

**Algorithms to Mesh 2D CSG Polygonal Domains
from Previously Meshed CSG Primitives**

R. Joan-Arinyo
M. Sole

Report LSI-99-16-R

Estudi d'Algoritmes per a la Definició d'Operacions Booleanes de Discretitzacions de Cossos Elementals

Robert Joan i Arinyo
Departament de Llenguatges i Sistemes Informàtics
Universitat Politècnica de Catalunya
Av. Diagonal 647, 8^a, E-08028 Barcelona
e-mail: robert@lsi.upc.es

Miquel Solé i Gustems
E.U.E.T.I. d'Igualada
Plaça del Rei, 15, E-08700 Igualada
e-mail: msole@euetii.upc.es

Abril 1999

Resum

Aquest article presenta un algoritme eficient per a la construcció de mallats en 2D, sobre cossos complexos obtinguts per l'aplicació d'operacions booleanes, unió, intersecció i diferència, entre cossos elementals, fent servir mètodes de propagació i de relaxació.

Es comença per crear les malles regulars sobre els cossos elementals, aplicant-hi seguidament una de les operacions booleanes; obtenint una zona comuna d'interferència amb un entramat de malles. Seguidament es determinen tots els nodes de les malles que formen part de la zona comuna d'interferència dels dos cossos. Per trobar el resultat final d'una única malla s'han analitzat dos mètodes: un mètode de propagació, mètode local, que examina per parelles de nodes, quins d'aquests nodes estan prou propers perquè puguin col·lapsar en un de sol; un mètode de relaxació, mètode global, que deixa que tots els nodes, sotmesos a una hipotètica força relacionada amb la posició geomètrica respecte dels seus veïns, es moguin fins arribar a un equilibri en les seves noves posicions. Una vegada es té el conjunt de nodes es realitza una triangulació de Delaunay entre tots ells per obtenir la nova malla de la zona comuna d'interferència dels dos cossos elementals, que connecti de forma correcta amb les malles primitives de cada un dels cossos, obtenint així la malla del cos complex.

1 Introducció

La generació de malles de cossos irregulars de forma automàtica ja ha estat proposada per varis autors. V. Srinivasan, L. R. Nackman, J. M. Tang i S. N. Meshkat, [7], proposen un algoritme que genera la malla de manera que la densitat de la malla es modifica en funció de les variacions de la geometria o de les propietats dels cossos. En el lloc on hi ha més intensitat de canvi, fronteres, forats, protuberàncies, etc., la malla serà més densa, i no ho serà tant en els llocs amb menys canvis. V. Unruh i D. C. Anderson, [8], proposen la generació de malles en models de cossos que estiguin basats en característiques també que ajuden a millorar el disseny. N. Sapidis i R. Perucchio, [6], ja proposen alguns algoritmes per generar malles de forma automàtica com són els basats en: extracció d'elements, dominis de triangulació i descomposició espacial recursiva.

Per generar malles de cossos que estan modelitzats en sistemes de CAD, com el CGS o el B-Rep, es pot seguir el mètode que proposen E. Boender i W. F. Bronsvort, [1]. Partint de sòlids definits amb el model CGS es transformen al model B-Rep, representant les cares per trossos de Bézier o superfícies algebraiques. Es calcula primer sobre les cares 2D, fent servir l'espai paramètric, una triangulació de Delaunay que després s'estén cap a l'interior del sòlid generant la malla en forma de tetràedres aconseguint, tal com exposa N. Sapidis, [6], una tetraedrització de Delaunay.

Fent servir mètodes de composició de dominis, J. J. Cox i W. W. Charlesworth, [3], arriben a solucions de les equacions de camps continus, parametritzades de forma local, afegint restriccions i funcions d'acoblament, des dels sistemes locals als globals. En el treball de la tesi doctoral J. J. Cox, [4], presenta una implementació de la composició de dominis, com són els models d'elements finits i els mètodes de diferències finites, per mètodes numèrics.

Tots els autors anteriors presenten algoritmes que creen malles sobre els cossos irregulars mentre que l'algoritme que es descriu a continuació crea les malles sobre els cossos irregulars a partir de les malles regulars dels cossos elementals. A partir dels cossos elementals ja dividits en les seves malles, a través d'operacions booleanes entre ells, i per tant, també entre les seves malles, obtenir els la malla final del cos complex.

2 Descripció del problema

Per a l'estudi de determinades propietats dels cossos sòlids és bo disposar de models que els representin per tal de poder fer-hi proves, estudiar-los i simular el seu comportament sense haver de manufacturar cap prototip.

Per poder portar a la pràctica els estudis anteriors, s'aplica, sobre els objectes que es volen estudiar, una tècnica coneguda com Elements Finites (EF), que consisteix a subdividir l'objecte en parts més petites, que denominarem cel·les, de manera que la seva geometria quedi discretitzada.

Per obtenir aquest conjunt de divisions del sòlid, que es coneix usualment com "malla", s'ha de seguir un procés de tal forma que el resultat final sigui un bon mallat, és a dir, que hi hagi una bona uniformitat de la grandària dels elements obtinguts i que la transició entre les diverses regions de la malla, sobretot en els llocs on la variació de les dimensions dels elements discretitzats sigui més gran, es faci el més suau possible.

Per als objectes regulars es pot aconseguir d'una forma senzilla que la seva malla també ho sigui, ja que en disposar de simetries és fàcil aconseguir unes divisions del sòlid en elements totalment iguals de manera que omplin tot el cos.

L'obtenció d'un mallat adient que presenti una forma regular o uniforme per a cossos de geometria complexa és un problema d'un elevat grau de dificultat. Aconseguir que amb un conjunt d'elements discrets tots iguals es pugui omplir totalment un cos d'aquestes característiques no és factible. Per tant, hi ha d'haver uns quants elements, sobretot els que formen part de les regions més irregulars del cos, que hauran de tenir una forma diferent dels altres, o bé, una dimensió diferent, ja sigui per la seva estructura, pel nombre de vèrtexs, d'arestes o de cares, o bé, per haver sofert una certa deformació.

Per tant, aconseguir un mallat de qualitat sobre un objecte que té una topologia i una geometria complexa és una tasca molt més difícil que, evidentment, anirà en funció de la complexitat de l'objecte. Encara que hi ha tècniques que ho intenten aconseguir, la complexitat amb què es troben fa que els resultats no siguin tot el bons que es podria esperar.

En el disseny d'objectes geomètrics fent servir la tècnica anomenada Geometria Constructiva de Sòlids (CSG), que utilitza uns pocs objectes regulars simples, sòlids primitius, i una sèrie d'operacions booleanes com són la unió, la intersecció i la diferència, s'arriba a obtenir l'objecte final complex.

És necessari per tant, aplicar sobre uns objectes primitius una seqüència d'operacions booleanes per tal d'obtenir altres objectes no regulars que presenten formes complexes, ja sigui perquè tenen forats o protuberàncies.

Per poder aconseguir un mallat de qualitat d'un objecte complex, entre altres, es poden seguir dos camins:

- Una primera forma consisteix a discretitzar directament l'objecte complex i obtenir així el mallat. Fer el mallat de l'objecte complex porta les seves dificultats, sobretot per aconseguir que aquest mallat sigui el més uniforme possible. Sempre s'ha d'acabar fent alguna simplificació o alguna concessió per arribar a tenir un mallat acceptable. Si la geometria del cos és molt complexa, l'obtenció d'un malla de qualitat es complica de forma extraordinària

A més, cada objecte obtingut tindrà una geometria diferent i, per tant, la solució per trobar el seu mallat també ho serà. La complexitat per resoldre el mallat variarà en funció de cada cos.

- Una segona forma consisteix a aplicar una seqüència d'operacions booleanes, com són l'addició, la diferència i la intersecció, a uns objectes primitius simples, dels quals s'han obtingut les malles regulars, per obtenir l'objecte complex. Llavors, el mallat de l'objecte complex es podria obtenir directament de la interacció de les malles regulars dels objectes primitius, de forma similar a com s'obté la geometria de l'objecte complex a partir de les geometries dels objectes primitius en aplicar-hi les diferents operacions booleanes.

Aquest sistema permetria obtenir de forma directa i per a qualsevol interacció dels objectes simples el mallat de l'objecte compost. Com que s'operarien directament les malles dels objectes primitius, el resultat obtingut ja seria la malla de l'objecte complex.

El treball que es desenvolupa a continuació intenta esbrinar si és possible aquesta segona forma d'operar. Com que les malles dels objectes regulars són fàcils d'obtenir, el que cal és comprovar si a partir de la interacció de les malles regulars dels objectes primitius es pot obtenir una malla prou regular, és a dir, amb uns paràmetres de qualitat prou bons, per a l'objecte complex.

3 Conceptes matemàtics

3.1 Discretització dels sòlids primitius en cel·les

Per a l'obtenció de cossos complexos es parteix dels cossos primitius, que amb una seqüència d'operacions booleanes, interaccionaran fins arribar al resultat desitjat. Per al cas 2D, utilitzant la tècnica CSG, faran falta dos cossos primitius, el rectangle o el quadrat i el cercle, i les operacions booleanes d'unió, intersecció i diferència que, aplicades convenientment entre aquests dos cossos primitius, permeten obtenir qualsevol altre cos complex.

Definicions

Donat un domini Ω com el conjunt de punts que pertanyen a un cos elemental, un cercle o un rectangle, en \mathfrak{R}^2 , la malla d'aquest domini estarà formada per un conjunt N de nodes n_i .

$$N = \{n_i\}$$

N estarà format tan pels nodes interiors com pels de la frontera.

Un node és un punt de coordenades x_i, y_i que forma part de la malla d'un cos.

$$n_i = \{x_i, y_i\} \quad : \quad x_i, y_i \in \mathfrak{R}$$

Un node veí N_{v_i} d'un primer node N_i és aquell node que està connectat topològicament amb el primer, mitjançant el que s'anomena aresta.

Els nodes de la malla es connectaran entre ells per un conjunt d'arestes A , de forma que determinin fragments uniformes dels cos, les cel·les Σ . Cada aresta serà un segment i cada una de les cel·les estarà formada per un conjunt d'arestes que determinaran la seva frontera, o bé, per un conjunt de nodes, els seus vèrtexs.

El conjunt d'arestes serà:

$$A = \{a_{ij}\} \quad \text{on} \quad a_{ij} = \{n_i, n_j\} \quad : \quad i \neq j$$

El conjunt de cel·les serà:

$$\Sigma = \{\sigma_i\}$$

i per una cel·la de k vèrtexs:

$$\sigma_i = \{a_{ij}\} \quad \text{on} \quad a_{ij} = \{n_i, n_j\} \quad : \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, k$$

Un sòlid es defineix com el conjunt disjunt de cel·les en què es pot subdividir:

$$S = \bigcup_i \sigma_i \quad \wedge \quad \sigma_i \cap^* \sigma_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Perquè la discretització en cel·les d'un sòlid sigui correcta s'ha de complir que totes les seves cel·les tinguin els interiors disjunts.

Cada una de les cel·les està formada per un conjunt d'arestes, que són els segments que delimiten l'àrea de les cel·les del cos. Per a una cel·la σ_i es tindrà un conjunt d'arestes a_{ij} de forma que la cel·la es pot considerar com l'àrea que delimiten les anteriors arestes. Aquestes cel·les σ_i han de ser el més regulars possible, ja que és una propietat bàsica per als tractaments posteriors de les malles. La grandària d'aquestes cel·les dependrà del pas de malla en fer la discretització escollida.

3.2 Formació de sòlids complexos per interacció de sòlids simples

Mitjançant l'aplicació d'operacions booleanes entre dos o més cossos simples o elementals es poden obtenir cossos complexos. Les operacions booleanes emprades poden ser: la unió, la diferència i la intersecció. El resultat d'aplicar aquestes operacions al rectangle o quadrat i al cercle és el que es pot veure en la figura 1.

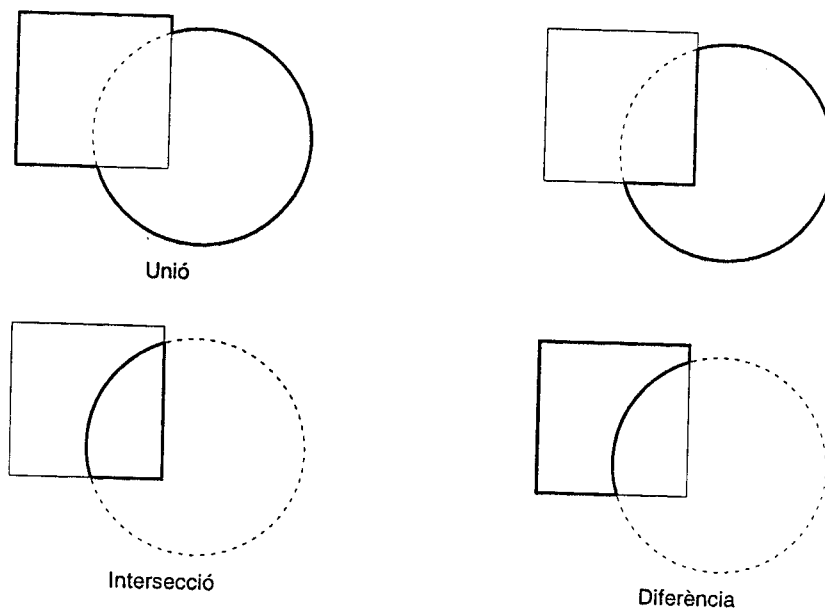


Figura 1. Resultat d'aplicar operacions booleanes entre cossos elementals.

Quan es vol obtenir un cos complex a partir de l'aplicació d'una operació booleana entre dos dels cossos primitius sempre hi haurà una zona de cada un dels cossos que interaccionarà i, per tant, hi haurà un solapament.

Definicions

Donats dos sòlids S_A i S_B que interaccionen, hi haurà una zona de solapament i una altra de no interferència per a cada cos.

S_{A_S} i S_{B_S} són les parts dels dos cossos que tenen solapament i $S_{A_{NS}}$ i $S_{B_{NS}}$ són les parts dels dos cossos que no tenen interferència. Així les cel·les de la zona de solapament seran les que formen S_{A_S} i S_{B_S} .

$$S_{A_S} = \bigcup_i \sigma_{A_i} \cap S_B \quad \text{tal que } \sigma_{A_i} \cap S_B \neq \emptyset$$

$$S_{B_S} = \bigcup_i \sigma_{B_i} \cap S_A \quad \text{tal que } \sigma_{B_i} \cap S_A \neq \emptyset$$

on σ_{A_i} i σ_{B_i} són les cel·les de cada un dels dos cossos.

Les part del cos que no tenen interferència són:

$$S_{A_{NS}} = S_A - S_{A_S} \quad \text{i} \quad S_{B_{NS}} = S_B - S_{B_S}$$

De l'operació booleana aplicada apareixeran nous nodes en les interseccions de les fronteres dels dos cossos, que hauran de complir: pertànyer a les fronteres dels cossos elementals i als dos cossos simultàniament. Aquest conjunt de nodes N_{in} serà:

$$N_{in} = \{n_i\} : \begin{cases} n_i \in \delta(A) \text{ i } \delta(B) \\ n_i \in S_A \cap S_B \end{cases}$$

Aquesta zona existirà sempre que es vulgui construir un sòlid complex a partir dels elementals. En aquesta zona hi haurà dos tipus de malles independents, les de cada un dels cossos elementals. Cada una d'aquestes malles tindrà les seves cel·les, que de forma sobreposada, formaran un entramat poc uniforme i irregular que caldrà transformar en una única malla.

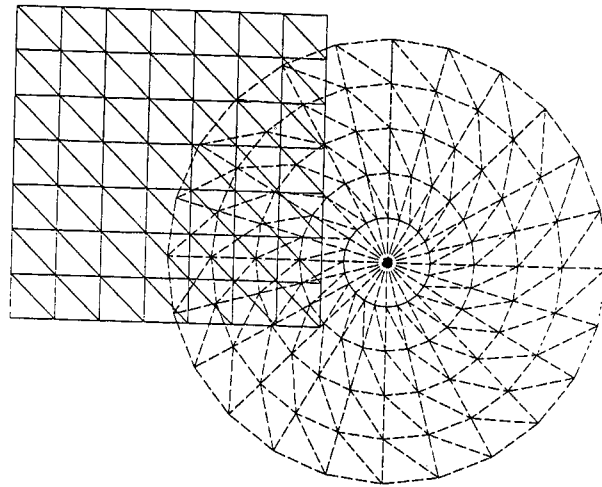


Figura 2. Dues malles sobreposades en la zona de solapament d'un cos complex.

En aquesta zona comuna hi haurà cel·les de cadascun dels dos cossos i, per tant, hi conviuran dos mallats diferents. Com que mantenir dos mallats diferents en el mateix lloc no permet tractament adequat del cos, cal reduir-los a un únic mallat.

Per fer aquesta reducció s'ha d'estudiar de quina manera interaccionen les malles i com es pot fer per obtenir una malla única per a tot el cos complex que sigui el més regular possible. Com que les malles queden definides pels seus nodes, que són els vèrtexs de les cel·les, s'ha d'intentar que els nodes de les dues malles arribin a coincidir. Això voldrà dir que, alguns dels punts del primer cos s'hauran de moure de la seva posició perquè coincideixin amb altres punts de la malla del segon cos, i alguns dels punts del segon cos s'hauran de moure per coincidir amb els del primer cos.

Es pot donar el cas de desaparició de nodes d'alguna de les malles, sempre que dos nodes independents acabin coincidint en el mateix punt. Amb això s'aconsegueix que quedi una malla única per al cos complex.

3.3 Zona de solapament

La zona de solapament entre dos cossos que han sofert una operació booleana és el conjunt de nodes que pertanyen als dos cossos de forma simultània. Aquest solapament estarà format per un nombre determinat de cel·les d'ambdós cossos, de les quals n'hi haurà algunes que quedaran tallades per la frontera d'aquesta zona, tal com es pot veure en la figura 3.

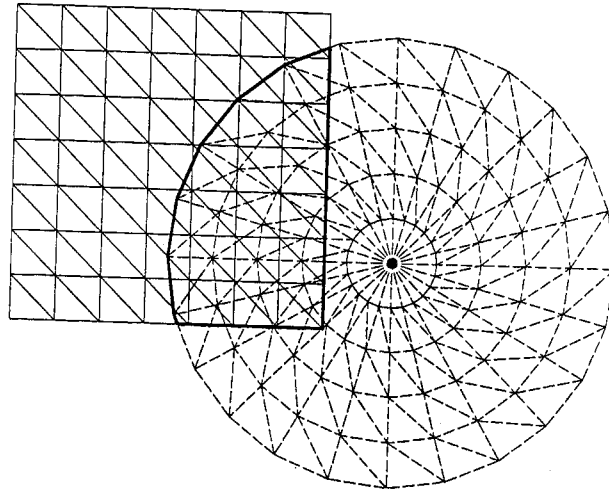


Figura 3. Zona de solapament de dos cossos elementals.

De les cel·les de la zona de solapament algunes queden partides per la frontera de forma que només un tros d'elles formaran part de la zona de solapament.

La zona de solapament estarà formada per un grup de cel·les d'un dels cossos $\sigma_{A,y}$ i per un grup de cel·les de l'altre cos $\sigma_{B,y}$ que de forma total o parcial formen part de l'àrea d'intersecció dels dos cossos. Les cel·les de la frontera només podran formar part de la zona d'intersecció de forma parcial, mentre que les interiors ho faran de forma total.

Definicions

La zona de solapament estarà formada per la unió de les dues parts dels dos sòlids que tinguin alguna interacció:

$$Z_S = S_{A_s} \cup S_{B_s}$$

Així aquesta zona de solapament la formaran el conjunt de cel·les que compleixin el següent:

$$Z_S = \left\{ \bigcup_i \sigma_{A_s i} \cap S_B, \bigcup_j \sigma_{B_s j} \cap S_A \right\}$$

La zona de solapament estarà formada tant per cel·les del cos A com per cel·les dels cos B.

3.4 Zona comuna d'interacció

Com que dels nodes de la zona de solapament n'hi ha alguns que els seus veïns queden fora d'aquesta zona i, per tant, les cel·les a les que pertanyen queden tallades, es defineix una zona més àmplia, la zona comuna d'interacció, Z_c , que està formada per totes les cel·les que tenen algun dels seus vèrtexs, nodes de les malles, dins de la zona de solapament. Així, tal com es pot veure en la figura 4, tota la zona comuna d'interacció està formada per cel·les senceres.

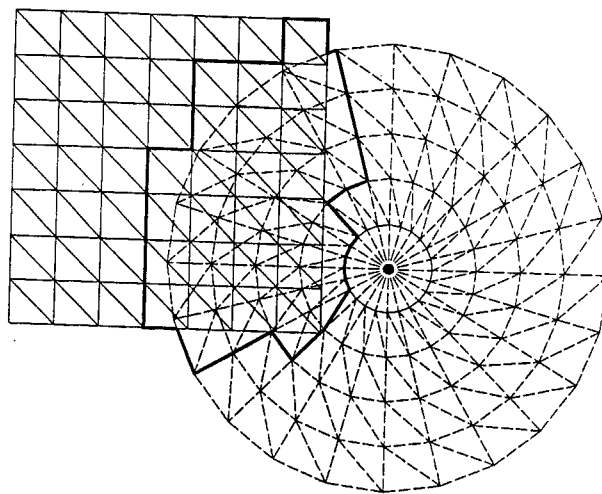


Figura 4. Frontera de la zona comuna d'interacció.

La frontera d'aquesta zona està formada per les arestes que simultàniament formen part d'una cel·la que pertany a la zona de solapament i una altra cel·la que no hi forma part. A més s'hi ha d'afegir les arestes de la frontera que pertanyen a cel·les de la zona de solapament.

Definicions

La zona comuna d'interacció Z_c és la regió formada per les cel·les que compleixen el següent:

$$Z_c = \bigcup_i \sigma_{A_s i} \bigcup_j \sigma_{B_s j} \quad \exists i, j : \sigma_{A_s i} \cap \sigma_{B_s j} \neq \emptyset$$

Dins de la zona comuna d'interacció hi haurà un conjunt de nodes de les malles N_c , tal que:

$$N_c = \{N_{A_s}, N_{B_s}\}$$

sent N_{A_s} i N_{B_s} els conjunts de nodes de cada un dels cossos A i B que pertanyen a alguna de les cel·les de la zona comuna d'interacció. Aquests conjunts estaran formats pels nodes de les malles que compleixen les següents condicions:

$$N_{A_s} = \{n_{A_i}\} \quad \forall n_{A_i} \in \sigma_{A_s i} \quad i \quad \sigma_{A_s i} \in Z_c$$

$$N_{B_s} = \{n_{B_i}\} \quad \forall n_{B_i} \in \sigma_{B_s i} \quad i \quad \sigma_{B_s i} \in Z_c$$

Per determinar les cel·les que formen la zona comuna d'interacció, s'ha de comprovar quines de les cel·les de cada cos tenen un intersecció diferent de zero amb les cel·les de l'altre cos. Una vegada determinades les cel·les es pot obtenir un conjunt de nodes, tots els vèrtexs de les cel·les, n_{A_i} de la malla d'un dels cossos i un altre conjunt de nodes n_{B_i} de la malla de l'altre cos. Tots aquests punts van associats a unes cel·les que són les que formen la zona comuna d'interacció.

3.5 Nodes de la zona comuna d'interacció

Els nodes de la zona comuna d'interacció es poden agrupar en tres categories, en funció de la seva posició geomètrica respecte els dos cossos que es tracten, que són:

- Nodes que pertanyen a la frontera, N_f , de la zona comuna d'interacció. Són els nodes que connecten els que estan més a prop de la frontera de la zona de solapament amb els altres nodes del cos que no sofreixen cap interacció.
- Nodes que pertanyen a l'entorn de les interseccions de les fronteres dels cossos elementals, N_f .
- Nodes que pertanyen a l'interior de la zona de solapament, N_f .

Definicions

Els nodes de la frontera de la zona comuna d'interacció són els que pertanyen a la zona comuna d'interacció però no pertanyen a la zona de solapament.

$$N_f = \{n_{A_i}, n_{B_j}\} \text{ tal que } n_{A_i}, n_{B_j} \in Z_c \text{ i } n_{A_i}, n_{B_j} \notin Z_s$$

Els nodes de les interseccions són els punts d'intersecció de les fronteres dels dos cossos i els nodes de la zona comuna d'interacció que a més a més també formin part de la frontera dels cossos.

$$N_I = \{N_{in}, n_{A_i}, n_{B_j}\} \text{ tal que } n_{A_i}, n_{B_j} \begin{cases} \in \delta(A \cup B) \\ \in Z_c \end{cases}$$

Els nodes interiors són els que pertanyen a la zona de solapament inclosos els de la seva frontera.

$$N_s = \{n_{A_i}, n_{B_j}\} \text{ tal que } n_{A_i}, n_{B_j} \in Z_s$$

En la figura 5 es poden veure els tres grups de nodes i la seva distribució en els cossos complexos.

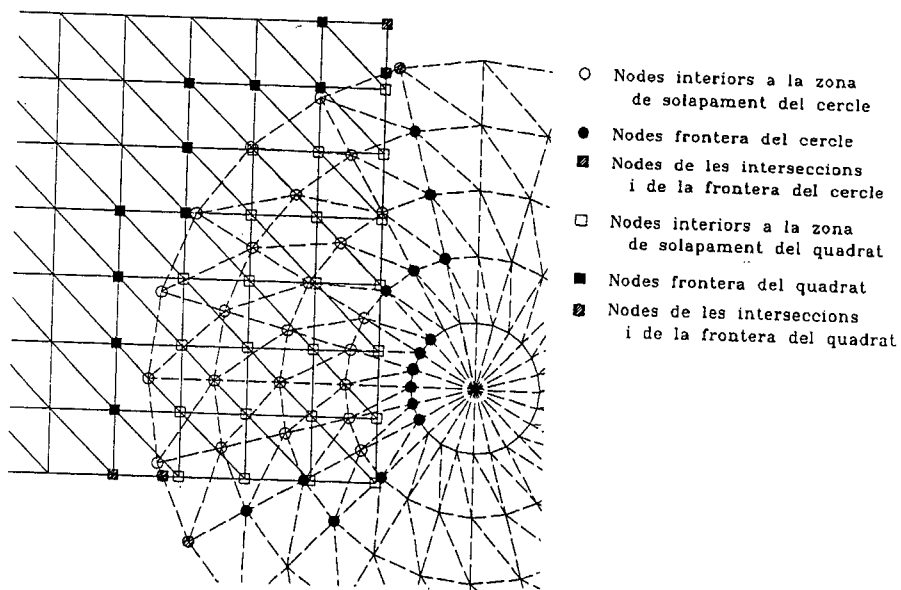


Figura 5. Nodes de la zona comuna d'interacció.

A cada un dels grups de nodes hi haurà nodes de cada un dels cossos elementals.

3.6 Distàncies als veïns d'un node

Cada node de la malla està connectat als seus veïns per les arestes. Un paràmetre útil per decidir sobre la proximitat de dos nodes, un de cada una de les malles dels dos cossos, és la distància mitjana als nodes veïns d_m .

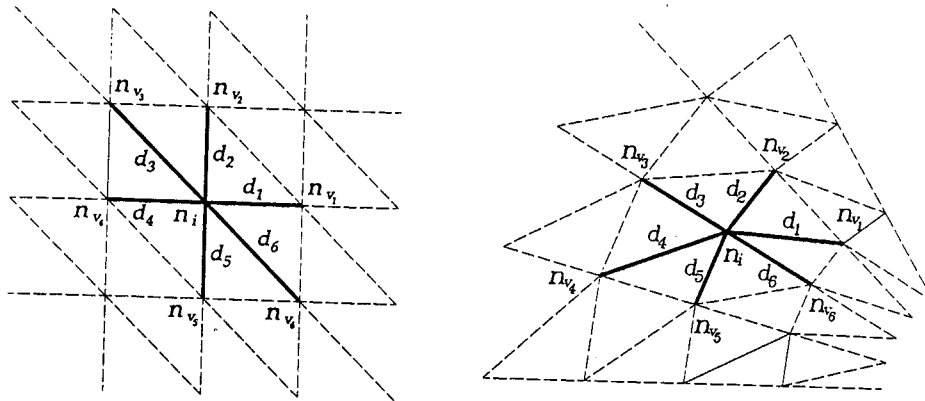


Figura 6. Distàncies d'un node als nodes veïns.

Definicions

La distància mitjana, d_m , d'un node respecte els seus veïns, és la mitjana de les distàncies d'un node als seus n nodes veïns de la malla.

$$d_{m_i} = \frac{\sum_j d_j}{n}$$

sent:

$$d_j = \left| \overline{n_i n_{v_j}} \right|$$

3.7 Forces de tensió sobre els nodes

El mètode de relaxació fa la consideració de sotmetre els nodes de les malles a certes forces físiques de tensió inversament proporcionals a la distància que es trobin. D'aquesta manera els nodes es mouen fins equilibrar aquestes forces.

Definicions

Donat un domini Ω de n nodes en \mathbb{R}^2 , es pot determinar per a cada un dels nodes n_i , el conjunt de forces F a que estarà sotmès. Cada una d'aquestes forces es determina en funció de la distància a altres nodes de la malla de l'altre cos.

El conjunt de nodes que interaccionen amb el node n_i és el d'una cel·la de k vèrtexs de tal forma que el node n_i sigui interior a la cel·la. Aquests conjunts són els següents:

$$F = \{F_k\} \quad \text{on} \quad F_k = C \cdot \frac{1}{d_k} \quad \text{i} \quad d_k = |n_i n_k|$$

$$n_i \in Z_{S_A} \text{ i } n_k \in Z_{C_B} \quad \text{o bé} \quad n_i \in Z_{S_B} \text{ i } n_k \in Z_{C_A}$$

El node n és interior a una cel·la σ si compleix que el nombre d'interseccions, n_{int} , d'un segment, que es pugui determinar amb un punt llunyà a la cel·la, amb les seves arestes és sempre imparell.

$$n_{int} \bmod 2 = 1$$

En les fórmules anteriors C és una constant a determinar. La distribució i connexió de nodes per les forces abans esmentades es pot veure en la figura 7.

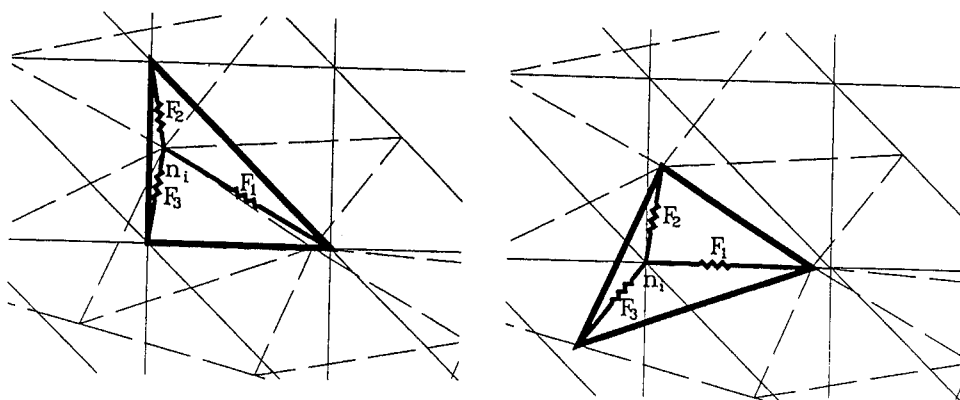


Figura 7. Nodes sotmesos a les forces de tensió.

3.8 Paràmetres de “bondat” de les malles

Avaluar de forma fàcil la bondat de les malles obtingudes no és senzill. S’ha de buscar alguns paràmetres que permetin avaluar aquesta bondat. Seguint les línies exposades en [5], els autors utilitzen les distàncies entre els nodes de les malles i els angles entre les arestes que es creen per mesurar la “bondat” del mallat.

En el nostre cas que es tenen unes malles amb cel·les triangulars, l’estimació de bondat de les malles es pot reduir al càlcul de dos paràmetres: l’àrea de les cel·les i l’angle mínim de les cel·les.

El primer paràmetre, A , indicarà si les cel·les obtingudes són d’una mida similar a la mida de les cel·les primitives. El segon paràmetre, $A_{n_{\min}}$, serà indicatiu de si les cel·les són més o menys semblants a triangles equilàters.

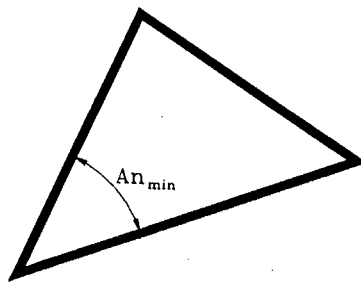


Figura 8. Angle mínim d'una cel·la.

L’angle mínim d’una cel·la triangular és prou representatiu d’indicar si la cel·la és prou semblant a un triangle equilàter, ja que un angle mínim proper als 60° farà amb tota seguretat que els altres dos angles també estiguin al voltant del 60° , mentre que un angle mínim molt inferior als 60° farà que la cel·la ja no s’acosti al triangle equilàter.

4 Descripció dels algorismes

4.1 Construcció dels algorismes

Els algorismes que es descriuen a continuació permeten obtenir la malla d'un sòlid compost creat a partir d'operacions booleanes sobre cossos elementals.

Els primers passos dels dos algorismes són comuns per als dos: la creació de les malles dels cossos elementals, l'aplicació de les operacions booleanes, la determinació de la zona de solapament i de la zona comuna d'interacció.

Després cada un dels algorismes treballa diferent, de manera que l'algoritme de propagació fa, que els nodes de les malles que es troben prou propers col·lapsin en un sol punt, mentre que l'algoritme de relaxació fa, que els punts es moguin fins a posicions d'equilibri, de manera que s'arribin a una unificació de les malles.

Al final quan s'ha obtingut un únic mallat, s'aplica una triangulació de Delaunay per aconseguir la reconexió dels punts de les malles, tenint així la distribució de cel·les única.

4.2 Creació de les malles dels cossos elementals

Com a cossos elementals en 2D es fan servir un rectangle i un cercle. Per al rectangle es pot aconseguir una malla formada per cel·les quadrades o triangulars totalment iguals. Per al cercle, la divisió regular farà que no es puguin tenir totes les cel·les de la malla de la mateixa mida sinó que variïn en funció de la seva distància al centre.

Quan es tracta d'un rectangle, un dels mallats triangulars totalment regulars que es pot aconseguir és el que forma una quadrícula uniforme de quadrats més petits dividits per una diagonal per tenir triangles, on la dimensió del seu costat és funció del pas de la malla escollida, com es mostra en la figura 9.

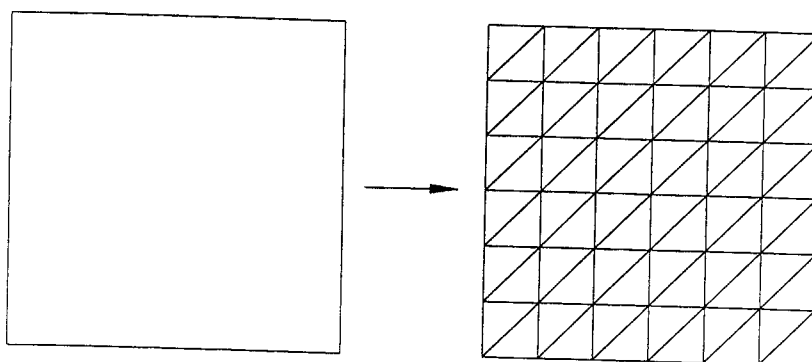


Figura 9. Malla regular del quadrat o del rectangle.

Una de les formes d'obtenir el mallat per al cercle consisteix a subdividir-lo traçant cercles concèntrics i línies radials. Les cel·les així obtingudes són de quatre costats que dividides per una diagonal es transformen també en cel·les triangulars. D'aquesta manera, el mallat obtingut no està format per cel·les totalment iguals, sinó per uns triangles que van variant la seva àrea en funció de la seva proximitat o allunyament del centre del cercle, tal com es mostra en la figura 10.

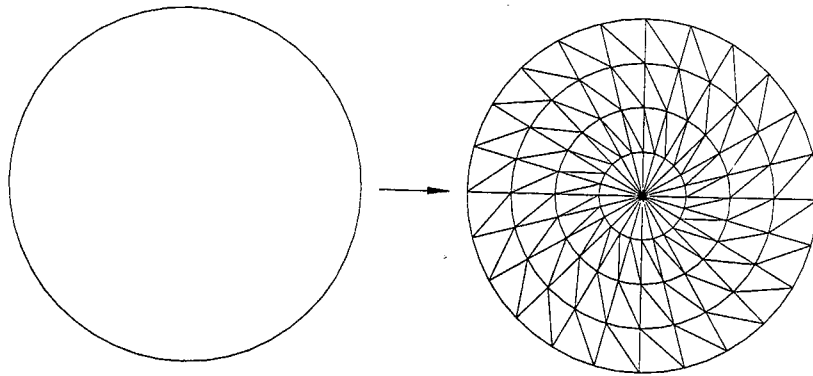


Figura 10. Malla regular del cercle.

4.3 Aplicació d'operacions booleanes

S'aplica l'operació booleana desitjada sobre els dos cossos, el rectangle i el cercle, per obtenir el cos complex. Es poden aplicar operacions d'unió, diferència i intersecció, però per a totes les operacions anteriors sempre s'obté una zona de solapament i, per tant, una zona d'interferència de les malles.

El resultat d'aplicar aquestes operacions al rectangle o quadrat i al cercle és el que ja s'ha comentat en l'apartat 3.2 i es pot veure en la figura 1.

4.4 Determinació de la zona de solapament

Aquesta zona estarà formada pel conjunt de cel·les de les malles dels dos cossos que tenen algun tipus d'interferència, és a dir, totes aquelles cel·les d'un dels cossos que tenen algun solapament amb alguna de les cel·les de l'altre cos. Hi haurà cel·les senceres i altres cel·les que només en formaran part parcialment tal com es pot veure en la figura 3.

4.5 Càlcul de la frontera de la zona comuna d'interacció

Per tal de poder determinar el conjunt de cel·les que tindran algun tipus de solapament es calcula la frontera de tota la zona d'interferència. Totes les

cel·les que estaran dins d'aquesta frontera seran senceres tal com es pot veure en la figura 4.

Totes les cel·les afectades de cadascun dels cossos, és a dir, les que es troben total o parcialment en la zona de solapament, podran ser sotmeses a una transformació en interaccionar amb les cel·les de l'altre cos. Així, cada una de les cel·les d'un cos afectades en interaccionar amb les cel·les de l'altre cos, que tenen un solapament total o parcial, aniran acumulant deformacions que faran que alguns dels seus vèrtexs o nodes es vagin desplaçant per poder formar una única malla final.

4.6 Classificació dels nodes de la zona comuna d'interacció

Els nodes de les malles de la zona comuna d'interacció es poden classificar en tres grups:

- Els nodes que pertanyen a la frontera de la zona comuna d'interacció. Són tots els nodes que determinen les arestes de la frontera excepte els nodes de l'entorn de les interseccions de les fronteres.
- Els nodes que pertanyen a l'entorn de les interseccions de les fronteres dels cossos elementals. Aquests nodes són els punts d'intersecció de les fronteres i els nodes de cada un dels cossos que pertanyin a la frontera de la zona de solapament i a la seva pròpia frontera.
- Els nodes que pertanyen a l'interior de la zona de solapament. És el conjunt de tots els nodes de la zona de solapament i que no pertanyin als dos grups de nodes anteriors.

En la figura 5 es podien veure els tres grups de nodes i la seva distribució en cada un dels cossos complexos.

El seu tractament serà diferent per a cada grup de nodes tal com s'exposa a continuació.

Nodes frontera, N_f . S'ha d'intentar que el col·lapse a què puguin estar sotmesos aquests nodes sigui el més suau possible, per evitar una deformació excessiva de les malles en la zona de connexió entre la zona de solapament i la que no en té, i fer que no es perdi bondat del mallat final.

Nodes de les interseccions de les fronteres, N_I . Són uns nodes que s'han d'excloure dels col·lapses per evitar que la forma geomètrica dels cos final obtingut de la interacció variï la seva frontera. Sempre que la proximitat d'altres nodes demani el col·lapse el que s'haurà de fer serà que

els altres nodes es moguin fins a la posició d'aquests nodes i aquests quedin inamovibles.

Nodes interiors al solapament, N_s . Són els que podran sofrir els col·lapses que calguin per tal d'obtenir el mallat més adient i de més bondat. Per aquests nodes no hi haurà cap tipus de restricció i podran col·lapsar entre ells o amb els dels dos grups anteriors.

4.7 Algoritmes de propagació i de relaxació

Fins aquí s'han seguit una sèrie de passos comuns als dos algoritmes. A continuació es descriu què fa cada un dels dos algoritmes estudiats, un de propagació i un altre de relaxació, per aconseguir modificar la posició dels nodes de les malles fins a obtenir una malla única per al cos complex.

4.7.1 Algoritme de propagació. Col·lapse de punts

Aquest primer mètode és de caràcter local i examina, d'una forma seqüencial, parelles de nodes, un de cada malla d'un cos elemental, per determinar si a la parella examinada se l'ha d'aplicar un col·lapse.

Utilitzant aquest mètode de propagació es poden calcular les interaccions entre les cel·les de la zona de solapament d'una forma ordenada, començant per una posició predeterminada i fent un recorregut per a tota la zona comuna d'interacció. A mesura que es van calculant les noves posicions dels nodes de les malles, la forma de la malla del cos varia, i per tant, en les noves interaccions que es van calculant ja no es fa amb la malla regular, sinó amb una de deformada. D'aquesta manera es va propagant la deformació pel cos.

Això comporta que, com que aquestes operacions sobre malles no són commutatives, segons per on es comenci a fer el càlcul de les interaccions el resultat final podrà ser diferent.

Seguint el mètode de propagació, les interaccions es calculen de forma individual entre parelles de nodes, donant-se el cas que un node pot interaccionar amb més d'un node de la malla de l'altre cos, de manera que la deformació total que podrà sofrir es farà amb més d'un pas. També es pot donar el cas que dos nodes coincideixin, és a dir, que tinguin les mateixes coordenades, amb la qual cosa la interacció, en aquest cas, serà nul·la. Quan hi ha dos nodes que interaccionen, molt probablement s'hauran de crear, o bé eliminar arestes.

Per això, es fa servir la distància mitjana als nodes veïns d_m , concretament s'aplica un determinat percentatge d'aquesta paràmetre, que permet decidir si hi ha col·lapse entre les parelles nodes de la zona de solapament.

Mitjançant aquest mètode de propagació es determina quins nodes estan prou propers als altres, de manera que, si la distància entre nodes és menor del valor prefixat, els nodes col·lapsen en un sol punt que serà un nou node. Aquest nou node es fixarà en el punt mitjà d'entre els dos nodes primitius.

La bondat de la malla obtinguda variarà en funció del percentatge sobre d_m escollit per forçar el col·lapse, de manera que el nombre de nodes que col·lapsen també variarà i, per tant, el nombre de cel·les obtingudes, així com la seva corresponent mida.

El sistema emprat per fer el recorregut dels nodes de les malles consisteix en fer un seguiment dels nodes de la malla del quadrat de la zona comuna d'interacció d'esquerra a dreta i de dalt a baix i, per cada un dels nodes del quadrat, fer una comprovació de proximitat i possible col·lapse amb cada un dels nodes de la zona comuna d'interferència del cercle.

La comprovació de proximitat consisteix en calcular la distància entre els dos nodes, un del quadrat i l'altre del cercle, i si aquesta distància és més petita d'un valor prefixat, la distància de col·lapse d_c , els dos nodes col·lapsen en un sol node, les coordenades del qual seran les d'un punt d'igual distància als dos nodes tractats. Dels dos nodes tractats un d'ells desapareix i la nova malla només contindrà un sol node en el punt de col·lapse.

La distància de col·lapse vindrà en funció de la distància mitjana d'un node respecte els seus veïns de la malla d_m . Així d_c serà un percentatge de d_m .

$$d_c = p \cdot d_m \quad \text{on} \quad p = 0,35 \dots 0,95$$

En funció del valor del paràmetre p escollit el nombre de col·lapses variarà i també la forma de la malla final. Com més gran sigui el valor de p més grans seran les cel·les obtingudes per aquest mètode i, per tant, quedaran menys nodes a les malles i les cel·les finals de la zona de solapament tindran àrees més grans. L'interval de valors de p que s'ha comprovat que experimentalment dona més bons resultats de les malles obtingudes és el que es pot veure en l'apartat 5.

No tots els nodes tenen la mateixa consideració. Quan es troba un node de la zona d'intersecció N_i entre la parella de nodes pels que es comprova el col·lapse, s'ha de deixar aquest node inamovible per evitar deformar la frontera dels cos. Per tant, el col·lapse, si n'hi ha, ha de moure el node que no es de la zona d'interferència per fer-lo coincidir amb el que ho és. Quan un dels nodes pertany a la zona de la frontera de la zona comuna d'interacció N_j el seu tractament també serà de col·lapse però amb un desplaçament més suau. Així, en aquest cas s'agafa com a punt de col·lapse un punt situat a una distància que sigui la quarta part de la distància entre els dos nodes respecte el node frontera i a tres quartes parts de la distància

entre els dos nodes respecte el node que no és de la frontera. Amb això s'aconsegueix suavitzar el pas de la malla original en la zona dels cos que no té interacció amb les noves malles creades en la zona comuna d'interacció.

Aquesta part de l'algorisme és la següent:

```

per a i_q=0 .. max_i_q
  per a j_q=0 .. max_j_q
    per a i_c=0 .. max_i_c
      per a j_c=0 .. max_j_c
        node_q=node(i_q, j_q)
        node_c=node(i_c, j_c)
        distància = distància(node_q, node_c)
        si (distància < d_c) llavors
          punt:=punt_mig(node_q o node_c)
          si (node_q o node_c ∈ N_f o N_i) llavors
            si (node_q ∈ N_f) llavors
              node_q:=punt_mig(punt o node_q)
              node_c:= node_q
            fisi
            si (node_c ∈ N_i) llavors
              node_c:=punt_mig(punt o node_c)
              node_q:= node_c
            fisi
            si (node_q ∈ N_i) llavors
              node_c:= node_q
            fisi
            si (node_c ∈ N_f) llavors
              node_q:= node_c
            fisi
          altrament
            node_q:= punt
            node_c:= punt
          fisi
        fisi
      fisi
    fisi
  fisi
fiper
fiper
fiper
fiper

```

Una vegada acabada l'exploració dels nodes i havent-se mogut de posició alguns d'ells es recalcula les noves posicions, un nombre de vegades tal fins a comprovar que ja no existeixen nodes que tenen una distància inferior a d_c , i, per tant, la malla és ja inamovible. Tal com es discuteix en l'apartat 4.9, aquest algorisme té convergència amb un nombre molt petit d'iteracions.

4.7.2 Algoritme de relaxació

Aquest segon mètode és de caràcter global i examina la interacció entre tots els nodes de les malles fent que aquests es vagin desplaçant fins arribar a un equilibri.

Utilitzant aquest **mètode de relaxació** es calcula el conjunt de les interaccions de tots els nodes de las malles de forma global, com si aquests punts estiguessin sotmesos a una certa tensió. Una manera de modelitzar aquesta tensió és fer-la proporcional a la separació física entre els nodes de la malla d'un dels cossos i els nodes de la malla de l'altre cos. Per tant, hi haurà una variació de la posició dels punts de la malla del primer cos degut a la influència dels punts de la malla del segon cos, i una variació de la posició dels punts de la malla del segon cos degut a la influència dels punts de la malla del primer cos. Cada un dels nodes estarà subjecte a una força respecte als altres nodes veïns, que serà directament proporcional a la distància entre ells, de forma que quan es deixin lliures es mouen fins arribar a un sistema en equilibri. Al final s'arribarà a un equilibri de posicions que serà la configuració final de les malles dels dos cossos.

Amb aquest mètode el resultat final sempre serà el mateix, ja que el càlcul de les interaccions no es fa de forma local tal com passa amb el mètode de propagació.

La consideració del desplaçament dels nodes de les malles es concreta com si aquests nodes estiguessin sotmesos a forces físiques de tensió de valors inversament proporcionals a la distància que es trobin. L'altra consideració és que cada node d'una de les malles està lligat per aquestes forces només als nodes de la l'altra malla que formen part de la cel·la, és a dir, els seus vèrtex, que inclou interiorment el node considerat.

Primer es determinen quines són les forces a que estan sotmesos cada un dels nodes de les dues malles del cos complex. Seguidament es deixa que els nodes de les malles es moguin lliurement segons la força a que estan sotmesos, fins que s'arriba a un equilibri de posicions que fa que les forces que actuen en cada node s'igualin. En aquest estat tots els nodes arriben a un equilibri de forma global mantenint la posició física dels nodes.

Aquesta part de l'algorisme és la següent:

```
per a i_q=0 .. max_i_q
  per a j_q=0 .. max_j_q
    node_q=node(i_q, j_q)
    cel·la_c=node_interior_cel·la(node_q)
    per a k=0 .. max_k
      i_cel·la=i_node(node(k))
      j_cel·la=j_node(node(k))
      node_cel·la=node(i_cel·la, j_cel·la)
      distància = distància(node_q, node_cel·la)
      força[k]=C/distància
    fiper
  fiper
fiper
per a i_c=0 .. max_i_c
  per a j_c=0 .. max_j_c
    node_c=node(i_c, j_c)
    cel·la_q=node_interior_cel·la(node_c)
    per a k=0 .. max_k
      i_cel·la=i_node(node(k))
      j_cel·la=j_node(node(k))
      node_cel·la=node(i_cel·la, j_cel·la)
      distància = distància(node_c, node_cel·la)
      força[k]=C/distància
    fiper
  fiper
fiper
```

Una vegada calculades les forces sobre cada un dels nodes, les noves coordenades es determinen calculant la força resultant sobre el node, que produeix una variació de la posició del node proporcional a la força resultant. Amb les noves posicions obtingudes s'haurien de recalculer els paràmetres anteriors per si encara hi ha forces dominants en algun dels nodes. Aquest càlcul s'ha de seguir iterant les vegades que siguin necessàries fins que ja no hi hagi més variacions de les coordenades dels nodes que és quan s'ha arribat a l'equilibri. Tal com es discuteix en l'apartat 4.9 aquest algoritme presenta convergència amb un nombre finit d'iteracions encara que es tingui un nombre elevat de nodes a tractar.

4.8 Obtenció del nou mallat

Amb tots els nodes resultants es calcula una triangulació de Delaunay. Una vegada els nodes han col·lapsat, o bé, ja s'han desplaçat fins les seves posicions d'equilibri, i, per tant, ja han arribat a les seves posicions finals, es fa una triangulació de Delaunay per trobar les noves arestes de la zona de solapament per tal de formar la nova malla i les corresponents cel·les. Totes les cel·les obtingudes seran triangulars, tal com les que teníem abans.

Amb això s'aconsegueix una malla única per als dos cossos que connecta perfectament amb les malles de cada un dels cossos primitius. La transició entre les malles originals dels cossos i la nova malla obtinguda dins la zona de solapament, fent servir l'algorisme que utilitza el mètode de propagació, varia en funció del valor del percentatge sobre el paràmetre d_m agafat per al càlcul del col·lapse. La seva discussió es troba en l'apartat 4.7.1.

Per a fer aquesta triangulació amb el conjunt de punts de la zona comuna de solapament es segueix el mètode proposat per [2], del qual es pot obtenir la triangulació de Delaunay.

En la implementació de l'algorisme també s'ha fet servir l'aplicació que C. Bradford Barber, David P. Dobkin i Hannu Huddanpaa, [2], presenten amb el nom de "Quickhull", que permet, partint d'un arxiu amb les dades dels nodes que es volen triangular, obtenir un arxiu de sortida amb les triangles corresponents.

Aquesta nova malla serà única per a tot el cos i, per tant, ja no hi haurà dues malles que conviuen en la zona comuna d'interacció.

4.9 Convergència dels algoritmes

En els dos algoritmes s'ha de comprovar que es pugui arribar a les posicions finals dels nodes de les malles fent un nombre finit d'iteracions per a qualsevol nombre de nodes.

La implementació de l'algoritme de propagació fa un nombre limitat d'iteracions per a qualsevol nombre de nodes tractats. Així, per comprovar-ho, s'han preparat unes proves amb un nombre de nodes a tractar des de 4 fins a uns 750. Com que aquest mètode de propagació fa servir un paràmetre de col·lapse d_c , per a cada prova s'han fet servir tres valors de d_c , 0,45, 0,70 i 0,95 del valor de d_m , obtenint uns resultats del nombre d'iteracions que es poden veure en la figura 11.

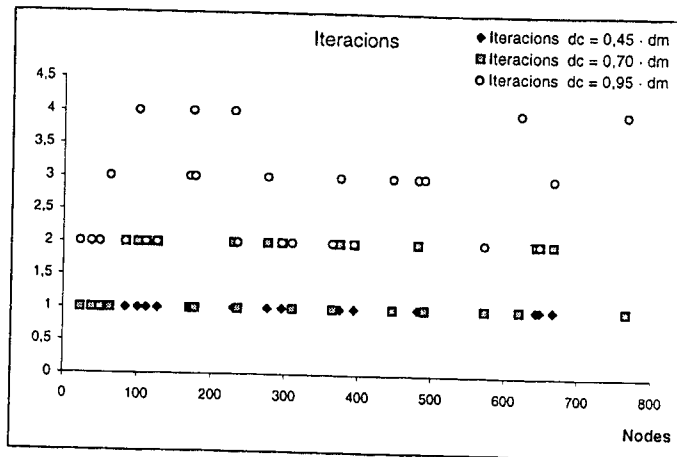


Figura 11. Nombre d'iteracions en funció dels nodes tractats utilitzant el mètode de propagació.

L'altre paràmetre avaluat ha estat el nombre d'iteracions per node. És més útil saber si el nombre d'iteracions per node tractat és un valor que es manté dins d'uns certs marges constants, o bé, si aquest valor creix d'una forma continuada. El resultat és el que es pot veure en la figura 12.

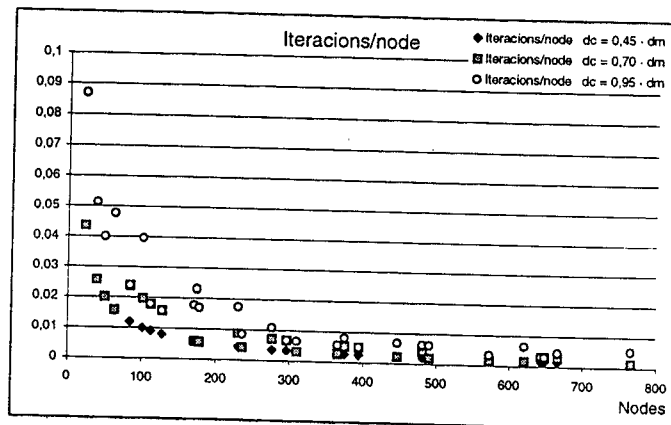


Figura 12. Nombre d'iteracions per node utilitzant el mètode de propagació.

L'ajustament dels punts, que tenen una millor correlació, s'aconsegueix amb una funció potencial, tal com es veu en la figura 13.

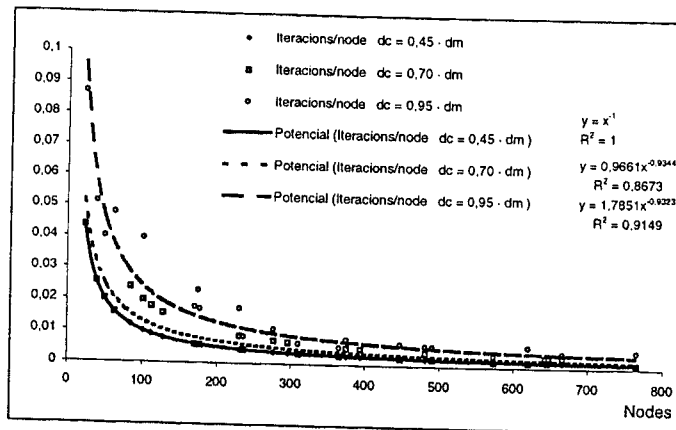


Figura 13. Correlació del nombre d'iteracions per node. Mètode de propagació.

La implementació de l'algorisme de relaxació fa un nombre d'iteracions creixent segons també va creixent el nombre de nodes estudiats. Així s'han preparat unes proves amb nombre de nodes a tractar des de 4 fins a uns 650. Els resultats del nombre d'iteracions obtingut és el que es pot veure en la figura 14.

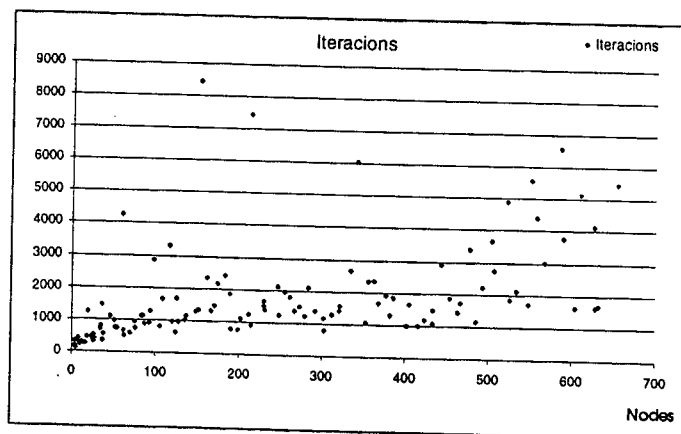


Figura 14. Nombre d'iteracions en funció dels nodes tractats utilitzant el mètode de relaxació.

L'ajustament dels punts, que tenen una millor correlació, s'aconsegueix amb una funció potencial tal com es veu en la figura 15.

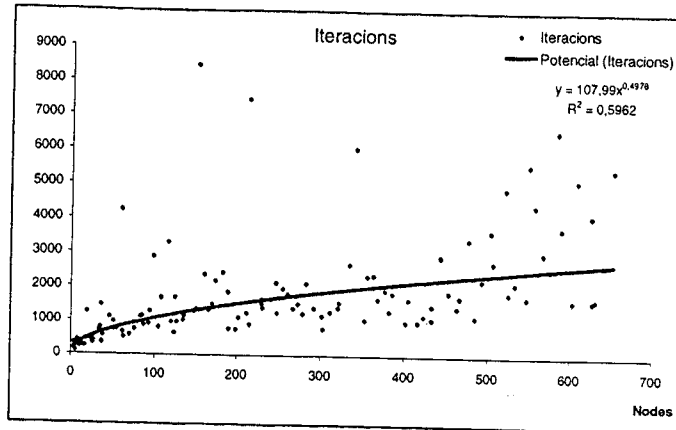


Figura 15. Correlació del nombre d'inaccions utilitzant el mètode de relaxació.

L'altre paràmetre avaluat ha estat el nombre d'iteracions per node. Es més útil saber si el nombre d'iteracions per node tractat és un valor que es manté dins d'uns certs marges constants, o bé, si aquest valor creix d'una forma continuada. El resultats estan en les figures 16 i 17.

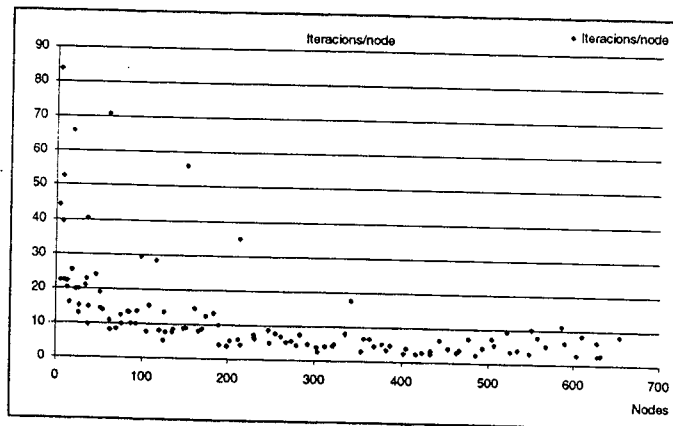


Figura 16. Nombre d'iteracions per node utilitzant el mètode de relaxació.

L'ajustament dels punts, que tenen una millor correlació, s'aconsegueix també amb una funció potencial.

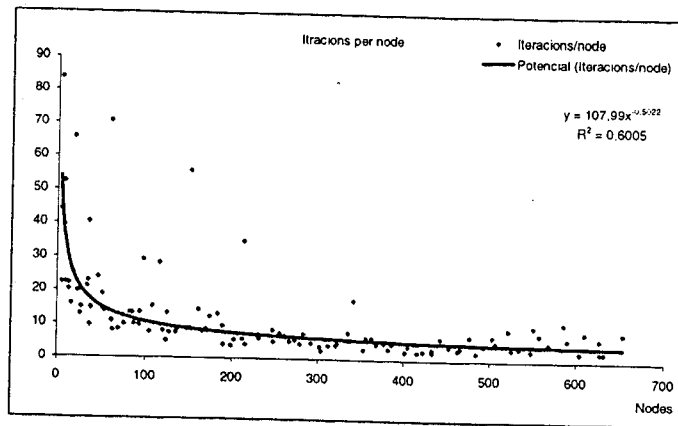


Figura 17. Correlació del nombre d'iteracions per node. Mètode de relaxació.

Tal com es pot observar en les figures anteriors tant per l'algorisme de propagació com per a l'algorisme de relaxació les tendències del nombre d'iteracions per node són asintòticament cap a valors propers a 0, per la qual cosa es pot assegurar que aquests algorisme són convergents i, per tant, poden arribar a trobar una solució en un temps finit.

4.10 Complexitat dels algorismes

L'algorisme utilitzat per al mètode de propagació té com operació bàsica la mesura de la distància entre nodes de cada una de les malles dels dos cossos elementals. Com que les distàncies que s'han de mesurar són les que hi ha entre els n nodes del quadrat amb els m nodes del cercle, la complexitat d'aquest algorisme serà de $O(n^2)$.

L'algorisme utilitzat per al mètode de relaxació també té com operació bàsica la distància entre nodes, concretament entre cada un dels nodes de la malla d'una dels cossos amb els nodes de la cel·la de l'altre cos on és interior, per després determinar una força proporcional a aquesta distància. Les forces a mesurar seran les dels n nodes del quadrat amb els m nodes del cercle i per a cada un d'ells s'hauran de trobar les forces amb el k vèrtex de la cel·la contenidora del node. Com totes les cel·les són triangulars ($k=3$), la complexitat de l'algorisme serà del $O(3n^2)$.

5 Resultats

La implementació de l'algorisme s'ha fet en llenguatge C i s'ha compilat utilitzant la versió 4.0 de la Borland C++.

S'han provat 6 casos diferents, veure la figura 18, i per cada un d'ells s'han agafat 13 valors de d_c . Aquests valors s'han obtingut variant els percentatges sobre d_m del 0,35 al 0,95 amb un 5% de variació entre cada una d'ells.

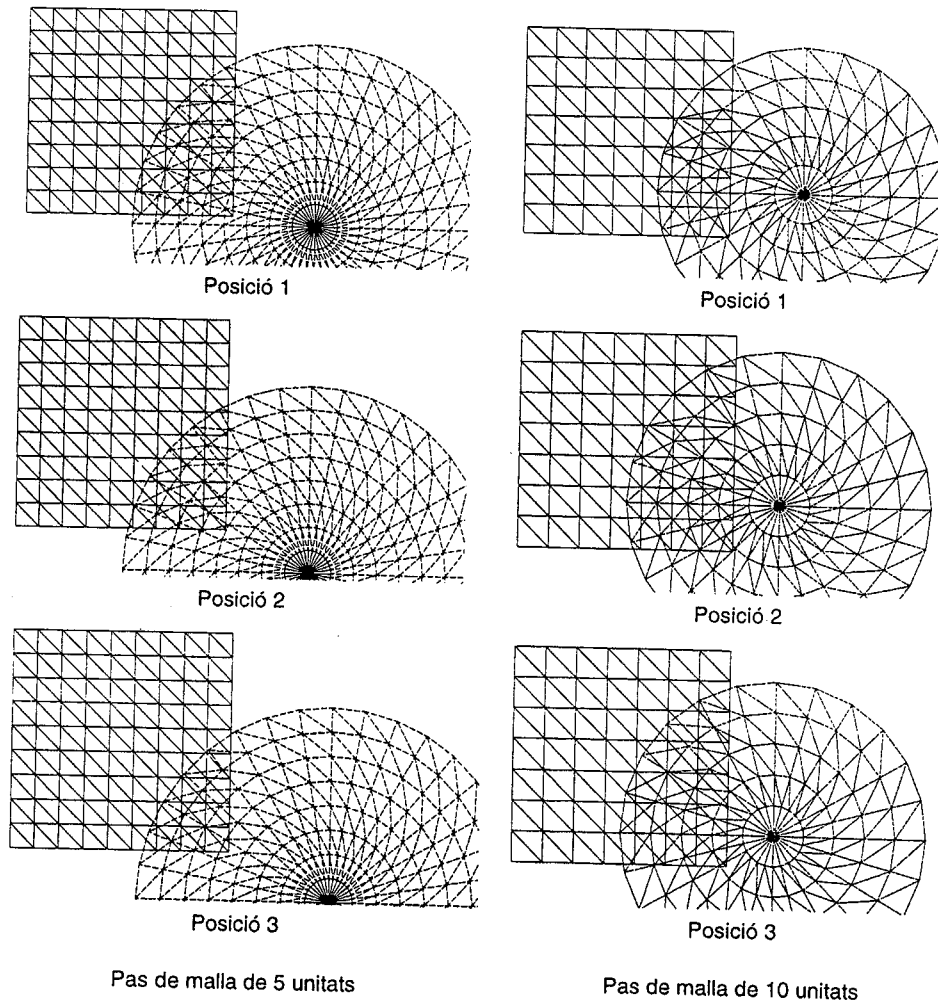


Figura 18. Exemples escollits.

Per determinar la bondat dels mallats obtinguts s'han agafat els dos paràmetres comentats en l'apartat 3.8. El primer és l'àrea de les cel·les de la zona comuna d'interacció A , i el segon és l'angle mínim de les cel·les de la zona comuna d'interacció $A_{n_{min}}$. Segons es desprèn dels gràfics de les figures 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 i 26, tant per els exemples amb pas de malla

de 5 unitats com per els de pas de malla de 10 unitats, els valors de d_c de percentatges entre 0,50 i 0,70 sobre d_m són els que presenten àrees mitjanes més properes a les àrees de les cel·les originals dels mallats dels cossos elementals, i també, valors més propers als angles mínims mitjans. Dins d'aquest interval també les desviacions típiques de les àrees mitjanes i les dels angles mínims són les que presenten valors més baixos.

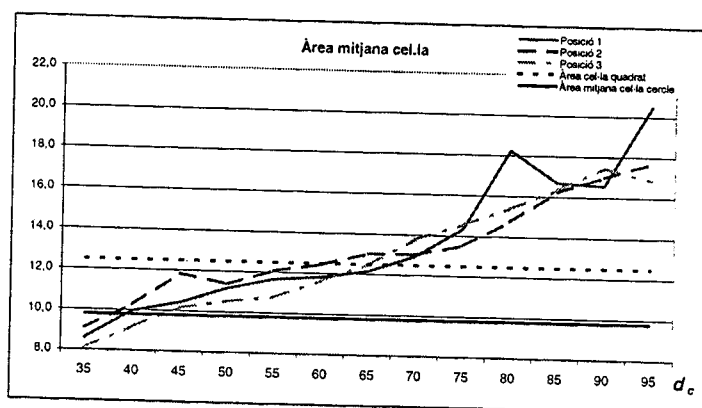


Figura 19. Variació de les àrees mitjanes segons percentatge de d_m . Pas de malla 5.

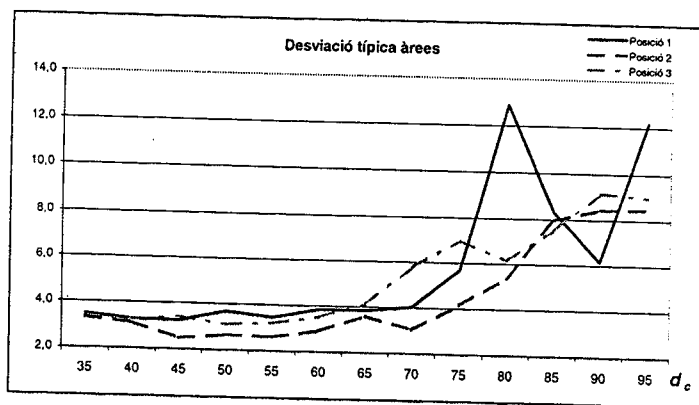


Figura 20. Variació de les desviacions típiques de les àrees mitjanes segons percentatge de d_m . Pas de malla 5.

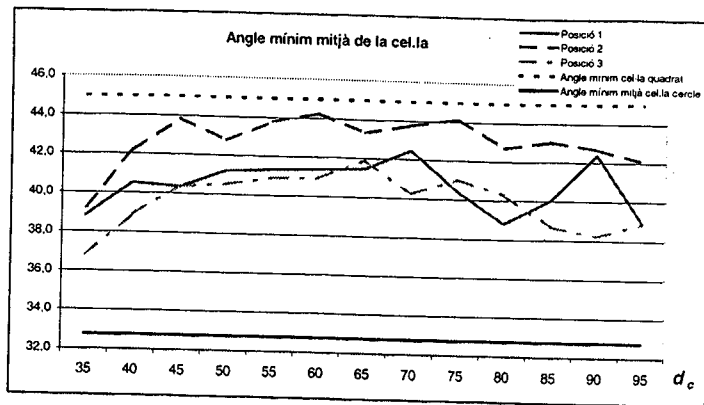


Figura 21. Variació de l'angle mínim mitjà segons percentatge de d_m . Pas de malla 5.

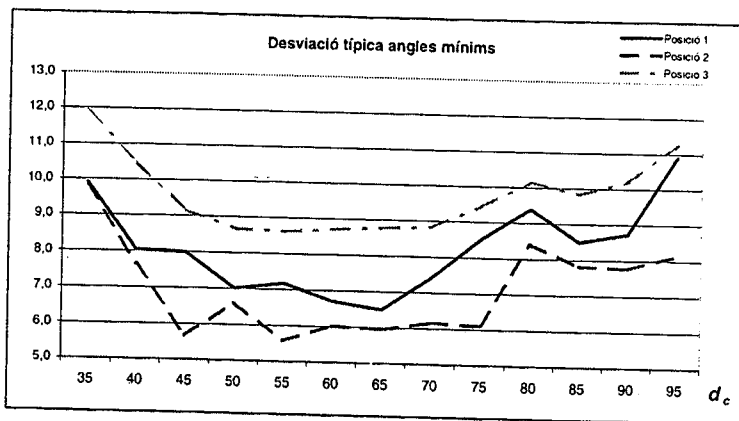


Figura 22. Variació de les desviacions típiques de l'angle mínim mitjà segons percentatge de d_m . Pas de malla 5.

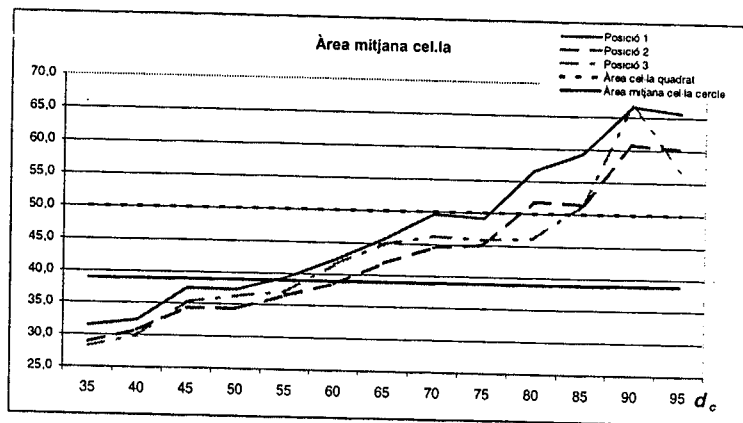


Figura 23. Variació de les àrees mitjanes segons percentatge de d_m . Pas de malla 10.

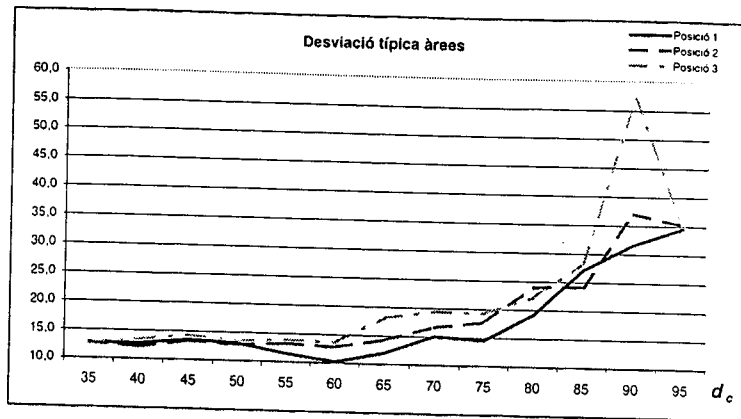


Figura 24. Variació de les desviacions típiques de les àrees mitjanes segons percentatge de d_m . Pas de malla 10.

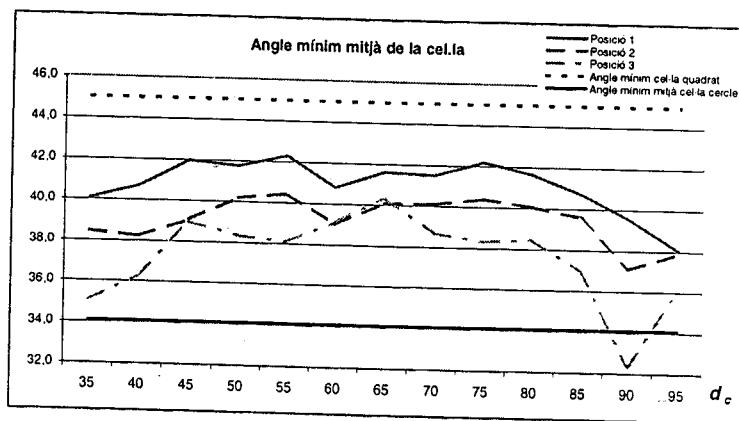


Figura 25. Variació de l'angle mínim mitjà segons percentatge de d_m . Pas de malla 10.

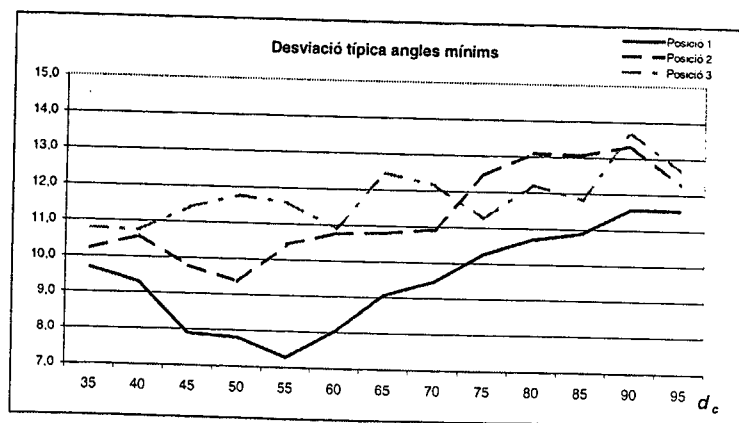


Figura 26. Variació de les desviacions típiques de l'angle mínim mitjà segons percentatge de d_m . Pas de malla 10.

Fent una recopilació dels percentatges de desviació que tenen tant les àrees com els angles mínims respecte la mitjana s'observa que la franja de valors de d_c amb percentatges del 0,50 al 0,65 sobre la d_m és la zona que més es concentren les cel·les obtingudes i, per tant, indica una majoria de cel·les amb característiques més semblants a la mitjana, la qual cosa fa suposar una major "bondat" de les malles obtingudes. Una observació visual directa de les malles obtingudes aplicant l'algorisme anterior confirma els mateixos resultats.

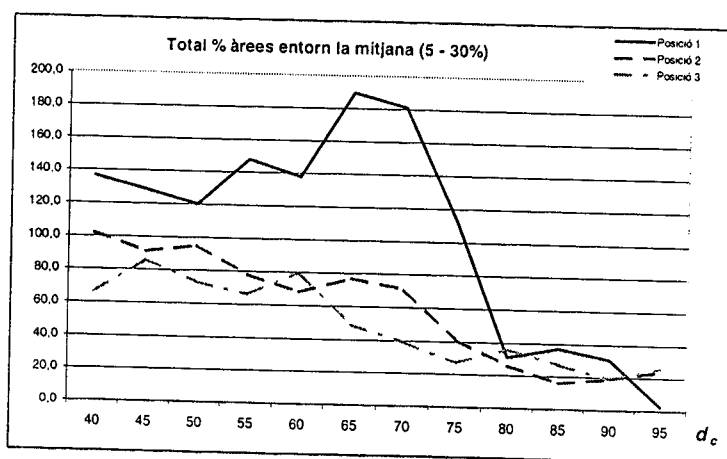


Figura 27. Desviació de les àrees mitjanes entorn la mitjana. Pas de malla 5.

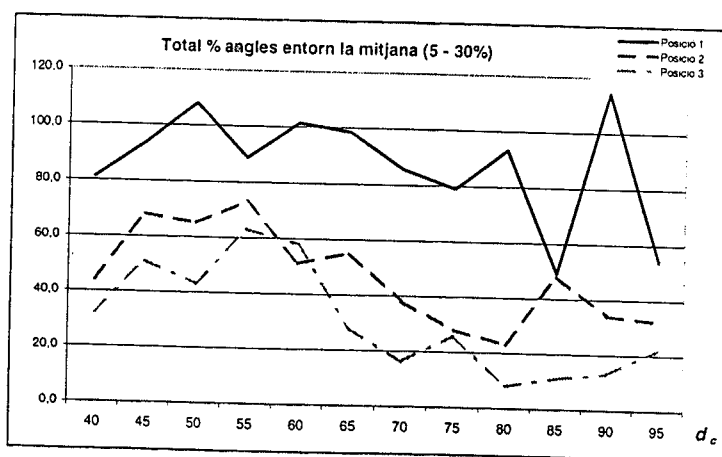


Figura 28. Desviació dels angles mínims entorn la mitjana. Pas de malla 5.

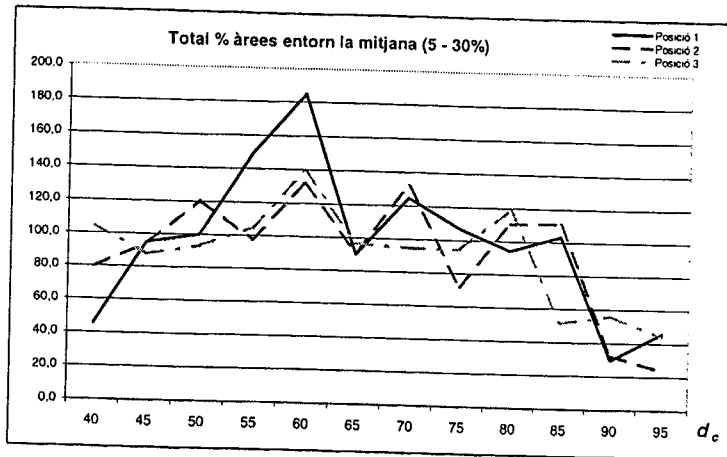


Figura 29. Desviació de les àrees mitjanes entorn la mitjana. Pas de malla 10.

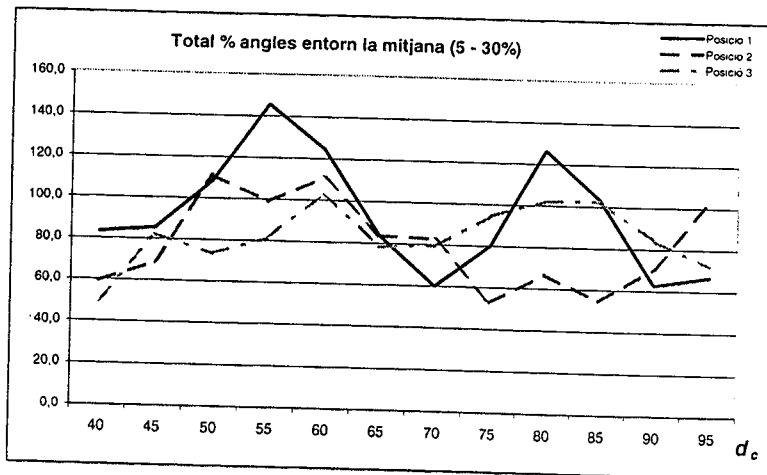


Figura 30. Desviació dels angles mínims entorn la mitjana. Pas de malla 10.

Del que ha estat dit es pot concloure que fent servir valors de d_c iguals a 0,6 d_m és quan els resultats de les malles de la zona comuna d'interferència són millors donant unes malles per al cos complex molt uniformes.

Concretament, els resultats que s'han obtingut pels tres exemples amb pas de malla 5 unitats i els tres de pas de malla de 10 unitats són molt similars en quant a "bondat" de les malles, tal com es pot veure en les figures següents:

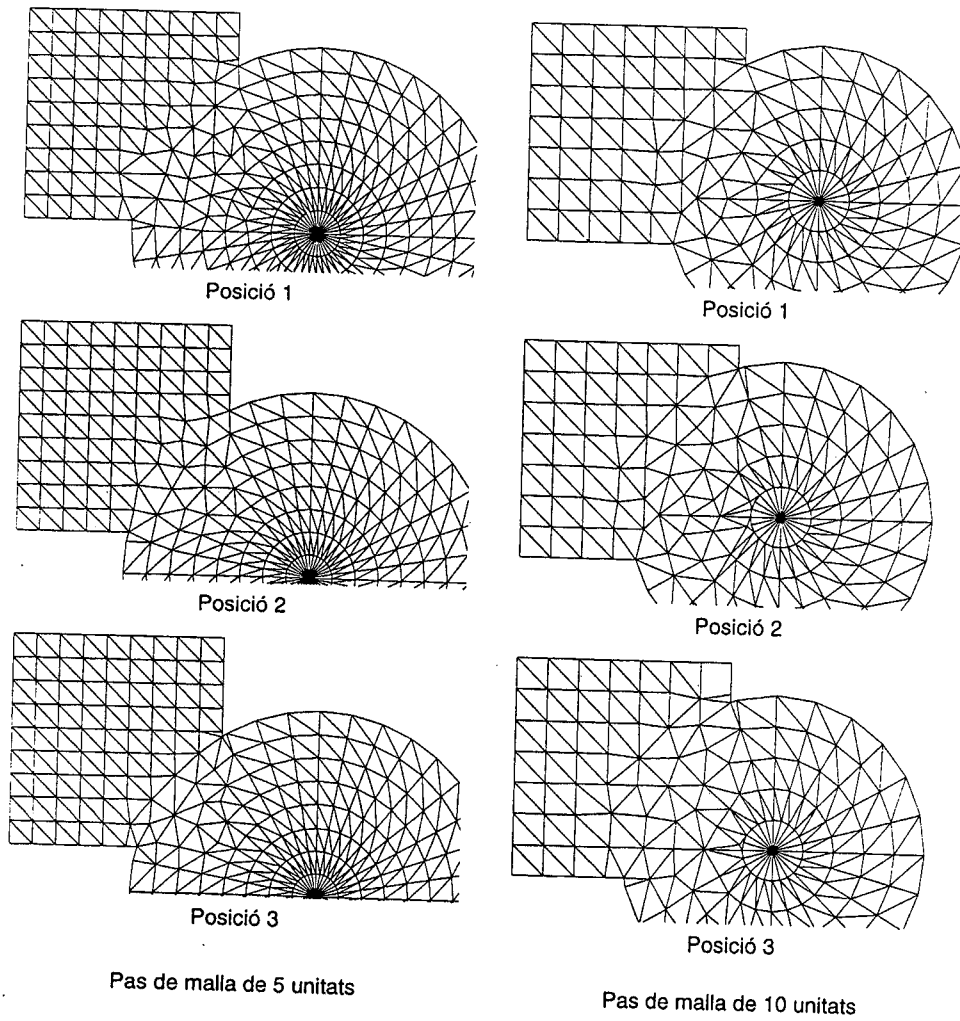


Figura 31. Malles obtingudes aplicant l'algoritme de propagació.

Aplicant l'algoritme del mètode de relaxació sobre els mateixos exemples s'obtenen els resultats que es veuen en les figures següents, però que mai donen una "bondat" tan alta com els del mètode de propagació.

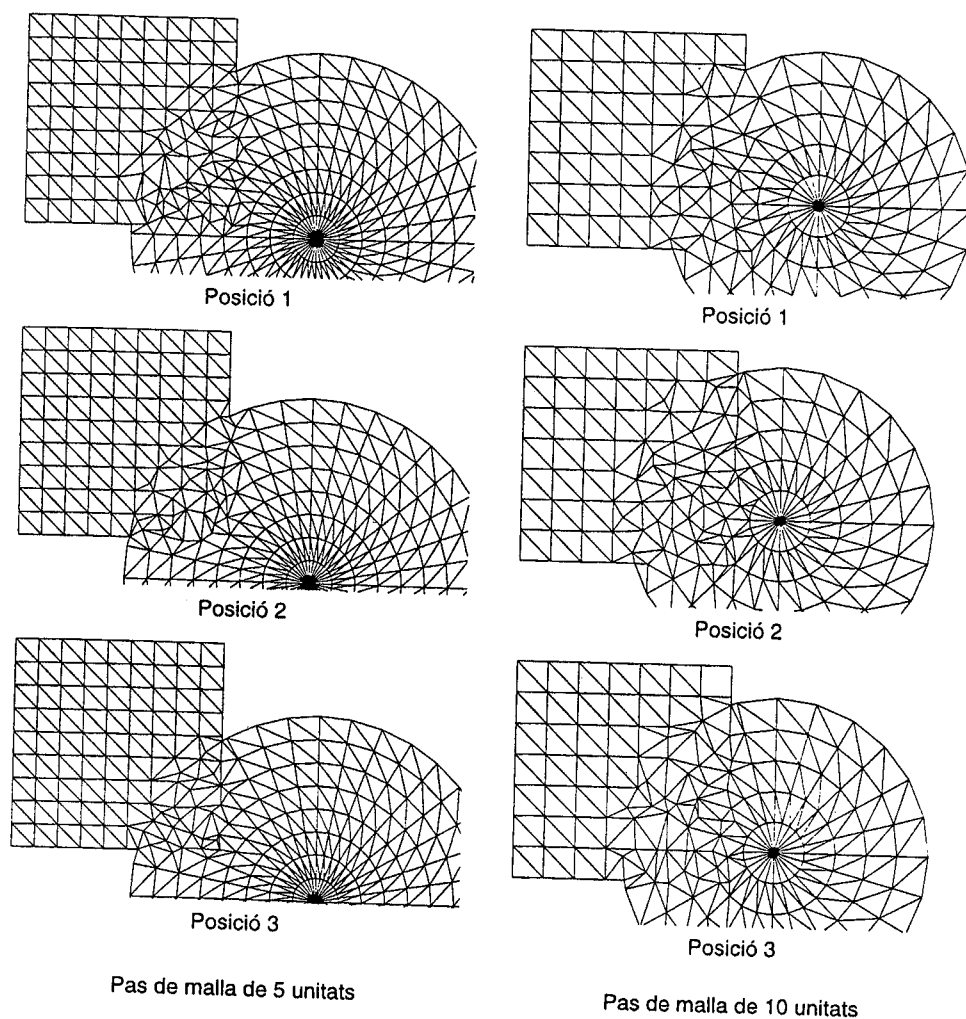


Figura 32. Malles obtingudes aplicant l'algoritme de relaxació.

6 Conclusions

L'implementació i l'aplicació dels algoritmes descrits en l'article als exemples presentats en l'apartat 5, fa que es puguin extreure les següents conclusions:

- Es poden aplicar els algoritmes a cossos complexos obtinguts per l'aplicació de l'operació d'unió sobre els cossos elementals, obtenint uns mallats d'una "bondat" elevada.
- Dels dos algoritmes presentats el que utilitza el mètode de propagació aconseguix, en funció del paràmetre d_c , obtenir uns mallats de molta més qualitat que els que s'obtenen utilitzant l'algoritme que fa servir el mètode de relaxació.
- Els resultats que s'obtenen amb l'algoritme que utilitza el mètode de propagació no depenen només del nombre de cel·les dins de zona de solapament sinó també de les posicions relatives de les cel·les que interaccionen. Com que el mètode és local, els resultats d'interaccions de determinades cel·les influeix en els resultats de les següents cel·les que es tracten i, per tant, el resultat final no és sempre el mateix després d'haver tractat un nombre similar de cel·les.
- L'algoritme que fa servir el mètode de relaxació manté el nombre de nodes tractats inalterable ja que només realitza desplaçaments del nodes fins a posicions d'equilibri. Això fa que el nombre de cel·les finals de la zona de solapament siguin més gran que no el que s'obté aplicant l'algoritme que utilitza el mètode de propagació, la qual cosa fa que les cel·les obtingudes siguin d'una mida més petita que la mida de les cel·les inicials, fent que la seva "bondat" quedi disminuïda.

7 Referències bibliogràfiques

- [1] Edwin Boender, Willem F. Bronsvort. "*Finite-Element Mesh Generation from Constructive-Solid-Geometry Models*". Computer-Aided Design, vol. 26, p 379-392. Maig 1994.
- [2] C. Bradford Barber, David P. Dobkin, Hannu Huddanpaa. "*The Quickhull Algorithm for Convex Hulls*". ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 22, núm 4 p 469-483. Desembre 1996.
- [3] Jordan Jay Cox, W. W. Charlesworth, D. A. Anderson,. "*Domain Composition Methods for Associating Geometric Modeling with Finite Element Modeling*". Debats del simposium del ACM/SICGRAPH sobre fonaments de modelatge de sòlids i aplicacions de CAD/CAM. Austin, Texas. Juny 1991.
- [4] Jordan Jay Cox. "*Domain Composition Methods for Combining Geometric and Continuum Fields Models*". Tesi doctoral. Universitat de Purdue. 1991.
- [5] Y.T. Lee, A. De Pennington, N. K. Shaw. "*Automatic Finite-Element Mesh Generation from Geometric Models – A Point-Based Approach*". ACM Transactions on Graphics, vol. 3, núm. 4, p 287-311. Octubre 1984.
- [6] Nikolas Sapidis, Renato Perucchio. "*Advanced Techniques for Automatic Finite Element Meshing form Solid Models*". Computer Aided Design, vol. 21, núm. 4, p 248-253. Maig 1989.
- [7] Vijay Srinivasan, Lee R. Nackman, Jung-Mu Tang, Siavash N. Meshkat. "*Automatic Mesh Generation Using The Symmetric Axis Transformation of Polygonal Domains*". IBM Research division, T.J. Waston Research Center i Almaden Research Center. Setembre de 1990.
- [8] Vance Unruh, David C. Anderson. "*Feature-Based Modeling for Automatic Mesh Generation*". Engineering with Computers, vol. 8, p 1-12. 1992.

Departament de Llenguatges i Sistemes Informàtics
Universitat Politècnica de Catalunya

Research Reports – 1999

- LSI-99-1-R “The Width-size Method for General Resolution is Optimal”, Maria Luisa Bonet and Nicola Galesi.
- LSI-99-2-R “Geometry Simplification”, Carlos Andujar.
- LSI-99-3-R “The Discretized Polyhedra Simplification (DPS): a Framework for Polyhedra Simplification Based on Decomposition Schemes”, Carlos Andujar, Dolors Ayala and Pere Brunet.
- LSI-99-4-R “On-Line Sampling Methods for Discovering Association Rules”, Carlos Domingo, Ricard Gavaldà, and Osamu Watanabe.
- LSI-99-5-R “Experiments on Applying Relaxation Labeling to Map Multilingual Hierarchies”, Jordi Daudé, Lluís Padró and German Rigau.
- LSI-99-6-R “Estructuras Geometricas Jerarquicas para la Modelizacion de Escenas 3D”, P. Brunet, L. Chiarabini, G. A. Patow, F. J. Santistevé, E. Sttafetti, J. Surinyac and A. Vilanova.
- LSI-99-7-R “Proposals on Mapping Multilingual Hierarchies”, J. Daudé, L. Padró and G. Rigau.
- LSI-99-8-R “Computing the Medial Axis Transform of Polygonal Domains by Tracing Paths”, R. Joan Arinyo, L. Pérez and J. Vilaplana.
- LSI-99-9-R “ELX: Entorn Latex pel dibuix de xarxes de demostració”, Josep M. Merenciano.
- LSI-99-10-R “Convergence theorems for some layout measures on random lattice and random geometric graphs”, Josep Diaz, Mathew D. Penrose, Jordi Petit and Maria Serna.
- LSI-99-11-R “Linear Orderings of Random Geometric Graphs (Extended Abstract)”, Josep Diaz, Mathew D. Penrose, Jordi Petit and Maria Serna.
- LSI-99-12-R “The Proper Interval Colored Graph problem for caterpillar trees”, Carme Alvarez and Maria Serna.
- LSI-99-13-R “A Modular Approach to Software Process Modelling and Enaction”, Xavier Franch and Josep M. Ribó.
- LSI-99-14-R “Improving Mergesort for Linked Lists”, Salvador Roura.
- LSI-99-15-R “Axiomatic frameworks for developing BSP-style programs”, A. Stewart, M. Clint and J. Gabarró.

- LSI-99-16-R "Algorithms to Mesh 2D CSG Polygons Domains from Previously Meshed CSG Primitives", R. Joan-Arinyo and M. Sole.
- LSI-99-17-R "Fringe analysis of synchronized parallel insertion algorithms on 2-3 trees", R. Baeza-Yates, J. Gabarró, X.Messeguer and M.S. Busquier.
- LSI-99-18-R "Beginning to Programming pilot course, IniPro, using Java.", X. Franch, J. Gabarró, A. Gómez, A. Vázquez and J. Vázquez.
- LSI-99-19-R "Robust Geometric Computation (RGC), State of the Art.", F. J. Santistevé.
-

Hardcopies of reports can be ordered from:

Núria Sánchez
Departament de Llenguatges i Sistemes Informàtics
Universitat Politècnica de Catalunya
Campus Nord, Mòdul C6
Jordi Girona Salgado, 1-3
08034 Barcelona, Spain
secrelsi@lsi.upc.es

See also the Department WWW pages, <http://www-lsi.upc.es/>