras tres por las 1-factorizaciones dadas por el último cuadrado latino. En concreto, con el cuadrado latino que corresponde a la tabla de composición del grupo de Klein se obtienen los grupos de permutaciones V_4 , $D(8)$ y \mathcal{A}_4 , y con cualquiera de los cuadrados latinos que corresponden a la tabla de composición del grupo cíclico \mathbb{Z}_4 se obtienen los grupos de permutaciones \mathbb{Z}_4 , $D(8)$ y \mathcal{S}_4 . En la Tabla 4.3 se muestran los resultados.

Como no hay un único cuadrado latino normalizado de orden 4 existen 1-factorizaciones de digrafos línea de grado 4 que no son 1-uniformes.

1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea de grado 5

Hay seis cuadrados latinos normalizados uniformes de orden 5² :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Por el Teorema 4.2.3, esto hace un total de $(r-1)!6 = 24 \cdot 6 = 144$ arco-coloraciones 1-uniformes del digrafo completo con bucles K_5^+ . Sabiendo además que el grupo de automorfismos es $\text{Aut}(K_5^+) = \mathcal{S}_5$, podemos clasificar las 1-factorizaciones 1-uniformes en clases de equivalencias por automorfismos del digrafo. Resultan un total de 6 clases de equivalencia diferentes por automorfismos del digrafo. Además, las 1-factorizaciones de K_5^+ que se encuentran con uno cualquiera de los seis cuadrados latinos proporcionan representantes de las 6 clases de

²Hay 60 cuadrados latinos normalizados uniformes de orden 6. Orden 6 es el primer orden para el que existen cuadrados latinos normalizados y simétricos que no son uniformes.

$G = G(K_5^+, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones	Clases de equivalencia	$\text{Aut}(K_5^+, F)$
\mathbb{Z}_5	5	6	1	$\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$
$\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_2$	10	6	1	$\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$
$\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$	20	12	2	$\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$
\mathcal{A}_5	60	60	1	\mathbb{Z}_2
\mathcal{S}_5	120	60	1	\mathbb{Z}_2

Tabla 4.4: 1-factorizaciones 1-uniformes de K_5^+

$G = G(K_{3,3}^+, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones	Clases de equivalencia	$\text{Aut}(K_{3,3}^+, F)$
\mathbb{Z}_6	6	6	1	$D(12) = \mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$
\mathcal{S}_3	6	2	1	\mathcal{S}_3^2
$\mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$	18	4	1	$\mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$
$\mathbb{Z}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}_4$	36	12	1	\mathcal{S}_3

Tabla 4.5: 1-factorizaciones 1-uniformes de $K_{3,3}^+$

equivalencia posibles. Véanse las 1-factorizaciones resultantes y el correspondiente grupo de automorfismos arco-coloreado en la Tabla 4.4.

Además, existen 50 cuadrados latinos normalizados de orden 5 que no son uniformes. Las 1-factorizaciones de K_5^+ que se correspondan con alguno de estos cuadrados latinos no son 1-uniformes, o con otras palabras, el recubridor de Cayley de K_5^+ con una de estas 1-factorizaciones, no es un digrafo línea. En total, K_5^+ tiene $24 \cdot 50 = 1200$ arco-coloraciones no 1-uniformes.

Por último, aplicamos esta construcción de todas las 1-factorizaciones 1-uniformes a los digrafos bipartitos completos $K_{r,r}^+$ (o $C(r, 2)$) para $3 \leq r \leq 5$. Los digrafos completos $K_{r,r}^+$ son digrafos línea de los (multi)digrafos con dos únicos vértices y r arcos múltiples de uno de ellos hacia el otro. Recordemos además que

$$\text{Aut}(K_{r,r}^+) = \mathcal{S}_r \wr \mathbb{Z}_2 = \mathcal{S}_r^2 \rtimes \mathbb{Z}_2.$$

En las Tablas 4.5, 4.6 y 4.7 se muestran los resultados.

4.3 Digrafos de Cayley k -línea iterados de grado pequeño

En la siguiente sección estudiaremos el problema de la representación de grupos transitivos (de grado pequeño) como grupos de permutaciones de 1-factorizaciones k -uniformes de digrafos k -línea iterados. Esto es, el problema de determinar cuándo un grupo de permutaciones G verifica que es un grupo de permutaciones de una 1-factorización F de algún digrafo k -línea iterado Γ y tal que el recubrimiento $\Gamma_F = \text{Cay}(G, F)$ es también un digrafo k -línea iterado.

Con este propósito, introducimos en esta sección nuevas caracterizaciones de digrafos de Cayley k -línea iterados.

$G = G(K_{4,4}^+, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones	Clases de equivalencia	$\text{Aut}(K_{4,4}^+, F)$
\mathbb{Z}_8	8	36	1	$[\frac{1}{4}D(8)^2] \times \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	8	54	2	$\mathbb{Z}_2^3 \times D(8) (1), \mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_2^2 (1)$
\mathbb{Z}_2^3	8	6	1	$\mathbb{Z}_2^3 \times \mathcal{S}_4$
$D(8)$	8	54	2	$\mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_2^2 (1), \frac{1}{2}[\mathbb{Z}_2^4] \times D(8) (1)$
$Q(8)$	8	18	1	$\frac{1}{2}[\mathbb{Z}_2^4] \times D(8)$
$\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4$	16	36	1	$\mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_4$
$\frac{1}{2}[\mathbb{Z}_2^3] \times \mathbb{Z}_4$	16	36	1	$\mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_2$
$\mathcal{A}_4 \times \mathbb{Z}_2$	24	48	1	$\mathcal{A}_4 \times \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_4$	32	216	3	$D(8) \times \mathbb{Z}_2$
$\frac{1}{2}[\mathbb{Z}_2^4] \times \mathbb{Z}_4$	32	72	1	$\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_4$
$\mathbb{Z}_2^2 \times D(8)$	32	48	1	\mathcal{S}_4
$\mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$	48	288	1	V_4
$\mathbb{Z}_2^4 \times \mathbb{Z}_4$	64	288	1	V_4
$\mathbb{Z}_2^3 \times \mathcal{A}_4$	96	240	2	$D(8) (1), \mathcal{A}_4 (1)$
$\mathbb{Z}_2^3 \times \mathcal{S}_4$	192	288	1	V_4
$[\frac{1}{2}\mathcal{S}_4^2] \times \mathbb{Z}_2$	576	576	2	$\mathbb{Z}_4 (1), V_4 (1)$
$\frac{1}{2}[\mathcal{S}_4^2] \times \mathbb{Z}_2$	576	1152	4	$\mathbb{Z}_2 (1), V_4 (1), D(8) (2)$

Tabla 4.6: 1-factorizaciones 1-uniformes de $K_{4,4}^+$

$G = G(K_{5,5}^+, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
\mathbb{Z}_{10}	10	720
$D(10)$	10	144
$\frac{1}{2}[D(20)] \times \mathbb{Z}_2$	20	1440
$\mathbb{Z}_5^2 \times \mathbb{Z}_2$	50	2016
$\frac{1}{2}[D(5)^2] \times \mathbb{Z}_2$	100	1440
$\mathcal{A}_5 \times \mathbb{Z}_2$	120	7200
$\frac{1}{5}[\mathcal{S}_5] \times \mathbb{Z}_2$	120	7200
$[\mathbb{Z}_5^4 \times \mathbb{Z}_4] \times \mathbb{Z}_2$	200	5760
$\mathcal{A}_5^2 \times \mathbb{Z}_2$	7200	187200
$\frac{1}{2}[\mathcal{S}_5^2] \times \mathbb{Z}_2$	14400	201600

Tabla 4.7: 1-factorizaciones 1-uniformes de $K_{5,5}^+$

Proposición 4.3.1 Sea $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ un digrafo de Cayley con $|S| = r$. Existe un (multi)digrafo r -regular Γ_0 (posiblemente con arcos múltiples) tal que $\Gamma = \text{L}\Gamma_0$ si y sólo si SS^{-1} es un subgrupo de G de orden r .

Demostración. *Necesidad:* (Se demuestra idénticamente que en la prueba del Teorema 3.2.1). Supongamos que $\Gamma = \text{L}\Gamma_0$ para algún (multi)digrafo Γ_0 . Consideremos el conjunto xS^{-1} para $x \in S$. Para cada $y \in S$, se verifica:

$$1 \in xS^{-1} \cap yS^{-1} = \Gamma^{-1}(x) \cap \Gamma^{-1}(y)$$

Entonces, el Corolario 1.3.1 implica $H = xS^{-1} = yS^{-1} = SS^{-1}$ y $|H| = r$. En particular, $H = xS^{-1}$ para cada $x \in S$, así como $H = Sz$ para cada $z \in S^{-1}$. Luego, $H^2 = (Sx^{-1})(xS^{-1}) = H$, y por tanto H es un subgrupo de G .

Suficiencia: Sea ahora $H = SS^{-1}$ un subgrupo de G de orden r . En particular, podemos escribir $H = xS^{-1}$ para cualquier $x \in S$. Afirmamos ahora que el conjunto $\{\Gamma^{-1}(g) : g \in G\}$ es la partición de G en clases laterales por la izquierda de H en G , pues

$$gS^{-1} = gx^{-1}xS^{-1} = gx^{-1}H,$$

donde $x \in S$ arbitrario. Por el Teorema 1.3.2 y las Observaciones 1.3.1, Γ es un digrafo línea. ■

Se verifican resultados análogos para digrafos k -línea iterados regulares de grado pequeño.

Teorema 4.3.1 Sea $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ un digrafo de Cayley con $|S| = r$, donde $2 \leq r \leq 5$. Existe un (multi)digrafo r -regular Γ_0 (posiblemente con arcos múltiples) tal que $\Gamma = \text{L}^k\Gamma_0$ si y sólo si para cada $1 \leq s \leq k$, $H_s = S^sS^{-s}$ es un subgrupo de G de orden r^s .

Demostración. *Necesidad:* Se demuestra idénticamente que en la prueba del Teorema 3.2.1.

Suficiencia: Sean ahora $H_s = S^sS^{-s}$ subgrupos de orden r^s para $1 \leq s \leq k$. Esta hipótesis aplicada al digrafo inverso Γ^{-1} , entonces los conjuntos $K_l = S^{-l}S^l$ son también grupos de orden r^l para $1 \leq l < s$.

Afirmamos que $|S^s| = |S|^s$ para todo $1 \leq s \leq k$. Entonces, $\{\Gamma^{-k}(g) : g \in G\}$ es la partición de G en clases laterales por la izquierda de H_k en G :

$$gS^{-k} = gx^{-1}xS^{-k} = gx^{-1}H_k,$$

donde $x \in S^k$ arbitrario.

Por el Teorema 1.3.2 y las Observaciones 1.3.1, Γ será un digrafo k -línea iterado.

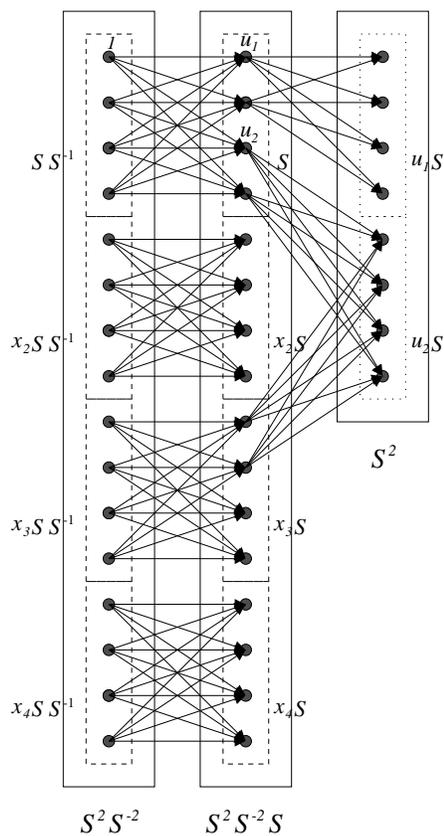
Demostremos a continuación por inducción que $|S^s| = |S|^s$ para todo $1 \leq s \leq k$, y la prueba del Teorema quedará concluida. El caso $s = 1$ es claro. Sea entonces $s > 1$. Supongamos que $|S^s| < |S|^s = r^s$ y llegaremos a contradicción. Por hipótesis de inducción tenemos $|H_l| = |S^lS^{-l}| = |S|^l = r^l$ para $1 \leq l \leq s - 1$.

Para todo $x \in H_l = S^lS^{-l}$ por definición de H_l se verifica:

$$\Gamma^l(1) \cap \Gamma^l(x) = S^l \cap xS^l \neq \emptyset.$$

Además, como por hipótesis de inducción Γ es l -línea iterado:

$$S^l = xS^l = S^lS^{-l}S^l = \Gamma^l(S^lS^{-l}) = \Gamma^l(H_l). \quad (4.1)$$

Figura 4.3: Caso $j = s = 2$ y $r = 4$

donde $y_1, y_2 \in S^{-1}$.

Consideremos ahora $H_s = \bigsqcup_{i=1}^4 x_i H_{s-1}$ la partición de H_s construida más arriba.

Por otra parte, el grupo H_s también se puede escribir como:

$$H_s = \Gamma^{-s}(S^s) = \Gamma^{-s}(u_1 S^{s-1} \sqcup u_2 S^{s-1}) = \Gamma^{-s}(u_1 S^{s-1}) \cup \Gamma^{-s}(u_2 S^{s-1}).$$

Por 4.1, $u_i S^{s-1} = u_i S^{s-1} K_{s-1}$ para cada $i = \{1, 2\}$. Además, en tanto que $|S^{s-1}| = |K_{s-1}|$, se verifica $u_i S^{s-1} K_{s-1} = u_i x K_{s-1}$ para $x \in S^{s-1}$ arbitrario. Por 4.3 se tiene:

$$\Gamma^{-s}(u_i S^{s-1}) = \Gamma^{-s}(u_i x K_{s-1}) = u_i x y_1 S^{-s+1} \sqcup u_i x y_2 S^{-s+1} = u_i x y_1 x^{-1} H_{s-1} \sqcup u_i x y_2 x^{-1} H_{s-1}$$

para cada $i \in \{1, 2\}$. Pero $H_{s-1} \subset \Gamma^{-s}(u_1 S^{s-1}) \cap \Gamma^{-s}(u_2 S^{s-1})$ implica que $\Gamma^{-s}(S^s)$ contiene como máximo tres partes diferentes $x_i H_{s-1}$ y no las cuatro, con lo que llegamos a contradicción. ■

4.4 Representación de grupos de permutaciones de grado pequeño

En esta sección estudiaremos la representación de grupos de permutaciones de grado pequeño como grupos de permutaciones de 1-factorizaciones k -uniformes de digrafos regulares k -línea iterados para $k = 1, 2$. Más en detalle, estudiaremos bajo qué condiciones un grupo de permutaciones es un grupo de permutaciones de una 1-factorización k -uniforme de algún digrafo regular k -línea iterado $L^k \Gamma_0$ de un (multi)digrafo Γ_0 de grado dado r .

La importancia de este estudio reside en el siguiente hecho. Si un grupo de permutaciones G es un grupo de permutaciones de una 1-factorización k -uniforme F de un digrafo regular k -línea iterado, el recubrimiento de Cayley de este digrafo, $\text{Cay}(G, F)$, es un digrafo k -línea iterado. Como el grupo G es un grupo de automorfismos de $\text{Cay}(G, S)$ que actúa regularmente en los vértices del digrafo y $\text{Aut}(\text{Cay}(G, S)) = \text{Aut}(L^{-k} \text{Cay}(G, S))$, entonces G actúa regularmente en el conjunto de k -arcos de $L^{-k} \text{Cay}(G, S)$. Desde este punto de vista, el problema de la representación de grupos de permutaciones k -arco transitivos ha sido estudiado en la literatura en [3, 17].

Como ejemplo sencillo, tomemos los únicos digrafos regulares k -línea iterados de grado 1, que son los ciclos C_m de orden m . Un ciclo dirigido admite una única 1-factorización F , cuyo grupo de permutaciones es el grupo cíclico \mathbb{Z}_m (que es un grupo transitivo de grado m). Obviamente, el recubrimiento de Cayley correspondiente, $\overline{(C_m)_F} = \text{Cay}(\mathbb{Z}_m, F)$, es nuevamente un ciclo y por lo tanto, un digrafo k -línea iterado. Así, la única 1-factorización que admite C_m es de hecho k -uniforme. Por lo tanto, concluimos que los grupos cíclicos \mathbb{Z}_m son los únicos grupos transitivos de grado m que son grupos de permutaciones de una 1-factorización k -uniforme de un digrafo 1-regular k -línea iterado de orden m . En adelante, estudiaremos entonces los digrafos regulares k -línea iterados de grado $r \geq 2$.

En general, tenemos que un grupo de permutaciones de una 1-factorización F de un digrafo conexo Γ actúa transitivamente en el conjunto de vértices de Γ . Denotemos por $G = G(\Gamma, F)$ el grupo de permutaciones de la 1-factorización $F = \{f_1, \dots, f_r\}$. Por definición del grupo de permutaciones de una 1-factorización, el conjunto $\{f_1, \dots, f_r\}$ es un conjunto de generadores de G . Y más aún, de la definición de 1-factorización, se tiene que $\{f_1, \dots, f_r\}$ es un conjunto de permutaciones discordantes en $V(\Gamma)$.

Consideremos ahora el caso en que el digrafo Γ sea un digrafo regular k -línea iterado. Sean n y r el orden y el grado de Γ respectivamente. Una 1-factorización F de Γ es k -uniforme si y sólo si el recubrimiento de Cayley, $\overline{\Gamma}_F = \text{Cay}(G, F)$, es a su vez un digrafo k -línea iterado (Teorema 3.3.1). Por la caracterización de digrafos de Cayley línea de la sección anterior (Proposición 4.3.1), el recubrimiento $\text{Cay}(G, F)$ es un digrafo línea si y sólo si el conjunto FF^{-1} es un subgrupo de G de cardinal $|F| = r$.

En conclusión, un grupo de permutaciones que actúa transitivamente en un conjunto Ω de cardinal n es un grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme de un digrafo línea Γ regular de orden n y grado r si y sólo si G se puede generar por un subconjunto $F \subseteq G$ de r permutaciones discordantes en Ω , y tal que el conjunto FF^{-1} sea un subgrupo de G de orden r . En este caso, el conjunto F es una clase lateral por la derecha del subgrupo FF^{-1} en G , pues si $H = FF^{-1} < G$, como $|FF^{-1}| = |F|$, se tiene $FF^{-1}x = F$ para cualquier $x \in F$. Esto es, $F = Hx$.

En el caso particular de la representación de grupos de permutaciones transitivos de grado r como grupos de permutaciones de 1-factorizaciones 1-uniformes del digrafo completo con

bucles K_r^+ , se puede dar una caracterización más sencilla. Este caso responde al problema de cuándo un grupo de permutaciones transitivo de grado r es el grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme de un digrafo línea regular de orden r y grado r . En caso afirmativo, el grupo de permutaciones actúa regularmente en el conjunto de vértices del recubrimiento de Cayley correspondiente, luego el grupo actúa regularmente también en el conjunto de arcos de un digrafo conexo regular del mismo grado r (que es el digrafo (-1) -línea iterado del recubrimiento de Cayley).

Veremos a continuación que los grupos de permutaciones de 1-factorizaciones 1-uniformes de K_r^+ con cuadrados latinos que sean la tabla de composición de un mismo grupo son isomorfos. Por lo tanto, si para un entero positivo r existen c grupos no isomorfos de orden r , los grupos de permutaciones transitivos de grado r que sean grupos de 1-factorizaciones 1-uniformes de K_r^+ se encuentran entre los grupos de las 1-factorizaciones 1-uniformes obtenidas con los c cuadrados latinos de las tablas de composición de los respectivos grupos de orden r . El resultado es el siguiente:

Teorema 4.4.1 Sean $Q = (R, C, S; L)$ y $Q' = (R', C', S'; L')$ dos cuadrados latinos normalizados uniformes de orden r que son la tabla de composición de un mismo grupo (H, \cdot) .

Entonces las 1-factorizaciones 1-uniformes del digrafo completo con bucles K_r^+ asociadas a Q son equivalentes a 1-factorizaciones 1-uniformes de K_r^+ asociadas a Q' por un automorfismo del digrafo K_r^+ .

En particular, los grupos de permutaciones generados por 1-factorizaciones 1-uniformes de K_r^+ asociadas a Q son isomorfos a los grupos de permutaciones de 1-factorizaciones 1-uniformes de K_r^+ asociadas a Q' .

Demostración. Escribamos el digrafo completo con bucles K_r^+ con conjunto de vértices $\{1, \dots, r\}$. Sean $\{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ y $\{\delta'_1, \dots, \delta'_r\}$ los conjuntos completos de permutaciones discordantes de Q y Q' respectivamente. Por el Corolario 4.2.1, el grupo H es el grupo generado por el conjunto completo de permutaciones discordantes asociado a Q (y a Q').

Sea F la 1-factorización de K_r^+ definida por Q , es decir, en la cual un arco $(j, k) \in A(K_r^+)$ está arco-coloreado por un color f_i si y sólo si $L(j, k) = i$, es decir, si $i = k^{\delta_j}$. Entonces, $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ donde $j^{f_i} = i^{\delta_j^{-1}}$ para $j \in V(K_r^+)$ y $1 \leq i \leq r$.

Análogamente, la 1-factorización F' de K_r^+ definida por Q' se define como $F' = \{f'_1, \dots, f'_r\}$ donde $j^{f'_i} = i^{\delta'_j^{-1}}$ para $j \in V(K_r^+)$ y $1 \leq i \leq r$.

Veamos en primer lugar que la 1-factorización de K_r^+ definida por Q es equivalente a la 1-factorización de K_r^+ definida por Q' .

Por el Corolario 4.2.1, tenemos que los cuadrados latinos Q y Q' son isomorfos. Esto es, existen biyecciones $\sigma : R \rightarrow R'$, $\tau : C \rightarrow C'$, y $\pi : S \rightarrow S'$, tal que

$$L'(i, j) = \pi(L(\sigma^{-1}(i), \tau^{-1}(j)))$$

para $(i, j) \in R' \times S'$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\sigma = \pi : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$, pues

$$\pi^{-1}(L'(i, j)) = L(\sigma^{-1}(i), \tau^{-1}(j))$$

y Q y Q' están normalizados, es decir, tienen los enteros de las respectivas primeras columnas y primeras filas de 1 a r en este orden. Así, para que la primera columna del cuadrado latino definido por $\pi^{-1}(L'(i, j))$ tenga los enteros de 1 a r en este orden $\sigma^{-1}(i) = \pi^{-1}(i)$ para $1 \leq i \leq r$.

Definamos la aplicación $\phi : V(K_r^+) \rightarrow V(K_r^+)$ por $i^\phi = \sigma(i)$ para $1 \leq i \leq r$. Claramente, ϕ es un automorfismo de K_r^+ .

Entonces, se verifica

$$\begin{aligned} (j^{\delta_k})^\phi &= \sigma(j^{\delta_k}) = \sigma(L(k, j)) = \pi(L(k, j)) = \\ &= \pi(L(\sigma^{-1}(\sigma(k)), \tau^{-1}(\tau(j)))) = L'(\sigma(k), \tau(j)) = \tau(j)^{\delta_{\sigma(k)}}, \end{aligned}$$

luego F y F' son equivalentes por el automorfismo ϕ .

Finalmente, como las 1-factorizaciones de K_r^+ asociadas a un cuadrado latino arbitrario M de orden r son 1-factorizaciones de K_r^+ definidas por un cuadrado latino \overline{M} que es simplemente una permutación de las filas de M , podemos concluir que las 1-factorizaciones de K_r^+ asociadas a Q son equivalentes a alguna de las 1-factorizaciones de K_r^+ asociadas a Q' . ■

A continuación, aplicamos estas observaciones a los casos particulares de grupos de permutaciones transitivos de grado n , donde $n \leq 7$. Las listas de estos grupos de permutaciones transitivos de grado pequeño se encuentran en [27], aunque por afán de completitud y debido a algunas imprecisiones, nos permitimos incluirlas en esta memoria.

4.4.1 Grupos de permutaciones transitivos de grado 4

En [27] se demuestra que los únicos grupos de permutaciones transitivos de grado 4 no permutacionalmente equivalentes son los cinco que se muestran en la Tabla 4.8.

	Order	Descripción	Generadores
T4.1	4	\mathbb{Z}_4	$(1, 2, 3, 4)$
T4.2	4	\mathbb{Z}_2^2	$(1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4)$
T4.3	8	$D(8) \simeq \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$	$(1, 2)(3, 4), (2, 4)$
T4.4	12	\mathcal{A}_4	$(1, 2)(3, 4), (2, 3, 4)$
T4.5	24	\mathcal{S}_4	$(1, 2, 3, 4), (1, 2)$

Tabla 4.8: Grupos de permutaciones transitivos de grado 4

Si un grupo de permutaciones transitivo de grado 4 es un grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme de un digrafo línea regular de orden 4, entonces el grado del digrafo tiene que ser necesariamente $r = 1, 2, 4$. En el caso $r = 2$, sólo existen dos digrafos línea 2-regulares de orden 4, que son el digrafo de De Bruijn $B(2, 2)$ y el digrafo bipartito completo $C(2, 2) = K_{2,2}^+$. En la sección 4.2.3 vimos que todas las 1-factorizaciones que admiten los digrafos línea 2-regulares son 1-uniformes, y en concreto, calculamos las 1-factorizaciones de $C(2, 2)$. Del mismo modo que para $C(2, 2)$, se construyen todas las 1-factorizaciones de $B(2, 2)$ y calculamos los grupos de permutaciones correspondientes. Resumimos los resultados en la Tabla 4.9. Obsérvese que el único grupo transitivo de grado 4 que no es un grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme de un digrafo línea 2-regular es el grupo simétrico \mathcal{S}_4 . Esto equivale a decir que el grupo simétrico \mathcal{S}_4 no puede ser generado por un subconjunto $F = \{f_1, f_2\}$ de dos permutaciones discordantes y tal que $FF^{-1} < \mathcal{S}_4$ sea un subgrupo de orden 2.

En el caso $r = 4$, un digrafo línea 4-regular de orden 4 es necesariamente el digrafo completo con bucles K_4^+ . En la sección 4.2.3 calculamos todas las 1-factorizaciones 1-uniformes de K_4^+ y

$G = G(B(2, 2), F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
$D(8)$	8	1
\mathcal{A}_4	12	1

$G = G(C(2, 2), F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
\mathbb{Z}_4	4	1
\mathbb{Z}_2^2	4	1

Tabla 4.9: Grupos de permutaciones de las 1-factorizaciones de los digrafos línea 2-regulares de orden 4

mostramos los resultados en la Tabla 4.3. Resumimos en la Tabla 4.10 los grupos de permutaciones de estas permutaciones. En concreto, obsérvese que todos los grupos de permutaciones transitivos de grado 4 son grupos de 1-factorizaciones 1-uniformes del digrafo completo con bucles K_4^+ .

$G = G(K_4^+, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
\mathbb{Z}_4	4	3
\mathbb{Z}_2^2	4	1
$D(8)$	8	6
\mathcal{A}_4	12	2
\mathcal{S}_4	24	12

Tabla 4.10: Grupos de permutaciones de 1-factorizaciones 1-uniformes de K_4^+

Por otra parte, si un grupo de permutaciones transitivo de grado 4 es un grupo de permutaciones de una 1-factorización 2-uniforme de un digrafo 2-línea iterado regular de orden 4, entonces el grado del digrafo tiene que ser necesariamente $r = 1$ ó 2 . En el caso $r = 2$, sólo existe un digrafo de orden 4 que sea 2-línea iterado de un multidigrafo 2-regular, que es el digrafo de De Bruijn $B(2, 2)$. Por lo tanto, el grupo \mathbb{Z}_4 (para la 1-factorización de C_4) y los grupos $D(8)$ y \mathcal{A}_4 (para las 1-factorizaciones de $B(2, 2)$), son los únicos grupos transitivos de orden 4 que representan 1-factorizaciones 2-uniformes de digrafos 2-línea iterados.

4.4.2 Grupos de permutaciones transitivos de grado 5

Se demuestra en [27] que los únicos grupos transitivos de grado 5 no permutacionalmente equivalentes son los cinco que se muestran en la Tabla 4.11.

Si un grupo de permutaciones transitivo de grado 5 es un grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme de un digrafo línea regular de orden 5, entonces el grado del digrafo tiene que ser necesariamente 1 ó 5, luego el digrafo es el ciclo dirigido C_5 o el digrafo completo con bucles K_5^+ . En la sección 4.2.3 calculamos todas las 1-factorizaciones 1-uniformes de K_5^+ y mostramos los resultados en la Tabla 4.4. Resumimos en la Tabla 4.12 los grupos de permutaciones de estas 1-factorizaciones. Obsérvese nuevamente que todos los grupos de permutaciones

	Order	Descripción	Generadores
T5.1	5	\mathbb{Z}_5	$(1, 2, 3, 4, 5)$
T5.2	10	$ASL_1(5) \simeq D(10)$	$(1, 2, 3, 4, 5), (2, 5)(3, 4)$
T5.3	20	$AGL_1(5) \simeq \mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$	$(1, 2, 3, 4, 5), (2, 3, 5, 4)$
T5.4	60	\mathcal{A}_5	$(1, 2, 3, 4, 5), (3, 4, 5)$
T5.5	120	\mathcal{S}_5	$(1, 2, 3, 4, 5), (1, 2)$

Tabla 4.11: Grupos de permutaciones transitivos de grado 5

transitivos de grado 5 son grupos de 1-factorizaciones 1-uniformes del digrafo completo con bucles K_5^+ .

$G = G(K_5^+, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
\mathbb{Z}_5	5	6
$D(10)$	10	6
$\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$	20	12
\mathcal{A}_5	60	60
\mathcal{S}_5	120	60

Tabla 4.12: Grupos de permutaciones de las 1-factorizaciones 1-uniformes de K_5^+

4.4.3 Grupos de permutaciones transitivos de grado 6

En [27] se demuestra que los únicos grupos de permutaciones transitivos de grado 6 no permutacionalmente equivalentes son los 16 que mostramos en la Tabla 4.13.

En este caso, nos encontramos grupos de un mismo orden no permutacionalmente equivalentes. Por ejemplo, hay tres grupos de orden 24 no permutacionalmente equivalentes. Los dos primeros, T6.5 y T6.6 son isomorfos al grupo simétrico \mathcal{S}_4 . El tercer grupo de 24 elementos, T6.8, no es isomorfo a \mathcal{S}_4 . De hecho, el grupo simétrico \mathcal{S}_4 actúa transitivamente en un conjunto de seis elementos con las dos acciones no permutacionalmente equivalentes siguientes. Una de las acciones (la que corresponde a T6.6) es el grupo de rotación de un octaedro actuando en los vértices del octaedro, y la otra es \mathcal{S}_4 actuando en los subconjuntos de dos elementos de $\{1, 2, 3, 4\}$ (que corresponde al grupo T6.5). En la primera acción el estabilizador de un elemento es isomorfo \mathbb{Z}_4 , y en la segunda acción es isomorfo a \mathbb{Z}_2^2 .

En la Tabla 4.13 también nos encontramos dos grupos transitivos de grado 6 y orden 36 no permutacionalmente equivalentes que denotamos por T6.10 y T6.11. En este caso, los grupos T6.10 y T6.11 no son isomorfos, pues por ejemplo, el grupo T6.10 contiene cuatro subgrupos normales y el grupo T6.11 contiene diez subgrupos normales.

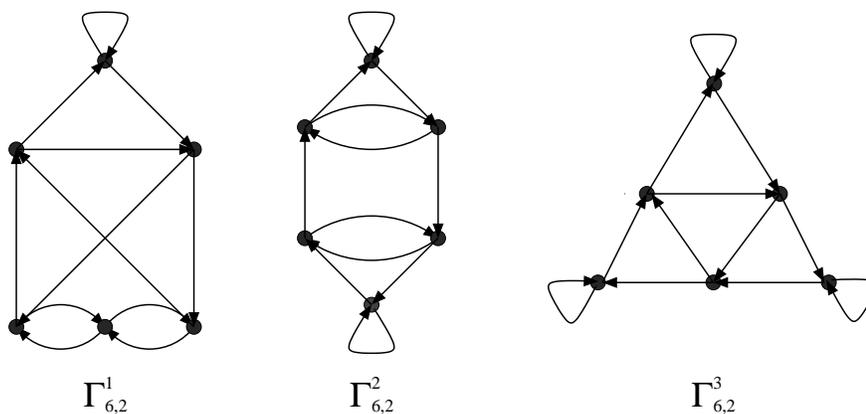
Si un grupo de permutaciones transitivo de grado 6 es un grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme de un digrafo línea regular de orden 6, entonces el grado del digrafo tiene que ser 1, 2, 3, 6. Estudiamos estos casos por separado en los siguientes apartados.

	Order	Descripción	Generadores
T6.1	6	\mathbb{Z}_6	$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$
T6.2	6	S_3	$(1, 2)(3, 4)(5, 6), (1, 3, 5)(2, 4, 6)$
T6.3	12	$D(12)$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 6)(2, 5)(3, 4)$
T6.7	12	$\mathcal{A}_6 \cap T6.6 \simeq \mathcal{A}_4$	$(1, 2, 3)(4, 5, 6), (1, 4)(2, 5)$
T6.12	18	$\mathbb{Z}_3 \wr \mathbb{Z}_2$	$(1, 2, 3), (1, 4)(2, 5)(3, 6)$
T6.5	24	$\mathcal{A}_6 \cap T6.4$	$(1, 2, 3)(4, 5, 6), (1, 2)(4, 5), (1, 4)(2, 5)$
T6.6	24	S_4	$(1, 2, 3)(4, 5, 6), (1, 5, 4, 2)$
T6.8	24	$\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$	$(1, 2, 3)(4, 5, 6), (1, 4)$
T6.10	36	$\mathcal{A}_6 \cap T6.9$	$(1, 2)(3, 4, 5, 6), (1, 5, 3)$
T6.11	36	$\mathbb{Z}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}_2^2$	$(1, 2, 3), (1, 2)(4, 5), (1, 4)(2, 5)(3, 6)$
T6.4	48	$S_2 \wr S_3$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 3, 5, 6)$
T6.14	60	$PSL_2(5)$	$(1, 2, 3, 4, 6), (1, 4)(5, 6)$
T6.9	72	$S_3 \wr \mathbb{Z}_2$	$(1, 2, 3), (1, 2), (1, 4)(2, 5)(3, 6)$
T6.13	120	$PGL_2(5)$	$(1, 2, 3, 4, 6), (1, 2)(3, 4)(5, 6)$
T6.15	360	\mathcal{A}_6	$(1, 2, 3, 4, 5), (4, 5, 6)$
T6.16	720	S_6	$(1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 2)$

Tabla 4.13: Grupos de permutaciones transitivos de grado 6

Digrafos línea 2-regulares de orden 6

Existen cinco digrafos línea 2-regulares de orden 6 no isomorfos. El ciclo generalizado completo $C(2, 3)$, el digrafo de Kautz $K(2, 2)$, y los digrafos $\Gamma_{6,2}^1, \Gamma_{6,2}^2$ y $\Gamma_{6,2}^3$ que se muestran en la Figura 4.4.

Figura 4.4: Digrafos 2-regulares de orden 6, $\Gamma_{6,2}^1$, $\Gamma_{6,2}^2$ y $\Gamma_{6,2}^3$

Tenemos que todas las 1-factorizaciones de digrafos línea de grado dos son 1-factorizaciones 1-uniformes (véase la sección 4.2.3). Utilizando la construcción de la demostración del Teorema 4.2.3 podemos construir todas las 1-factorizaciones 1-uniformes (que de hecho son todas las 1-factorizaciones posibles) de los cinco digrafos anteriores y calcular los correspondientes grupos de permutaciones. Mostramos los resultados obtenidos en la Tabla 4.14. Obsérvese que sólo 9 del total de 16 grupos posibles representan grupos de permutaciones de 1-factorizaciones

1-uniformes de digrafos línea 2-regulares de orden 6.

$G = G(C(2, 3), F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
\mathbb{Z}_6	6	4

$G = G(K(2, 2), F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
\mathcal{S}_3	6	1
$\mathcal{S}_2 \wr \mathcal{S}_3$	48	3

$G = G(\Gamma_{6,2}^1, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
$\mathcal{S}_3 \wr \mathbb{Z}_2$	72	2
$PGL_2(5)$	120	2

$G = G(\Gamma_{6,2}^2, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
$D(12)$	12	1
\mathcal{S}_4	24	1
\mathcal{S}_6	720	2

$G = G(\Gamma_{6,2}^3, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
$\mathbb{Z}_3 \wr \mathbb{Z}_2$	18	1
$PGL_2(5)$	120	3

Tabla 4.14: Grupos de permutaciones de las 1-factorizaciones de los digrafos línea 2-regulares de orden 6

En general, un grupo de permutaciones que actúa transitivamente en un conjunto Ω de cardinal n es un grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme de un digrafo línea 2-regular de orden n si y sólo si G se puede generar por un subconjunto $F \subseteq G$ de dos permutaciones discordantes en Ω , y tal que el conjunto FF^{-1} sea un subgrupo de G de orden 2, y por lo tanto isomorfo al grupo cíclico \mathbb{Z}_2 .

Una manera de verificar estas condiciones para un grupo de permutaciones G dado, consiste en lo siguiente. Consideremos sin pérdida de generalidad que G es un grupo multiplicativo y denotemos por I el elemento neutro de G . Si $F \subseteq G$ es un subconjunto tal que $|FF^{-1}| = 2$, entonces $FF^{-1} = \{I, a\}$ donde el elemento $a \in G$ es una involución, esto es $a^2 = I$. Escribamos $F = \{x, y\}$. Entonces $FF^{-1} = \{I, xy^{-1}\}$. Esto implica que $xy^{-1} = a$, luego $x = ay$. Así, el conjunto F se escribe como dos permutaciones discordantes de la forma $\{y, ay\}$, donde $a \in G$ es una involución.

Además, notemos que el conjunto $\{y, ay\}$ es un conjunto de generadores de G si y sólo si $\{y, a\}$ es un conjunto de generadores.

Entonces, un grupo de permutaciones transitivo de grado n es un grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme de un digrafo Γ línea regular de orden n y grado 2 si y sólo

si existen dos elementos $a, g \in G$ que generan G , donde $a^2 = I$, y tal que $F = \{g, ag\}$ son permutaciones discordantes. En tal caso, el digrafo Γ es la suma de las uniones arco-disjuntas de ciclos de las permutaciones g y ag .

Por último, afirmamos que no es necesario verificar las condiciones anteriores para todos los pares de elementos $a, g \in G$ donde a es una involución y g un elemento arbitrario, sino que podemos restringirnos a tomar g de un conjunto completo de representantes de las clases de conjugación de G , pues si $h, g \in G$ son dos elementos de G que pertenecen a una misma clase de conjugación, y $z \in G$ tal que $zhz^{-1} = g$, se verifica

$$\text{Cay}(G, \{h, ah\}) \simeq \text{Cay}(G, \{zhz^{-1}, zahz^{-1}\}) = \text{Cay}(G, \{g, zaz^{-1}g\})$$

donde zaz^{-1} es una involución.

En el caso particular que nos ocupa de los grupos de permutaciones transitivos de grado 6, podemos comprobar que los grupos de permutaciones que no se encuentran en la Tabla 4.14 no pueden ser generados por ningún subconjunto $\{a, g\}$ donde $a^2 = I$ y tal que $\{g, ag\}$ sean dos permutaciones discordantes.

Digrafos línea 3-regulares de orden 6

Existen tres digrafos línea 3-regulares de orden 6 no isomorfos. El ciclo generalizado completo $C(3, 2)$ y los digrafos $\Gamma_{6,3}^1$ y $\Gamma_{6,3}^2$ que se muestran en la Figura 4.5.

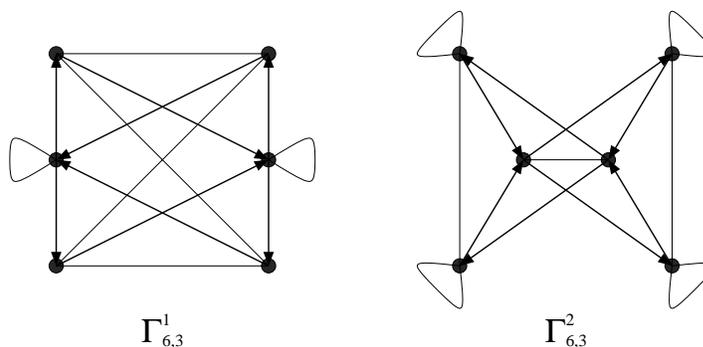


Figura 4.5: Digrafos 3-regulares de orden 6, $\Gamma_{6,3}^1$ y $\Gamma_{6,3}^2$

Tenemos también que todas las 1-factorizaciones de digrafos línea de grado tres son 1-factorizaciones 1-uniformes (véase la sección 4.2.3). Utilizando de nuevo la construcción de la demostración del Teorema 4.2.3, construimos todas las 1-factorizaciones de los digrafos $C(3, 2)$, $\Gamma_{6,3}^1$ y $\Gamma_{6,3}^2$, y calculamos los correspondientes grupos de permutaciones. Mostramos los resultados obtenidos en la Tabla 4.15. En este caso, vemos que 12 de los 16 grupos transitivos de grado 6 representan grupos de permutaciones de 1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea 3-regulares de orden 6.

En general, un grupo de permutaciones que actúa transitivamente en un conjunto Ω de cardinal n es un grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme de un digrafo línea 3-regular de orden n si y sólo si G se puede generar por un subconjunto $F \subseteq G$ de tres permutaciones discordantes en Ω , y tal que el conjunto FF^{-1} sea un subgrupo de G de orden 3, y por lo tanto isomorfo al grupo cíclico \mathbb{Z}_3 .

De manera similar al caso 2-regular, se demuestra que estas condiciones son equivalentes a su vez al hecho de que existan dos elementos $a, g \in G$ que generan G , donde $a^3 = I$, y tal que

$G = G(C(3,2), F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
\mathbb{Z}_6	6	6
\mathcal{S}_3	6	2
$\mathbb{Z}_3 \wr \mathbb{Z}_2$	18	4
T6.10	36	12

$G = G(\Gamma_{6,3}^1, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
\mathcal{A}_4	12	2
T6.5	24	2
$PSL_2(5)$	60	4
$PGL_2(5)$	120	4
\mathcal{A}_6	360	4
\mathcal{S}_6	720	8

$G = G(\Gamma_{6,3}^2, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
\mathcal{S}_4	24	2
$\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$	24	2
$PSL_2(5)$	60	4
$PGL_2(5)$	120	4
\mathcal{A}_6	360	8
\mathcal{S}_6	720	4

Tabla 4.15: Grupos de permutaciones de las 1-factorizaciones de los digrafos línea 3-regulares de orden 6

$F = \{g, ag, a^2g\}$ son permutaciones discordantes.

Del mismo modo que en el caso anterior, para determinar cuándo un grupo de permutaciones G representa un grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme de un digrafo línea 3-regular, tampoco es necesario verificar las condiciones anteriores para todos los pares de elementos $a, g \in G$ donde a es un elemento de orden 3 y g un elemento arbitrario, sino que podemos restringirnos a tomar g de un conjunto completo de representantes de las clases de conjugación de G .

En el caso de grupos de permutaciones de grado 6, tenemos que los grupos que no figuran en la Tabla 4.15 no pueden ser generados verificando las condiciones anteriores.

Digrafos línea 6-regulares de orden 6

El único digrafo línea 6-regular de orden 6 es el digrafo completo con bucles K_6^+ . En esta sección, estudiaremos por tanto qué grupos de permutaciones transitivos de grado 6 generan las 1-factorizaciones 1-uniformes de K_6^+ .

Sabiendo que existen 60 cuadrados latinos normalizados uniformes, por el Teorema 4.2.3, tenemos K_6^+ admite 7200 arco-coloraciones diferentes (120 arco-coloraciones asociadas a cada cuadrado latino).

Por el Corolario 4.2.1, dos de estos cuadrados latinos normalizados uniformes de orden 6 son cuadrados latinos normalizados de las tablas de composición de los grupos cíclico \mathbb{Z}_6 y dihedral $D(6)$ de orden 6. Denotemos por Q_1 un cuadrado normalizado latino de la tabla de composición de \mathbb{Z}_6 y por Q_2 un cuadrado latino normalizado de la tabla de composición de $D(6)$. En las Tablas 4.16 y 4.17 mostramos las 1-factorizaciones 1-uniformes de K_6^+ con cuadrados latinos asociados Q_1 y Q_2 respectivamente.

$G = G(K_6^+, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
S_3	6	1
$D(12)$	12	1
$\mathbb{Z}_3 \wr \mathbb{Z}_2$	18	2
$\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$	24	3
$\mathbb{Z}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}_2^2$	36	2
$S_2 \wr S_3$	48	3
$S_3 \wr \mathbb{Z}_2$	72	6
$PGL_2(5)$	120	18
S_6	720	84

Tabla 4.16: Grupos de permutaciones de las 1-factorizaciones 1-uniformes de K_6^+ con Q_1

$G = G(K_6^+, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
\mathbb{Z}_6	6	1
$D(12)$	12	3
$\mathbb{Z}_3 \wr \mathbb{Z}_2$	18	2
S_4	24	9
$S_2 \wr S_3$	48	9
$S_3 \wr \mathbb{Z}_2$	72	6
$PGL_2(5)$	120	36
S_6	720	54

Tabla 4.17: Grupos de permutaciones de las 1-factorizaciones 1-uniformes de K_6^+ con Q_2

Afirmamos que los grupos de permutaciones de las Tablas 4.16 y 4.17 son los únicos grupos transitivos de grado 6 que representan 1-factorizaciones 1-uniformes de K_6^+ . Esto es, porque por el Teorema 4.4.1, las 1-factorizaciones 1-uniformes de K_6^+ asociadas a otro cuadrado latino normalizado uniforme de orden 6 diferente de Q_1 y Q_2 , son 1-factorizaciones 1-uniformes de K_6^+ equivalentes a las obtenidas con Q_1 o Q_2 por un automorfismo de K_6^+ , luego los grupos de permutaciones obtenidos son necesariamente isomorfos a los que se encuentran en las Tablas 4.16 y 4.17.

4.4.4 Grupos de permutaciones transitivos de grado 7

En [27] se demuestra que los únicos grupos de permutaciones transitivos de grado 7 no permutacionalmente equivalentes son los 7 que mostramos en la Tabla 4.18.

	Order	Descripción	Generadores
T7.1	7	\mathbb{Z}_7	$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$
T7.2	14	$D(14)$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), (2, 7)(3, 6)(4, 5)$
T7.3	21	$ASL_1(7)$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), (2, 3, 5)(4, 7, 6)$
T7.4	42	$AGL_1(7)$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), (2, 4, 3, 7, 5, 6)$
T7.5	168	$PGL_3(2)$	$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), (2, 3)(4, 7)$
T7.6	2520	A_7	$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), (5, 6, 7)$
T7.7	5040	S_7	$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), (1, 2)$

Tabla 4.18: Grupos de permutaciones transitivos de grado 7

Si un grupo de permutaciones transitivo de grado 7 es un grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme de un digrafo línea regular de orden 7, entonces el grado del digrafo tiene que ser 1, 7. El único digrafo línea 7-regular de orden 7 es el digrafo completo con bucles K_7^+ .

Por el Teorema 4.4.1, las 1-factorizaciones 1-uniformes de K_7^+ son equivalentes a 1-factorizaciones 1-uniformes asociadas a un cuadrado latino normalizado uniforme de la tabla de composición de un grupo del mismo orden. El único grupo de orden 7 es el grupo cíclico \mathbb{Z}_7 . Denotemos por Q_1 un cuadrado latino normalizado de la tabla de composición de \mathbb{Z}_7 . En la Tabla 4.19 mostramos los grupos de permutaciones de 1-factorizaciones 1-uniformes de K_7^+ asociadas a Q_1 .

$G = G(K_7^+, F)$	$ G $	Número de 1-factorizaciones
\mathbb{Z}_7	7	1
$D(14)$	14	1
$ASL_1(7)$	21	2
$AGL_1(7)$	42	2
$PGL_3(2)$	168	42
A_7	2520	315
S_7	5040	317

Tabla 4.19: Grupos de permutaciones de las 1-factorizaciones 1-uniformes de K_7^+ con Q_1

Por lo tanto, todos los grupos transitivos de grado 7 representan a un grupo de permutaciones de K_7^+ .

Capítulo 5

Automorfismos de recubrimientos k -arco transitivos

5.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos el grupo completo de automorfismos de los recubrimientos k -arco transitivos que obtenemos con nuestra técnica. La mayor parte de los resultados presentados se encuentran en [62].

En principio, si un digrafo Γ es k -arco transitivo únicamente tenemos que $\text{Aut}(\Gamma)$ actúa transitivamente en el conjunto de k -arcos, luego que el orden del grupo completo de automorfismos es mayor o igual que el cardinal del conjunto de k -arcos. Incluso cuando un digrafo Γ es k -arco regular, únicamente sabemos que existe un subgrupo $G \leq \text{Aut } \Gamma$ que actúa regularmente en el conjunto de k -arcos (y por lo tanto con el mismo orden que el grado de su acción).

Podemos dar algunos resultados interesantes en esta línea en el caso de los recubrimientos k -arco transitivos de grado dos construidos con nuestra técnica, en términos de la normalidad de sus respectivos digrafos k -línea iterados, que son digrafos de Cayley. Los digrafos de Cayley normales son aquellos que tienen el grupo de automorfismos menor posible. Introduciremos la definición de normalidad de modo más preciso en la sección 5.2.1. Además, en la misma sección veremos que todo digrafo 2-regular exactamente k -arco transitivo es k -arco regular y calcularemos de modo explícito su grupo completo de automorfismos. Como corolario obtendremos los digrafos de Cayley 2-regulares exactamente vértice transitivos o exactamente arco transitivos son normales.

Aplicaremos este resultado a los recubrimientos arco transitivos y 2-arco transitivos de los digrafos completos de grado dos, con y sin bucles, obtenidos con nuestra técnica. Veremos que todos los digrafos k -línea iterados de los recubrimientos k -arco transitivos obtenidos son digrafos de Cayley normales a excepción de uno. Además, calcularemos algunos parámetros de los recubrimientos k -arco transitivos obtenidos, como el orden, el cuello, el diámetro, la exacta arco transitividad, o el parámetro m para el cual el recubrimiento es m -ciclo generalizado, si es que es un ciclo generalizado.

Recordemos que en el caso no dirigido, Weiss demostró en un resultado ya clásico de 1981 que los únicos grafos finitos conexos k -arco transtivos con $k \geq 8$ son los ciclos. En el caso dirigido infinito hay ciertas condiciones de finitud local bajo las cuales un digrafo altamente transitivo (k -arco transitivo para todo entero positivo k) resulta homeomorfo al camino infinito

\mathbb{Z} . Por ejemplo, si un digrafo infinito altamente transitivo tiene grados de salida y de entrada finitos y diferentes en todos los vértices, necesariamente es homeomorfo al camino infinito \mathbb{Z} . Muy recientemente, Malnič et al. [61] han demostrado que no es la situación en el caso infinito regular.

En la sección 5.3 estudiaremos este problema en el caso de digrafos finitos k -arco transitivos, que es el que nos ha ocupado a lo largo de la memoria. Notemos que si un digrafo Γ regular k -arco transitivo es un m -ciclo generalizado diferente de un ciclo, entonces el grupo de automorfismos del digrafo es imprimitivo en el conjunto de los vértices. Sea $\sigma : V(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}_m$ un homomorfismo de digrafos de Γ en C_m (que existe por la Proposición 1.2.1). Denotemos por $\{V_0, \dots, V_{m-1}\}$ los conjuntos estables de la partición asociada a $V(\Gamma)$, esto es, $V_i = \sigma^{-1}(i)$, $0 \leq i \leq m-1$. Entonces los conjuntos estables V_i de la partición del conjunto de vértices son bloques no triviales de la acción del grupo de automorfismos del digrafo $\text{Aut}(\Gamma)$ en el conjunto de vértices $V(\Gamma)$. (Para más detalles véase el Apéndice de Grupos de permutaciones).

Por otra parte, recordemos que un digrafo es ciclo generalizado si y sólo si su digrafo k -línea iterado es un ciclo generalizado (véase la sección 1.3.3). Entonces, estudiar si los recubrimientos k -arco transitivos que obtenemos son ciclos generalizados es equivalente a estudiar si los digrafos k -línea iterados de estos recubrimientos, que son digrafos de Cayley, son ciclos generalizados. En la sección 5.3 veremos que un digrafo de Cayley es homeomorfo a un ciclo si y sólo si existe un subgrupo normal H del grupo base tal que los generadores están contenidos en una de las clases laterales de H , y estudiaremos algunas consecuencias de este resultado.

5.2 Recubrimientos exactamente k -arco transitivos de grado dos

En esta sección estudiaremos el grupo completo de automorfismos de los recubrimientos k -arco transitivos de grado dos que obtenemos con nuestra técnica. Podemos dar algunos resultados interesantes en este sentido en el caso de digrafos de grado dos en términos de *normalidad*.

5.2.1 Normalidad de los digrafos de Cayley

Sea $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ un digrafo de Cayley de un grupo G definido por un conjunto de generadores S , y sea $(\text{Aut } G)_S = \{\alpha \in \text{Aut } G : S^\alpha = S\}$.

Recordemos que la acción del grupo G en él mismo por multiplicación a la izquierda es un subgrupo de automorfismos de Γ que actúa regularmente en G . A esta acción se la conoce como la representación por la izquierda por permutaciones de G . (Véase la sección 1.2.2).

También es fácil comprobar que el producto semidirecto $G \rtimes (\text{Aut } G)_S$ actuando en G como $g^{(h,\alpha)} = hg^\alpha$ es también un subgrupo de $\text{Aut } \Gamma$.

El digrafo de Cayley Γ se dice *normal* cuando se verifica la siguiente igualdad

$$\text{Aut } \Gamma = G \rtimes (\text{Aut } G)_S.$$

Entonces, por la caracterización de Sabidussi (Teorema 1.2.1), los digrafos de Cayley normales son justamente aquellos que tienen el grupo de automorfismos menor posible. Xu en [87] demuestra que un digrafo de Cayley Γ es normal si y sólo si G es un subgrupo normal de $\text{Aut } \Gamma$.

En esta sección calcularemos el grupo completo de automorfismos de los digrafos de Cayley de grado 2. En particular, mostraremos que los digrafos de Cayley exactamente k -arco transi-

tivos con $k \leq 1$ son normales. En la siguiente sección veremos ejemplos que muestran que éste no es el caso para valores mayores de k .

Proposición 5.2.1 *Sea $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ un digrafo de Cayley conexo exactamente k -arco transitivo de grado 2. Entonces existe un subgrupo $H < \text{Aut } \Gamma$ isomorfo a \mathbb{Z}_2^k tal que $H \cap G = \{1\}$ y $\text{Aut } \Gamma = HG$. Más aún, Γ es un digrafo k -arco regular.*

Demostración. Como G actúa regularmente en $V(\Gamma)$, tenemos $\text{Aut } \Gamma = HG$, donde $H = (\text{Aut } \Gamma)_1$ denota el estabilizador del elemento identidad 1 de G y $H \cap G = \{1\}$.

Sea $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ un k -arco de Γ y sea $\sigma \in \text{Aut } \Gamma$ tal que $x_i^\sigma = x_i$, $0 \leq i \leq k$. Supongamos que σ no fija cada uno de los elementos en $\Gamma^+(x_k)$. Sean $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_k, y_{k+1})$ y $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_k, z_{k+1})$ cualesquiera dos $(k+1)$ -arcos de Γ , y sean $\tau, \tau' \in \text{Aut } \Gamma$ tal que $\mathbf{x}^\tau = (y_0, y_1, \dots, y_k)$ y $\mathbf{x}^{\tau'} = (z_0, z_1, \dots, z_k)$. Entonces, o bien $\mathbf{y}^{\tau^{-1}\tau'} = \mathbf{z}$, o bien $\mathbf{y}^{\tau^{-1}\sigma\tau'} = \mathbf{z}$, pero en cualquiera de los casos el digrafo es $(k+1)$ -arco transitivo contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, σ fija cada elemento de $\Gamma^+(x_k)$.

Como el digrafo es conexo, esto implica que σ fija cada elemento de $V(\Gamma)$. Y en particular, H actúa regularmente en el conjunto de k -arcos de Γ con vértice inicial $x_0 = 1$.

Podemos identificar los k -arcos de Γ con vértice inicial $x_0 = 1$ con los elementos de \mathbb{Z}_2^k de tal modo que H actúa en \mathbb{Z}_2^k coordenada a coordenada. En conclusión, H es isomorfo a \mathbb{Z}_2^k . ■

Corolario 5.2.1 *Sea $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ un digrafo de Cayley exactamente k -arco transitivo de grado 2, con $k \leq 1$. Entonces Γ es normal.*

Demostración. Tenemos $G \rtimes (\text{Aut } G)_S < \text{Aut } \Gamma$. Por la Proposición 5.2.1, si $k = 0$ entonces $\text{Aut } \Gamma = G$ y Γ es normal.

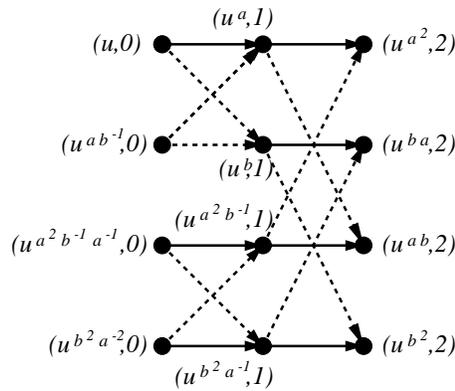
Si $k = 1$, entonces $\text{Aut } \Gamma = HG$ con $G \cap H = \{1\}$ y $H \simeq \mathbb{Z}_2$. Luego, como G es un subgrupo de índice 2 en $\text{Aut}(\Gamma)$, G es un subgrupo normal de $\text{Aut } \Gamma$. Por el resultado de Xu mencionado anteriormente, Γ es un digrafo de Cayley normal. ■

5.2.2 Recubrimientos de Cayley de digrafos de grado dos

En la sección 4.2.3 del capítulo anterior, vimos cómo todos los recubrimientos de Cayley de digrafos línea de grado 2 eran a su vez digrafos línea. De hecho, lo que demostrábamos era que todas las 1-factorizaciones de digrafos línea eran 1-uniformes. En esta sección, veremos que este resultado generaliza para digrafos 2-línea iterados de grado 2, aunque no para digrafos k -línea iterados del mismo grado con $k \geq 3$. Esto es, todas las 1-factorizaciones de digrafos 2-línea iterados de grado 2 son 2-uniformes y existen 1-factorizaciones de digrafos k -línea iterados de grado 2 que no son k -uniformes siempre que $k \geq 3$.

Proposición 5.2.2 *Sea Γ un digrafo conexo 2-línea iterado de grado 2 y F una 1-factorización de Γ . Entonces F es una 1-factorización 2-uniforme. En particular, el recubrimiento de Cayley $\bar{\Gamma}_F$ es un digrafo 2-línea iterado.*

Demostración. Como Γ es un digrafo 2-línea iterado, todos los digrafos Γ_u^2 , $u \in V(\Gamma)$ son isomorfos, luego basta con encontrar isomorfismos que preserven los colores dados por F . Uno de estos digrafos con los arcos coloreados se muestra en la Figura 5.1.

Figura 5.1: Γ_u^2 con una 1-factorización

Sean $u, v \in V(\Gamma)$ y $F = \{a, b\}$. Como $|\Gamma^i(x)| = |x^{F^i}| = |F|^i$, $0 \leq i \leq 2$ podemos definir una aplicación $\phi : V_u \rightarrow V_v$ como $\phi(u^f, i) = (v^f, i)$ para cada $f \in F^i$ y cada $0 \leq i \leq k$, donde F^0 se entiende como la permutación identidad en el conjunto de vértices $V(\Gamma)$.

En los cuatro vértices restantes de V_u , definimos ϕ tal que aplica $(u^{a^2b^{-1}}, 1)$, $(u^{b^2a^{-1}}, 1)$, $(u^{a^2b^{-1}a^{-1}}, 0)$ y $(u^{a^2b^{-2}}, 0)$ a $(v^{a^2b^{-1}}, 1)$, $(v^{b^2a^{-1}}, 1)$, $(v^{a^2b^{-1}a^{-1}}, 0)$ y $(v^{a^2b^{-2}}, 0)$ respectivamente.

Se comprueba fácilmente que la aplicación ϕ de Γ_u^2 en Γ_v^2 así definida es un isomorfismo de digrafos que preserva los colores dados por F . Y por lo tanto, F es una 1-factorización k -uniforme. ■

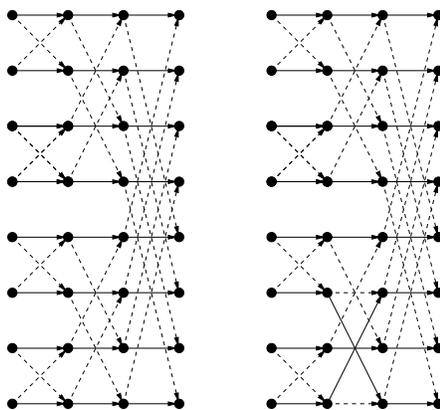
Como ya anunciábamos al inicio de la sección, para $k \geq 3$ no todas las 1-factorizaciones de digrafos k -línea iterados de grado 2 son 1-factorizaciones k -uniformes. Si $k = 3$, cada digrafo Γ_u^3 se puede colorear de dos formas diferentes tales que no existe ningún isomorfismo que preserve los colores de un digrafo coloreado de una forma en otro digrafo coloreado de la otra forma. Estas dos 1-factorizaciones se muestran en la Figura 5.2. Si Γ es un digrafo 3-línea iterado de grado 2 con orden $n > 8$, entonces existen al menos dos vértices diferentes u, v tales que $\Gamma^{-3}\Gamma^3(u) \cap \Gamma^{-3}\Gamma^3(v) = \emptyset$. Podemos colorear cada uno de los digrafos Γ_u^3 y Γ_v^3 con una de las 1-factorizaciones de la Figura 5.2 y el resto de los Γ_w^3 para $w \in V(\Gamma) \setminus \{u, v\}$ con cualquiera de ellas. La 1-factorización resultante del digrafo Γ es claramente una 1-factorización que no es k -uniforme. El resultado generaliza fácilmente para $k > 3$.

5.2.3 Recubrimientos k -arco transitivos de K_2^+ y K_3

Tenemos por la sección anterior que todas las 1-factorizaciones de digrafos línea 2-regulares son 1-uniformes, así como todas las 1-factorizaciones de digrafos 2-línea iterados 2-regulares son 2-uniformes.

Entonces, para encontrar todos los recubrimientos arco transitivos de un digrafo dado Γ regular de grado dos con nuestra técnica, basta con encontrar todas las 1-factorizaciones F del digrafo línea $L\Gamma$ y calcular el recubrimiento de Cayley correspondiente $\overline{L\Gamma}_F$ para cada una de las 1-factorizaciones. Entonces, cada uno de los recubrimientos de Cayley es un digrafo línea y el digrafo (-1) -línea iterado $L^{-1}(\overline{L\Gamma}_F)$ de cada uno de ellos es un recubrimiento arco transitivo del digrafo de partida.

Apliquemos este resultado a los digrafos completos K_2^+ y K_3 . En primer lugar, tenemos que encontrar todas las 1-factorizaciones de los respectivos digrafos línea LK_2^+ y LK_3 . Recordemos

Figura 5.2: Γ_u^3 con dos 1-factorizaciones

que los digrafos línea iterados del digrafo completo con bucles son los digrafos de De Bruijn, y en el caso que nos ocupa $LK_2^+ = B(2, 2)$. Análogamente, los digrafos línea iterados del digrafo completo son los digrafos de Kautz, y en concreto $LK_3 = K(2, 2)$.

Para encontrar todas las 1-factorizaciones de $\Gamma_1 = B(2, 2)$ y $\Gamma_2 = K(2, 2)$ utilizamos la demostración constructiva del Teorema 4.2.3. Sea $u_1, \dots, u_{\frac{n}{2}}$ un conjunto de vértices de Γ_1 donde n es el orden de Γ_1 y tales que $\Gamma_1^- \Gamma_1^+(u_i) \cap \Gamma_1^- \Gamma_1^+(u_j) = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. Entonces, encontrar 1-factorizaciones F_i de cada uno de los digrafos $(\Gamma_1)_{u_i}^1$ es equivalente a encontrar 1-factorizaciones de Γ_1 . Recordemos que un conjunto $((\Gamma_1)_{u_1}^1, F_1), \dots, ((\Gamma_1)_{u_r}^1, F_r)$ induce una 1-factorización F de Γ_1 , y que toda 1-factorización de Γ_1 se puede construir de esta manera. Observemos que cada digrafo $(\Gamma_1)_{u_i}^1$ es isomorfo al digrafo bipartito semicompleto $K_{2,2}$ y es únicamente arco-coloreable (salvo una única permutación de colores).

El Teorema 4.2.3 nos dice que el número de 1-factorizaciones de un digrafo 2-regular es $2^{\frac{n}{2}-1}$. Si $\Gamma_1 = B(2, 2)$ entonces $n = 4$, luego $B(2, 2)$ admite únicamente dos 1-factorizaciones diferentes (salvo permutaciones de colores). Análogamente, para el digrafo $\Gamma_2 = K(2, 2)$. En este caso Γ_2 tiene orden 6, luego Γ_2 admite cuatro 1-factorizaciones diferentes. Los grupos de permutaciones de todas estas 1-factorizaciones de LK_2^+ y LK_3 se muestran en las Tablas 5.1 y 5.2 respectivamente. Además, en las Tablas 5.1 y 5.2 se encuentran varios parámetros de los recubrimientos arco transitivos de K_2^+ y K_3 , en concreto el parámetro $|\Gamma'|$ denota el orden del recubrimiento, k es el valor para el cual Γ' es exactamente k -arco transitivo, m es el entero para el cual Γ' es homeomorfo a un ciclo de m vértices ($m = 0$ indica que Γ' no es homeomorfo a un ciclo), y $g(\Gamma')$ y $D(\Gamma')$ denotan el cuello y el diámetro del digrafo Γ' .

Estos cálculos han sido calculados implementado diversas rutinas en el sistema GAP de teoría computacional de grupos y GRAPE, un paquete compartido para GAP para grafos y grupos (véanse [43] y [81] para más información al respecto). Ambos, junto con el ATLAS de grupos finitos de Conway et al. [22], han sido herramientas muy útiles para el cálculo de todos estos parámetros, y muy especialmente, para identificar los grupos de permutaciones de cada 1-factorización y la exactamente k -arco transitividad de algunos recubrimientos.

Notemos, que por la Proposición 5.2.1, a partir de estas tablas podemos deducir el grupo completo de automorfismos de los recubrimientos arco transitivos Γ' . En concreto, cuando el recubrimiento Γ' sea exactamente k -arco transitivo,

$$\text{Aut}(\Gamma') = \text{Aut}(L\Gamma') = \text{Aut}(\overline{\Gamma}_{iF}) = \mathbb{Z}_2^k G$$

$G = G(B(2, 2), F)$	$ \Gamma' $	k	m	$g(\Gamma')$	$D(\Gamma')$	Número de 1-factorizaciones
$D(8)$	4	1	2	2	2	1
\mathcal{A}_4	6	2	3	3	3	1

Tabla 5.1: Parámetros de los recubrimientos arco transitivos de K_2^+

$G = G(K(2, 2), F)$	$ \Gamma' $	k	m	$g(\Gamma')$	$D(\Gamma')$	Número de 1-factorizaciones
$\mathcal{S}_3 = D(6)$	3	1	0	2	1	1
$\mathcal{S}_2 \wr \mathcal{S}_3 \simeq \mathbb{Z}_2^3 \rtimes \mathcal{S}_3$	24	1	2	4	5	3

Tabla 5.2: Parámetros de los recubrimientos arco transitivos de K_3

donde $G = G(\Gamma_i, F)$ es el grupo de permutaciones de la 1-factorización F correspondiente y donde $i = 1, 2$.

Más aún, por el Corolario 5.2.1, los digrafos de Cayley exactamente vértice transitivos o exactamente arco transitivos son digrafos de Cayley normales. En particular, como los digrafos línea de los recubrimientos Γ' son digrafos de Cayley, y por la Observación 2.2.1, Γ' es exactamente k -arco transitivo si y sólo si $L\Gamma'$ es exactamente $(k-1)$ -arco transitivo, resulta que todos los recubrimientos de Cayley de $B(2, 2)$ y $K(2, 2)$ son normales.

Por otra parte, notemos que las dos 1-factorizaciones de $B(2, 2)$ son 1-factorizaciones lineales y por lo tanto, los recubrimientos de K_2^+ resultantes son ciclos generalizados completos. Concretamente, $C(2, 2)$ y $C(2, 3)$.

En el caso del digrafo completo K_3 , notemos que uno de los recubrimientos arco transitivos resulta ser el mismo digrafo K_3 . Ya señalábamos en la sección 3.4 que todos los digrafos k -arco regulares Γ se obtenían como recubrimientos k -arco transitivos triviales de sí mismos, cuando al digrafo k -línea iterado $L^k\Gamma$ (que es un digrafo de Cayley) se le asociaba la 1-factorización natural dada por el conjunto de generadores que define el digrafo de Cayley. Este es el caso del recubrimiento de K_3 que mencionábamos.

De manera similar, para encontrar todos los recubrimientos 2-arco transitivos de un digrafo dado Γ regular de grado 2 con nuestra técnica, basta con encontrar todas las 1-factorizaciones F del digrafo 2-línea iterado $L^2\Gamma$ y calcular el recubrimiento de Cayley correspondiente $\overline{L^2\Gamma}_F$ para cada una de las 1-factorizaciones. Entonces, cada uno de los recubrimientos de Cayley es un digrafo 2-línea iterado y el digrafo (-2) -línea iterado $L^{-2}(\overline{L^2\Gamma}_F)$ de cada uno de ellos es un recubrimiento 2-arco transitivo del digrafo de partida.

Aplicamos este procedimiento a la construcción de recubrimientos 2-arco transitivos de los digrafos completos K_2^+ y K_3 . En primer lugar, tenemos que encontrar todas las 1-factorizaciones de los respectivos digrafos 2-línea iterados $L^2K_2^+ \simeq B(2, 3)$ y $L^2K_3 \simeq K(2, 3)$. Como todas las 1-factorizaciones de digrafos línea 2-regulares son 1-uniformes, calcularemos todas las 1-factorizaciones de $\Gamma_1 = B(2, 3)$ y $\Gamma_2 = K(2, 3)$ con la construcción de la demostración del Teorema 4.2.3 y procedemos como en el caso anterior. Como $B(2, 3)$ es un digrafo de orden 8, entonces admite $2^{\frac{8}{2}-1} = 8$ arco-coloraciones, y como $K(2, 3)$ tiene orden 12 admite un total de $2^5 = 32$ arco-coloraciones. Los resultados se muestran en las Tablas 5.3 y 5.4 y los parámetros se entienden como en las Tablas anteriores 5.1 y 5.2.

$G = G(B(2, 3), F)$	$ \Gamma' $	k	m	$g(\Gamma')$	$D(\Gamma')$	Número de 1-factorizaciones
$\mathcal{A}_4 \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^3 \rtimes \mathbb{Z}_3$	6	2	3	3	3	1
$\mathbb{Z}_2^3 \rtimes \mathbb{Z}_4$	8	3	4	4	4	1
$\mathbb{Z}_2^3 \rtimes \mathbb{Z}_7$	14	6	7	7	7	2
$PGL_2(7)$	84	2	2	6	8	2
\mathcal{S}_8	$8!/4$	2	2	10	20	2

Tabla 5.3: Parámetros de los recubrimientos 2-arco transitivos de K_2^+

En las Tablas 5.3 y 5.4 el grupo $M(12)$ es el grupo de Mathieu de grado 12 y $PGL_2(q)$ el grupo proyectivo general lineal. Además, $F_{36}(6)$ es isomorfo como grupo a $\mathbb{Z}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}_4$ y es un grupo de permutaciones de grado seis permutacionalmente equivalente a $\frac{1}{2}[\mathcal{S}_3^2] \rtimes \mathbb{Z}_2$ (para las definiciones véase el Apéndice de Grupos de permutaciones de esta memoria o [27]).

Recordemos que los grupos de permutaciones $G = G(\Gamma, F)$ de una 1-factorización de un digrafo conexo Γ son grupos de permutaciones que actúan transitivamente en el conjunto de vértices $V(\Gamma)$. Aunque a menudo un mismo grupo actúa en un mismo conjunto en dos acciones no permutacionalmente equivalentes, en las Tablas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 hemos intentado reflejar la acción correspondiente del grupo de permutaciones $G(\Gamma, F)$ en el conjunto de vértices $V(\Gamma)$ del modo más claro posible.

Se deducen algunos resultados interesantes de las Tablas 5.3 y 5.4. A pesar de que los recubrimientos Γ' obtenidos son 2-arco transitivos, algunos son exactamente k -arco transitivos para un valor mayor de k que 2. Uno de ellos, por ejemplo, es 6-arco transitivo.

Todos los recubridores de Cayley de $B(2, 3)$ y $K(2, 3)$ de las Tablas 5.3 y 5.4 excepto uno son digrafos de Cayley normales. Para la 1-factorización F de $B(2, 3)$ cuyo grupo de permutaciones es $G = \mathbb{Z}_2^3 \rtimes \mathbb{Z}_7$, el grupo de automorfismos del digrafo de Cayley $\overline{B(2, 3)}_F$ es, por la Proposición 5.2.1, $\text{Aut}(\overline{B(2, 3)}_F) = \mathbb{Z}_2^4 G$. Pero por otra parte, $\text{Aut}(G) \simeq \text{Inn}(G)$ y $|(\text{Aut } G)_F| = 2$, luego $\overline{B(2, 3)}_F$ no es un digrafo de Cayley normal. Todos los demás recubrimientos de Cayley de las Tablas 5.3 y 5.4 se encuentran en la situación del Corolario 5.2.1, luego son digrafos de Cayley normales.

Las tres primeras entradas de las Tablas 5.3 corresponden a las cuatro 1-factorizaciones lineales de $B(2, 3)$, luego los recubrimientos 2-arco transitivos de K_2^+ correspondientes por el Teorema 3.5.1 corresponden a los ciclos generalizados completos $C(2, 3)$, $C(2, 4)$ y $C(2, 7)$. En la siguiente sección sugerimos que hay algo de trivial en estos ejemplos de digrafos k -arco transitivos.

El resto de las entradas de la Tabla 5.3 y las entradas de la Tabla 5.4 proporcionan ejemplos más interesantes. La aparición del grupo proyectivo $PGL_2(7)$ como grupo de permutaciones de 1-factorización de $B(2, 3)$ nos sugiere que otros grupos proyectivos lineales generales puedan aparecer como grupos de permutaciones de factorizaciones de $L^k K_2^+$. El siguiente candidato a aparecer sería $PGL_2(31)$ actuando en el conjunto de 32 vértices del digrafo de De Bruijn $B(2, 5)$ (el parámetro q de $PGL_2(q)$ tiene que ser un primo de Mersenne). Hemos calculado todas las 1-factorizaciones de $L^4 K_2^+$ y ninguno de los grupos obtenidos es $PGL_2(31)$ (de hecho, ninguno de los órdenes de los grupos es el apropiado). Este hecho sugiere que no hay una conexión clara entre las estructuras de los grupos de permutaciones de las diferentes 1-factorizaciones de $L^k K_2^+$ para diferentes valores de k .

$G = G(K(2, 3), F)$	$ \Gamma' $	k	m	$g(\Gamma')$	$D(\Gamma')$	Número de 1-factorizaciones
$\mathbb{Z}_3^2 \rtimes D(8)$	18	2	2	4	5	1
$\mathbb{Z}_3^3 \rtimes \mathcal{A}_4$	81	3	3	6	8	1
$[\mathbb{Z}_2^4]F_{36}(6) \rtimes \mathbb{Z}_2$	288	2	2	8	10	3
$\mathbb{Z}_2^6 \rtimes PGL_2(5)$	1920	2	2	10	15	6
$M(12)$	23760	3	0	10	19	6
\mathcal{A}_{12}	$12!/8$	2	0	8		9
\mathcal{S}_{12}	$12!/4$	2	2	12		6

Tabla 5.4: Parámetros de los recubrimientos 2-arco transitivos de K_3

5.3 Digrafos k -arco transitivos no homeomorfos a ciclos

Los ciclos dirigidos son claramente k -arco transitivos para cada $k \geq 0$. El producto lexicográfico de un ciclo dirigido de orden $k + 1$ con el digrafo nulo de r vértices (r vértices aislados) resulta un digrafo regular de grado r que es claramente exactamente k -arco transitivo. Éstos son los llamados ciclos generalizados completos que definimos en la sección 1.3.4.

En este sentido, es más interesante encontrar otros ejemplos de digrafos k -arco transitivos. La mayor parte los ejemplos de digrafos k -arco transitivos que hemos sido capaces de construir en la memoria y de hecho la mayoría de los que se encuentran en la literatura, son homeomorfos a ciclos. Así, vimos en la sección 2.4.2 que los recubridores de Cayley de digrafos k -línea iterados de un digrafo Γ con 1-factorizaciones inducidas por una 1-factorización de Γ y una 1-factorización del digrafo de De Bruijn $B(r, k)$, son siempre ciclos generalizados para $k \geq 2$, i.e. homeomorfos a ciclos. En particular, usando las propiedades básicas de los digrafos línea iterados de la sección 1.3.3, si el recubrimiento de Cayley es homeomorfo a un ciclo, entonces todos los digrafos $(-i)$ -línea iterados del recubrimiento también son homeomorfos a ciclos. En particular, los recubrimientos k -arco transitivos de digrafos que obtenemos en el Teorema 3.4.1 para 1-factorizaciones inducidas por 1-factorizaciones lineales de digrafos de De Bruijn son homeomorfos a ciclos.

Una situación similar encontraron Cameron, Praeger y Wormald [15] en la construcción de digrafos infinitos localmente finitos altamente arco transitivos (digrafos con grados de salida y entrada de todos los vértices finitos y k -arco transitivos para todo entero positivo k). Los digrafos construidos por Cameron, Praeger y Wormald resultaban homeomorfos al camino infinito simétrico \mathbb{Z} , y se plantearon entonces la cuestión de encontrar ejemplos que no fueran homeomorfos a caminos o ciclos. En el caso infinito el problema ha sido solucionado en todos los casos muy recientemente. Se obtiene una respuesta negativa cuando el digrafo tiene grado de entrada y grado de salida diferentes (Praeger [72]), y se obtiene una respuesta positiva en el caso regular (Malnič, Marušič, Seifter and Zgrablić [61]).

En esta sección probaremos en primer lugar que un digrafo de Cayley finito conexo es homeomorfo a un ciclo si y sólo si existe un subgrupo normal del grupo base tal que todos los generadores están contenidos en una de las clases laterales. Utilizaremos este resultado para encontrar con nuestra técnica digrafos k -arco transitivos no homeomorfos a ciclos, i.e. equialcanzables.

Teorema 5.3.1 *Un digrafo de Cayley finito conexo $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ es un m -ciclo generalizado*

si y sólo si existe un subgrupo normal $H \triangleleft G$ de índice m en G tal que $S \subset Hs$ para cada $s \in S$.

Demostración. En primer lugar, supongamos que Γ es un m -ciclo generalizado. Por la caracterización de ciclos generalizados (Proposición 1.2.1), existe $\sigma : V(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}_m$ un homomorfismo de digrafos de Γ en C_m . Denotemos por $\{V_0, \dots, V_{m-1}\}$ los conjuntos estables de la partición asociada a $V(\Gamma)$, esto es, $V_i = \sigma^{-1}(i)$, $0 \leq i \leq m-1$. Asumamos sin pérdida de generalidad que el elemento identidad 1 de G pertenece a V_0 .

Afirmamos que $H = V_0$ verifica las propiedades enunciadas en el Teorema.

Como Γ es un digrafo Cayley, los elementos en una de las partes V_i son elementos de G que pueden escribirse como productos de longitud $i \pmod m$ de elementos de S . En particular, H es un subgrupo de G . Más aún, si $g \in V_i$, entonces $g^{-1} \in V_{m-i}$. Así, para cada $h \in V_0 = H$, tenemos $ghg^{-1} \in V_0 = H$, luego H es un subgrupo normal de G .

Habremos acabado si probamos que $Hs = V_1$ para todo $s \in S$. Sea $v \in V_1$. Por definición de V_1 , $\Gamma^-(v) \subset V_0$. Como Γ es regular y S induce una 1-factorización de Γ de modo natural, para cada $s \in S$ existe $h_s \in H$ tal que $h_s s = v$. Así, $v \in Hs$ para todo $v \in V_1$.

Supongamos ahora que existe un subgrupo normal H de G de índice m en G tal que $S \subset Hs$ para cada $s \in S$. Entonces $s \in H$ implicaría $S \subset H$. Como H es un subgrupo propio de G , esto es una contradicción con la hipótesis de que Γ es conexo.

Sean $H = H_0, H_1, \dots, H_{m-1}$ las diferentes clases laterales a la derecha de H en G . No hay pérdida de generalidad si suponemos que las clases laterales están ordenadas de modo que $H_i S \subset H_{i+1}$. Esto siempre es posible en tanto que todos los elementos de S pertenecen a la misma clase lateral por la derecha y el conjunto S es un conjunto de generadores de G . Entonces la aplicación $\sigma : V(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z}_m$ definida como $\sigma(g) = i$ siempre que $g \in H_i$, se demuestra fácilmente que es un homomorfismo de digrafos y por la Proposición 1.2.1 Γ es un m -ciclo generalizado. ■

En particular, si un digrafo Γ admite una 1-factorización F tal que el grupo de permutaciones de (Γ, F) es un grupo simple, entonces el recubrimiento de Cayley resultante $\overline{\Gamma}_F$ es equialcanzable. Así, como corolarios inmediato del Teorema 5.3.1 tenemos:

Corolario 5.3.1 *Sea Γ un digrafo conexo regular de orden $n \geq 5$ y F una 1-factorización de Γ . Si el grupo de permutaciones de (Γ, F) es $G = G(\Gamma, F) = \mathcal{A}_n$, entonces el recubrimiento de Cayley $\overline{\Gamma}_F$ es equialcanzable. Si $G = G(\Gamma, F) = S_n$, entonces $\overline{\Gamma}_F$ es o bien bipartito o no es homeomorfo a un ciclo.*

Corolario 5.3.2 *Sea Γ un digrafo conexo regular y F una 1-factorización de Γ . Si el recubrimiento de $\overline{\Gamma}_F$ es un m -ciclo generalizado para algún entero m , entonces $o(f) = 0 \pmod m$ para todo $f \in F$.*

Demostración. Sea $\sigma : V(\overline{\Gamma}_F) \rightarrow \mathbb{Z}_m$ el homomorfismo de digrafos de $\overline{\Gamma}_F$ en C_m tal que $\{V_0, V_1, \dots, V_{m-1}\}$ es la partición de $V(\overline{\Gamma}_F)$ donde cada parte viene definida como $V_i = \sigma^{-1}(i)$ para $0 \leq i \leq m-1$. Supongamos además que el elemento unidad de $G(\Gamma, F)$ pertenece a la primera parte $1 \in V_0$.

Entonces $f \in V_1$ para todo $f \in F$ y en general, $f^i \in V_i \pmod m$. En particular, $1 = f^{o(f)} \in V_{o(f)} = V_0 \pmod m$ para todo $f \in F$. ■

Corolario 5.3.3 Sea Γ un digrafo conexo regular y F una 1-factorización de Γ . Si $\gcd(o(f) : f \in F) = 1$, entonces el recubrimiento de Cayley $\overline{\Gamma}_F$ es equialcanzable.

En particular, si existe $f \in F$ tal que $o(f) = 2$, entonces $\overline{\Gamma}_F$ es equialcanzable o bipartito .

En este sentido, nos será útil conocer los órdenes de los elementos de una 1-factorización inducida.

Proposición 5.3.1 Sea Γ un digrafo r -regular conexo y $F = \{f_1, \dots, f_r\}$ una 1-factorización de Γ . Sea $F_B = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ una 1-factorización de $B(r, 1) = K_r^+$. Consideremos $F^* = \{f_1^*, \dots, f_r^*\}$ la 1-factorización de $L\Gamma$ inducida por F y F_B . Entonces:

$$o(f_k^*) = \text{mcm}(o(\beta_k), \text{mcm}(o(f_i f_{i\beta_k} f_{i\beta_k^2} \cdots f_{i(\beta_k)^{o(\beta_k)-1}}) : i = 1, \dots, r))$$

Demostración. Tenemos

$$(v; i)^{f_k^*} = (v^{f_i}; i^{\beta_k})$$

para cada $v \in V(\Gamma)$, $i \in \{1, \dots, r\}$.

Entonces,

$$(v; i)^{f_k^{*2}} = (v^{f_i}; i^{\beta_k})^{f_k^*} = (v^{f_i f_{i\beta_k}}; i^{\beta_k^2})$$

E iterando nuevamente

$$(v; i)^{f_k^{*m}} = (v^{f_i f_{i\beta_k} \cdots f_{i\beta_k^{m-1}}}; i^{\beta_k^m})$$

de lo que se deduce el orden que queríamos demostrar. ■

La mayor parte de los digrafos finitos k -arco transitivos obtenidos por Conder, Lorimer y Praeger en [21] son ejemplos de digrafos de los grupos alternado o simétrico, luego son o bien bipartitos o bien equialcanzables. Veremos a continuación que estos digrafos son k -arco regulares (su digrafo k -línea iterado es un digrafo de Cayley), luego pueden ser obtenidos también con nuestra técnica de construcción. Además, algunos de los ejemplos construidos en la sección anterior también son no homeomorfos a ciclos, aquellos cuyo digrafo k -línea iterado es un digrafo de Cayley de los grupos alternado o del grupo de Mathieu M_{12} .

Los digrafos k -arco transitivos de [21, Teorema 1] se construyen del siguiente modo. Sea r el grado del digrafo $\Gamma_{r,k}$ k -arco transitivo que se desea construir, y sea n cualquier entero positivo relativamente primo a $k + 1$ (i.e. $\gcd(n, r) = 1$). Se definen las permutaciones siguientes

$$a = (1, r + 1, \dots, kr + 1, (k + 1)r + 1, \dots, (k + 1)r + n)(2, r + 2, \dots, kr + 2) \cdots (r, 2r, (k + 1)r),$$

y

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 2, \dots, r), \\ x_2 &= (r + 1, r + 2, \dots, 2r), \\ &\vdots \\ x_{k+1} &= (kr + 1, kr + 2, \dots, (k + 1)r). \end{aligned}$$

Se demuestra en [21] que el grupo G generado por el conjunto de estas permutaciones $\{a, x_1, \dots, x_{k+1}\}$ es, o bien el grupo simétrico $\mathcal{S}_{(k+1)r+n}$ (a no ser que tanto r como $k + n - 1$ sean impares), o bien el grupo alternado $\mathcal{A}_{(k+1)r+n}$.

Consideremos el digrafo de Cayley $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ donde $S = \{a, x_1 a, x_1^2 a, \dots, x_1^{r-1} a\}$. Veamos Γ es un digrafo k -línea iterado. Por el Teorema 3.2.1 Γ es un digrafo de Cayley k -línea

iterado si existe un subgrupo $H_k < G$ de orden r^k tal que $H_k = xS^k$ para algún $x \in S^{-k}$. En el caso que nos ocupa, tomamos H_k como el subgrupo generado por el conjunto $\{x_2, \dots, x_{k+1}\}$, el cual es isomorfo a \mathbb{Z}_r^k . Para cada $y \in S^k$, es fácil comprobar que $a^{-k}y \in H_k$. Luego, Γ es un digrafo k -línea iterado y

$$\Gamma_{r,k} = L^{-k} \text{Cay}(G, \{a, x_1a, \dots, x_1^{r-1}a\})$$

es un digrafo r -regular k -arco transitivo.

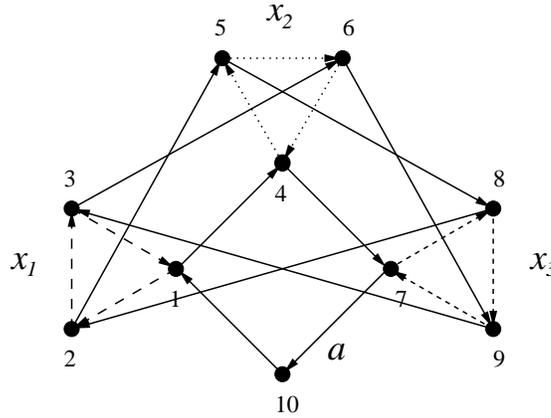


Figura 5.3: Representación gráfica de $\{a, x_1, x_2, x_3\}$ cuando $k = 2$ y $r = 3$

Por el Corolario 5.3.1, el digrafo Γ es equalcanzable o bipartito. Por otra parte, uno de los generadores de G , x_1a , es un ciclo de orden máximo $(k+1)r+n$. Si este ciclo x_1a tiene orden impar, entonces por el Corolario 5.3.2 Γ no es bipartito. Es fácil comprobar que $(k+1)r+n$ es impar a no ser que tanto r como n sean pares, o tanto n, r como $k+1$ sean impares. En definitiva, Γ no es homeomorfo a un ciclo excepto quizás para estos casos.

Así, el digrafo $\Gamma_{r,k} = L^{-k}\Gamma$ es siempre equalcanzable excepto quizás cuando $(k+1)r+n$ sea par. En definitiva, los digrafos $\Gamma_{r,k}$ constituyen una familia infinita de digrafos k -arco transitivos de grado r que no son homeomorfos a un ciclo.

Conclusiones

Resumimos a continuación los resultados obtenidos en esta tesis y las líneas en que estamos interesados en continuar con nuestra investigación.

Este trabajo se articula sobre una nueva técnica de construcción de digrafos finitos k -arco transitivos para cualquier entero positivo k y cualquier grado. De hecho, demostramos un resultado más fuerte, que es una de las aportaciones más relevantes de la tesis, que es que todo digrafo finito regular admite un recubrimiento k -arco transitivo del mismo grado para cualquier entero positivo k . La existencia de estos recubrimientos para cualquier digrafo generaliza los resultados de Babai de 1985 para los casos $k = 0, 1$, que se encuentran en [2].

Babai en [2] demuestra que todo digrafo regular es un digrafo cociente de un digrafo de Cayley. Esto es, que todo digrafo regular admite un recubrimiento vértice transitivo. Inspirándonos en este hecho, nuestra idea consiste en escoger recubrimientos vértice transitivos “apropiados” del digrafo k -línea iterado del que buscamos un recubrimiento, de tal modo que el recubrimiento sea a un vez un digrafo k -línea iterado. Los recubrimientos vértice transitivos “apropiados” de digrafos k -línea iterados son los recubrimientos de Cayley del digrafo con 1-factorizaciones k -uniformes.

Con este propósito, presentamos en el Capítulo 2 los conceptos de 1-factorización o arco-coloración de un digrafo y el de 1-factorización inducida de un digrafo línea. Las 1-factorizaciones inducidas en digrafos línea por 1-factorizaciones arbitrarias del digrafo de partida y por 1-factorizaciones de digrafos de De Bruijn, fueron introducidas por primera vez por Fiol y Serra en [39]. En particular, en [39] se introducen las 1-factorizaciones lineales de los digrafos de De Bruijn y se calculan los grupos de permutaciones de 1-factorizaciones inducidas en digrafos k -línea iterados por 1-factorizaciones lineales de los digrafos de De Bruijn.

En la sección 3.3 introducimos el término de 1-factorización k -uniforme de un digrafo k -línea iterado y se demuestra las 1-factorizaciones k -uniformes de digrafos k -línea iterados son justamente aquéllas tales que el recubrimiento de Cayley del digrafo con una de estas 1-factorizaciones es también un digrafo k -línea iterado. En la misma sección se demuestra que las 1-factorizaciones lineales de digrafos de De Bruijn $B(r, k)$ son 1-factorizaciones k -uniformes.

En la sección 3.4 se prueba un resultado interesante, que es que una 1-factorización inducida de un digrafo k -línea iterado es k -uniforme si y sólo si la 1-factorización de De Bruijn de la que es inducida es k -uniforme. En particular, tenemos que como todo digrafo admite 1-factorizaciones inducidas y las 1-factorizaciones lineales de De Bruijn son 1-factorizaciones k -uniformes, entonces todo digrafo admite 1-factorizaciones k -uniformes. En conclusión, nuestra técnica de recubrimientos k -arco transitivos para cualquier digrafo es válida. Así, en el Capítulo 3 calculamos explícitamente los recubrimientos k -arco transitivos que obtenemos con nuestra técnica para algunas familias de digrafos, como los digrafos completos con y sin bucles, y calculamos algunos parámetros de estos recubrimientos como el diámetro, la conectividad y el

grupo completo de automorfismos. Recordemos que los recubrimientos k -arco transitivos de los digrafos completos ya han sido estudiados previamente como modelos de redes de permutaciones en [29]. Sin embargo, este trabajo previo se centraba exclusivamente en los recubrimientos de digrafos de De Bruijn. En este capítulo se analizan también, entre otros, los recubrimientos de los digrafos de Kautz y de digrafos de Cayley homogéneos, esto es, aquéllos en los que el grupo de automorfismos del grupo base actúa regularmente en el conjunto de generadores. En el caso de los digrafos de Kautz, se trata de digrafos que en general poseen mejores propiedades respecto a los parámetros usuales en el diseño de redes de interconexión, por lo que el análisis de sus recubrimientos de Cayley tiene un interés especial. Los resultados que se obtienen permiten abordar el diseño de redes de permutaciones similares a las clásicas redes barajadas con el bagaje matemático necesario. La obtención de estos resultados ha constituido uno de los objetivos de esta tesis.

En el caso de los digrafos de Cayley homogéneos se aplican técnicas similares a las utilizadas para los digrafos de Kautz aunque amplía notablemente su campo de aplicación. En particular, se pueden obtener recubrimientos k -arco transitivos de hipercubos, los denominados star graphs, o los grafos de Cayley sobre p -grupos elementales abelianos. En todos los casos, el hecho de que el recubrimiento sea un ciclo generalizado facilita el diseño de encaminamientos en los recubrimientos, lo que permite diseñar a su vez algoritmos eficientes de generación de permutaciones en el digrafo original. El desarrollo de este tipo de aplicaciones supone una de las líneas de investigación abiertas por el presente trabajo y constituye uno de los objetivos futuros del grupo de investigación en el que ha sido realizado.

Por otra parte, los resultados de Babai que mencionábamos al comienzo proporcionan una cadena infinita de recubrimientos arco transitivos del digrafo original. Al final del Capítulo 3 estudiamos las condiciones bajo las que con nuestra construcción se puede manufacturar una cadena infinita de recubrimientos k -arco transitivos y ofrecemos una construcción alternativa en la sección 3.6.1 que supera algunas de las dificultades encontradas en la construcción de la cadena infinita aplicando directamente nuestra técnica de construcción de recubrimientos k -arco transitivos. Esta construcción alternativa generaliza la que fue introducida por Conway [10] para el caso no dirigido. Y aunque la generalización no presenta problemas sustanciales, supone una contribución original de este trabajo.

Uno de los problemas abiertos que deja el Capítulo 3 es el de analizar 1-factorizaciones k -uniformes del digrafo de De Bruijn $B(d, k)$ distintas de las 1-factorizaciones lineales que han sido estudiadas exhaustivamente. En particular, sería deseable conocer la existencia de tales 1-factorizaciones cuyos grupos de permutaciones sean el grupo simétrico, el grupo alternado o grupos proyectivos lineales. En este sentido, durante la colaboración con Peter Cameron, se conjeturó que la probabilidad de que una 1-factorización del digrafo de De Bruijn $B(d, k)$ dé lugar al grupo simétrico tiende a 1 para $k \rightarrow \infty$. La conjetura está basada en un resultado similar para grupos generados por las filas de cuadrados latinos. Aún así, resulta difícil en este momento aventurar si alguna de estas 1-factorizaciones puede ser k -uniforme para k suficientemente grande. Sin embargo, el planteamiento del problema ha orientado la parte final de la tesis en hacer un estudio exhaustivo de los recubrimientos de Cayley de digrafos de grado pequeño para tener un conocimiento más profundo de la situación en un ámbito manejable.

En el Capítulo 4 nos centramos en la construcción de recubrimientos k -arco transitivos de grado pequeño y en concreto, nos centramos en la obtención de todas las 1-factorizaciones k -uniformes de un digrafo k -línea iterado. En este capítulo damos una caracterización de las 1-factorizaciones 1-uniformes de un digrafos línea en términos de cuadrados latinos uniformes y una fórmula para conocer el cardinal de 1-factorizaciones 1-uniformes de un digrafo línea

r -regular en función del cardinal de cuadrados latinos uniformes normalizados de orden r . Además, la demostración de esta fórmula es constructiva, por lo que podemos conocer todas las 1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea r -regulares si conocemos los cuadrados latinos uniformes de orden r . En el mismo capítulo se ofrecen herramientas para determinar de manera inmediata si un cuadrado latino es uniforme o no, y se prueba que un cuadrado latino es uniforme si y sólo si es isomorfo a la tabla de composición de un grupo del mismo orden. En particular, calculamos explícitamente todos los cuadrados latinos uniformes de orden menor o igual que 5 y aplicamos el resultado al cálculo de los recubrimientos arco transitivos de algunas familias digrafos de grado menor o igual que 5. Además, se prueba que todo digrafo línea de orden mayor o igual que cuatro admite 1-factorizaciones no 1-uniformes. De este modo, la transformación de 1-factorizaciones al lenguaje de cuadrados latinos permite trabajar en un contexto mucho más transparente, tanto desde el punto de vista intuitivo como desde el punto de vista computacional.

La última parte del Capítulo 4 la dedicamos al problema de la representación de grupos de permutaciones de grado pequeño como grupos de permutaciones de 1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea. La importancia de este estudio reside en el hecho de que si un grupo de permutaciones G es un grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme de un digrafo línea, entonces G actúa regularmente en el conjunto de arcos de un digrafo. Desde este punto de vista, el problema de la representación de grupos de permutaciones arco transitivos ha sido estudiado en la literatura en [3, 17]. Nuestras aportaciones en este terreno residen en la existencia de un subconjunto de generadores del grupo verificando ciertas condiciones, y en el caso concreto de la representación de un grupo de permutaciones como un grupo de permutaciones de una 1-factorización 1-uniforme del digrafo completo con bucles, herramientas sencillas para identificar equivalencias entre los grupos de permutaciones obtenidos por los cuadrados latinos uniformes del mismo orden.

Ya señalamos en su momento que la principal distinción entre nuestra técnica de construcción de digrafos k -arco transitivos y otras construcciones de digrafos k -arco transitivos conocidas hasta el momento, se basaba en que las otras se orientaban hacia la teoría de grupos (el digrafo k -arco transitivo era construido a partir de su grupo de automorfismos), mientras que la nuestra utiliza en todo momento un punto de vista de Teoría de Grafos. En este sentido, el estudio de las 1-factorizaciones 1-uniformes de digrafos línea mediante cuadrados latinos puede contribuir a acercar el estudio y clasificación de digrafos arco transitivos a personas no familiarizadas con el estudio de grupos primitivos como es hasta el momento (véase [73]). En general, mediante nuestra técnica y la generalización de este estudio a 1-factorizaciones k -uniformes de digrafos k -línea iterados en un futuro cercano, se pueden estudiar los digrafos k -arco transitivos bajo otro punto de vista, que en todo caso sería complementario al de la teoría de grupos, por supuesto.

Por último, en el Capítulo 5 de esta memoria estudiamos el grupo de automorfismos de los recubrimientos k -arco transitivos que obtenemos con nuestra técnica. Una primera parte del capítulo se centra en el estudio del grupo completo de automorfismos y damos algunos resultados interesantes en el caso de grado dos en términos de normalidad del recubrimiento de Cayley correspondiente. Además, probamos que todo digrafo 2-regular exactamente k -arco transitivo es k -arco regular y calculamos de modo explícito su grupo completo de automorfismos. A pesar de los intentos que se han hecho para extender este resultado a los digrafos regulares de orden 3, no se ha conseguido obtener un resultado similar que permita obtener de forma general la estructura de los grupos de automorfismos de recubrimientos k -arco transitivos para este caso. Sin embargo, el objetivo parece plausible y queda en estos momentos como uno de los problemas abiertos planteados.

Por otra parte, en el Capítulo 5 estudiamos también cuándo los recubrimientos k -arco transitivos obtenidos son homeomorfos a ciclos o no. Recordemos que en el caso no dirigido, Weiss demostró en un resultado clásico de 1981 que los únicos grafos finitos conexos k -arco transitivos con $k \geq 8$ son los ciclos. Éste no es el caso de los digrafos, aunque la mayoría de las construcciones conocidas de digrafos k -arco transitivos, así como la mayor parte de nuestros ejemplos, son homeomorfos a ciclos. Así, en la sección 2.4.2 se demuestra que para $k \geq 2$ los recubridores de Cayley de digrafos k -línea iterados con 1-factorizaciones inducidas por 1-factorizaciones lineales de un digrafo de De Bruijn, son homeomorfos a ciclos. Por lo tanto, para conseguir digrafos k -arco transitivos no homeomorfos a ciclos con nuestra técnica se necesita de la existencia de 1-factorizaciones k -uniformes de digrafos no inducidas o inducidas por 1-factorizaciones no lineales de los digrafos de De Bruijn. Por otra parte, se demuestra que un digrafo de Cayley es homeomorfo a un ciclo si y sólo si existe un subgrupo normal del grupo base tal que los generadores están contenidos en una de las clases laterales del subgrupo. En particular, se dan condiciones suficientes para que el digrafo de Cayley correspondiente no sea homeomorfo a un ciclo en términos de los órdenes de los generadores del grupo, y se calculan algunos ejemplos de recubrimientos k -arco transitivos no homeomorfos a ciclos. Estos ejemplos proporcionan familias infinitas de dichos digrafos, con lo que se prueba la existencia de digrafos k -arco transitivos no homeomorfos a ciclos y la distinción con el caso no dirigido queda completamente cristalizada. Es de destacar el hecho que, dejando aparte la obtención de algunos casos esporádicos como los de recubrimientos de digrafos de De Bruijn sobre el grupo proyectivo lineal o el grupo de Mathieu M_{12} , los ejemplos que se obtienen construyen directamente un digrafo de Cayley que es k -línea iterado pero que no es recubrimiento de un digrafo menor que sea a su vez k -línea. Éstos son además ejemplos en los que se obtiene una arco-coloración k -uniforme que no es inducida de la del digrafo $(-k)$ -línea iterado correspondiente. En caso contrario, hubiera proporcionado ejemplos de coloraciones k -uniformes del digrafo de Bruijn no lineales. La existencia de tales coloraciones, como se ha mencionado anteriormente, queda como un problema abierto planteado por este trabajo.

En este sentido, la aplicación de nuestra técnica a la búsqueda de familias de digrafos k -arco transitivos no homeomorfos a ciclos es otro de los problemas que proponemos para un futuro estudio.

Por último, notemos que la obtención de los resultados de los dos últimos capítulos esconde dificultades considerables en el aspecto computacional que han sido obviadas en la presentación de la memoria por considerar que se apartaban de la línea fundamental del trabajo. La puesta a punto de las rutinas necesarias en el contexto de los paquetes GAP y GRAPE ha contribuido a subsanar algunos errores en este último y a mejorar su rendimiento y versatilidad.

Apéndice de Grupos de permutaciones

En este Apéndice de Grupos de permutaciones resumimos algunos conceptos básicos relativos a grupos de permutaciones y acciones (transitivas, regulares, primitivas) de un grupo de permutaciones en un conjunto, que se utilizan con frecuencia a lo largo de esta memoria.

Introducimos también en este Apéndice las definiciones de producto semidirecto y producto corona de grupos de permutaciones. Por último en este Apéndice, definiremos brevemente los grupos de permutaciones afines y proyectivos, y los grupos de permutaciones de Mathieu M_{11} y M_{12} , y algunas de sus propiedades básicas.

Para detalles y un estudio más profundo sobre el tema, nos remitimos a [27],[69] y [75].

Grupos de permutaciones. Acción de un grupo en un conjunto

Sea G un grupo finito, escrito multiplicativamente, y denotemos por 1 el elemento identidad de G . Sea Ω un conjunto no vacío y finito. Una función

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega \times G &\rightarrow \Omega \\ (\alpha, g) &\mapsto \alpha^g \end{aligned}$$

define una *acción por la izquierda* (o simplemente *acción*) de G en Ω si satisface las siguientes propiedades:

1. $\alpha^1 = \alpha$ para todo $\alpha \in \Omega$, y
2. $(\alpha^g)^h = \alpha^{gh}$ para todo $\alpha \in \Omega$ y $g, h \in G$.

El *grado* de una acción de G en Ω es el cardinal del conjunto Ω , $|\Omega|$.

En estas condiciones, diremos también que G *actúa* en Ω (*por la izquierda*). Una *acción por la derecha* de G en Ω se define de manera análoga.

Sea G un grupo que actúa en un conjunto (no vacío) Ω . Entonces a cada elemento $g \in G$ podemos asociarle una aplicación \bar{g} como sigue:

$$\begin{aligned} \bar{g} : \Omega &\rightarrow \Omega \\ \alpha &\mapsto \alpha^g \end{aligned}$$

La aplicación \bar{g} así definida es claramente una biyección pues $x^g = y^g$ implica $x = x^{gg^{-1}} = y^{gg^{-1}} = y$. Luego, la aplicación ρ definida por

$$\begin{aligned}\rho : G &\rightarrow \text{Sym}(\Omega) \\ g &\mapsto \bar{g}\end{aligned}$$

está bien definida. Además, de la definición de la acción de un grupo en un conjunto, se deduce que ρ es de hecho un homomorfismo de grupos, pues

$$\overline{gh}(\alpha) = \bar{h}(\bar{g}(\alpha))$$

para todo $\alpha \in \Omega$ y $g, h \in G$.

Se define el *núcleo* de la acción de G en Ω como el núcleo del homomorfismo ρ , i.e. $\ker \rho$. Se dice que la acción de G en Ω es *fiel* (o que G *actúa fielmente* en Ω) cuando $\ker \rho = 1$.

En general, cualquier homomorfismo de grupos de G en $\text{Sym}(\Omega)$ se dice que es *representación por permutaciones* de G en Ω .

Entonces, hemos visto que a cualquier acción de un grupo G en un conjunto Ω se le puede asociar una representación por permutaciones ρ de G en Ω . Y a la inversa, es fácil ver que representaciones por permutaciones de G en Ω corresponden a acciones de G en Ω . En conclusión, acciones de grupos en conjuntos y representaciones por permutaciones corresponden a una misma situación. Así, hablaremos indistintamente de que un grupo G que actúa en un conjunto Ω , o de que G es un *grupo de permutaciones* en un conjunto Ω .

Grupos de permutaciones permutacionalmente equivalentes

Sean ahora G y H dos grupos de permutaciones actuando en conjuntos X y Y respectivamente. Diremos que G y H son *permutacionalmente equivalentes* si existe un par (α, β) donde $\alpha : G \rightarrow H$ es un isomorfismo y $\beta : X \rightarrow Y$ es una biyección, que verifica

$$(x^g)^\beta = (x^\beta)^{g^\alpha}, \quad \forall x \in X, g \in G.$$

En particular, dos grupos G y H que actúan en un mismo conjunto X son permutacionalmente equivalentes si existe un par (α, β) donde $\alpha : G \rightarrow H$ es un isomorfismo y $\beta \in \text{Sym}(X)$, que verifica $g^\alpha = \beta^{-1}g\beta$, o equivalentemente, si G y H son conjugados.

Representaciones regulares de grupos

Proposición 1 *Sea G un grupo (finito). Entonces G es isomorfo a un subgrupo de $\text{Sym}(G)$.*

Demostración. Para cada $g \in G$ definimos una aplicación $m_g : G \rightarrow G$ por $m_g(h) = gh$, que claramente es una aplicación biyectiva. Así, consideramos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned}\rho : G &\rightarrow \text{Sym}(G) \\ g &\mapsto m_g\end{aligned}$$

que es un homomorfismo de grupos con núcleo trivial ($\ker \rho = 1$). Entonces, el conjunto imagen es un subgrupo de $\text{Sym}(G)$ isomorfo a G . ■

El homomorfismo de grupos ρ definido anteriormente se conoce como la *representación regular por la izquierda* de G . De manera análoga, se define la *representación regular por la derecha* de G .

Notaciones

A lo largo de este Apéndice de Grupos de Permutaciones, el grupo (finito) G se entenderá como un grupo de permutaciones que actúa en un conjunto no vacío (finito) Ω .

Definimos el *soporte* del grupo G (cuando $|G| > 1$) como el subconjunto de los elementos de Ω que no quedan fijos por todos los elementos $g \in G$. Y definimos también el *grado* del grupo G (si $|G| > 1$) como el cardinal del soporte de G .

Además, utilizaremos la siguiente notación :

Símbolo	Significado
G, H, K, L	Grupos de permutaciones finitos
$ G $	Orden de G , i.e. cardinal de permutaciones que contiene G
$ G : H $	Índice de un subgrupo H de G , i.e. $\frac{ G }{ H }$
$H \leq G$	H es un subgrupo de G
$H < G$	H es un subgrupo propio de G , i.e. $H \neq G$
$H \triangleleft G$	H es un subgrupo propio normal de G
$H \simeq G$	H es isomorfo a G
$\text{Inn}(G)$	Grupo de automorfismos internos de G
$\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$	Producto directo de grupos
$H \rtimes N, N \rtimes H$	Producto semidirecto de grupos
$H \wr K$	Producto corona de grupos de permutaciones
Ω, X, Y, Z	Conjuntos no vacíos finitos
$ \Omega $	Cardinal del conjunto Ω
$\text{Sym}(\Omega)$	Grupo simétrico en el conjunto Ω
$\mathcal{S}_n, \mathcal{A}_n$	Grupos simétrico y alternado de grado n

Transitividad, regularidad y primitividad de un grupo de permutaciones

Órbitas

Un grupo de permutaciones G en un conjunto Ω define una relación de equivalencia \sim_G en Ω dada por

$$\alpha \sim_G \beta \iff \alpha^g = \beta \text{ para algún } g \in G.$$

Las clases de equivalencia de \sim_G son las G -órbitas (o simplemente *órbitas*) de Ω . Claramente, el conjunto de todas las órbitas es una partición de Ω .

La órbita que contiene un elemento $\alpha \in \Omega$ se denota por α^G , y consta de todas las imágenes de α por permutaciones de G . Esto es,

$$\alpha^G = \{\alpha^g : g \in G\}.$$

Estabilizadores

El *estabilizador* de un elemento $\alpha \in \Omega$ en G se define como el conjunto

$$G_\alpha = \{g \in G : \alpha^g = \alpha\}.$$

Más en general, sea $\Delta \subseteq \Omega$, se define el *estabilizador de los elementos* (*pointwise stabilizer*) del subconjunto Δ en G como el siguiente conjunto de elementos de G ,

$$G_{\Delta} = \{g \in G : \delta^g = \delta, \forall \delta \in \Delta\}.$$

También, si $\Delta \subseteq \Omega$, se define *estabilizador del conjunto* (*setwise stabilizer*) Δ en G como el conjunto siguiente:

$$G_{\{\Delta\}} = \{g \in G | \Delta^g = \Delta\}.$$

Es fácil comprobar que ambos conjuntos G_{Δ} y $G_{\{\Delta\}}$ son subgrupos de G y que $G_{\Delta} \trianglelefteq G_{\{\Delta\}}$. Además, obsérvese que $G_{\{\alpha\}} = G_{\alpha}$ para cualquier $\alpha \in \Omega$.

Teorema 1 *Sea G un grupo que actúa en un conjunto Ω . Sean $g, h \in G$, $\alpha, \beta \in \Omega$ y $\Delta \subseteq \Omega$. Entonces,*

1. G_{α} es un subgrupo de G .
2. $G_{\beta} = g^{-1}G_{\alpha}g$ siempre que $\alpha^g = \beta$. Más aún, $\alpha^g = \alpha^h \iff (G_{\alpha})g = (G_{\alpha})h$.
3. $|\alpha^G| = |G : G_{\alpha}|$ para todo $\alpha \in \Omega$. En particular, como G es un grupo finito, entonces $|\alpha^G| |G_{\alpha}| = |G|$.

Transitividad, remiregularidad y regularidad

El grupo G actúa *transitivamente* en Ω si únicamente consta de una órbita. Esto es, si para todo par de elementos $\alpha, \beta \in \Omega$ existe un elemento $g \in G$ tal que $\alpha^g = \beta$. También se dice que G es *transitivo* en Ω . En otro caso, G se dice que *actúa intransitivamente* que es *intransitivo* en Ω .

También se dice que un grupo de permutaciones G es *semiregular* (o que actúa *semiregularmente*) en un conjunto Ω si para cada $\alpha \in \Omega$ se verifica $G_{\alpha} = 1$.

Con estas notaciones, el Teorema 1 implica que todas las órbitas de un grupo semiregular G en Ω tienen cardinal $|G|$. En particular, el orden de un grupo de permutaciones semiregular es un divisor de su grado.

Un grupo de permutaciones G se dice que *actúa regularmente* (o que es *regular*) en Ω si es semiregular y transitivo en Ω .

Corolario 1 *Sea G un grupo de permutaciones que actúa transitivamente en Ω . Entonces,*

1. Los estabilizadores G_{α} ($\alpha \in \Omega$) forman una clase de conjugación de subgrupos de G
2. $|G : G_{\alpha}| = |\Omega|$ para cada α . En particular, el orden $|G|$ es divisible por el grado de su acción $|\Omega|$.
3. G actúa regularmente si y sólo si $|G| = |\Omega|$.

Sea G un grupo de permutaciones en un conjunto Ω . Para un elemento $g \in G$, se define $fix(g)$ como el conjunto de todos los *elementos fijos* por g , es decir, $fix(g) = \{\alpha \in \Omega : \alpha^g = \alpha\}$. Con estas notaciones, se verifica el siguiente resultado:

Teorema 2 (Cauchy-Frobenius Lemma) *Sea G un grupo que actúa en un conjunto Ω . Entonces G tiene un total m órbitas en Ω , donde:*

$$m|G| = \sum_{g \in G} |fix(g)|$$

Transitividad múltiple

Sea G un grupo de permutaciones en un conjunto Ω . Sea Ω^k el producto cartesiano de k -factores Ω . Denotamos por $\Omega^{(k)}$ el subconjunto de Ω^k de todas las k -tuplas de elementos distintos, esto es, $\Omega^{(k)} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \Omega^k : \alpha_i \neq \alpha_j \text{ siempre que } i \neq j\}$. En particular, $|\Omega^{(k)}| = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Decimos que G es k -transitivo si la acción de G en $\Omega^{(k)}$ dada por $(x_1, \dots, x_k)^g = (x_1^g, \dots, x_k^g)$ para $(x_1, \dots, x_k) \in \Omega^{(k)}$ es transitiva. Si además esta la acción es regular, decimos que G es *exactamente k -transitivo*.

Claramente, si $k \geq 2$ y G es k -transitivo en Ω , entonces G es $(k-1)$ -transitivo en Ω . Y también claramente, G es 1-transitivo en Ω si y sólo si es transitivo en Ω , y G es exactamente 1-transitivo en Ω si y sólo si es regular en Ω .

Para $k \geq 6$, la única posibilidad de que un grupo de permutaciones sea exactamente k -transitivo, es que sea permutacionalmente isomorfo a un grupo alternado o simétrico. Más exactamente,

Proposición 2

- El grupo simétrico S_n es exactamente n -transitivo y exactamente $(n-1)$ -transitivo.
- Si $n \geq 3$, el grupo alternado A_n es exactamente $(n-2)$ -transitivo.
- Si G es un grupo de permutaciones exactamente k -transitivo con $k \geq 6$, entonces G es permutacionalmente isomorfo a un grupo simétrico o a un grupo alternado.

Primitividad

Sea G un grupo que actúa transitivamente en un conjunto Ω . Un subconjunto $\Delta \subseteq \Omega$ se dice que es un *bloque* de G si para cada $g \in G$, o bien $\Delta^g = \Delta$, o bien $\Delta^g \cap \Delta = \emptyset$.

Notemos que todo grupo G que actúa transitivamente en un conjunto Ω tiene el conjunto total Ω , los conjuntos de un sólo elemento $\{\alpha\}$ (donde $\alpha \in \Omega$) y el conjunto \emptyset como bloques. Estos bloques se conocen como los *bloques triviales* del grupo de permutaciones.

Si G es un grupo que actúa transitivamente en un conjunto Ω y no tiene más bloques que los triviales, decimos que G *actúa primitivamente* en Ω (o simplemente, que *es primitivo* en Ω). En otro caso, diremos que G *actúa imprimitivamente* (o que es *imprimitivo*) en Ω .

Producto semidirecto

Sea G un grupo. Supongamos que existen N y H dos subgrupos de G que verifican los siguientes tres puntos:

- $N \triangleleft G$
- $N \cap H = 1$
- $G = NH$

Entonces, G se dice que es el *producto semidirecto interno* de N y H , y lo denotamos indistintamente por

$$G = N \rtimes H \quad \text{o} \quad G = H \rtimes N.$$

Sea G el producto semidirecto interno de dos subgrupos N y H . La conjugación en N por un elemento $h \in H$ define un automorfismo α_h de N , más exactamente $n^{\alpha_h} = n^h = h^{-1}nh$ para cada $n \in N$. Es sólo una comprobación que la aplicación definida por

$$\begin{aligned}\alpha : H &\rightarrow \text{Aut } N \\ h &\mapsto \alpha_h\end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos de H en $\text{Aut } N$.

Observéase además, que el grupo G es el producto directo de los subgrupos H y N si y sólo si α el homomorfismo nulo, esto es, si $\alpha_h = 1 \in \text{Aut}(N)$ para todo $h \in H$.

Sean ahora H y N dos grupos y $\alpha : H \rightarrow \text{Aut } N$ un homomorfismo de grupos. Se define el *producto semidirecto externo*, y se denota $G = N \rtimes_{\alpha} H$ (o $H \rtimes_{\alpha} N$), como el conjunto de todos pares (n, h) donde $n \in N, h \in H$, junto con la operación binaria

$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) = (n_1 *_{N} n_2^{h_1^{-1}}, h_1 *_{H} h_2)$$

Se comprueba que el producto semidirecto externo así definido es un grupo. El elemento identidad de $N \rtimes_{\alpha} H$ es $(1, 1)$, el elemento inverso de un elemento (n, h) es $(n, h)^{-1} = ((n^{-1})^h, h^{-1})$, y se verifica la propiedad asociativa.

A continuación, consideremos las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned}H &\rightarrow N \rtimes_{\alpha} H \\ h &\mapsto (1, h)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N &\rightarrow N \rtimes_{\alpha} H \\ n &\mapsto (n, 1)\end{aligned}$$

que son homomorfismos inyectivos de H en G y de N en G respectivamente. Denotemos por H^* y N^* los grupos imagen respectivos, entonces $H \simeq H^*$ y $N \simeq N^*$.

Además, $(n, 1) * (1, h) = (n, h)$ implica que $G = N^*H^*$, y claramente $N^* \cap H^* = 1$. Finalmente,

$$(1, h)^{-1} * (n, 1) * (1, h) = (n^h, 1)$$

con lo que demostramos que $N^* \triangleleft G$, luego G es de hecho el producto semidirecto interno de N^* y H^* .

Notemos que la conjugación en N^* por el elemento $(1, h)$ induce el automorfismo α_h .

Normalmente, no se distingue entre N y N^* ni entre H y H^* , luego G se entiende como el producto semidirecto interno de N y H . A lo largo de la memoria, hablaremos simplemente del producto semidirecto $N \rtimes H$.

Producto corona de grupos de permutaciones

Sean Y, X dos conjuntos no vacíos y denotemos por $\text{Fun}(Y, X)$ el conjunto de todas las funciones de Y en X .

En el caso de que el conjunto de llegada X sea un grupo K , consideramos $\text{Fun}(Y, K)$ como un grupo con la operación binaria definida elemento a elemento a partir de la de K de la siguiente manera

$$y^{fg} = y^f y^g$$

donde $y \in Y$, $f, g \in \text{Fun}(Y, K)$.

Sean K y H grupos y supongamos que el grupo H actúa en un conjunto Y . Se define el *producto corona* $K \wr_Y H$ (o simplemente $K \wr H$) de K por H con respecto a la acción de H , como el producto semidirecto externo $\text{Fun}(Y, K) \rtimes H$ donde H actúa en el grupo $\text{Fun}(Y, K)$ (con la operación binaria definida más arriba) via:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : H & \rightarrow & \text{Aut}(\text{Fun}(Y, K)) \\ h & \mapsto & \alpha_h : \text{Fun}(Y, K) \rightarrow \text{Fun}(Y, K) \\ & & f \mapsto f^h : Y \rightarrow K \\ & & y \mapsto y^{f^h} = (y^{h^{-1}})^f \end{array}$$

En este caso, decimos que el siguiente subgrupo del producto corona $K \wr_Y H$

$$\mathcal{B} = \{(f, 1) : f \in \text{Fun}(Y, K)\} \simeq \text{Fun}(Y, K)$$

es el *grupo base* del producto corona, y denotamos

$$\mathcal{H}^* = \{(1, h) : h \in H\} \simeq H.$$

En particular, de la definición de producto semidirecto externo, se tiene

- $\mathcal{B} \triangleleft K \wr H$
- $\mathcal{B} \cap \mathcal{H}^* = 1$
- $K \wr H = \mathcal{B}\mathcal{H}^*$

En adelante, si no hay confusión, identificaremos \mathcal{H}^* con H .

Proposición 3 Sean K y H dos grupos tales que H actúa en un conjunto Y . Consideremos el producto corona $K \wr H$.

Si K actúa en un conjunto X , entonces el producto corona $K \wr H$ actúa en $X \times Y$. Para cada $(x, y) \in X \times Y$ y cada $(f, h) \in \text{Fun}(Y, K) \rtimes H = K \wr H$, se define una acción de $K \wr H$ en $X \times Y$ como sigue:

$$(x, y)^{(f, h)} = (x^{y^f}, y^h).$$

Más aún, si K y H son transitivos en X y en Y respectivamente, entonces esta acción de $K \wr H$ en $X \times Y$ es transitiva.

Proposición 4 (Propiedad asociativa del producto corona) Sean K, H, L grupos que actúan en conjuntos X, Y, Z respectivamente. Entonces,

$$(K \wr_Y H) \wr_Z L \simeq K \wr_{Y \times Z} (H \wr_Z L)$$

con la acción definida como anteriormente de $H \wr_Z L$ en $Y \times Z$.

Más aún, los productos corona $(K \wr_Y H) \wr_Z L$ y $K \wr_{Y \times Z} (H \wr_Z L)$ son permutacionalmente equivalentes.

Por ejemplo, sean K y H dos grupos de permutaciones que actúan en los conjuntos X e Y respectivamente. Supongamos que $Y = \{1, \dots, m\}$. En este caso, podemos identificar el grupo base del producto corona $\mathcal{B} \simeq \text{Fun}(Y, K)$ con $K^m = K \times \dots \times K$ (m factores). Entonces, la acción de H en \mathcal{B} corresponde a la permutación de las componentes siguiente:

$$(k_1, \dots, k_m)^{h^{-1}} = (k_{1^h}, \dots, k_{m^h})$$

para $(k_1, \dots, k_m) \in \mathcal{B}$ y $h \in H$.

De acuerdo con esta acción, la operación de composición en $K \wr H$ es

$$((k_1, \dots, k_m), h)((k'_1, \dots, k'_m), h') = ((k_1 k'_{1h}, \dots, k_m k'_{mh}), hh').$$

Y además,

$$(x, i)^{((k_1, \dots, k_m), h)} = (x^{k_i}, i^h).$$

Notemos que claramente $|K \wr H| = |K|^m |H|$.

En general, si H y K son dos grupos finitos, definimos el *producto directo estándar* $K \wr H$ entendiéndolo H y K como grupos de permutaciones en sus respectivos conjuntos de elementos via la representación regular por la derecha de cada uno. El grupo base del producto corona estándar $K \wr H$ es $\prod_{h \in H} K_h$ donde $K_h \simeq K$ y $(K_h)^{h'} = K_{hh'}$ para cualesquiera $h, h' \in H$.

Grupos afines y proyectivos

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F y $G = GL(V)$ el grupo de todos los automorfismos lineales de V . Dado $v \in V$, la *traslación* v^* se define como la permutación en V que envía x a $x + v$ para $x \in V$. Está bien definida como permutación pues $(-v)^*$ es la inversa de v^* .

Consideremos la aplicación de V en $Sym(V)$ que envía $v \mapsto v^*$ para cada $v \in V$. Es fácil comprobar que es un homomorfismo de grupos inyectivo del grupo aditivo V en $Sym(V)$, y definimos el grupo imagen V^* como el *grupo de las traslaciones* de V .

Se define el *grupo afín* $Aff(V)$ de V (sobre F) como el subgrupo de $Sym(V)$ generado por G y V^* , esto es, $A = Aff(V) = \langle G, V^* \rangle$. Se demuestra que de hecho, $Aff(V) = V^* \rtimes G$.

En el caso particular de que F sea un cuerpo finito de orden q y V un espacio vectorial de dimensión d sobre F , las notaciones $AGL_d(F)$, $AGL_d(q)$ y $AGL(d, q)$ se usan más comúnmente que $Aff(V)$. En este caso, el grupo $AGL_d(F)$ se conoce como el *grupo afín (general lineal)* de dimensión $d \geq 1$ sobre F . Y no hay ambigüedad alguna, pues los cuerpos finitos del mismo orden son isomorfos.

Sea F un cuerpo finito de orden $q = p^m$ con p un número primo. Denotemos por 1 el elemento neutro del grupo multiplicativo F^* y por 0 el elemento neutro de F como grupo aditivo. El *grupo proyectivo (general lineal)* $PGL_d(F)$ (o $PGL_d(q)$ o $PGL(d, q)$) de dimensión d sobre el cuerpo F se define como el grupo cociente $\frac{GL(F^d)}{Z}$, donde Z es grupo de las matrices escalares αI_d en $GL(F^d)$ para $\alpha \in F$ e I_d el elemento neutro de $GL(F^d)$ (la matriz $GL(F^d)$ con elementos 1 en las entradas de la diagonal y el resto de entradas iguales a 0). Se demuestra que el grupo proyectivo tiene orden

$$|PGL_d(q)| = q^{d(d-1)/2} \prod_{i=2}^d (q^i - 1) = \frac{(q^d - 1)(q^d - q) \cdots (q^d - q^{d-1})}{q - 1}$$

y que es simple excepto para los casos $|F| = 2, 3$.

Sea ahora $SL(F^d)$ el *grupo especial lineal* definido como el subgrupo de todos los elementos $A \in GL(F^d)$ tal que $\det(A) = 1$. El *grupo proyectivo (especial lineal)* $PSL_d(F)$ (o $L_d(F)$ o $L_d(q)$) de dimensión d sobre el cuerpo F se define como el grupo cociente $\frac{SL(F^d)Z}{Z}$, y tiene orden $\frac{|PGL_d(q)|}{n}$, donde $n = \gcd(d, q - 1)$, $d \geq 2$.

Los grupos afines y proyectivos (generales lineales) son los grupos de automorfismos de las geometrías afines y proyectivas respectivamente. Los *puntos de la geometría afín* son simplemente los vectores de F^d . El grupo $AGL_d(F)$ actúa en el conjunto F^d de vectores fila por

multiplicación a la derecha. Se verifica que $AGL_d(F)$ es un subgrupo de $\text{Sym}(F^d)$ 2-transitivo. La acción de $AGL_d(F)$ en F^d consta de dos órbitas, el vector $\{0\}$, y el conjunto $\Omega = F^d - \{0\}$ de vectores no nulos. Más aún, se tiene que esta acción en Ω no es primitiva.

De hecho, existe una partición Λ de Ω en bloques del mismo cardinal y tal que dos vectores en Ω pertenecen al mismo bloque si y sólo si existe uno es un múltiplo escalar del otro. Es decir, una partición Λ de Ω donde un bloque consta de todos los múltiples escalares de un vector dado de Ω . Un bloque de este tipo recibe el nombre *punto de la geometría proyectiva* o *punto proyectivo* y escribiremos $[\alpha_1, \dots, \alpha_d]$ para denotar el punto proyectivo que contiene al vector no nulo $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. Con estas notaciones, la partición Λ de entiende como el conjunto de puntos de la geometría proyectiva $PG_{d-1}(F)$. Claramente, $|PG_{d-1}(F)| = \frac{q^d - 1}{q - 1}$.

Se demuestra que para $d \geq 3$, $PGL_d(F)$ es 2-transitivo pero no 3-transitivo en el conjunto de puntos proyectivos $PG_{d-1}(F)$, y también que el grupo $PSL_d(F)$ es 2-transitivo en los puntos de $PG_{d-1}(F)$.

Los grupos de Mathieu M_{11} y M_{12}

Sea Ω el conjunto $\Omega = \{1, 2, \dots, 12\}$. Consideremos las siguientes siete permutaciones de Ω :

$$\varphi = (4, 5, 6)(7, 8, 9)(10, 11, 12)$$

$$\chi = (4, 7, 10)(5, 8, 11)(6, 9, 12)$$

$$\psi = (5, 7, 6, 10)(8, 9, 12, 11)$$

$$\omega = (5, 8, 6, 12)(7, 11, 10, 9)$$

$$\pi_1 = (1, 4)(7, 8)(9, 11)(10, 12)$$

$$\pi_2 = (1, 2)(7, 10)(8, 11)(9, 12)$$

$$\pi_3 = (2, 3)(7, 12)(8, 10)(9, 11)$$

Se definen el *grupo de Mathieu M_{11}* como el grupo de permutaciones en Ω generado por $M_{11} = \langle \varphi, \chi, \psi, \omega, \pi_1, \pi_2 \rangle$, y el *grupo de Mathieu M_{12}* como el grupo de permutaciones en Ω generado por $M_{12} = \langle \varphi, \chi, \psi, \omega, \pi_1, \pi_2, \pi_3 \rangle$.

Se demuestra que el grupo de Mathieu M_{11} es exactamente 5-transitivo en el conjunto Ω y tiene grado 12 y orden $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$, y que el grupo de Mathieu M_{11} es exactamente 4-transitivo en $\Omega - \{3\}$ y tiene grado of 11 y orden $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920$. De hecho, M_{11} es permutacionalmente equivalente al estabilizador del elemento 3 en M_{12} . Además, ambos grupos M_{11} y M_{12} son grupos simples.

La importancia de estos grupos es consecuencia del siguiente resultado,

Proposición 5 *Sea $k \geq 4$ y G un grupo de permutaciones exactamente k -transitivo que no es isomorfo a ningún grupo simétrico ni a ningún grupo alternado. Entonces, o bien $k = 4$ y G es permutacionalmente equivalente a M_{11} , o bien $k = 5$ y G es permutacionalmente equivalente a M_{12} .*

Bibliografía

- [1] S.B. Akers and B. Krishnamurthy, A group-theoretic model for symmetric interconnection networks, *IEEE Trans. on Comput.* **38** (4) (1989) 555–566.
- [2] L. Babai, Arc transitive covering digraphs and their eigenvalues, *J. Graph Theory* **9** (3) (1985) 363–370.
- [3] L. Babai, P.J. Cameron, M. Deza and N.M. Singhi, On sharply edge-transitive permutation groups, *J. Algebra* **73** (2) (1981) 573–585.
- [4] U. Baumann, Representation of permutation groups by coloured graphs, *Math. Nach.* **158** (1992) 199–206.
- [5] U. Baumann, Symmetry Groups of coloured graphs, *Math. Nach.* **163** (1993) 93–100.
- [6] R. Bailey, Latin squares with highly transitive automorphism groups, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **33** (1982) 18–22.
- [7] G. Behrendt, Automorphism groups of pictures, *J. Graph Theory*, **14** (1990) 423–426.
- [8] J.-C. Bermond, E. Darrot, O. Delmas and S. Perennes, Hamilton circuits in butterfly networks. Technical report, C.N.R.S.-U.R.A., Université de Nice-Sophia Antipolis, 1995.
- [9] J.-C. Bermond, X. Muñoz and A. Marchetti-Spaccamela, Induced broadcasting algorithms in iterated line digraphs, in: *Lecture Notes in Computer Science, Volume 1123*, 313–324, EURO-PAR'96, Springer Verlag, 1996.
- [10] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, (Cambridge University Press, New York, 1974.)
- [11] N. Biggs, Pictures, *Combinatorics (Proc. Conf. Combinatorial Math., Math. Inst., Oxford, 1972)*, 1–17, *Inst. Math. Appl., Southend-on-Sea*, 1972.
- [12] J.M. Brunat, *Contribució a l'estudi de la simetria de grafs dirigits i les seves aplicacions*, PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1994.
- [13] J.M. Brunat, M. Espona, M.A. Fiol and O. Serra, Cayley digraphs from complete generalized cycles, *European J. Combin.* **20** (5) (1999) 337–349.
- [14] J.M. Brunat, M. Espona, M.A. Fiol and O. Serra, On Cayley line digraphs, *Discrete Math.* **138** (1995) 147–159.
- [15] P.J. Cameron, Automorphism groups of graphs, in: L.W. Beineke and R.J. Wilson eds., *Selected Topics in Graph Theory 2* (Academic Press, London, 1983) 89–127.

- [16] P.J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1994.)
- [17] P.J. Cameron, Digraphs admitting sharply edge-transitive automorphism groups, *European J. Combin.* **8** (4) (1987) 357–365.
- [18] P.J. Cameron, C.E. Praeger, N.C. Wormald, Infinite highly arc transitive digraphs and universal covering digraphs, *Combinatorica* **13** (4) (1993) 377–396.
- [19] A. Cayley, The theory of groups, graphical representation, *Mathematical Papers*, Cambridge **10** (1895) 427–460.
- [20] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs & digraphs*, 3rd. edition, (Chapman & Hall, London, 1996.)
- [21] M. Conder, P. Lorimer, C.E. Praeger, Constructions for arc-transitive digraphs, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **59** (1995) 61–80.
- [22] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker and R.A. Wilson, *ATLAS of finite Groups*, (Oxford University Press, New York, 1985.)
- [23] N.G. de Bruijn, A combinatorial problem, *Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen Proc. Ser. A*, **49** (1946) 758–764.
- [24] J. de Rumeur, *Communications dans les réseaux de processeurs*, Études et reserche en informatique. (Masson, Paris, 1994.)
- [25] C. Delorme and G. Fahri, Large graphs with given degree and diameter-Part I, *IEEE Trans. on Comput.* **C-33** (1984) 857–860.
- [26] J. Dénes and A.D. Keedwell, Latin Squares and 1-factorizations of Complete Graphs: (I) connections between the enumeration of Latin Squares and Rectangles and r -factorizations of Labelled Graphs, *Ars Combin.* **25** (1988) 109–127.
- [27] J.D. Dixon and B. Mortimer, *Permutation groups*, (Springer Verlag, New York, 1996.)
- [28] M.J. Erickson, *Introduction to Combinatorics*, (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.)
- [29] M. Espona and O. Serra, Cayley digraphs based on the de Bruijn networks, *SIAM J. Discrete Math.* **11** (2) (1998) 305–317.
- [30] D.M. Evans, An infinite highly arc-transitive digraph, *European J. Combin.* **18** (3) (1997) 281–286.
- [31] V. Faber, J.W. Moore and W.Y.C. Chen, Cycle prefix digraphs for interconnection networks, *Networks*, **23** (1993) 641–649.
- [32] J. Fàbrega and M.A. Fiol, Maximally Connected Digraphs, *J. Graph Theory* **13** (1989) 657–668.
- [33] M.A. Fiol, I. Alegre, J.L.A. Yebra and J. Fàbrega, Digraphs with walks of equal length between vertices, *Graph theory with applications to algorithms and computer science (Kalamazoo, Mich. 1984)*, 313–322, *Wiley-Intersci. Publ., Wiley, New York*, 1985.

- [34] M.A. Fiol, J. Fàbrega and M. Escudero, Short paths and connectivity in graphs and digraphs, *Ars Combin.* **29B** (1990) 17–31.
- [35] M.A. Fiol, J. Fàbrega, O. Serra and J.L.A. Yebra, A unified approach to the design and control of dynamic memory networks, *Parallel Processing Letters*, **3**(4) (1993) 445–456.
- [36] M.A. Fiol, J. Fàbrega and J.L.A. Yebra, The design and control of dynamic memory networks, in: *Proc. 1988 IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems (Espoo, Finland, June 1988)*, 175–179.
- [37] M.L. Fiol, M.A. Fiol and J.L.A. Yebra, When the arc-colored line digraph of a Cayley colored digraph is again a Cayley colored digraph, *Ars Combin.* **34** (1992) 65–73.
- [38] M.A. Fiol and A.S. Lladó, The partial line technique in the design of large interconnection networks, *IEEE Trans. on Comput.* **41** (1992) 848–857.
- [39] M.A. Fiol and O. Serra, Arc-colored line digraphs and their groups, *2nd Int. Conf. in Graph theory, combinatorics, algorithms and applications, (San Francisco, CA, 1989)*, 459–468, *SIAM, Philadelphia, PA*, 1991.
- [40] M.A. Fiol and O. Serra, On some groups associated to arc-colored digraphs, in: *Combinatorics '88, Vol. 2, (Ravello, 1988)*, 413–420, *Res. Lectures Notes in Math. (Mediterranean, Rende)*, 1991.
- [41] M.A. Fiol, J.L.A. Yebra and I. Alegre, Line digraph iterations and the (d, k) digraph problem, *IEEE Trans. on Comput.* **C-33** (5) (1984) 400–403.
- [42] R. Frucht, Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe, *Compositio Math.* **6** (1938) 239–250.
- [43] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.2*, Aachen, St Andrews, 1999, (<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap>).
- [44] D. Geller and F. Harary, Connectivity in digraphs, *Lecture Notes in Mathematics*, **186** (1970) 400–403.
- [45] C.D. Godsil, Eigenvalues of graphs and digraphs, *Linear Algebra Appl.* **46** (1982) 43–50.
- [46] I.J. Good, Normal recurring decimals, *J. London Math. Soc.* **21** (1946) 167–169.
- [47] J.L. Gross, Every connected regular graph of even degree is a Schreier coset graph, *J. Combin. Theory Ser. B* **22** (3) (1977) 227–232.
- [48] Y.O. Hamidoune, Sur les atomes d'un graphe orienté, *C.R. Acad. Sc. Paris A* (1977) 1253–1256.
- [49] Y.O. Hamidoune, A.S. Llado and O. Serra, Vosperian and Superconnected Abelian Cayley Digraphs, *Graphs Combin.* **7** (1991) 143–152.
- [50] F. Harary and R.Z. Norman, Some properties of line digraphs, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **9** (2) (1960) 161–168.
- [51] R.L. Hemminger and L.W. Beineke, Line graphs and line digraphs, in: L.W. Beineke and R.J. Wilson eds., *Selected Topics in Graph Theory I* (Academic Press, London, 1978) 271–305.

- [52] C. Heuchenne, Sur une certaine correspondance entre graphes, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège* **33** (1964) 743–753.
- [53] M.G. Hluchyj and M.J. Karol, Sufflenet: an application of generalized shuffles to multihop lightwave networks, in: *INFOCOM'88*, (1988) 379–380.
- [54] M. Imase and M. Itoh, Design to minimize diameter on building-block network, *IEEE Trans. on Comput.* **C-30** (6) (1981) 439–443.
- [55] A.A. Ivanov, R.A. Liebler, T. Penttila and C.E. Praeger, Antipodal distance-covers of complete bipartite graphs, *European J. Combin.* **18** (1) (1997) 11–33.
- [56] W.H. Kautz, Bound on directed (d, k) graphs, *Theory of cellular logic networks and machines* AFCRL-68-0668 Final Report (1968) 20–28.
- [57] W.H. Kautz, Design of optimal interconnection networks for multiprocessors, *Architecture and Design of Digital Computers*, 249–272, *NATO Advanced Summer Institute*, 1969.
- [58] S. Lakshmivarahan, J-S. Jwo and S.K. Dhall, Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups: A survey, *Parallel Computing* **19** (1993) 361–407.
- [59] C.F. Laywine and G.L. Mullen, *Discrete Mathematics Using Lating Squares*, (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.)
- [60] F.T. Leighton, *Introduction to parallel algorithms and Architectures*, (Morgan and Kaufmann, San Mateo, CA, 1992.)
- [61] A. Malnič, D. Marušič, N. Seifter and B. Zgrablić, Highly arc-transitive digraphs with no homomorphism onto the two-way infinite path, preprint.
- [62] S.P. Mansilla and O. Serra, Automorphism groups of k -arc transitive covers, *Discrete Math.*, submitted.
- [63] S.P. Mansilla and O. Serra, Construction of k -arc transitive digraphs, *Discrete Math.*, to appear.
- [64] S.P. Mansilla and O. Serra, Exactly k -arc transitive covers, *Electronic Notes of Discrete Math.*, **5** (2000).
- [65] S.P. Mansilla and O. Serra, On s -arc regular graphs, in: *Proc. I Jornades de Matemàtica Discreta i Algorísmica*, (Barcelona, España, Marzo 1998), 55–59.
- [66] R.C. Miller, The trivalent symmetric graphs of girth at most 6, *J. Combin. Theory Ser. B* **10** (1971) 163–182.
- [67] C. Padró and P. Morillo, Diameter-vulnerability of iterated line digraphs, *Discrete Math.* **149** (1996) 189–204.
- [68] R.K. Pankaj and R.G. Gallager, Wavelength requirements of all-optical networks, *IEEE/ACM Trans. networking* **3** (3) (1995) 269–280.
- [69] D. Passman, *Permutation groups*, (W.A. Benjamin, Inc., New York - Amsterdam, 1968.)
- [70] J. Petersen, Die theorie der regulären graph, *Acta Math.* **15** (1891) 193–220.

- [71] C.E. Praeger, Highly arc transitive digraphs, *European J. Combin.* **10** (3) (1989) 281–292.
- [72] C.E. Praeger, On homomorphic images of edge-transitive directed graphs, *Australas. J. Combin.* **3** (1991) 207–210.
- [73] C.E. Praeger, C.H. Li and A.C. Niemeyer, Finite transitive permutation groups and finite vertex-transitive graphs, *Graph symmetry (Montreal, PQ, 1996)*, 277–318, *NATO Adv. Sci. Inst. Series C Math. Phys. Sci.*, 497, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [74] S.M. Reddy, D.K. Pradhan and J.G. Kuhl, Directed graphs with minimum diameter and maximal node connectivity. Technical report, School of Engineering, Oakland Univ., 1980.
- [75] D.J.S. Robinson, *A course in the Theory of Groups*, (Springer Verlag, New York, 1996.)
- [76] H.J. Ryser, Combinatorial Mathematics, in: Math. Assotiation of America eds., *Carus Math. Monograph No. 14* (Wiley, New York, 1963.)
- [77] G. Sabidussi, On a class of fixed-point-free graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **9** (1958) 800–804.
- [78] G. Sabidussi, Vertex-transitive graphs, *Monatsh. Math.* **68** (1964) 426–438.
- [79] M.R. Samatham and D.K. Pradhan, The de Bruijn multiprocessor network: A versatile parallel processing and sorting network for VLSI, *IEEE Trans. on Comput.* **38** (4) (1989) 567–581.
- [80] R. Scapellato, Vertex-transitive graphs and digraphs, *Graph symmetry (Montreal, PQ, 1996)*, 319–378, *NATO Adv. Sci. Inst. Series C Math. Phys. Sci.*, 497, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [81] L.H. Soicher. GRAPE: a system for computing with graphs and groups. In Larry Finkelstein and William M. Kantor, eds., *Groups and Computation*, volume 11 of *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 287–291, American Mathematical Society, 1993.
- [82] W.T. Tutte, On the symmetry of cubic graphs, *Canad. J. Math.* **11** (1959) 621–624.
- [83] J.H. van Lint and R.M. Wilson, *A course in Combinatorics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1992.)
- [84] S. Viswanathan, E. Czabarka and A. Sengupta, On fault-tolerant embedding of Hamiltonian circuits in the line digraph interconnection networks, *Inform. process. Lett.* **57** (1996) 256–271.
- [85] R. Weiss, The nonexistence of 8–transitive graphs, *Combinatorica* **1** (3) (1981) 309–311.
- [86] H. Whitney, Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Amer. J. Math.* **54** (1932) 150–168.
- [87] M.Y. Xu, Automorphism groups and isomorphisms of Cayley digraphs, *Discrete Math.* **182** (1998) 309–319.

