



ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA INDUSTRIAL DE BARCELONA
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Avgda. DIAGONAL, 647, 7^a planta
08028 BARCELONA

TRANSFERÈNCIA DE CALOR

(TERMOTÈCNIA – 240171)

ISBN 978-84-953-5589-8

Depòsit legal : B-06.624-2005

Apunts de classe

(revisió 10/03/2020)

Prof. Lluís Albert Bonals Muntada

*A la meva Tanit,
a tots els meus alumnes, exalumnes i lectors ...*

Barcelona, 2018

Pròleg

Aquest text com el seu títol indica és un recull dels meus apunts de Transferència de Calor que he anat preparant els últims anys per impartir les meves classes. No és un text complet ni te la pretensió de ser-ho. Està pensat especialment per facilitar el seguiment de l'assignatura als alumnes que assisteixen a les meves classes.

Una sèrie de problemes resolts que s'adjunten haurien de servir per facilitar l'aprenentatge, però només tindran utilitat si l'alumne fa un intent seriós de resolució abans de llegir la solució proposada. He inclòs moltes qüestions curtes que penso ajudaran molt a l'alumne i he millorat especialment els capítols 3,4 i 5.

Tinc que agrair al professor Bartomeu Sigales els seus ensenyaments i enfocament inicial de l'assignatura de Transferència de Calor a la nostra escola, molt avantguardista en el seu temps per un curs d'iniciació. (radiació per bandes, propietats funció de la temperatura, radi crític amb conductivitat tèrmica de l'aïllant i coeficient de convecció funció de la temperatura, enfocament computacional, etc.) Amb els meus companys els professors Rafael Ruiz i Enric Velo hem acabat de perfilar el programa actual de l'assignatura que en part es recull en aquests apunts.

A la meva adreça electrònica <lluis.albert.bonals@upc.edu> em podeu enviar tots els suggeriments i dubtes que el text us plantegi.

Barcelona, 14 de febrer del 2018

TAULA DE CONTINGUTS

1	INTRODUCCIÓ.....	1
1.1	OBJECTE I ABAST DE L'ASSIGNATURA.....	1
1.1.1	Presentació, contingut i normativa de l'assignatura	1
1.1.2	Àmbit d'aplicació industrial	1
1.1.3	Definició de Calor i Transferència de Calor.....	1
1.1.4	Mecanismes de Transferència de Calor.....	3
1.1.5	Identificació qualitativa d'aquests mecanismes	3
1.1.6	Exemples rellevants de transferència de calor.....	3
1.2	TRANSFERÈNCIA DE CALOR PER CONDUCCIÓ.....	4
1.2.1	Descripció fenomenològica i model per la conducció.....	4
1.2.2	Llei de Fourier. Sistemes unidimensionals.....	5
1.2.3	Distribució unidimensional de temperatures	6
1.2.4	Conductivitat tèrmica. Ordres de magnitud. Interpretació qualitativa	6
1.2.5	Formulació vectorial de la llei de Fourier.	7
	Exercici 1: camp de temperatures tridimensional	9
1.3	GENERACIÓ VOLUMÈTRICA DE POTÈNCIA TÈRMICA.....	9
1.4	SISTEMES UNIDIMENSIONALS EN ESTAT ESTACIONARI.....	10
1.4.1	Paret Plana	10
1.4.2	Paret cilíndrica.....	11
1.4.3	Paret esfèrica	13
1.4.4	Conductivitat tèrmica funció lineal de la temperatura.....	13
	Exercici 2: Tronco-con aïllat lateralment (<i>exemple de secció variable</i>)	14
1.4.5	Resistència i conductància tèrmica. Paret composta.	17
1.4.6	Resistència de contacte.....	18
1.5	TRANSFERÈNCIA DE CALOR PER CONVECCIÓ.....	19
1.5.1	Descripció fenomenològica de la convecció	19
1.5.2	Llei de refredament de Newton	20
1.5.3	Ordres de magnitud dels coeficients de convecció.....	20
	Exercici 3: conducte envoltat d'un vapor saturat	21
1.5.4	Mecanismes combinats (conducció i convecció)	23
1.6	TRANSFERÈNCIA DE CALOR PER RADIACIÓ	26
1.6.1	Naturalesa de la radiació tèrmica.....	26
1.6.2	Reflectància, absorptància i transmissivitat	26
1.6.3	Definició del cos negre.....	26
1.6.4	Emissivitat global	27
1.6.5	Llei de Stefan-Boltzmann.....	27
1.6.6	Llei de Kirchhoff	27
1.6.7	Conductància de radiació equivalent.....	28
1.6.8	Coefficient superficial equivalent de convecció i radiació	28
1.7	BALANÇOS D'ENERGIA EN TRANSFERÈNCIA DE CALOR.....	30
1.7.1	Conservació de l'energia per un volum de control.....	30
1.7.2	Conservació de l'energia per un sistema tancat.....	31

1.7.3	Balanç d'energia d'un sistema obert	32
1.7.4	Balanç d'energia en forma integral d'un sistema obert.....	33
	Exercici 4: dissipació de calor d'una resistència elèctrica	33
1.8	EXERCICIS RESOLTS	36
	Exercici 5: conducte amb flux de radiació directe	36
2	CONDUCCIÓ UNIDIMENSIONAL EN RÈGIM PERMANENT	41
2.1	AÏLLANTS TÈRMICS	41
2.1.1	Generalitats.....	41
2.1.2	Aïllament d'una paret plana amb un o varis materials	42
	Exercici 1: problema del forn	42
2.1.3	Aïllament de canonades. Radi crític amb h constant.....	48
	Exercici 2: Aïllament d'una canonada. Radi crític amb h variable (<i>versió complerta</i>)	50
2.1.4	Aïllament de dipòsits esfèrics. Radi crític amb λ i h constant	54
2.2	CONDUCCIÓ AMB GENERACIÓ D'ENERGIA TÈRMICA.....	55
2.2.1	Mètode del compte de la vella: variació d'una funció continua en un dx.....	55
2.2.2	Equació de la difusió de la calor (2 ^a llei de Fourier)	55
2.2.3	Integració de la 2 ^a llei de Fourier: paret plana sense generació.....	57
2.3	PARETS PLANES I SISTEMES RADIALS AMB GENERACIÓ	59
2.3.1	Paret plana amb generació: perfil de temperatures i potència transferida.....	59
2.3.2	Paret cilíndrica amb generació: perfil de temperatures i potència transferida	60
	Exercici 3: Cilindres coaxials amb i sense generació de potència tèrmica	60
2.4	SUPERFÍCIES ESTESES O ALETES	63
2.4.1	Introducció.....	63
2.4.2	Concepte d'aleta o superfície estesa.....	64
2.4.3	Tipus d'aletes.....	65
2.4.4	Equació diferencial d'una aleta de secció constant en regim estacionari.....	67
2.4.5	Solució general	68
2.4.6	Condicions de contorn (c.c.).....	68
2.4.7	Potència dissipada per l'aleta.	69
2.4.8	Eficiència d'una superfície estesa o aleta.....	70
2.4.9	Aleta amb convecció a l'extrem no negligible (cas a).....	72
2.4.10	Aleta d'extrem adiabàtic (cas b).....	74
2.4.11	Aleta amb temperatura d'extrem coneguda (cas c)	76
2.4.12	Aleta molt llarga (cas d).	79
2.4.13	Càlcul del paràmetre m per diferents tipus d'aletes	81
2.4.14	Efectivitat d'una aleta (exercici resolt: consolidació de conceptes, cas a).....	83
2.4.15	Eficiència d'una aleta amb resistència de contacte a la seva base.....	86
2.4.16	RESUM D'ALETES	87
2.5	EXERCICIS RESOLTS	91
	Exercici 4: examen parcial proposat el 06/04/2001 (cas c).....	91
	Exercici 5: examen parcial proposat el 02/11/2001 (cas c).....	94
	Exercici 6: examen parcial proposat el 31/10/2002 (cas a).....	97
	Exercici 7: examen parcial proposat el 28/10/2004 (cas b).....	101

3	MÈTODES NUMÈRICS	105
3.1	INTRODUCCIÓ A LES DIFERÈNCIES FINITES	105
3.2	APROXIMACIÓ DE LES DERIVADES EN DIFERÈNCIES FINITES.....	105
3.2.1	Primera derivada en diferències	105
3.2.2	Notació	106
3.2.3	Segona derivada en diferències	106
3.2.4	Resum de primeres i segones derivades en diferències.....	107
3.2.5	Equació en diferències: conducció bidimensional en estat estacionari	108
3.3	DISCRETITZACIÓ DEL CONTINU	108
3.3.1	Domini, node i malla	108
3.3.2	Discretització del temps	108
3.4	EQUACIÓ GENERAL EN DIFERÈNCIES. MÈTODE DEL BALANÇ	109
3.4.1	Equació general del balanç d'energia.....	109
3.4.2	Mètode explícit.....	110
3.4.3	Mètode implícit	112
3.4.4	Mètode mixt o de mitjana ponderada: CRANK-NICOLSON ($F=0,5$).....	112
3.5	CONDUCTÀNCIES INTERNODALS	113
3.5.1	Notació	113
3.5.2	Malles rectangulars.....	113
3.5.3	Malles cilíndriques	114
3.5.4	Malles esfèriques	115
3.6	SOLUCIÓ MATRICIAL (examen numèric del 23/11/2002).....	116
3.6.1	Règim estacionari	116
3.6.2	Règim transitori: mètode explícit (<i>examen del 23/11/2002</i>)	118
3.6.3	Règim transitori: mètode implícit.....	120
3.6.4	Validesa del procediment matricial en el mètode implícit.	122
3.6.5	Procediment amb l'HP (mètode implícit).....	122
3.6.6	Règim transitori: mètode de CRANK-NICOLSON ($F=0,5$).....	122
3.6.7	Balanç global de potència.....	123
3.6.8	Balanç global d'energia acumulada.....	124
3.7	EXERCICIS RESOLTS (<i>amb mètodes matricials</i>)	124
	Exercici 1: tira ceràmica envoltada d'un bloc metàl·lic (<i>transitori, mètode explícit</i>).....	124
	Exercici 2: mètodes numèrics (examen 23/11/2002) (<i>mètode explícit</i>)	131
	Exercici 3: mètodes numèrics (variant examen 29/04/2009) (<i>mètode implícit</i>)	138
4	CONVECCIÓ	147
4.1	MECANISME FÍSIC DE LA CONVECCIÓ	147
4.1.1	Flux forçat o natural (<i>amb o sense impulsió</i>)	148
4.1.2	Flux intern o extern	148
4.2	CAPA LÍMIT HIDRODINÀMICA (<i>placa plana</i>)	149
4.2.1	Concepte	149
4.2.2	Capa límit de velocitat o hidrodinàmica laminar (CLH).....	150

4.2.3	Equació de la quantitat de moviment en la forma integral de von Kármán	151
4.2.4	Capa límit hidrodinàmica laminar (CLH)	151
4.2.5	Coeficient de fricció local $C_f(x)$ i promig \bar{C}_f	152
4.2.6	Capa límit hidrodinàmica turbulenta (CLH)	153
4.3	CAPA LÍMIT TÈRMICA (placa plana).....	154
4.3.1	Equació de la distribució de temperatures amb polinomi de 3 ^o grau	154
4.3.2	Equació de l'energia en la forma integral de von Kármán	156
4.3.3	Gruix de CLT amb zona inicial isoterma	156
4.3.4	Coeficient de convecció laminar: placa plana	157
4.3.5	Coeficient de convecció turbulent: placa plana	158
4.3.6	Exemple: càlcul de la capa límit tèrmica laminar per un metall líquid	158
4.4	CONDUCTES (flux intern)	163
4.4.1	Longitud d'entrada hidrodinàmica en conductes	163
4.4.2	Condicions de flux hidrodinàmicament desenvolupat.....	163
4.4.3	Longitud d'entrada tèrmica en conductes.....	164
4.4.4	Condicions de flux tèrmicament desenvolupat.....	164
4.4.5	Temperatura mitja entàlpica T_b en conductes circulars	164
4.4.6	Càlcul del coef. de convecció en conductes: metodologia general	165
4.4.7	Coeficient de fricció promig ($0-L$) per conductes de secció circular	166
4.4.8	Conductes en regim turbulent. Hipòtesi considerades.....	167
4.4.9	Característiques geomètriques	167
4.4.10	Conducte envoltat d'un fluid a temp. constant $T_{\infty,ext}$ (o T_{vapor}) (cas a).....	168
4.4.11	MLDT (<i>Mitja Logarítmica de la Diferència de Temperatures</i>).....	171
4.4.12	Temperatura de paret uniforme o constant (<i>cas a.1</i>)	175
4.4.13	Flux de potència tèrmic (q/A) constant a la paret $\forall x$ (cas b).....	176
4.4.14	Algoritme 1: trobar L si la T_{cF} de sortida és coneguda	178
4.4.15	Resolució amb HP48 (o posteriors) (<i>prob. d'envolvent i tubs</i>)	184
4.4.16	Algoritme 2: trobar T_{cF} si la longitud L és coneguda	187
4.4.17	Problemes tipus de convecció.....	194
4.5	EXERCICIS RESOLTS	199
	Exercici 1: conducte rectangular envoltat d'una manta elèctrica	199
	Exercici 2: examen final 12/06/2003	204
	Exercici 3: examen final 10/01/2007	209
5	RADIACIÓ: MEDIS NO PARTICIPANTS	213
5.1	NATURALESIA DE LA RADIACIÓ TÈRMICA	213
5.1.1	Models emprats	213
5.1.2	Espectre electromagnètic	213
5.1.3	Espectre pràctic de radiació tèrmica.....	214
5.2	DEFINICIONS BÀSIQUES	215
5.2.1	Propietats monocromàtiques, totals i hemisfèriques	215
5.2.2	Llei de LAMBERT. Evidència experimental	215
5.2.3	Intensitat de radiació.....	217
5.2.4	Radiositat, Irradiació i Poder Emissiu (<i>espectrals i totals</i>)	219
5.2.5	Intensitat de radiació incident, reflectida, emesa i emergent.....	220

5.2.6	Radiositat, J	221
5.2.7	Irradiació, G	222
5.2.8	Poder emissiu total i hemisfèric, $E(T, \text{sistema})$	222
5.3	COS NEGRE.....	223
5.3.1	Definició del cos negre	223
5.3.2	Llei de distribució de Planck	223
5.3.3	Poder emissiu espectral del cos negre	224
5.3.4	Llei de desplaçament de Wien.....	225
5.3.5	Llei d'Stefan-Boltzmann	225
5.3.6	Funcions de radiació	227
5.4	PROPIETATS RADIANTS.....	229
5.4.1	Tipus de superfície	229
5.4.2	Reflectància - reflectivitat	229
5.4.3	Absorbància - absortivitat.....	230
5.4.4	Transmitància - transmissivitat.....	230
5.4.5	Emitància – emissivitat espectral	230
5.4.6	Lleis de Kirchhoff.....	231
5.4.7	Superfície gris.....	231
5.5	FACTORS DE VISIÓ ENTRE SUPERFÍCIES DIFUSES.....	232
5.5.1	Factor de visió. Definició	232
5.5.2	Factor de visió entre dues superfícies diferencials difuses.....	233
5.5.3	Reciprocitat simple	234
5.5.4	Factor de visió d'una superfície finita i una diferencial, ambdues difuses.....	234
5.5.5	Factor de visió entre dues superfícies finites difuses	235
5.5.6	Àlgebra de factors de visió. Flux geomètric W_{ij}	235
5.5.7	Mètode dels fils creuats	236
5.5.8	Reciprocitat especial.....	242
5.6	BESCANVI RADIANT PER BANDES EN RECINTES DE N_S SUPERFÍCIES	243
5.6.1	Recinte. Hipòtesis.....	243
5.6.2	Poder emissiu espectral (<i>veure ap. 5.2.4</i>).....	243
5.6.3	La irradiació G_i^k en funció de les radiositats J_i^k	245
5.6.4	Conveni de signes.....	245
5.6.5	Tipus de superfícies. Equacions	246
5.6.6	Mètodes de resolució	247
5.6.7	Resolució matricial de recintes amb totes les superfícies grises (<i>cas general</i>)	248
5.6.8	Resolució matricial de recintes amb propietats espectrals (<i>per bandes</i>).....	249
5.7	BESCANVI RADIANT ESPECTRAL EN RECINTES DE 2 SUPERFÍCIES....	251
5.7.1	Sistema d'equacions	252
5.7.2	Solució general	253
5.7.3	Plans paral·lels i infinits	254
5.7.4	Superfície convexa rodejada d'una altra còncava	254
5.7.5	Superfície A_1 convexa amb A_2 còncava sent A_2/A_1 finit (<i>del mateix ordre</i>)	255
5.7.6	Superfície A_1 convexa molt més petita que la superfície A_2 còncava ($A_1 \ll A_2$)	255
5.7.7	Balanç de potències: convecció i radiació conjuntes.....	256
5.8	EFFECTE HIVERNACLE	257

5.9	EXERCICIS RESOLTS	260
	Exercici 1: conducte metàl·lic de secció quadrada.....	260
	Exercici 2: examen d'avaluació continua 27/05/94 (para-sol d'un tanc)	264
	Exercici 3: examen final 20/01/2004.....	268
	Exercici 4: conducte mixt de secció circular	272
	Exercici 5: cobert lunar (examen final 22/06/2005).....	275
6	EXERCICIS DE CLASSE (EXÀMENS PROPOSATS A L'ETSEIB).....	279
6.1	Paret aïllant d'un congelador.....	279
6.2	Conducte envoltat d'un vapor saturat.....	279
6.3	Paret composta de parets cilíndriques	280
6.4	Aïllament d'una canonada.....	281
6.5	Sostre d'un automòbil.....	283
6.6	Xapa en equilibri tèrmic	283
6.7	Col·lector solar pla	284
6.8	Conducte amb flux de radiació directe (<i>resolta una variant a l'apartat 1.8</i>)	286
6.9	Problema del forn (<i>resolt a l'apartat 2.1.2</i>)	288
6.10	Aïllament d'una canonada (radi crític) (<i>resolta una variant a l'ap. 2.1.3</i>)	289
6.11	Cambra frigorífica	290
6.12	Aïllament multicapa	291
6.13	Paret plana amb generació de potència tèrmica (<i>resolt a l'ap. 2.3.1</i>)	292
6.14	Paret plana amb aportació d'un flux de potència tèrmic	292
6.15	Conductor cilíndric aïllat lateralment.....	293
6.16	Cable elèctric (cilindres <i>coaxials amb i sense generació, resolt a l'ap. 2.3.2</i>).....	293
6.17	Aleta d'extrem adiabàtic.....	294
6.18	Paret amb aletes a ambdós costats.....	294
6.19	Motor que acciona una bomba (<i>ex. final del 27/06/2000, extrem adiabàtic, cas b</i>).....	295
6.20	Tub amb aletes radials (<i>ex. parcial curs 07-08 q2, convecció a l'extrem</i>).....	296
6.21	Paret composta amb generació i aletes (<i>variant parc. 06/04/01, cas c, resolt, 2.6</i>)	297
6.22	Nucli escalfat per inducció electromagnètica (<i>variant 04-05-q1, resolt ap. 2.6</i>).....	298

6.23	Barreta amb generació i aletes longitudinals (<i>variant parc 02/11/01, resolts, 2.6</i>).....	299
6.24	Tub Viessmann.....	301
6.25	Tub amb aletes interiors en creu (<i>parcial 13/04/2000, extrem adiabàtic</i>)	303
6.26	Tira de ceràmica (<i>regim estacionari</i>)	304
6.27	Tira de ceràmica (<i>regim transitori, mètode explícit i implícit</i>).....	304
6.28	Envolvent i $n_t = 3$ tubs (<i>algoritme a l'ap. 4.4.15</i>)	305
6.29	Doble tub amb embrutament (<i>curs 05-06-q1, 18/01/2006</i>).....	306
6.30	Conducte amb manòmetre diferencial entre els seus extrems.....	308
6.31	Tub amb temperatura de paret constant.....	308
6.32	Escalfador d'aire (<i>envolvent amb un feix longitudinal</i>).....	309
6.33	Conducte rectangular envoltat d'una manta elèctrica (<i>variant resolta a l'ap. 4.5</i>).....	310
6.34	Doble recinte radiant (<i>ex. final 21/01/94</i>).....	311
6.35	Túnel radiant (<i>variant amb 5 superfícies grises</i>).....	312
6.36	Túnel radiant (<i>final juny/1988, propietats espectrals</i>)	313
6.37	Parrilla infinita de tubs radiants (<i>final 08/06/2002, superfícies grises</i>).....	314
6.38	Forat cilíndric en un bloc piroceràmic (<i>final 16/01/08, fórmules 2 superfícies</i>)	315
6.39	Reflector (<i>variant final 21/06/2000, amb bandes</i>).....	316
6.40	Sr. i Sra. Ros	317
6.41	Conducte mixt de secció circular (<i>variant final juny/1999, resolts a l'ap. 5.8</i>)	318
6.42	Bombeta.....	319
6.43	Cavitat coberta amb un vidre.....	320
7	BIBLIOGRAFIA FONAMENTAL (COMENTADA)	321

1 INTRODUCCIÓ

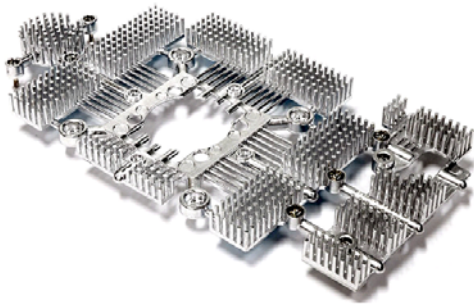
1.1 OBJECTE I ABAST DE L'ASSIGNATURA

1.1.1 Presentació, contingut i normativa de l'assignatura

S'explica aquest apartat a la fitxa docent de l'assignatura que trobareu al campus digital. Cal prestar atenció a la data de l'examen de mètodes numèrics i a la data d'inici de pràctiques de laboratori. Si voleu aprofundir més aquest temari és important disposar d'algun llibre de text. Al campus digital trobareu els resultats numèrics dels exercicis proposats al llibre de text que us recomano, "Fundamentos de transferència de Calor" de Frank P. Incropera. Aquest text, molt complet es especialment interessant pel recull d'exercicis que proposa.

1.1.2 Àmbit d'aplicació industrial

Ens trobem la transferència de calor a pràcticament tots els àmbits industrials.



En el desenvolupament dels nous microprocessadors uns dels temes principals a resoldre és la dissipació de la potència tèrmica generada, que per unitat de volum és enorme. Tant és així que ja es comencen a veure microprocessadors refrigerats amb un circuit d'aigua ja que amb aire resulta molt difícil eliminar tota la potència generada.

En la climatització de les nostres llars, ja sigui per calefacció tradicional a gas o be per bomba de calor, és tracta d'aportar o extreure una quantitat de calor d'un

recinte amb un temps donat.

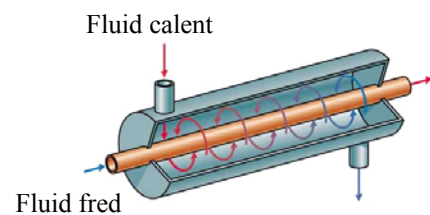
L'escalfament o refredament de la terra no és més que un tema de transferència de calor. També quan parlem de vents tèrmics estem pensant de com els gradients tèrmics originen aquests vents de superfície.

La indústria química necessita repetidament escalfar o refredar diversos fluids pels variats processos que du a terme. Per exemple en la destil·lació del cru per obtenir les diverses fraccions o derivats, com la gasolina, cal escalfar de forma adient el cru fins la seva ebullició tot fent-lo passar per una torre de destil·lació.

A la indústria alimentària, molts processos de fermentació tenen lloc només en un marge de temperatures específic.

També la conservació dels aliments exigeix eliminar tots els guanys de calor per mantenir la temperatura de

consigna. Pràcticament en tot procés de fabricació de qualsevol material i han involucrats processos de transferència tèrmica.



1.1.3 Definició de Calor i Transferència de Calor

Definim la **calor** (Q) com un tipus d'energia que es transfereix degut a un gradient (∇T) o diferència de temperatures (ΔT). En realitat es transfereix energia interna mitjançant complexes interaccions vibracionals a l'escala atòmica i subatòmica de la matèria.

No podem confondre la calor amb l'energia interna d'un cos. La calor es l'energia en transit.

Quan arriba al seu destinatari, augmenta l'energia interna del mateix, i de forma un tant

lleugera es diu que el cos augmenta la seva **energia tèrmica**, que moltes vegades es manifesta amb un augment de la temperatura. (excepte quan hi ha canvi de fase)

La Termodinàmica ens diu que la temperatura es una mesura macroscòpica de l'estat d'agitació a nivell molecular, atòmic i subatòmic de la matèria, o sigui de la seva energia interna. Per tant, a mes agitació, mes temperatura.

La calor es transfereix espontàniament d'un cos calent a un de fred i amb aportació de treball en el sentit invers. El mode de com es transfereix la calor depèn estretament de l'estat d'agregació de la matèria. Podem diferenciar entre un sòlid, un líquid, un gas i el buit. (no considerem el plasma al ser poc abundant a la terra)

En física tèrmica, la **transferència de calor** es el pas espontani de l'energia tèrmica d'un cos calent a un de més fred (d'acord al 2on. principi de la Termodinàmica) que ens porta de forma ineludible a l'equilibri tèrmic. Es pot reduir (aïllaments) però no es pot aturar. Es pot invertir el sentit (del fred al calent) però aleshores cal consumir treball.

Com disciplina, la **transferència de calor**, es la part de l'enginyeria que ens permet determinar en un instant t la calor transferida per unitat de temps (potència tèrmica) a través d'una secció donada d'un sistema i el camp de temperatures $T(x,y,z,t)$ corresponent per aquest instant t .

Veiem amb un exemple les diferències a l'hora de resoldre un problema entre l'enfoc Termodinàmic i el de la Transferència de calor.

Exemple: suposem que traiem d'un refrigerador un bola esfèrica de 1 kg de gel (radi inicial r_0) a $-10\text{ }^\circ\text{C}$ (estat 1) i l'exposem penjada d'un fil en un ambient d'aire en calma a $20\text{ }^\circ\text{C}$ (estat 2, aigua). La Termodinàmica voldria saber la calor total Q_{12} transferida al gel entre els dos estats d'equilibri 1 i 2. Aquest resultat que es molt senzill de determinar ja que coneixem molt be l'estat inicial i final, ens permet avaluar el cost energètic total del procés. En canvi la transferència de calor perseguiria determinar el radi de l'esfera de gel $r(t)$ en funció del temps (suposant descongelació simètrica) la distribució de temperatures $T(r(t))$ en funció del radi i el temps, la potència tèrmica $q(t)$ (W) que cedeix l'aire a la bola a l'instant t , la quantitat d'aigua recollida a l'instant t , l'instant en que es comença a descongelar la superfície de radi r_0 , etc. Es evident que la bola, inicialment no es redueix de diàmetre, ja que simplement augmenta la temperatura superficial de $-10\text{ }^\circ\text{C}$ fins a $0\text{ }^\circ\text{C}$, malgrat que a l'entorn del centre encara estigui molt per sota dels $0\text{ }^\circ\text{C}$. ¿Quan la superfície assoleixi els $0\text{ }^\circ\text{C}$ es començarà a descongelar o dependrà de lo freda que encara estigui la bola pel seu interior? Quan comenci a descongelar-se cauran gotes d'aigua a $0\text{ }^\circ\text{C}$ que després s'aniran escalfant fins a $20\text{ }^\circ\text{C}$. Observeu la complexitat de l'enfocament Termotècnic i els objectius tant ambiciosos que persegueix.

Aquest fet, fa que la transferència de calor sigui fonamental per poder **dissenyar** els equips emprats per transferir (o aïllar) una quantitat determinada de potència tèrmica q (W) i també per **determinar les prestacions** (potència q , temperatures T) dels equips operatius o sigui ja dissenyats o construïts prèviament.

La transferència de calor d'un fluid calent a un altre fred es un problema freqüent del disseny tèrmic. Els dispositius que permeten aquest objectiu s'anomenen **bescanviadors de calor**.

Un exemple el teniu amb els mal anomenats radiadors (treballen mes a convecció que a radiació) de la calefacció domèstica. L'aigua calenta, escalfada a la caldera, circula per dins del radiador i cedeix la calor a un altre fluid fred, l'aire ambient. El disseny tèrmic d'aquest radiador ha de ser tal, que la transferència de calor sigui el mes eficient possible i que la pujada de la temperatura ambient es faci en un temps reduït admissible per els ocupants. (que no duri varies hores per exemple !!) Es tracta de minimitzar el cost de l'equip i el temps de resposta, i aquests paràmetres òbviament varien inversament i aquest es un dels problemes a resoldre.

1.1.4 Mecanismes de Transferència de Calor

Per cada un dels modes d'estat d'agregació de la matèria considerats existeix un mecanisme de transferència de calor característic però no exclusiu, i aquests són la conducció, la convecció i la radiació o una combinació de qualsevol d'ells.

En els sòlids el mecanisme de transferència de calor s'anomena conducció.

Aquesta pot tenir lloc també en un líquid en repòs així com en un gas en estat de ingravitació.

En les interfícies entre un sòlid i un fluid el mecanisme s'anomena convecció.

I entre dos sòlids al buit a temperatures superiors a 0 K el mecanisme s'anomena radiació electromagnètica. Aquesta rep el nom de radiació tèrmica quan es restringeix l'interval de longituds d'ona considerada entre 0,1-1000 μm (micres).

En tots els casos es pot establir que la potència transferida és el quocient entre una causa motriu i una resistència tèrmica. La causa motriu serà una diferència de temperatures, i la resistència tèrmica dependrà del mecanisme de transmissió i variarà amb la forma i les característiques del material, fluid o el buit.

1.1.5 Identificació qualitativa d'aquests mecanismes

Intenti el lector identificar els diferents mecanismes de transferència de calor en estat estacionari en els següents processos o dispositius:

- 1) L'antiga estufa elèctrica formada per una o varies barres que contenen una resistència elèctrica recoberta de vidre i envoltada d'una pantalla reflectora.
- 2) Got d'aigua calenta que reposa damunt d'una taula.
- 3) Olla a pressió domèstica. 4) Escalfament solar de la terra.
- 5) Un radiador de la calefacció a gas d'una vivenda convencional.
- 6) Gelades en una nit estelada amb temperatura ambient per sobre dels 0 °C
- 7) Una bombeta incandescent de 60 W situada en un habitació amb aire en calma a 20 °C.
- 8) Una espelma encesa damunt d'una taula en una habitació amb aire en calma a 20 °C.
- 9) El nostre cos flotant a la superfície del mar de panxa enlaire (o sigui fent el mort) un dia assolat d'estiu. $T_{\text{aigua}}=20\text{ °C}$; $T_{\text{aire}}=27\text{ °C}$; Vent a 2 m/s ; Irradiació solar = 800 W/m².



Resposta: cas 9). És evident que la part inferior del nostre cos cedirà potència tèrmica per convecció al mar sent la nostra temperatura corporal (36 °C) superior a la de l'aigua (20 °C) i això se'ns traduirà amb una sensació agradable de frescor a l'esquena.

A la superfície mullada superior, el vent afavorirà l'evaporació. El procés d'evaporació, requereix una calor latent que el nostre cos cedirà puntualment. Aquest mecanisme podria fer baixar la nostra temperatura superficial. L'aire a 27 °C bescanviarà potència tèrmica amb la superfície superior del nostre cos, depenen de la temperatura del mateix.

La radiació del sol (uns 800 W/m²), incideix directament sobre tota la superfície exposada, afavorint l'evaporació i pujant la temperatura de les parts seques (que en general no és fàcil disposar-ne). El nostre cos rep de forma directa una potència tèrmica de radiació.

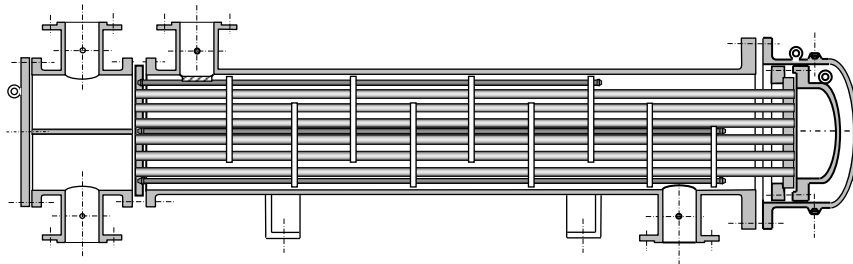
Si ens estem molt temps a l'aigua i acabem tenint fred, és que el balanç de potència neta és negatiu, o sigui que perdem més potència que la que guanyem del sol.

1.1.6 Exemples rellevants de transferència de calor

- 1) Radiació solar: balanç d'energia tèrmica del nostre planeta.
- 2) Processos de combustió: generadors de vapor (calderes)
- 3) Refredament de tot tipus d'equips electrònics.
- 4) Aïllament de molts tipus de dispositius (edificis, etc.)



- 5) Processos de climatització i refrigeració industrial.
 6) Forns 7) Reactors nuclears 8) Meteorologia: vents tèrmics.
 9) Bescanvi de calor entre dos fluids: bescanviador d'envolvent i tubs (següent figura)



1.2 TRANSFERÈNCIA DE CALOR PER CONDUCCIÓ

1.2.1 Descripció fenomenològica i model per la conducció

La conducció de calor a l'interior d'un medi es considera com la transferència d'energia de les molècules o àtoms més energètiques a les molècules o àtoms adjacents menys energètiques degut a la interacció de les mateixes per simple contacte directa.

Aquesta transferència d'energia, té lloc majoritàriament per xoc elàstic en el cas dels fluids (excepte els metalls líquids), per difusió lliure d'electrons en el cas dels metalls i per les ones reticulars (fonons) en el cas dels materials aïllants. Excepte en el cas de la difusió lliure d'electrons, veiem com a nivell atòmic, la calor no és més que una transferència d'energia mecànica. (bescanvi de quantitat de moviment i energia potencial)

És el mode de transferència de la calor característic de l'estat sòlid. Té més rellevància quan el grau d'agregació és més gran i per tant el mecanisme d'interacció molecular fa que la conducció sigui millor en *sòlids* que en *líquids*, i en ambdós millor que en *gasos*.

En els sòlids actualment s'atribueix la transferència d'energia per conducció a ones reticulars induïdes per el moviment atòmic de rotació i/o vibració de les molècules. En un no conductor, només estan presents aquestes ones reticulars induïdes o fonons.

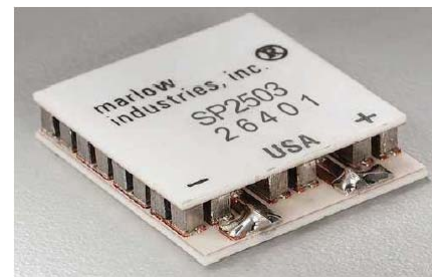
En un conductor metàl·lic, són els electrons lliures els responsables del transport del 99 % de la calor o energia tèrmica transferida. El 1% restant es transfereix per les ones reticulars de la xarxa cristal·lina o flux de fonons. L'efecte Peltier-Seebeck té lloc gràcies a aquesta facilitat que tenen els conductors metàl·lics sòlids amb transferir calor.

La Termoelectricitat és la disciplina que estudia la forma d'aconseguir fluxos de potència tèrmica emprant fluxos de corrents elèctriques. Això ho podem aconseguir emprant el Peltier de la figura.

Els electrons lliures fan que la conducció sigui als metalls purs molt més gran que als no metalls, i s'estableix una relació pràcticament lineal entre la conductivitat tèrmica i el producte de la conductivitat elèctrica per la temperatura absoluta (Llei de Wiedemann-Franz).

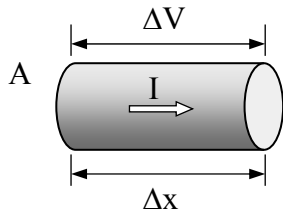
En el cas dels materials aïllants la transferència de calor es du a terme majoritàriament per les citades ones reticulars induïdes o fonons.

Els fluids (líquids i gasos) excepte els metalls líquids no són en general bons conductors de la calor. La distància mitja entre les molècules o àtoms és molt més gran que en cas dels sòlids i això fa que el xoc entre elles sigui molt menys probable, o sigui, menor conducció.



1.2.2 Llei de Fourier. Sistemes unidimensionals

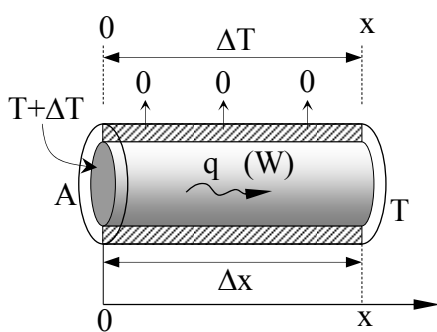
Aquest llei, basada en observacions experimentals te un paral·lelisme molt estret amb la llei d’Ohm dels conductors elèctrics, $I = \frac{\Delta V}{R_{elec}}$ sent $R_{elec} = \rho_{elec} \frac{\Delta x}{A} = \frac{1}{\sigma_{elec}} \frac{\Delta x}{A}$ l’expressió de la



resistència elèctrica d’un conductor cilíndric. ρ_{elec} i σ_{elec} son la resistivitat i la conductància elèctrica respectivament, una inversa de l’altre. L’expressió de la llei d’Ohm $I = \frac{\Delta V}{R_{elec}} = \sigma_{elec} A \frac{\Delta V}{\Delta x}$ ens diu

que la intensitat elèctrica $I = \frac{dQ}{dt}$ (Q carga en Coulombs) es

proporcional a la secció de pas, a la diferència de potencial i inversament proporcional a la longitud del conductor.



Aplicuem ara anàlogament una diferencia de temperatures ΔT (potencial tèrmic) a un cilindre d’un material homogeni i isòtrop de secció A, longitud Δx , perfectament aïllat per la seva superfície lateral. Si la base esquerra esta a una temperatura $T+\Delta T$ superior a la de la base dreta a T, sabem pel segon principi de la termodinàmica que en un Δt la calor δQ es transferirà en el sentit de les temperatures decreixents o sigui en el sentit positiu de l’eix x. Direm que es transfereix una potència tèrmica $q = \frac{\delta Q}{\Delta t}$ (W) (Q representa la calor en J) .

Si fixem Δx i ΔT , i doblem la secció A, es transferirà el doble de potència tèrmica, exactament igual que si tinguéssim dos cilindres. Veiem que la potència q es directament proporcional a la secció de pass A. A l’hivern, quan una finestra de vidre es mes gran, perdem mes potència tèrmica i passem mes fred.

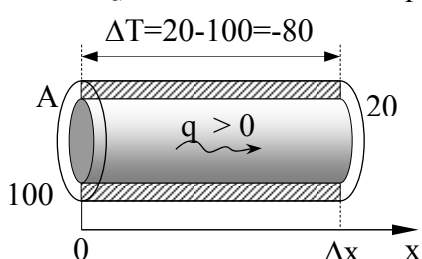
Ara fixem la secció A i el ΔT , i reduïm a la meitat la longitud Δx . La potència tèrmica augmenta el doble, o sigui es inversament proporcional a la longitud. Això potser no es tant evident però ens ajuda el pensar que succeeix el mateix que amb la corrent elèctrica.

De aquesta forma arribem a que la potència tèrmica es proporcional a la secció A, a la diferencia de temperatures ΔT i inversament proporcional a la longitud Δx .

Si ho fixem tot A, ΔT i Δx , i només canviem el material, la potència augmenta o disminueix en funció de la capacitat de transferir la calor del material respectiu.

L’equació de Fourier que descriu aquestes observacions experimentals és, $q = \frac{\delta Q}{\Delta t} \approx -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}$

A on λ W/(m·K) es la conductivitat tèrmica del material i el signe menys es posa perquè el signe de q (W) es sempre oposat al signe de ΔT Veiem que la conductivitat tèrmica fa el mateix paper que la conductància elèctrica a la llei d’Ohm. Es defineix λ com la quantitat de calor δQ , transferida en un temps Δt , a través de una longitud Δx , en una direcció normal a una superfície de àrea A, deguda a una diferencia de temperatura ΔT . Les unitats de λ són W/(m·K) En general depèn de la temperatura, de la densitat i de la fase del medi. (aigua-gel)



Veiem, amb l’exemple de la figura, la necessitat del signe menys: $100 > 20 \Rightarrow \Delta T = 20 - 100 = -80 < 0$ i la potencia q va cap a les temperatures decreixents o sigui $q > 0$ d’acord al sentit positiu de l’eix x. .

En forma diferencial i per un flux de potència unidimensional $T=T(x)$ la llei de Fourier queda,

$$q = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

i ja discernim que aquesta magnitud té un marcat caràcter vectorial.

1.2.3 Distribució unidimensional de temperatures

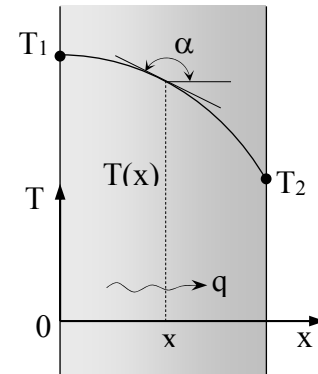
Per a una distribució unidimensional de temperatures $T=T(x,t)$ amb la secció A constant la primera equació de Fourier es redueix a,

$$\frac{q}{A} \Big|_x = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (\text{en W/m}^2)$$

Suposem que la paret plana de la figura té en regim estacionari la distribució de temperatures que es representa amb la línia contínua. Observem que a l'abscisa x el gradient és,

$$\frac{dT}{dx} = \text{tg } \alpha < 0 \quad \text{sent } \alpha > 90^\circ \text{ per tant,}$$

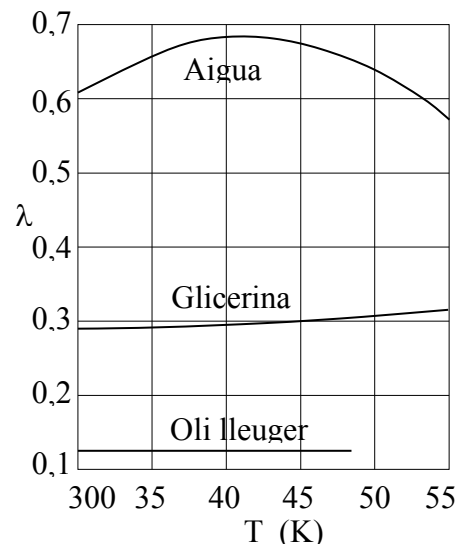
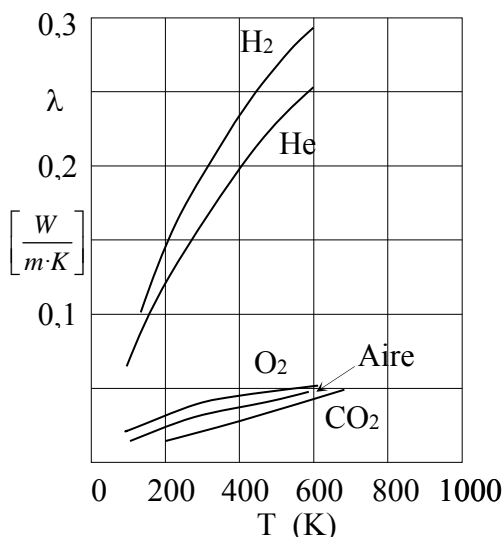
$$\frac{q}{A} \Big|_x = -\lambda \frac{dT}{dx} = + \quad \text{el sentit de l'eix } x.$$



Evident, en el sentit de les temperatures decreixents.

Si observem la distribució unidimensional de temperatures de la figura veiem que la pendent és funció de x , això significa doncs que el flux de potència tèrmica també serà funció de x , i tindrà major valor absolut quan major valor absolut tingui la pendent.

1.2.4 Conductivitat tèrmica. Ordres de magnitud. Interpretació qualitativa



Anomenem conductivitat tèrmica a la constant de proporcionalitat entre el flux de potència tèrmica i el gradient de temperatures que apareix a la primera equació de Fourier

$$\frac{q}{A} \Big|_x = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Aquesta propietat és la mesura de la velocitat de difusió de la calor a la matèria

i depèn molt directament del seu estat d'agregació, sòlid, líquid i gas.

Les unitats d'aquesta propietat de transport o difusió de la calor són $W/(m \cdot K)$

Al gràfic anterior veiem que pels gasos la conductivitat tèrmica està entre $0,01 \div 0,3$

La conductivitat tèrmica de l'aire és $\lambda < 0,1$ i és tracta per tant d'un aïllant molt bo des del punt de vista de la conducció de la calor. Aleshores, perquè a les parets dels edificis s'instal·len capes d'aïllants sintètics si fos possible evitar aquest cost? Al parlar de la convecció aclarirem aquest concepte. Observem que l'aire es un excel·lent aïllant en microgravetat.

En el cas de líquids no metàl·lics la conductivitat tèrmica varia entre $0 \div 0,7$ W/(m·K)

Parlem d'aïllants industrials quan la conductivitat tèrmica a 300 K és inferior a 0,2 W/(m·K).

Conductivitat tèrmica d'alguns metalls i del vidre a temperatura ambient en W/(m·K),

$$\lambda_{Cu} = 390 \quad , \quad \lambda_{Al} = 160 \quad , \quad \lambda_{Fe} = 70 \quad , \quad \lambda_{AISI316} = 13,4 \quad , \quad \lambda_{vidre} = 0,78$$

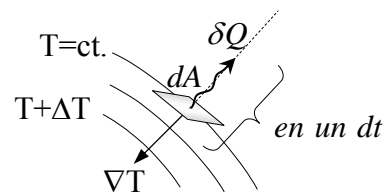
Observem una gran diversitat d'ordres de magnitud. La λ_{Cu} és 500 vegades més gran que la λ_{vidre} i 3900 vegades més gran que la λ_{Aire} . Si tenim ben presents aquests valors, això ens pot ajudar a conèixer quines resistències tèrmiques controlen un determinat procés de transferència de calor.

1.2.5 Formulació vectorial de la llei de Fourier.

En un punt donat (x,y,z,t) d'un camp escalar $T = T(x, y, z, t)$

de temperatures el gradient $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$, és un

vector \perp al pla tangent a la superfície isoterma $T(x,y,z,t)=ct$. i ens determina la direcció a on té lloc la màxima variació de temperatures i apunta en el sentit de les temperatures creixents.



Suposem que a través del dA tangent a la superfície isoterma en el punt (x,y,z,t) es transfereix un calor δQ en un dt i en la direcció \perp al dA , o sigui es transfereix un potència tèrmica

$\frac{\delta Q}{dt} = \delta q$ en W. Direm que a través del dA i tenim un flux de potència tèrmica igual a $\frac{\delta q}{dA}$ en W/m² associat al punt (x,y,z,t) .

La primera llei de Fourier estableix que aquest flux de potència tèrmica en el punt (x,y,z,t)

$\left. \frac{\delta \vec{q}}{dA} \right|_{(x,y,z,t)}$ (W/m²) és proporcional al gradient de temperatures ∇T en aquest punt i amb signe

oposat, sent $\bar{\lambda}$ el factor de proporcionalitat que anomenem tensor de *conductivitats tèrmiques* W/(m·K), i la seva magnitud ens dona la facilitat d'un material per conduir la calor. El segon principi de la termodinàmica estableix el sentit d'aquest flux, de les altes a les baixes temperatures.

Formulació vectorial de la primera llei de Fourier,

$\left. \frac{\delta \vec{q}}{dA} \right|_{(x,y,z,t)} = -\bar{\lambda} \nabla T = - \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix} \nabla T$ sent $\bar{\lambda}$ una matriu simètrica, amb els termes de

la diagonal $\lambda_{ii} > 0 \quad \forall i$. Els termes de $\bar{\lambda}$ han de verificar també que $\lambda_{ii} \cdot \lambda_{jj} - \lambda_{ij}^2 > 0 \quad \forall i \neq j$

Al ser $\bar{\lambda}$ una matriu simètrica, podem diagonalitzar la matriu i trobar una base de vectors propis (direccions principals) en la que aquesta matriu es converteixi en una matriu diagonal. Si el règim fos estacionari, aleshores aquest vector ja no seria funció del temps.

Materials anisòtrops, materials naturals o artificials en que la conductivitat tèrmica depèn de la direcció considerada, com per exemple, cristalls, fusta, metalls sotmesos en fred a fortes pressions, roques sedimentaries, xapes laminades, etc.

A la ref. [23] (cap. 15) de la bibliografia trobem un estudi detallat de la conducció en materials anisòtrops amb un recull molt complet de informació bibliogràfica.

L'estructura del tensor $\bar{\lambda}$ en el cas dels cristalls depèn del sistema de cristallització (de fet depèn dels plans i eixos de simetria). Per exemple,

$$\text{Monoclínic} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_{xy} & 0 \\ \lambda_{xy} & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} ; \quad \text{Ortoròmbic} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} ; \quad \text{Cúbic} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

En el cas del sistema ortoròmbic la 1^a eq. de Fourier pren la forma,

$$\left. \frac{\delta \bar{q}}{dA} \right|_{(x,y,z,t)} = -\bar{\lambda} \nabla T = - \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \nabla T = \left(-\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}, -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}, -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right)^t$$

La conductivitat tèrmica de la fusta en la direcció radial, es diferent que en la direcció angular o axial ($\lambda_r \neq \lambda_\theta \neq \lambda_z$). En el cas dels cristalls de quars (sistema trigonal o romboèdric) també

$\lambda_x \neq \lambda_y \neq \lambda_z$ i el tensor $\bar{\lambda}$ és similar al cas del sistema ortoròmbic. En aquest casos $\left. \frac{\delta \bar{q}}{dA} \right|$ no és paral·lel a ∇T de forma que la direcció del vector flux de potència tèrmica no coincideix amb la direcció del vector gradient. En aquest cas el vector flux de potència $\left. \frac{\delta \bar{q}}{dA} \right|$ té una projecció no nul·la sobre el pla tangent a la superfície isoterma.

Sòlid homogeni i isòtrop $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda$ sent λ (W/m·K) un escalar. Resulta,

$$\left. \frac{\delta \bar{q}}{dA} \right|_{(x,y,z,t)} = -\lambda \nabla T = \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left(\left. \frac{\delta q}{dA} \right|_x, \left. \frac{\delta q}{dA} \right|_y, \left. \frac{\delta q}{dA} \right|_z \right) \text{ paral·lel al } \nabla T$$

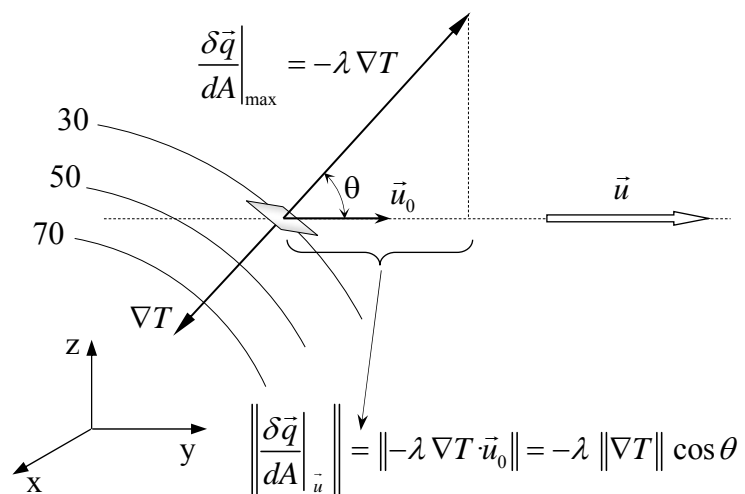
Si la secció A normal al flux es manté constant (geometria de paret plana) aleshores podem escriure la forma unidimensional del flux de potència tèrmica $\left. \frac{q}{A} \right|_{(x,y,z,t)}$ en lloc de $\left. \frac{\delta \bar{q}}{dA} \right|_{(x,y,z,t)}$

Determinem el vector flux de potència tèrmica a la posició (x,y,z,t) en una direcció \vec{u} arbitrària.

Sent $\vec{u}_0 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ el vector unitari,

projectem el flux de potència màxima $-\lambda \nabla T$ que correspon a la direcció del vector gradient, sobre aquest vector unitari \vec{u}_0 obtenint així un escalar, que multipliquem per el vector unitari, per obtenir el vector flux de potència tèrmica en la direcció del vector \vec{u} donat. Per

$$\text{tant, } \left. \frac{\delta \bar{q}}{dA} \right|_{\vec{u}} = (-\lambda \nabla T \cdot \vec{u}_0) \vec{u}_0$$



Exercici 1: camp de temperatures tridimensional

Suposem que tenim la següent distribució de temperatures $T(x,y,z)=x^2+y^3+2xyz+100$ d'un sòlid homogeni i isòtrop amb una conductivitat tèrmica independent de la temperatura igual a $\lambda=20$ W/m·K. Punt A(2,1,1), direcció $\vec{u}=(1,1,3)$ Trobar en el punt A(2,1,1):

- a) El vector gradient. b) El vector i el mòdul del flux màxim de potència tèrmica.
c) En el punt A i en la direcció \vec{u} trobar el vector i mòdul del flux de potència tèrmica.

$$a) \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} = (2x+2yz, 3y^2+2xz, 2xy) \quad \nabla T|_{(2,1,1)} = (6, 7, 4)$$

$$b) \text{ En el punt A(2,1,1) el flux màxim és } \left. \frac{\delta \vec{q}}{dA} \right|_{\max} = -\lambda \nabla T = -20 (6, 7, 4) = (-120, -140, -80)$$

$$\left\| \left. \frac{\delta \vec{q}}{dA} \right|_{\max} \right\| = \|(-120, -140, -80)\| = \sqrt{120^2 + 140^2 + 80^2} = 201 \frac{W}{m^2} \quad \text{en la direcció del } \nabla T$$

i en el sentit oposat al vector gradient. $(-\nabla T)$

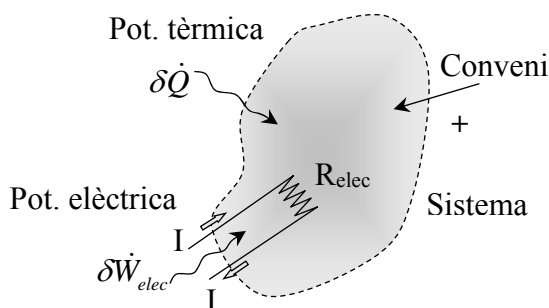
$$c) \text{ Si la direcció és } \vec{u}=(1,1,3) \text{ trobem } \vec{u}_0 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(1,1,3)}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} \right)$$

$$\nabla T \cdot \vec{u}_0 = (6, 7, 4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} \right) = \frac{6+7+12}{\sqrt{11}} = \frac{25}{\sqrt{11}}, \quad \left. \frac{\delta \vec{q}}{dA} \right|_{\text{direcc. } \vec{u}} = (-\lambda \nabla T \cdot \vec{u}_0) \vec{u}_0$$

$$(-\lambda \underbrace{\nabla T \cdot \vec{u}_0}_{\frac{25}{\sqrt{11}}}) = -20 \frac{25}{\sqrt{11}} = -\frac{500}{\sqrt{11}} \frac{W}{m^2} \quad \text{i per tant} \quad \left. \frac{\delta \vec{q}}{dA} \right|_{\text{direcc. } \vec{u}} = -\frac{500}{\sqrt{11}} \vec{u}_0$$

$$\text{Evidentment} \left\| \left. \frac{\delta \vec{q}}{dA} \right|_{\text{direcc. } \vec{u}} \right\| = \frac{500}{\sqrt{11}} = 150,76 < \left\| \left. \frac{\delta \vec{q}}{dA} \right|_{\max} \right\| = \|-\lambda \nabla T\| = 201$$

$$\text{L'angle entre la direcció del vector gradient i el vector } \vec{u} \text{ és: } \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\nabla T \cdot \vec{u}}{\|\nabla T\| \|\vec{u}\|} \right) = 41,4^\circ$$

1.3 GENERACIÓ VOLUMÈTRICA DE POTÈNCIA TÈRMICA

Considerem el sistema de la figura al que se li aporta calor i treball elèctric. En processos tèrmics, en general considerem només tres tipus d'energia, la interna, la cinètica i la potencial,

$$E = U + \frac{mv^2}{2} + mgy$$

El primer principi aplicat per unitat de temps queda, $\dot{Q} + \dot{W}_{elec} = \Delta \dot{E}$

Veiem que la potència elèctrica i tèrmica que travessa la frontera serveix per augmentar la potència emmagatzemada total \dot{E} (tot per unitat de temps) del sistema. En Termodinàmica ja en teníem prou en saber com augmenta la potència emmagatzemada. No ens preocupava en quin lloc del sistema s'estava introduint el treball elèctric ni la calor.

En transferència de calor ens interessa conèixer com es reparteix per el sistema la potència elèctrica (que es dissipa per efecte Joule) ja que perseguim trobar la distribució de temperatures que permet al sistema evacuar aquesta potència cap a l'entorn o frontera.

Al conductor metàl·lic cilíndric de la figura de secció A en regim estacionari li apliquem al tram de longitud L una diferència de potencial ΔV . Si la conductància elèctrica és σ_{elec} determinar la potència dissipada per efecte Joule per unitat de volum o el que anomenem generació volumètrica de potència tèrmica en W/m^3 i el balanç de potències del sistema.

$$R_{elec} = \frac{1}{\sigma_{elec}} \frac{L}{A} \text{ resistència elèctrica } (\Omega), \quad I = \frac{\Delta V}{R_{elec}} \text{ llei d'Ohm}$$

$$\text{Potència elèctrica, } P_{elec} = I \Delta V = \frac{\Delta V^2}{R_{elec}} = \frac{\Delta V^2}{\frac{1}{\sigma_{elec}} \frac{L}{A}} = \frac{\sigma_{elec} A \Delta V^2}{L}$$

Generació volumètrica de potència, \dot{g} (W/m^3)

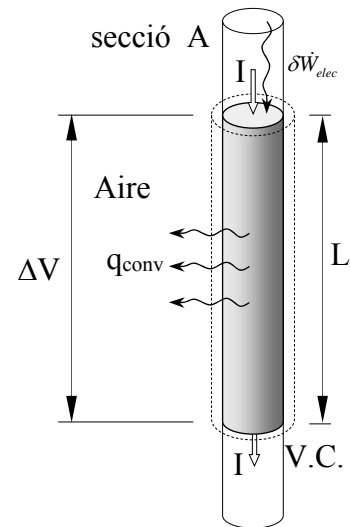
$$\dot{g} = \frac{P_{elec}}{Volum} = \frac{P_{elec}}{A \times L} = \frac{\sigma_{elec} \Delta V^2}{L^2} > 0 \text{ (W/m}^3\text{)}$$

$$\text{En regim estacionari } \Delta \dot{E} = \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = ct.$$

$$\text{Potència elèctrica } \dot{W}_{elec} = P_{elec} = \dot{g} \underbrace{A \times L}_{volum}$$

Potència tèrmica que el conductor cedeix a l'aire per convecció,

$\dot{Q} = q_{conv}$ (suposem L prou gran per admetre simetria cilíndrica \Rightarrow negligim les pèrdues dels extrems) Aplicant el primer principi veiem que $\dot{Q} + \dot{W}_{elec} = q_{conv} + \dot{g} AL = 0 \Rightarrow q_{conv} = -\dot{g} AL < 0$ El signe es evident, ja que la potència tèrmica ha de sortir del V.C. si per hipòtesis el conductor es troba en regim estacionari.



1.4 SISTEMES UNIDIMENSIONALS EN ESTAT ESTACIONARI

1.4.1 Paret Plana

Dades:

$\lambda = ct.$, T_1 , T_2 i L
 \dot{g} (W/m^3) = 0 (sense generació),
 Paret de grans dimensions,
 Règim estacionari,

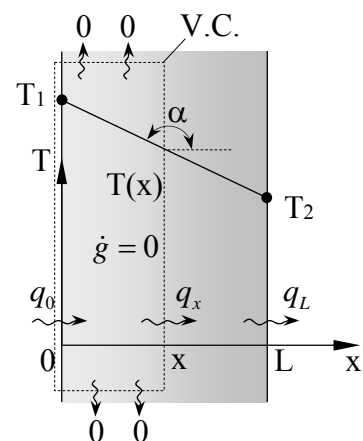
Incògnites:

$\frac{q}{A}|_x$ (W/m^2) i $T(x)$

Si les parets són de grans dimensions, les superfícies isotermes són plans paral·lels a les superfícies exteriors de la paret o sigui que són negligibles els efectes dels extrems. En la direcció perpendicular a l'eix x les temperatures són iguals (sup. isoterma) i per tant no pot haver transferència de calor (0). Així doncs $T = T(x)$ i el sistema és unidimensional.

Prenem ara el volum de control V.C. d'amplada x i de secció frontal A, tant gran com es vulgui.

Al estar en regim estacionari, no canviaran amb el temps les temperatures de tota la massa continguda al V.C. i com que la generació és $\dot{g} = 0$, significa que la potència tèrmica q_0 que entri al V.C. per la secció A en $x=0$ ha de ser la mateixa que surti q_x per l'abscisa x i per la mateixa secció A.



Veiem que $\left. \frac{q}{A} \right|_0 = \left. \frac{q}{A} \right|_x = \left. \frac{q}{A} \right|_L = ct. \quad \forall x \quad 0 < x < L$

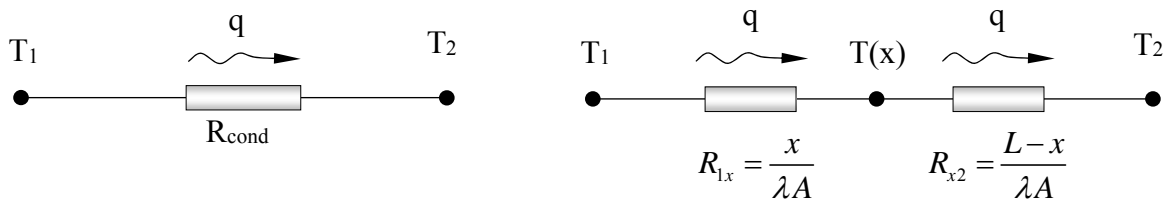
Per aquest sistema l'equació primera de Fourier resulta, $\frac{q}{A} = -\lambda \frac{dT}{dx}$ separant variables,

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{A} = -\lambda \frac{dT}{dx} &\Rightarrow \frac{q}{A} \int_0^x dx = -\lambda \int_{T_1}^{T(x)} dT \Rightarrow \frac{q}{A} x = -\lambda (T(x) - T_1) \\ \frac{q}{A} \int_0^L dx = -\lambda \int_{T_1}^{T_2} dT &\Rightarrow \frac{q}{A} L = -\lambda (T_2 - T_1) \end{aligned} \right\} \text{dividim m. a m.}$$

Obtenim $T(x) = T_1 - \left(\frac{T_1 - T_2}{L} \right) x$ distribució lineal de temperatures i de la segona equació

aïllem la potència tèrmica transferida $q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L}{\lambda A}} = \frac{\Delta T}{R_{cond}}$ (W) sent $R_{cond} = \frac{L}{\lambda A}$ K/W

Si fem servir el símil elèctric podem escriure que la potència tèrmica és igual a una diferència de potencials tèrmics dividit per una resistència tèrmica tal com és veu a la figura.



$q = \frac{T_1 - T_2}{R_{cond}} = \frac{\Delta T}{R_{cond}}$ Si apliquem $q = \frac{T_1 - T(x)}{\frac{x}{\lambda A}} = \frac{T(x) - T_2}{\frac{L-x}{\lambda A}} \Rightarrow T(x) = \dots$ també trobem T(x)

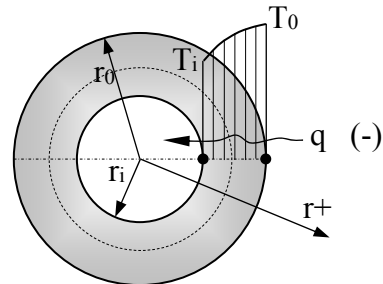
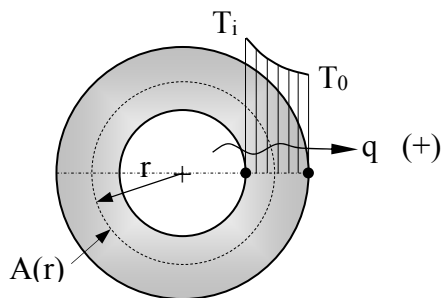
1.4.2 Paret cilíndrica

Dades:

Incògnites:

T_i, T_0, r_i, r_0, L (molt gran), $\lambda = ct.$
 \dot{g} (W/m³) = 0 per $r_i < r < r_0$
 Règim estacionari

$T(r)$ per $\forall r$ tal que $r_i < r < r_0$
 $q, \left. \frac{q}{A} \right|_r$



Si L és molt gran negligim l'efecte dels extrems i aleshores les superfícies isotermes són superfícies cilíndriques concèntriques a la paret exterior del cilindre.

Per tant $T=T(r)$ i el sistema és unidimensional. Sent $\dot{g} = 0$, si realitzem de forma similar al cas anterior un balanç de potència tèrmica al V.C. determinat per tota la paret del cilindre veiem que també es conserva la potència tèrmica $q|_{r_i} = q|_{r_0} = q = ct. \quad \forall r \quad r_i < r < r_0$

En canvi la secció $A(r)=2\pi rL$ augmenta amb r i per tant el flux de potència q/A es redueix conforme augmenta r , $\forall r$

En aquest cas l'equació primera de Fourier resulta, $\frac{q}{A} = -\lambda \frac{dT}{dr}$ sent $A(r) = 2\pi rL$ que també podem integrar fent separació de variables,

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{2\pi rL} = -\lambda \frac{dT}{dr} &\Rightarrow \frac{q}{2\pi L} \int_{r_i}^r \frac{dr}{r} = -\lambda \int_{T_i}^{T(r)} dT \Rightarrow \frac{q}{2\pi L} \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) = -\lambda (T(r) - T_i) \\ \frac{q}{2\pi L} \int_{r_i}^{r_0} \frac{dr}{r} = -\lambda \int_{T_i}^{T_0} dT &\Rightarrow \frac{q}{2\pi L} \ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right) = -\lambda (T_0 - T_i) \end{aligned} \right\} \text{dividim}$$

membre a membre eliminem la potència q i trobem directament $T(r)$.

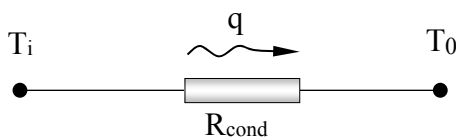
De la segona equació trobo la potència tèrmica transferida entre la superfície interior cilíndrica a T_i i la superfície cilíndrica exterior a T_0

I obtenim $q = \frac{T_i - T_0}{\frac{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}{2\pi\lambda L}} = \frac{\Delta T}{R_{\text{paret cilindre}}}$ la potència tèrmica transferida en W

i una distribució logarítmica de temperatures,

$$T(r) = T_i + (T_0 - T_i) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}$$

Si fem servir el símil elèctric també podem escriure que la potència tèrmica és igual a una diferència de potencials tèrmics dividit per una resistència tal com és veu a la figura.



$$q = \frac{T_i - T_0}{R_{\text{cond}}} = \frac{\Delta T}{R_{\text{cond}}}$$

Sent la potència tèrmica q constant $\forall r$, i les diferents superfícies de transferència de calor iguals a,

$$A(r_i) = 2\pi r_i L \quad ; \quad A(r) = 2\pi r L \quad ; \quad A(r_0) = 2\pi r_0 L$$

veiem que els diferents fluxos de potència tèrmica q/A seran, $\frac{q}{2\pi r_i L} > \frac{q}{2\pi r L} > \frac{q}{2\pi r_0 L}$

en r_i , r i r_0 respectivament.

Si derivem el perfil $T(r)$ obtenim $\frac{dT}{dr} = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{d^2T}{dr^2} = -\frac{a}{r^2}$ sent $a = \frac{T_0 - T_i}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}$

$T_0 > T_i \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \frac{dT}{dr} > 0$, $\frac{d^2T}{dr^2} < 0$ perfil convex (veure fig. anterior).

$T_0 < T_i \Rightarrow a < 0 \Rightarrow \frac{dT}{dr} < 0$, $\frac{d^2T}{dr^2} > 0$ perfil còncau.

1.4.3 Paret esfèrica

Dades:

$$T_i, T_0, r_i, r_0, \lambda = \text{ct.}$$

$$\dot{g} \text{ (W/m}^3\text{)} = 0 \text{ per } r_i < r < r_0$$

Règim estacionari

Incògnites:

$$T(r) \text{ per } \forall r \text{ tal que } r_i < r < r_0$$

$$q, \left. \frac{q}{A} \right|_r$$

El cas d'una paret esfèrica es resol igual que el cas de la paret cilíndrica. Només cal tenir en compte que la superfície de transferència tèrmica és $A(r) = 4\pi r^2$ per una superfície intermèdia de radi r .

Les altres superfícies són, $A_i = 4\pi r_i^2 < A_0 = 4\pi r_0^2$ i per tant el flux tampoc es manté.

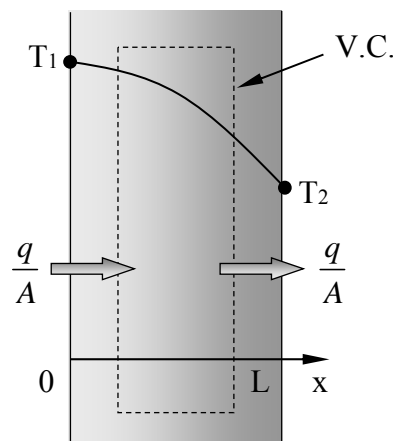
Sent la potència tèrmica

$$q = \frac{T_i - T_0}{\frac{r_0 - r_i}{4\pi\lambda r_0 r_i}} = \frac{\Delta T}{R_{\text{paret esfera}}}$$

$$T(r) = T_i - (T_i - T_0) \frac{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r}\right)}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

la distribució de temperatures.

1.4.4 Conductivitat tèrmica funció lineal de la temperatura



Dades:

$$T_1, T_2, L, \dot{g} = 0, \text{ Règim estacionari}$$

Paret de grans dimensions

$$\lambda(T) = \lambda_0 [1 + \beta(T - T_0)]$$

β es + si $\lambda \uparrow$ en augmentar la $T \uparrow$
 β es - si $\lambda \downarrow$ en augmentar la $T \uparrow$

Trobar:

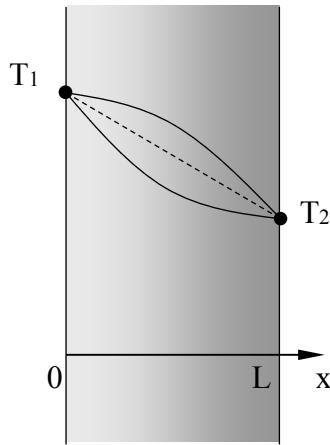
- a) Concavitat i convexitat en funció del signe de β
- b) $q_x, T(x)$?

$$\{ \dot{g} = 0, \text{ règim estacionari}, A = \text{ct.} \} \Rightarrow \frac{q}{A} = \text{ct.}$$

$$\left. \frac{q}{A} \right|_x = -\lambda(T) \frac{dT}{dx} \Rightarrow T'(x) = -\frac{\left. \frac{q}{A} \right|_x}{\lambda(T)} ; T''(x) = \frac{\left. \frac{q}{A} \right|_x}{\lambda(T)^2} \frac{d\lambda}{dT} T'(x) = -\frac{\left(\left. \frac{q}{A} \right|_x\right)^2}{\lambda(T)^3} \lambda_0 \beta$$

Excepte β tots els termes de la T'' son positius

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \beta > 0 \Rightarrow T''(x) < 0 \Rightarrow \text{Perfil convex} \\ \forall \beta < 0 \Rightarrow T''(x) > 0 \Rightarrow \text{Perfil concav} \end{array} \right\}$$



$$\frac{q}{A} = -\lambda(T) \frac{dT}{dx} = -\lambda_0 [1 + \beta(T - T_0)] \frac{dT}{dx}$$

$$\frac{q}{A} \int_0^L dx = -\lambda_0 \int_{T_1}^{T_2} [1 + \beta(T - T_0)] dT$$

$$\frac{q}{A} L = -\lambda_0 \left[(1 - \beta T_0) T + \beta \frac{T^2}{2} \right]_{T_1}^{T_2}$$

$$\frac{q}{A} L = -\lambda_0 \left[(1 - \beta T_0) T_2 + \beta \frac{T_2^2}{2} - (1 - \beta T_0) T_1 - \beta \frac{T_1^2}{2} \right]$$

$$\frac{q}{A} L = \lambda_0 \left[(1 - \beta T_0) (T_1 - T_2) + \frac{\beta}{2} (T_1^2 - T_2^2) \right]$$

$$\frac{q}{A} L = \lambda_0 \left[(1 - \beta T_0) (T_1 - T_2) + \frac{\beta}{2} (T_1 + T_2)(T_1 - T_2) \right] \quad \frac{q}{A} L = \lambda_0 \left[(1 - \beta T_0) + \beta \frac{(T_1 + T_2)}{2} \right] (T_1 - T_2)$$

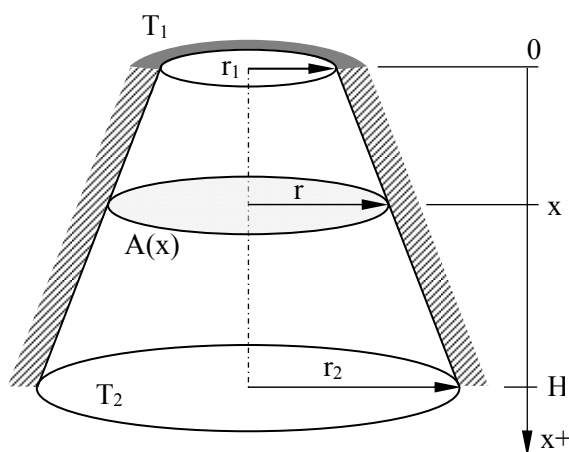
$$\frac{q}{A} L = \lambda_0 \left[1 + \beta \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0 \right) \right] (T_1 - T_2) \quad \frac{q}{A} = \frac{\bar{\lambda}}{L} (T_1 - T_2) \quad \Rightarrow \quad q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L}{\bar{\lambda} A}}$$

Distribució de temperatures: $\frac{q}{A} \int_0^x dx = -\lambda_0 \int_{T_1}^{T(x)} [1 + \beta(T - T_0)] dT$

$$\frac{q}{A} x = -\lambda_0 \left[(1 - \beta T_0) T + \beta \frac{T^2}{2} \right]_{T_1}^{T(x)} \quad \text{Coneixem } q/A, \text{ i per tant } \forall x < L \text{ trobem } T(x):$$

$$\frac{q}{A} x = -\lambda_0 \left[(1 - \beta T_0) T(x) + \beta \frac{T(x)^2}{2} - (1 - \beta T_0) T_1 - \beta \frac{T_1^2}{2} \right]$$

Exercici 2: Tronco-con aïllat lateralment (exemple de secció variable)



Dades:

$T_1, T_2, r_1, r_2, H, \lambda = ct.$

$\dot{g} \text{ (W/m}^3\text{)} = 0$

Hipòtesis $T = T(x)$

Règim estacionari

Superfície lateral aïllada

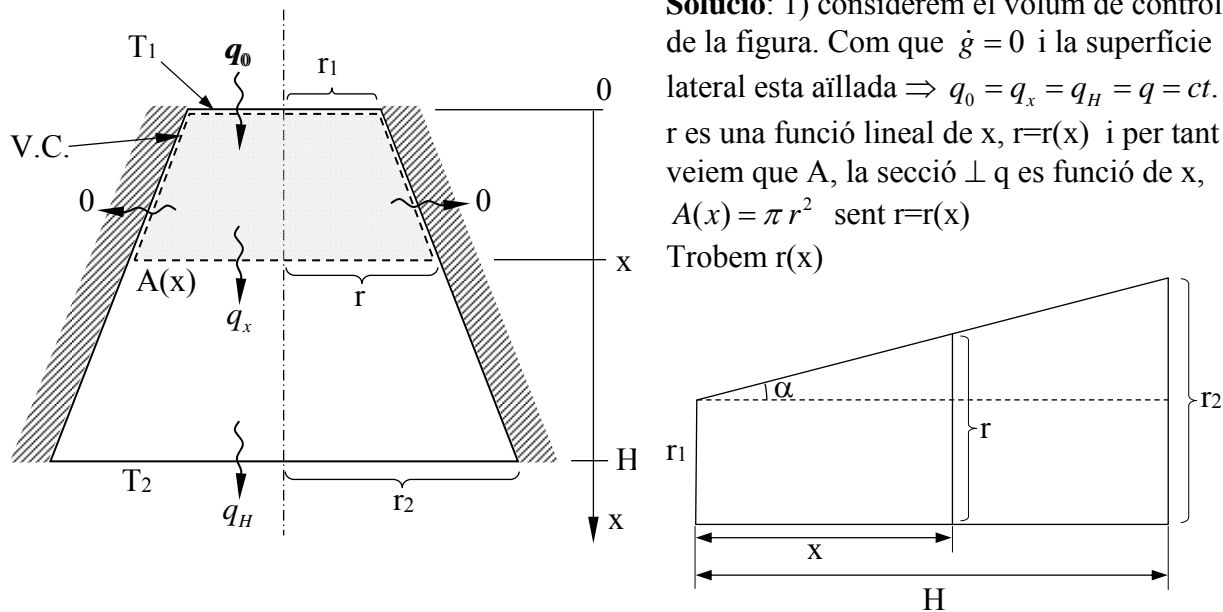
Trobar: per $\forall x$ tal que $0 < x < H$

1) $T(x); \left. \frac{q}{A} \right|_x, q_x$

2) Si $r_1 = 0$ i $r_2 \neq 0$ quan val $T(x) \forall x$

3) Si $r_1=r_2=r$ (cilindre aïllat) compari i justifiqui el resultat amb els obtinguts per una paret plana de grans dimensions i de gruix H .

4) Es correcta la hipòtesis $T=T(x)$ per qualsevol salt tèrmic $\Delta T=T_1-T_2$ i per qualsevol pendent $m=(r_2-r_1)/H$ de la superfície inclinada. O sigui es correcta suposar que les superfícies isotermes són plans paral·lels a les bases.



Solució: 1) considerem el volum de control de la figura. Com que $\dot{g} = 0$ i la superfície lateral està aïllada $\Rightarrow q_0 = q_x = q_H = q = ct$. r és una funció lineal de x , $r=r(x)$ i per tant veiem que A , la secció $\perp q$ és funció de x , $A(x) = \pi r^2$ sent $r=r(x)$
 Trobem $r(x)$

Si calculem la $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{r_2 - r_1}{H} = m = \frac{r - r_1}{x} \Rightarrow r = r_1 + mx$ que és l'expressió de $r=r(x)$

Diferenciant, $dr = m dx \Rightarrow dx = \frac{dr}{m}$ sent $m = \frac{r_2 - r_1}{H}$ (útil per integrar respecta r)

Apliquem ara la primera llei de Fourier a la suposada funció $T=T(x)$ $q = -\lambda A(x) \frac{dT}{dx} = ct$.

Expressem ara l'equació de Fourier en funció de r substituint $dx=dr/m$ queda,

$$q = -\lambda \frac{A}{\left(\frac{dr}{m}\right)} \frac{dT}{dr} = -\lambda m \pi r^2 \frac{dT}{dr} = q = ct. \Rightarrow -\frac{q}{\lambda m \pi r^2} dr = dT$$

Integrant $-\frac{q}{\lambda m \pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \int_{T_1}^{T_2} dT$ trobem la potència tèrmica $q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{H}{\lambda \pi r_1 r_2}}$ (W) $\forall x \mid 0 < x < H$

Integrant entre r_1 i r i entre T_1 i $T(x)$ i com que coneixem q trobem $T(x)$,

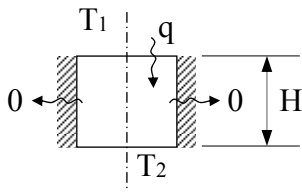
$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \right) \left[\frac{1}{r_1 + \frac{r_2 - r_1}{H} x} - \frac{1}{r_1} \right]$$

es pot comprovar que $T(0)=T_1$ i $T(H)=T_2$

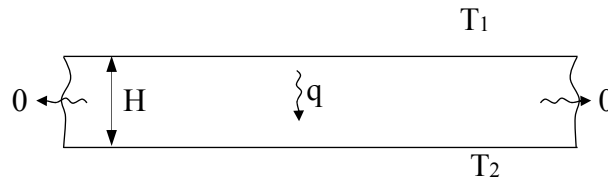
2) Per el vèrtex del con ($A=0$) no pot entrar cap potència tèrmica i com la superfície lateral es troba perfectament aïllada i en règim estacionari aleshores tot el con ha d'estar en equilibri tèrmic amb la base a T_2 o sigui tot el con es troba a T_2 , $T(x)=T_2 \forall x \mid 0 < x < H$

3) Si $r_1=r_2=r$ (cilindre aïllat) $\Rightarrow A = \pi r^2$ $q = \frac{T_1 - T_2}{H} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{H}{\lambda \pi r_1 r_2}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{H}{\lambda \underbrace{\pi r^2}_A}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{H}{\lambda A}} = \frac{\Delta T_{12}}{R_{cond}}$

Cilindre aïllat d'alçada H



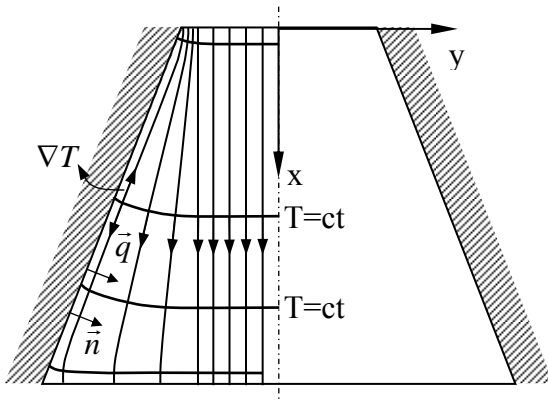
Paret de gran dimensions d'alçada H



La resistència tèrmica de conducció de la paret de grans dimensions d'alçada H és $R_{cond} = \frac{H}{\lambda A}$

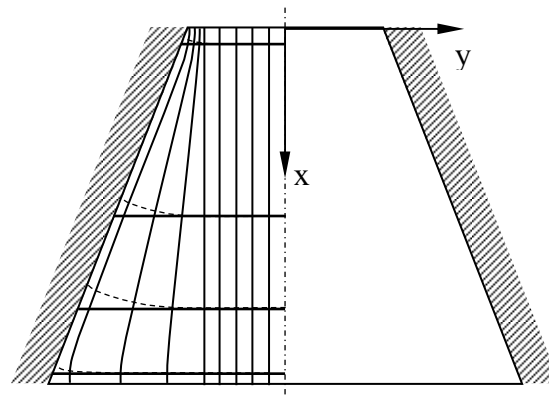
la mateixa que hem trobat pel cilindre aïllat. La coincidència és evident si observem que la potència lateral es 0 en els dos casos per motius prou diferents.

4) Si no tenim en compte cap aproximació es evident que estem davant d'un problema bidimensional $T=T(x,y)$ de mes difícil solució. El podem resoldre amb suficient precisió emprant mètodes numèrics per resoldre la 2ª eq. de Fourier com veurem mes endavant.



Isotermes reals: $T=T(x,y)$

Equació a resoldre: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$



Isotermes aproximades: $T=T(x)$

Equació a resoldre: $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$

O be a partir de, $q = -\lambda A(x) \frac{dT}{dx}$

Farem una petita i útil reflexió. Les isotermes, ortogonals al les línies de flux, tallen perpendicularment a la superfície lateral inclinada (adiabàtica o perfectament aïllada). Perquè ?

Resposta: al determinar el gradient de temperatures $\nabla T(x,y)$ en la direcció normal a la superfície lateral del con ($\nabla T \cdot \vec{n} = 0$) ens haurà de donar 0 ja que si dones diferent de 0 voldria dir que en la direcció normal a la paret i tindriem una potència tèrmica $\neq 0$ en contra de la hipòtesis de que esta aïllada.

Per tant les isoterms són \perp a la paret lateral i a les línies de flux. Això explica una mica la figura (no del tot) Cal explicar que són els tubs de calor delimitats per línies de flux i un mètode gràfic per determinar el dibuix anterior.

1.4.5 Resistència i conductància tèrmica. Paret composta.

La resistència tèrmica d'una paret plana, $R_{cond} = \frac{L}{\lambda A}$ en K/W ens permet determinar la potència tèrmica transferida quan coneixem la diferència de temperatures. Definim la conductància tèrmica com l'inversa de la resistència tèrmica.

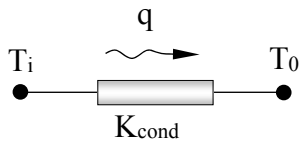


Diagrama: Una paret plana de longitud L i conductància tèrmica K_{cond} està sotmesa a temperatures T_i i T_0 a les seves extremitats. Un flux de calor q es mostra passant a través de la paret.

$$q = \frac{T_i - T_0}{R_{cond}} = K_{cond} (T_i - T_0) \Rightarrow K_{cond} = \frac{1}{R_{cond}} = \frac{\lambda A}{L} \text{ en W/K}$$

Repassem ara una propietat de les fraccions equivalents de matemàtica bàsica que farem servir en aquest apartat.

Donades dues fraccions equivalents $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow a \cdot n = b \cdot m$ (condició d'equivalència)

es compleix necessàriament la següent igualtat: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} = \frac{a+m}{b+n}$

Demostració: comprovem que $\frac{a}{b}$ es igual a $\frac{a+m}{b+n}$ per exemple.

Només cal que multipliquem en creu per verificar si es compleix la condició d'equivalència,

$$a \cdot (b+n) = b \cdot (a+m) \Rightarrow a \cdot b + \underbrace{a \cdot n}_{=b \cdot m} = b \cdot a + \underbrace{b \cdot m}_{=a \cdot n} \Rightarrow ab = ba \text{ i per tant la igualtat es certa (c.v.d.).}$$

Paret composta

Dades:

$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$ prop. constants
 S_A, S_B, S_C, S_D seccions constants
 $L_A, L_B=L_C, L_D$
 Sense generació $\dot{g} = 0$
 Règim estacionari
 Flux unidimensional

Incògnites:

$T(x)$ per $\forall x$ i q

Hipòtesis principal: flux unidimensional o sigui $T=T(x)$

Si per les característiques del nostre problema creiem acceptable considerar que les superfícies isoterms siguin plans paral·lels normals a la direcció del flux de potència tèrmica, aleshores es compleix que,

$$q = q_A = q_B + q_C = q_D$$

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_A}{\lambda_A S_A}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{L_B}{\lambda_B S_B}} + \frac{T_2 - T_3}{\frac{L_C}{\lambda_C S_C}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{L_D}{\lambda_D S_D}}$$

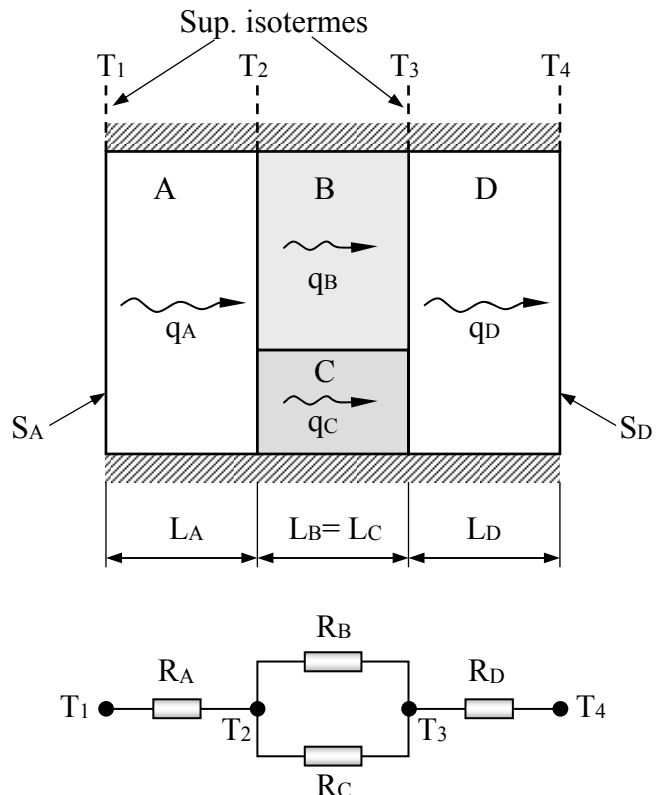
$$q = \frac{T_1 - T_2}{R_A} = \frac{T_2 - T_3}{R_B} + \frac{T_2 - T_3}{R_C} = \frac{T_3 - T_4}{R_D}$$

$$\frac{T_2 - T_3}{R_B} + \frac{T_2 - T_3}{R_C} = \frac{T_2 - T_3}{R_{23_equiv}}$$

Sumant els numeradors i denominadors,

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R_A} = \frac{T_2 - T_3}{R_{23_equiv}} = \frac{T_3 - T_4}{R_D} = \frac{T_1 - T_4}{\sum R}$$

$$q = \frac{T_1 - T_4}{R_A + R_{23_equiv} + R_D} = \frac{\Delta T_{total}}{\sum R}$$



Veiem que el símil elèctric és molt útil per trobar la resistència equivalent total en el cas d'associació de resistències sèrie paral·lel. Si $\lambda_B \ll \lambda_C$ aleshores la potència tèrmica per C q_C serà molt més gran que la potència tèrmica per B, q_B . En aquest cas el camp de temperatures pot estar molt distorsionat i les superfícies verticals no seran del tot superfícies isotermes. En aquest, cal plantejar un mètode numèric que veurem al capítol 3 i el problema el resoldrem amb molta facilitat i precisió.

1.4.6 Resistència de contacte

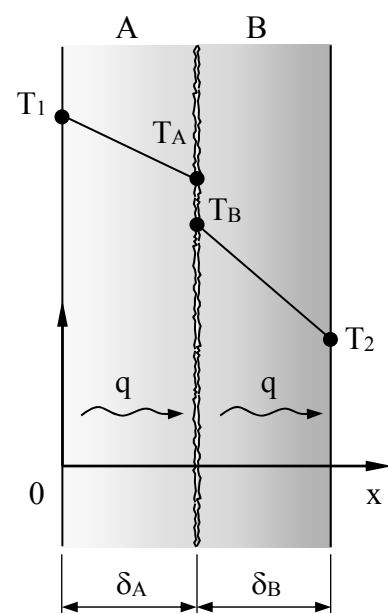
Si una paret és composta de diferents materials, a la superfície de contacte observem experimentalment que apareix una caiguda no negligible de temperatures, que és deguda a l'anomenada resistència de contacte R_{tc} .

En realitat aquesta resistència és la conseqüència d'un mal contacte, originat per les irregularitats i espais buits que trobem en l'acabat superficial de tots els materials. Definició de R_{tc} :

$$\frac{q}{A} \stackrel{def}{=} \frac{T_A - T_B}{R_{tc}} \Rightarrow q = \frac{T_A - T_B}{\frac{R_{tc}}{A}} \Rightarrow R_{tc} = \frac{T_A - T_B}{\frac{q}{A}} \left[\frac{m^2 K}{W} \right]$$

Observem que l'inversa de R_{tc} faria el mateix paper que un coeficient de convecció.

Suposem ara dues parets A i B de materials diferents, de conductivitats tèrmiques λ_A i λ_B i de gruixos també diferents δ_A i δ_B , en contacte tèrmic tal com s'indica a la figura.





$$q = \frac{T_1 - T_A}{\frac{\delta_A}{\lambda_A A}} = \frac{T_A - T_B}{\frac{R_{tc}}{A}} = \frac{T_B - T_2}{\frac{\delta_B}{\lambda_B A}} = \frac{T_1 - T_2}{\underbrace{\frac{\delta_A}{\lambda_A A}}_{R_{1A}} + \underbrace{\frac{R_{tc}}{A}}_{R_{AB}} + \underbrace{\frac{\delta_B}{\lambda_B A}}_{R_{B2}}}$$

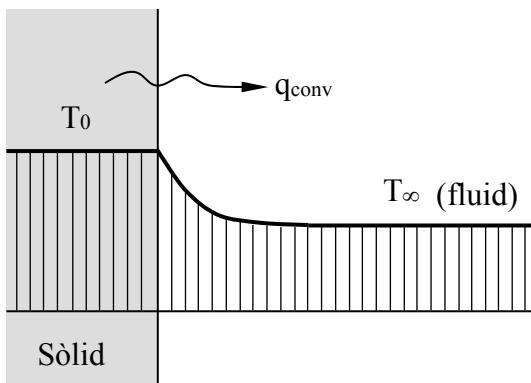
Aquesta resistència de contacte, depèn molt estretament del nombre de contactes sòlids, del nombre de buits i del material que els ompli (gas, buit, greix tèrmic). Per modificar aquesta resistència de contacte optem per,

$\Delta P \uparrow \Rightarrow$ augmenten el contactes sòlids $\Rightarrow R_{tc} \downarrow$
 Si omplim de greix tèrmic ($\lambda \uparrow$) tots els buits $\Rightarrow R_{tc} \downarrow$
 Si fem el buit $\Rightarrow R_{tc} \uparrow$

Exemple: acer inoxidable - acer inoxidable amb greix tèrmic Dow Corning 340, $R_{tc} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ (m}^2\text{K)/W}$. En general es fan servir valors experimentals.

1.5 TRANSFERÈNCIA DE CALOR PER CONVECCIÓ

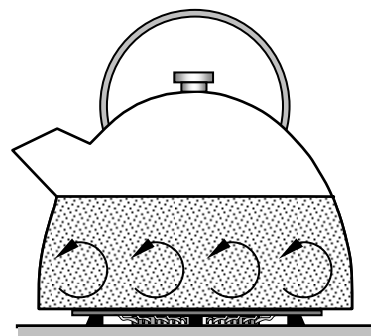
1.5.1 Descripció fenomenològica de la convecció



La transferència de calor per convecció es compon de dos mecanismes simultanis, la difusió o conducció de la calor a nivell molecular i el moviment global o macroscòpic.

Si $T_0 > T_\infty$ a la superfície del sòlid de la interfase tenim molècules amb un nivell energètic mig major que les del fluid que l'envolta. Aleshores, aquestes cedeixen per simple contacte o xoc elàstic part de la seva energia a les molècules de fluid més proper.

D'aquesta forma, el fluid de forma local augmenta la seva temperatura fins arribar a una temperatura $T > T_\infty$. Com a conseqüència també localment disminueix la seva densitat $\rho < \rho_\infty$. Ens trobem amb blocs de fluid amb una densitat inferior ρ a la del fluid que l'envolta ρ_∞ (no pertorbat). Pel principi d'Arquímedes, el fluid no pertorbat (a T_∞, ρ_∞) produeix una empenta sobre el bloc de fluid (a T, ρ) de densitat inferior que es tradueix amb una força vertical que s'oposa a la gravetat. Aquesta força d'empenta (buoyancy forces) fa que el fluid entri localment amb moviment, pujant cap a munt, abandonant la seva posició i deixant que un bloc de fluid més fred ocupi la seva posició inicial. Aquest procés de renovació del fluid en contacte amb la interfase és la clau del procés de convecció. És el que anomenem *convecció natural*. Evidentment, aquesta no té lloc en situació de microgravetat.



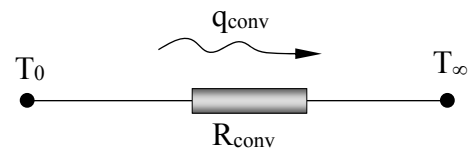
Si disposem d'elements mecànics d'impulsió del fluid (ventiladors o bombes) que afavoreixin aquest procés de renovació natural del fluid en contacte amb la interfase, el mecanisme de convecció és molt més eficient i aleshores l'anomenem *convecció forçada*.

1.5.2 Llei de refredament de Newton

Newton va comprovar que la potència transferida a la interfase entre un sòlid i un fluid era proporcional a la superfície (A) exposada i a la diferència de temperatures ($T_0 - T_\infty$) entre la superfície sòlida i el fluid. A la constant de proporcionalitat l'anomenem coeficient de convecció. Les seves unitats son $W/(m^2K)$.

Aquesta és la citada llei de refredament de Newton $q_{conv} = h_c A (T_0 - T_\infty)$ que també expressem en forma d'analogia elèctrica $q_{conv} = \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{1}{h_c A}} = \frac{T_0 - T_\infty}{R_{conv}}$ tal com il·lustrem a la figura.

El coeficient de convecció, no és en realitat una constant. Depèn de la geometria (placa plana, paret cilíndrica, etc.), de la velocitat del fluid i de les propietats del mateix a l'entorn de la superfície. En canvi no depèn del material de la superfície.



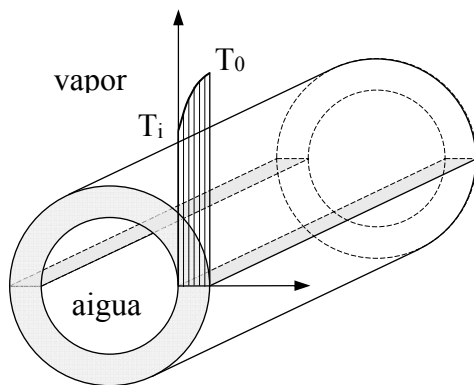
1.5.3 Ordres de magnitud dels coeficients de convecció

Cal tenir molt present en els diferents processos convectius l'ordre de magnitud del coeficient de convecció. D'acord a l'expressió $\frac{q}{A}|_{conv} = h_c (T_0 - T_\infty)$ sabem que en qualsevol procés el

flux de potència $\frac{q}{A}|_{conv}$ serà un valor evidentment finit. Quan el valor del coeficient h_c sigui molt alt, com és el cas dels processos amb canvi de fase això ens portarà a què les diferències de temperatures necessàries perquè aquests processos tinguin lloc poden ser molt petites.

Valors aproximats per a h_c en diferents processos convectius.

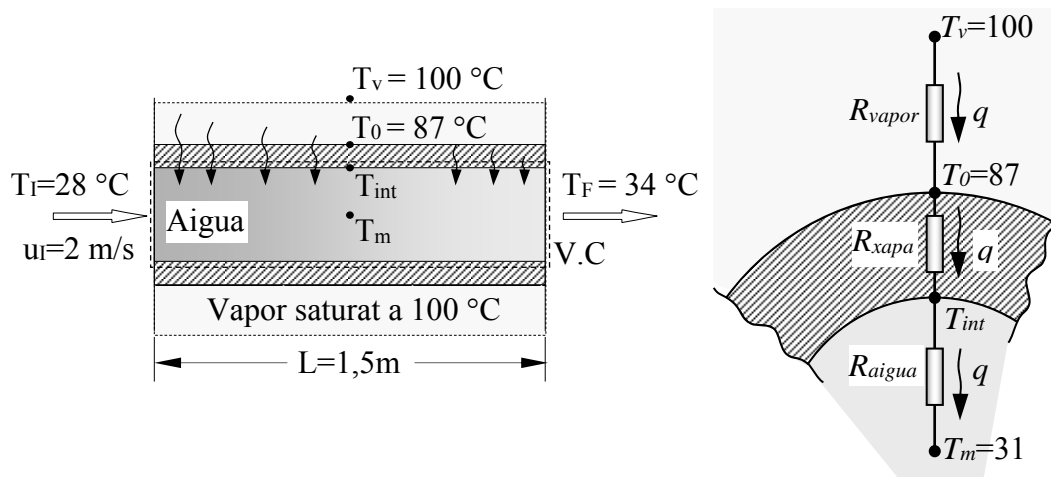
Mecanisme	Fluid	h_c , $W/(m^2 K)$
<i>Canvi de fase</i>	Condensació de vapor d'aigua	5000 – 100000
	Aigua bullent	2500 – 25000
<i>Convecció forçada</i>	Metalls líquids	500 – 20000
	Aigua	250 – 12000
	Orgànics viscosos	50 – 3000
	Aire	15 – 300
<i>Convecció natural</i>	Metalls líquids	150 – 1200
	Aigua	100 – 850
	Orgànics viscosos	5 – 100
	Aire	5 – 20



Exercici 3: conducte envoltat d'un vapor saturat

Per l'interior d'una canonada d'acer inoxidable, de diàmetre nominal 3/4 de polzada, Schedule 40 ($D_{ext}=26,670$ mm $D_{int}=20,930$ mm) i longitud 1,5 m, es fa circular aigua. L'exterior està en contacte amb vapor saturat a pressió atmosfèrica. Si la conductivitat tèrmica de l'inoxidable és $\lambda_{inox} = 13$ W/(m·K), determinar:

- a) Potència tèrmica transferida entre els dos fluids per metre de canonada si l'aigua entra a 2 m/s i 28 °C sent 34 °C la seva temperatura de sortida.
- b) Coeficient de convecció exterior si la termosonda situada al punt mig de la superfície exterior del tub marca 87 °C.
- c) Temperatura mitjana de paret interior si la conductivitat tèrmica de l'acer és 13 W/(m·K)
- d) Coeficient de convecció interior.
- e) Flux de potència tèrmica referit a les àrees de les superfícies interna i externa.
- f) Massa de vapor que condensa en 60 segons si la calor latent de vaporització és a 1 atm, $\Delta h_{lg}=2,25 \cdot 10^6$ J/kg.



Apliquem un balanç d'energia al sistema obert delimitat pel V.C. de la figura (envolta l'aigua de la canonada) que es troba en regim estacionari. Si considerem negligible els termes d'energia cinètica i potencial, que en general es molt acceptable quan hi ha present la transferència de calor, recordem que es compleix que,

$$\dot{Q}_{0-L} + \dot{W} = \dot{h}_{sortida} - \dot{h}_{entrada} \quad \text{o sigui que la calor més el treball aportat al V.C. per unitat de temps es igual a la variació d'entalpia en el V.C. també per unitat de temps.}$$

A la nostra canonada, $\dot{W} = 0$. El vapor saturat esta en contacte amb la xapa de la canonada que esta mes freda i per tant condensa vapor d'aigua a la seva superfície exterior, cedint el seu calor latent de vaporització a tot el tram 0-L de canonada, que per unitat de temps és el que anomenem q_{0-L} , la potència tèrmica que escalfa l'aigua.

$$\dot{h}_{sortida} = \dot{m} c_p T_F \quad \text{entalpia per unitat de temps de l'aigua a la sortida del volum de control, V.C.}$$

$$\dot{h}_{entrada} = \dot{m} c_p T_I \quad \text{entalpia per unitat de temps de l'aigua a l'entrada del V.C.}$$

Temperatura mitja del tram 0-L, $T_m = (28+34)/2 = 31 \text{ }^\circ\text{C}$

Determinem l calor específica a la temperatura T_m , $c_p = 4188 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$,

i la densitat a la temperatura inicial $T_i = 28 \text{ }^\circ\text{C}$, $\rho_i = 995,6 \text{ kg/m}^3$

Si $\dot{m} = \rho_i \underbrace{u_i}_{\text{m}^3/\text{s}} S = \rho_i u_i \frac{\pi D_{int}^2}{4} = 0,6853 \text{ kg/s}$ és el cabal màssic d'aigua en kg/s que entra i surt de la canonada.

a) El balanç al V.C. resulta $q_{0-L} = \dot{m} c_p (T_F - T_i) = 0,6853 \times 4188 (34 - 28) = 17220,2 \text{ W}$

La potència transferida al tram per unitat de longitud seria $\frac{q}{L} = \frac{17207}{1,5} = 11480 \text{ en W/m}$

b) El vapor saturat condensa damunt la superfície exterior (interfase) de la canonada cedint el seu calor latent. Aquest és un mecanisme clar de transferència de calor per convecció.

$$q_{0-L} = \underbrace{h_{vapor}}_{?} \overbrace{\pi D_{ext} L}^{A_{ext}} (T_v - T_0) \quad \Rightarrow \quad h_{vapor} = \frac{q_{0-L}}{\pi D_{ext} L (T_v - T_0)} = 10539,8 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$$

c) La potència tèrmica que el vapor cedeix a la canonada, es transfereix per conducció a través de la seva paret cilíndrica, o sigui entre T_0 i T_{int} .

$$R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{D_{ext}}{D_{int}}\right)}{2\pi \lambda_{inox} L} \quad \Rightarrow \quad q_{0-L} = \frac{T_0 - \overbrace{T_{int}}{?}}{R_{cond}} \quad \Rightarrow \quad T_{int} = T_0 - q_{0-L} \times R_{cond} = 52,94 \text{ }^\circ\text{C}$$

d) L'anterior potència tèrmica transferida per conducció es transfereix ara per convecció a l'aigua, de la temperatura T_{int} a la temperatura mitja de l'aigua del tram 0-L, T_m ,

$$q_{0-L} = \underbrace{h_{c_aigua}}_{?} \overbrace{\pi D_{int} L}^{A_{int}} (T_{int} - T_m) \quad \Rightarrow \quad h_{c_aigua} = \frac{q_{0-L}}{\pi D_{int} L (T_{int} - T_m)} = 7957,78 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$$

e) Determinem ara el fluxos de potència tèrmica q/A referits a les superfícies exterior i interior de la canonada,

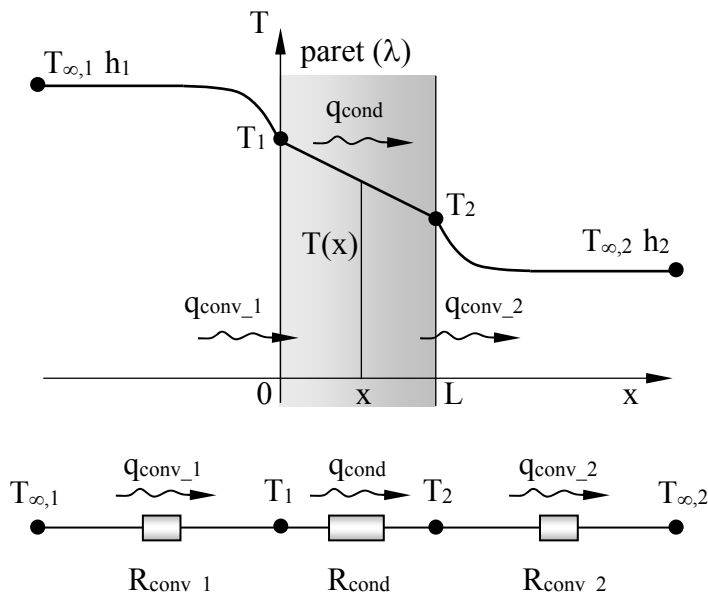
$$\frac{q_{0-L}}{A_{ext}} = \frac{q_{0-L}}{\pi D_{ext} L} = 137,02 \text{ kW/m}^2 \quad ; \quad \frac{q_{0-L}}{A_{int}} = \frac{q_{0-L}}{\pi D_{int} L} = 174,59 \text{ kW/m}^2$$

f) Representem per $\dot{m}_{condensat}$ en kg/s la quantitat de vapor que condensa per unitat de temps.

$$\frac{q_{0-L}}{\frac{J}{s}} = \underbrace{\dot{m}_{condensat}}_{\frac{kg}{s}} \times \underbrace{\Delta h_g}_{\frac{J}{kg}} \quad \Rightarrow \quad \dot{m}_{condensat} = \frac{q_{0-L}}{\Delta h_g} = 7,65 \times 10^{-3} \frac{kg}{s} = 0,46 \frac{kg}{min}$$

En aquest exercici hi han moltes simplificacions que es justificaran al capítol 4

1.5.4 Mecanismes combinats (conducció i convecció)



Resoldrem ara el problema d'una paret de grans dimensions envoltada d'un fluid a cada banda.

Dades:

Paret, $\lambda=ct.$, L , A (m^2)
 $\dot{g} = 0$ (W/m^3) (sense generació)
 Paret de grans dimensions

Fluid 1: $T_{\infty,1}$, h_1
Fluid 2: $T_{\infty,2}$, h_2

Règim estacionari

Incògnites:

$T_1, T_2, T(x), q_x$ (W)

Al estar en regim estacionari (i $\dot{g} = 0$) sabem que la potència tèrmica que el fluid 1 cedeix a la paret, ha de ser igual a la potència que per conducció es transfereix entre les superfícies 1 i 2 i també serà igual a la potència tèrmica que la paret cedeixi al fluid 2. Si aquestes potències no coincidissin, la paret s'escalfaria o es refredaria i aleshores no estariem en regim estacionari.

Per tant, $q_{conv_1} = q_{cond} = q_{conv_2} = q \quad \forall x \in [0, L]$ sent $q_{conv_1} = h_1 A (T_{\infty,1} - T_1) = \frac{T_{\infty,1} - T_1}{\frac{1}{h_1 A}} = \frac{T_{\infty,1} - T_1}{R_{conv_1}}$

$$q_{cond} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L}{\lambda A}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{cond}} \Rightarrow q = \frac{T_{\infty,1} - T_1}{R_{conv_1}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{cond}} = \frac{T_2 - T_{\infty,2}}{R_{conv_2}} = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{conv_1} + R_{cond} + R_{conv_2}} = \frac{\Delta T_{total}}{\sum R}$$

D'aquesta última equació obtenim la potència tèrmica transferida en el procés i de la primera i la tercera aïllem les temperatures superficials,

$$q = \frac{T_{\infty,1} - T_1}{R_{conv_1}} \Rightarrow T_1 = T_{\infty,1} - q \times R_{conv_1} \quad ; \quad q = \frac{T_2 - T_{\infty,2}}{R_{conv_2}} \Rightarrow T_2 = T_{\infty,2} + q \times R_{conv_2}$$

Coneixent ara les temperatures superficials de la paret T_1 i T_2 i sent nul·la generació $\dot{g} = 0$

sabem que el perfil de temperatures es lineal i per tant, $T(x) = T_1 - \left(\frac{T_1 - T_2}{L}\right)x$

Definició: coef. global de transferència $U \quad q = \frac{\Delta T_{total}}{\sum R} \stackrel{def.}{=} U A \Delta T_{total} \Rightarrow U = \frac{1}{A \times \sum R}$

$$U = \frac{1}{A \sum R} = \frac{1}{A \left(\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{\lambda A} + \frac{1}{h_2 A} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{h_2}} \quad \left[\frac{W}{m^2 K} \right]$$

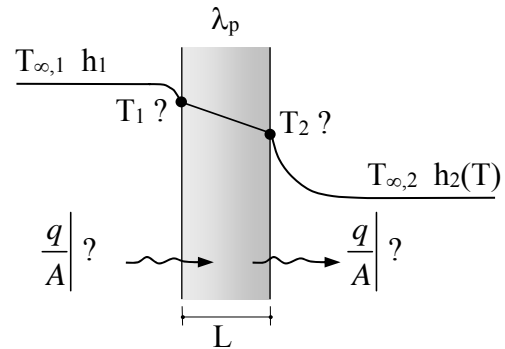
El coeficient global de transferència tèrmica és independent de la superfície A i te les mateixes unitats que el coeficient de convecció.

En el tema de convecció tornarem a parlar d'aquest coeficient U aplicat a conductes.

Qüestió 1: Es separa el fluid 1 del fluid 2 amb una paret plana, sense generació i en règim estacionari. Un dels coeficients de convecció és una funció de la temperatura superficial (aquest coef. inclou la convecció i la radiació) La figura podria ser la paret d'un forn.

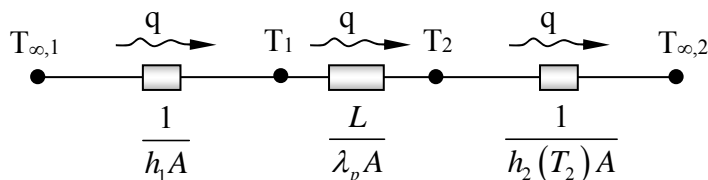
Dades:

<p><u>Paret</u>, $\lambda_p=1,2 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, $L=0,25 \text{ m}$ $\dot{g} = 0 \text{ (W/m}^3\text{)}$ (sense generació) Paret de grans dimensions</p> <p><u>Fluid 1:</u> $T_{\infty,1}=600 \text{ }^\circ\text{C}$, $h_1=200 \text{ W/(m}^2\text{ K)}$ <u>Fluid 2:</u> $T_{\infty,2}=20 \text{ }^\circ\text{C}$ $h_{C+R} = h(T_2) = 8,61 + 0,061 (T_2 - T_{\infty,2}) \text{ W/(m}^2\text{ K)}$</p> <p>Règim estacionari</p>
--



Incògnites: T_1 , T_2 , q/A (W)

En primer lloc veiem que si no coneixem la temperatura T_2 tampoc podem calcular el coeficient de convecció ja que aquest depèn d'aquesta temperatura. Determinem la potència tèrmica q per una superfície $A=1 \text{ m}^2$ (es una forma de trobar q/A)



Si calculem la potència tèrmica transferida entre el fluid 1 i la superfície a T_2 evitem que apareixi la temperatura T_1 com a incògnita.

$$q = \frac{T_{\infty,1} - T_2}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{\lambda_p A}} \quad (\text{incògnites } q \text{ i } T_2)$$

que ho igulem a $q = \frac{T_2 - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_2(T_2) A}}$ (incògnites q i T_2) la potència transferida entre T_2 i el fluid 2.

Igualant els segons membres trobem T_2 ,

$$\frac{T_{\infty,1} - T_2}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{\lambda_p A}} = \frac{T_2 - T_{\infty,2}}{\frac{1}{[8,61 + 0,061(T_2 - T_{\infty,2})] A}} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 148,6^\circ\text{C} \quad \text{amb} \quad h_2(T_2) = 16,45 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$$

I substituint trobem $q=2116 \text{ W}$ per una superfície $A=1 \text{ m}^2$ o sigui $q/A=2116 \text{ W/m}^2$

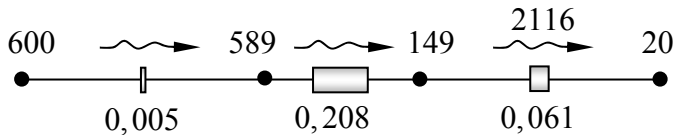
De $q = h_1 A (T_{\infty,1} - T_1)$ aïllem $T_1 = T_{\infty,1} - \frac{q}{h_1 A} = 589,4$

Calculem el valor de les tres resistències tèrmiques per veure el seu valor relatiu,

$$R_{conv_1} = \frac{1}{h_1 A} = 0,005 \quad ; \quad R_{cond_12} = \frac{L}{\lambda_p A} = 0,208 \quad ; \quad R_{conv_2} = \frac{1}{h_2(T_2) A} = 0,061$$

Veiem que la resistències de convecció son tant petites que la principal caiguda de

temperatures te lloc a la paret $\frac{R_{cond_12}}{R_{conv_1}} = 41,67 \quad ; \quad \frac{R_{cond_12}}{R_{conv_2}} = 3,43$



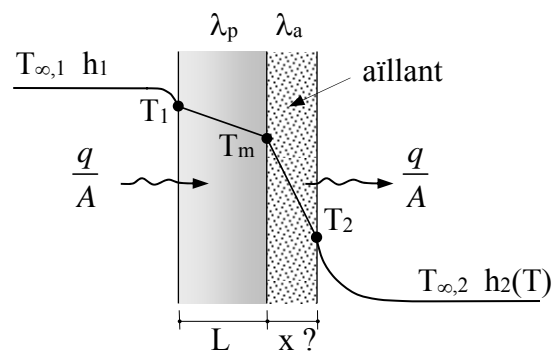
Observi al dibuix l'ordre de magnitud de les tres resistències tèrmiques.

Qüestió 2:

A la qüestió anterior, les pèrdues q/A i la temperatura exterior del forn T_2 son excessives.

a) Determini el gruix x necessari d'un aïllant de conductivitat tèrmica $\lambda_a=0,03 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ per aconseguir una temperatura $T_2 =50 \text{ }^\circ\text{C}$ mes adient per la manipulació de persones.

b) Calculi també el gruix necessari d'aquest aïllant per reduir les pèrdues de la qüestió 1 a la meitat.



Amb aïllament

a) Sent $T_2=50 \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow h_2(T_2) = 10,44 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$

i $q = h_2(T_2) A (T_2 - T_{\infty,2}) = 313,2 \text{ W}$ o sigui

$q/A = 313,2 \text{ W/m}^2$ Ara ja coneixem el flux de potència tèrmica i podem determinar x ,

$$q = \frac{T_{\infty,1} - T_2}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{\lambda_p A} + \frac{x}{\lambda_a A}} \Rightarrow x = 0,046 \text{ m veiem com s'ha reduït la potència (85 \%).$$

b) Coneixem $q = \frac{2116}{2} = 1058 \text{ W}$ per tant amb el balanç a la superfície 2 trobem T_2

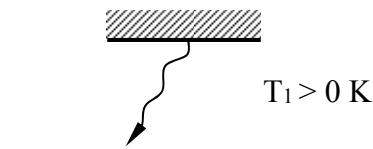
$$q = 1058 = h_2(T_2) A (T_2 - T_{\infty,2}) \Rightarrow T_2 = 98,8 \text{ }^\circ\text{C sent } h_2(T_2) = 13,42 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$$

$$\text{De } q = \frac{T_{\infty,1} - T_2}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{\lambda_p A} + \frac{x}{\lambda_a A}} \Rightarrow x = 0,00781 \text{ m} = 7,81 \text{ mm}$$

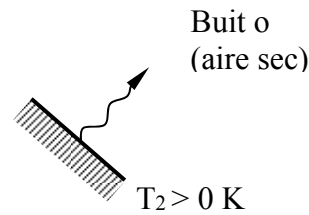
1.6 TRANSFERÈNCIA DE CALOR PER RADIACIÓ

1.6.1 Naturalesa de la radiació tèrmica

Un cos a qualsevol temperatura major de 0 K emet radiacions electromagnètiques.



Anomenem radiació tèrmica a les radiacions amb longitud d'ona compresa entre $0,1 \div 100 \mu\text{m}$. Dins d'aquest espectre de radiació hi tenim el visible que correspon a radiacions entre $0,4 \div 0,7 \mu\text{m}$.

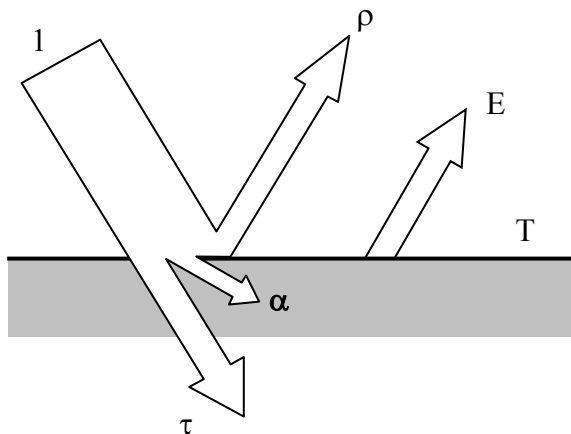


1.6.2 Reflectància, absorptància i transmissància

Quan una unitat de potència radiant incideix sobre una superfície, és distribuïda com a la figura, una part és absorbida per les primeres micres del sòlid, una part és reflectida i la resta és transmesa entremig de l'estructura reticular del sòlid sense que

això representi cap escalfament del mateix. Tots nosaltres hem vist a l'hivern com la llum solar travessa el vidre de la nostra finestra i en canvi notem com aquest es manté prou fred.

Les radiacions tèrmiques que un sòlid a una temperatura $T > 0 \text{ K}$ emet per unitat de superfície s'anomena poder emissiu total de la superfície. (W/m^2)



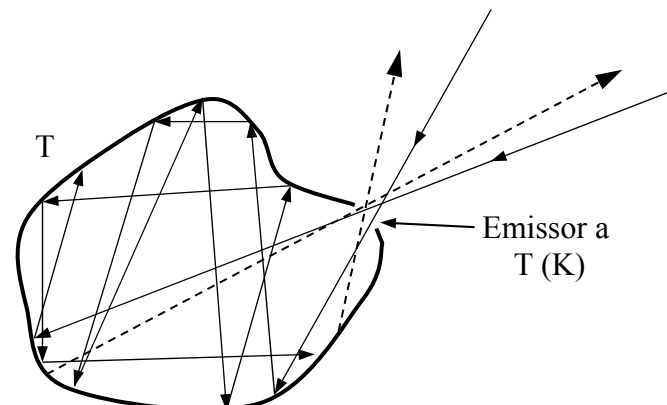
α = absorptància
 ρ = reflectància
 τ = transmissància

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (\text{balanç de potència})$$

Quan $\tau = 0$ és diu que el cos és opac. El vidre és un exemple de cos transparent.

1.6.3 Definició del cos negre

Un cos negre és aquell cos que absorbeix tota l'energia radiant incident des de qualsevol direcció i per a totes les longituds d'ona, sense reflectir-la, ni transmetre-la, ni dispersar-la. El concepte de cos negre és una idealització emprada per a comparar l'emissió i l'absorció de radiació de les superfícies reals.

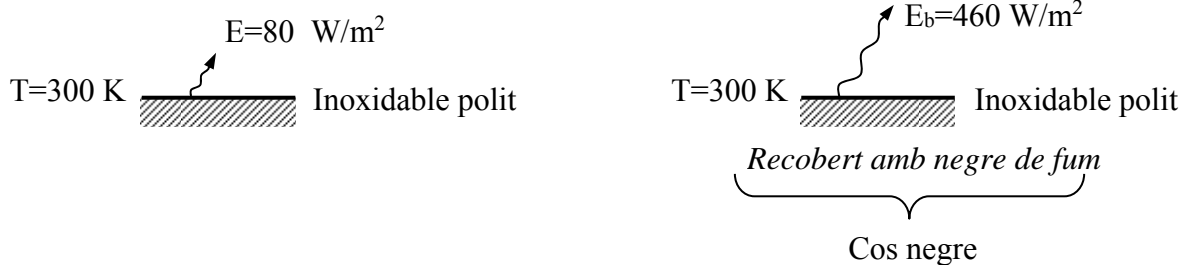


La figura mostra una petita cavitat isotèrmica que per un observador extern es comporta com un cos negre (la secció del forat).

Si apropem la flama d'una espelma a una superfície metàl·lica, veurem que aquesta queda recoberta de negre de fum (combustió incompleta). Aquesta superfície recoberta de negre de fum te

un comportament molt proper al del cos negre (95 %) o sigui es comporta com un absorbidor perfecte.

1.6.4 Emissivitat global



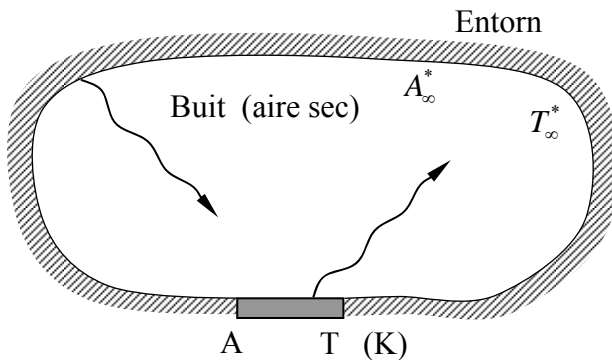
No hi cap superfície que a la mateixa temperatura emeti més potència radiant que el cos negre (és una referència). Si dividim els poders emissius d'aquestes superfícies, obtenim l'emissivitat

de la superfície d'inoxidable polit, sent $\epsilon = \frac{E}{E_b} = \frac{80}{460} = 0,174$ (17,4 %) el que significa

que a la mateixa temperatura, la superfície d'inoxidable polit emet el 17,4 % del que emet un cos negre a la mateixa temperatura.

Per tant el poder emissiu d'un cos real sempre és inferior a la d'un cos negre a la mateixa temperatura.

1.6.5 Llei de Stefan-Boltzmann



Suposem una superfície A d'emissivitat ϵ , a una temperatura de T (K) envoltada d'un entorn molt més gran i a una temperatura T_∞^*

Si la superfície $A \ll A_\infty^*$ aleshores és compleix la llei d'Stefan-Boltzmann que expressem,

$$q = \epsilon A \sigma (T_\infty^{*4} - T^4) \quad (\text{W}) \quad \text{sent}$$

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \quad \text{la constant d'Stefan Boltzmann}$$

La potència tèrmica q representa el balanç net de potència radiant entre la superfície A i el seu entorn. Si $T_\infty^* > T$ aleshores la potència és positiva i significa que la superfície A rep més potència de la que perd cap a l'entorn.

1.6.6 Llei de Kirchhoff

Si una superfície a temperatura T rep una irradiació d'un cos negre que l'envolta a la mateixa temperatura (equilibri tèrmic), es pot demostrar que es verifica la denominada llei de Kirchhoff $\alpha = \epsilon$ o sigui que l'emissivitat és igual a l'absorbància de la superfície.

Aquesta propietat facilita i simplifica els balanços de potència radiant.

1.6.7 Conductància de radiació equivalent

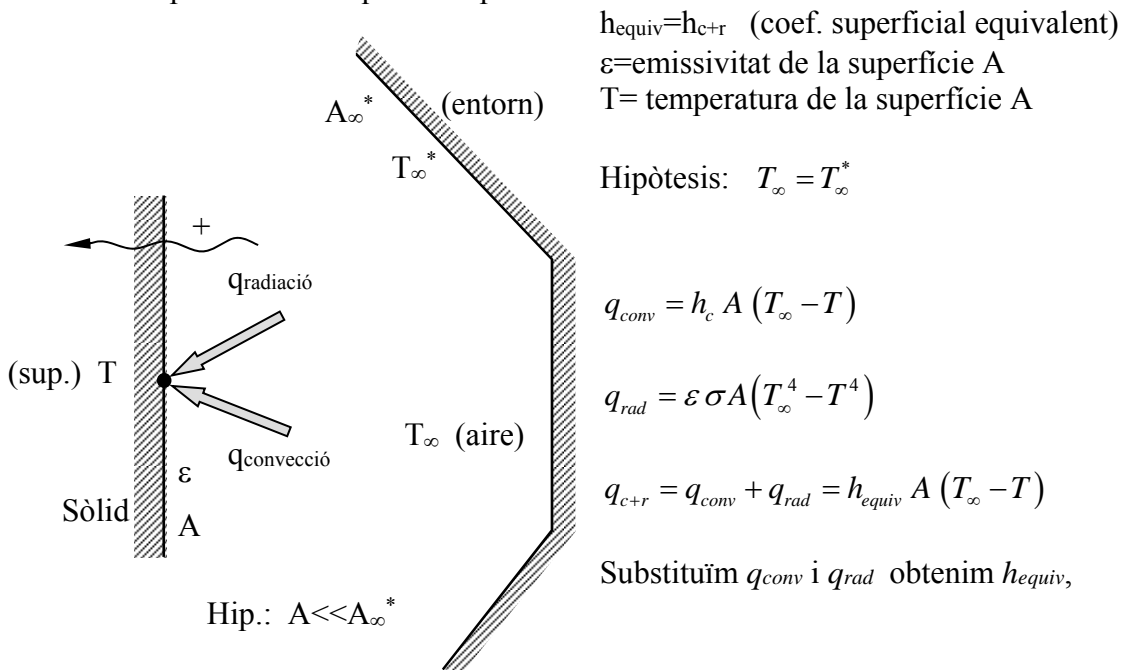
$$q_{rad} = \varepsilon \sigma A (T_{\infty}^{*4} - T^4) \stackrel{\text{def}}{=} K_{equiv} (T_{\infty}^* - T) \Rightarrow K_{equiv} = \frac{\varepsilon \sigma A (T_{\infty}^{*4} - T^4)}{(T_{\infty}^* - T)}$$

Factoritzant $(T_{\infty}^{*4} - T^4) = (T_{\infty}^{*2} + T^2)(T_{\infty}^{*2} - T^2) = (T_{\infty}^{*2} + T^2)(T_{\infty}^* + T)(T_{\infty}^* - T)$

Obtenim, $K_{rad} = K_{equiv} = \varepsilon \sigma A (T_{\infty}^{*2} + T^2)(T_{\infty}^* + T)$ preferible a l'equació inicial, especialment pels càlculs iteratius en no tenir cap denominador que se'ns pugui anular.

1.6.8 Coeficient superficial equivalent de convecció i radiació

Quan intervé el mecanisme de convecció i radiació de forma conjunta (com es veu en paral·lel), i si la temperatura de l'entorn i del fluid són iguals aleshores podem parlar del coeficient superficial "h" equivalent per la convecció i radiació simultània.



$$\underbrace{h_{equiv} A (T_{\infty} - T)}_{q_{c+r}} = \underbrace{h_c A (T_{\infty} - T)}_{q_{conv}} + \underbrace{\varepsilon \sigma A (T_{\infty}^4 - T^4)}_{q_{rad}} \quad ; \quad h_{c+r} = h_{equiv}$$

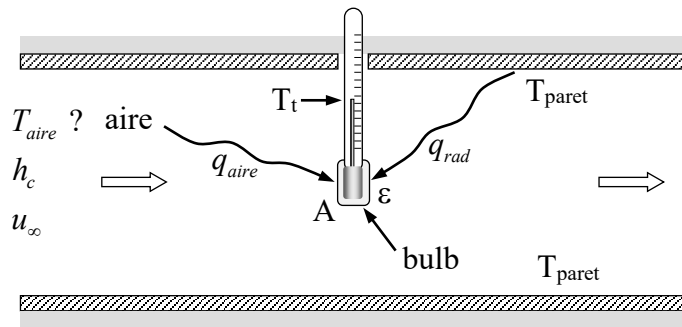
Per tant, $h_{c+r} = h_c + \frac{\varepsilon \sigma (T_{\infty}^4 - T^4)}{(T_{\infty} - T)} = h_c + \varepsilon \sigma (T_{\infty}^2 + T^2)(T_{\infty} + T)$

Malgrat que alguns autors fan servir coeficients equivalents d'aquest tipus, especialment per l'aire (NELSON) crec que avui dia, a l'era digital, és absolutament innecessari.

Qüestió 3:

En un conducte d'aire i tenim situat un termòmetre de mercuri que marca una temperatura $T = 24 \text{ }^\circ\text{C}$ que suposadament pensem que es la temperatura de l'aire. Però l'aire arriba a una habitació mes fred de lo esperat per lo que es proposa canviar el termòmetre per resoldre el problema.

Un anàlisi més refinat, realitzat per un estudiant de Transferència de Calor, troba la explicació d'aquest problema.



En primer lloc comprova que la temperatura de les parets del conducte que envolta el termòmetre estan a 50 °C. L'alumne es planteja, ¿pot ser que la radiació de les parets falsegi la lectura del termòmetre ?

L'emissivitat del bulb del termòmetre es $\epsilon=0,9$ i el coeficient de convecció de l'aire és $h_c=30 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$

És obvi que el termòmetre es troba en regim estacionari en el moment que el

mercuri arriba a l'equilibri i es manté en repòs.

Realitzem un balanç de potència tèrmica al bulb del termòmetre (superfície A),

$$q_{\text{aire}} = h_c A (T_{\text{aire}} - T_t) \text{ potència tèrmica que el bulb del termòmetre rep de l'aire}$$

$$q_{\text{rad}} = \epsilon A \sigma (T_{\text{paret}}^4 - T_t^4) \text{ potència tèrmica que el bulb del termòmetre rep de la paret}$$

$$\text{Si el termòmetre esta en equilibri tèrmic} \Rightarrow q_{\text{aire}} + q_{\text{rad}} = 0$$

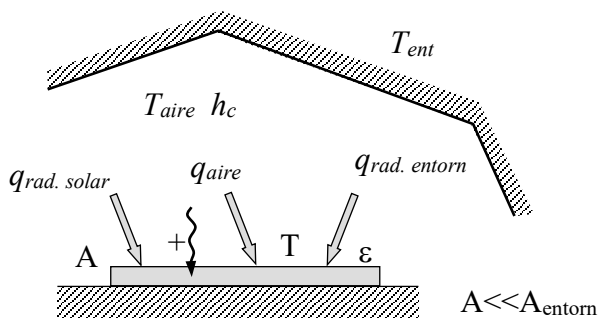
$$\text{O sigui } h_c (T_{\text{aire}} - T_t) + \epsilon \sigma (T_{\text{paret}}^4 - T_t^4) = 0 \text{ sent la única incògnita la temperatura}$$

real de l'aire. Obtenim la temperatura real de l'aire $T_{\text{aire}} = 18,7 \text{ °C} < T_t = 24 \text{ °C}$ (la lectura) i es compren perquè l'aire ens arribava fred, simplement perquè l'aire no estava a 24 °C com pensàvem.

El bulb rep $q_{\text{rad}} = 158,6 \text{ W}$ per radiació i perd $q_{\text{aire}} = -158,6 \text{ W}$ per convecció, però aquest balanç energètic dona una temperatura d'equilibri del mercuri que falseja la temperatura real de l'aire. Per tant, quan fem servir termòmetres haurem de vigilar si han focus calents propers que puguin falsejar la seva lectura.

Qüestió 4:

Un flux de radiació solar de $q_{\text{rad. solar incident}} = 800 \text{ W}/\text{m}^2$ incideix perpendicularment sobre una placa metàl·lica aïllada perfectament per la seva cara posterior. La placa esta exposada a un entorn a 5 °C i aire en calma a 30 °C amb un coeficient de convecció $h_c=10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$. L'emissivitat de la placa és $\epsilon=0,9=\alpha$ l'absortivitat, d'acord a la llei de Kirchhoff



Determinar la temperatura d'equilibri de la placa i els fluxos de totes les potències tèrmiques involucrades .

En equilibri tèrmic, la potència tèrmica que guanyi la placa coincidirà amb a la que perdi, de forma que,

$$q_{\text{rad. solar absorvida}} + q_{\text{aire}} + q_{\text{rad. entorn}} = 0$$

$$800 \alpha + h_c (T_{\text{aire}} - T) + \varepsilon \sigma (T_{\text{entorn}}^4 - T^4) = 0 \quad \text{sent } T=65,46 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\frac{q_{\text{rad. solar absorvida}}}{A} = 800 \alpha = 720 \text{ W/m}^2 \text{ flux de radiació solar absorbida per la placa.}$$

$$\frac{q_{\text{aire}}}{A} = h_c (T_{\text{aire}} - T) = -354,601 \text{ W/m}^2 \text{ flux de potència que la placa cedeix a l'aire.}$$

$$\frac{q_{\text{rad. entorn}}}{A} = \varepsilon \sigma (T_{\text{entorn}}^4 - T^4) = -365,399 \text{ W/m}^2 \text{ flux de potència que la placa cedeix a l'entorn.}$$

Comprovi el lector com la temperatura d'equilibri $T=65,46 \text{ }^\circ\text{C}$ depèn molt estretament de l'emissivitat superficial considerada.

1.7 BALANÇOS D'ENERGIA EN TRANSFERÈNCIA DE CALOR

1.7.1 Conservació de l'energia per un volum de control

Definim a continuació els diferents termes que intervenen en un balanç d'energia aplicat a un volum de control fix a l'espai o sigui estacionari i amb un volum constant com el de la figura.

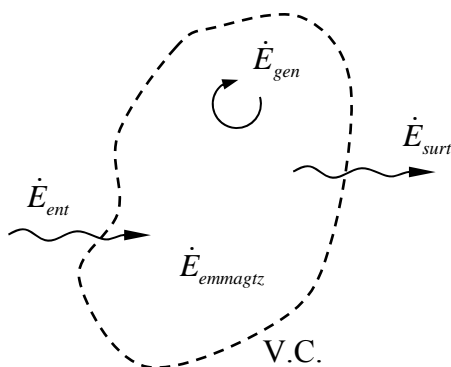
$$\dot{E}_{\text{ent}} = \frac{dE_{\text{ent}}}{dt} = \text{energia tèrmica i mecànica que entra per unitat de temps (W) per la **superfície de control (S.C.)}**$$

$$\dot{E}_{\text{gen}} = \frac{dE_{\text{gen}}}{dt} = \text{energia tèrmica que entra per unitat de temps (W) al volum de control (V.C.)}$$

per la conversió d'algun altre tipus d'energia (elèctrica, química, magnètica, nuclear) (és el que anomenem generació interna de calor) És un fenomen volumètric.

$$\dot{E}_{\text{surt}} = \frac{dE_{\text{surt}}}{dt} = \text{energia tèrmica i mecànica que surt per unitat de temps (W) per la **superfície de control (S.C.)}**$$

$$\dot{E}_{\text{emmagtz}} = \frac{dE_{\text{emmagtz}}}{dt} = \text{variació d'energia per unitat de temps de tota la massa que ocupa el volum de control}$$



$$\dot{E}_{\text{ent}} + \dot{E}_{\text{gen}} - \dot{E}_{\text{surt}} = \dot{E}_{\text{emmagtz}}$$

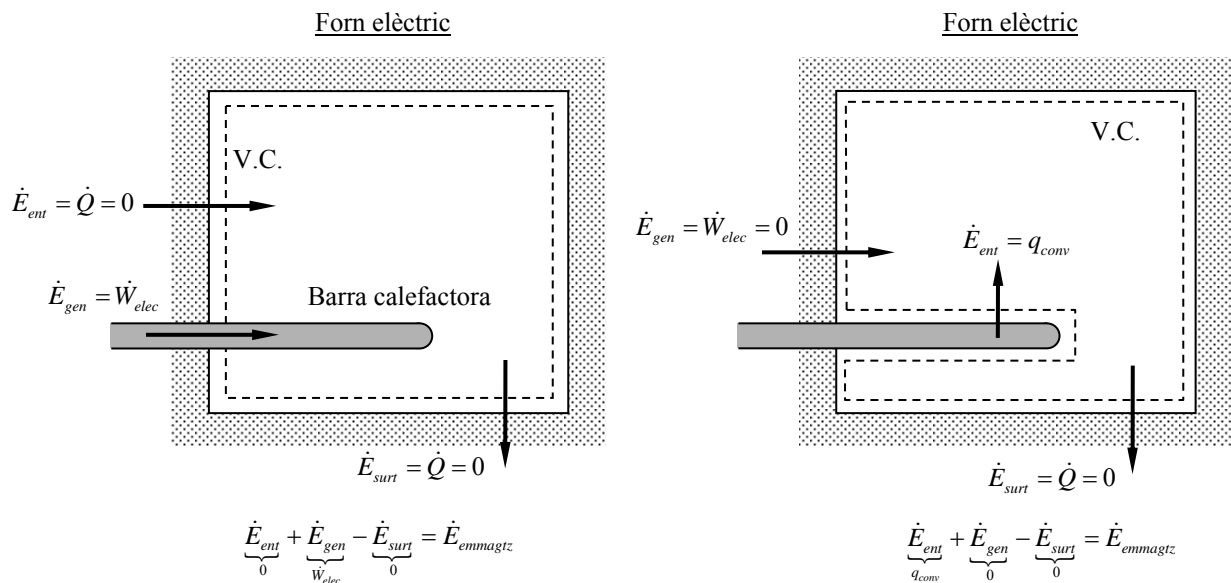
El terme \dot{E}_{emmagtz} és també una magnitud volumètrica i és referència a la variació d'energia interna, cinètica i potencial en tot el volum de control.

Exemple: suposem un forn elèctric ben aïllat que s'escalfa amb la barra calefactorsa de la figura per la que s'introdueix una potència elèctrica \dot{W}_{elec}

Considerem ara els dos volums de control de les dues figures. A la primera figura només travessa la superfície de control la potència elèctrica. A la

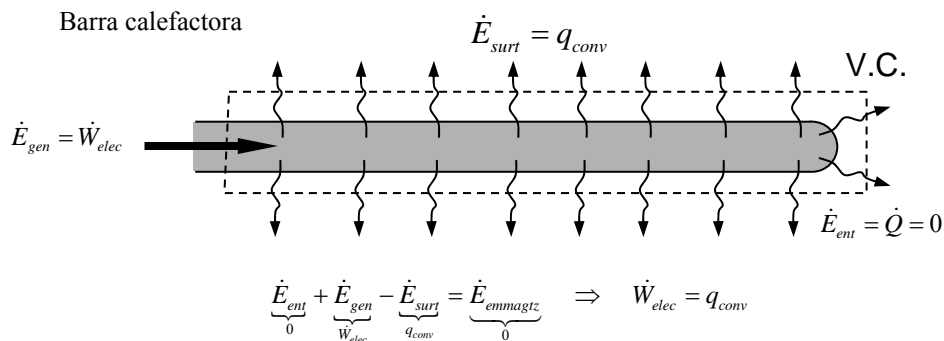
segona figura, només travessa el volum de control la potència tèrmica de convecció cedida per la barra calefactorsa a l'aire ja que com es veu la corrent elèctrica no travessa pas la superfície

de control. De forma que, malgrat que les potències considerades siguin del mateix valor, la interpretació de les mateixes pot ser funció del V.C. considerat.



A la primera figura veiem que la potència elèctrica és igual a la potència emmagatzemada. Així doncs, l'interior del forn s'anirà escalfant i anirà pujant la seva temperatura interior.

A la segona figura, succeeix el mateix, però el forn s'anirà escalfant degut a la potència tèrmica de convecció que la barra calefactorsa anirà cedint a l'interior del forn. Podem comprovar que aquestes dos quantitats son pràcticament iguals. Ho veurem si prenem ara com a volum de control la superfície de la barra calefactorsa i si tenim en compte una hipòtesis addicional: que la barra calefactorsa es troba aproximadament en regim estacionari. (no és del tot certa aquesta hipòtesis, perquè ?)



Si considerem que la barra s'anirà escalfant lleugerament a l'hora que el forn es va escalfant, veiem que la afirmació $\dot{W}_{elec} = q_{conv}$ no seria prou exacte. (en aquest cas $q_{conv} < \dot{W}_{elec}$)

1.7.2 Conservació de l'energia per un sistema tancat.

Suposem una massa de control fixa tal que a través del seu contorn l'energia es transfereix exclusivament per les interaccions de calor i treball. La calor és l'energia que es transfereix degut a un gradient de temperatures. Anomenem treball a totes les energies que es transfereixen al sistema sense la presència d'un gradient de temperatures.

En aquest cas, la variació neta d'energia de la massa de control és igual a la suma de la calor i el treball aportat al sistema. $dE = \delta Q + \delta W$ (conveni que diu que tota l'energia que entra al sistema es considera positiva +) La notació “ δ ” (diferencials no exactes) ens indica que les variacions depenen de la trajectòria. A la transferència de calor ens interessa considerar el temps en el que la calor i el treball són transferits. En aquest cas el primer principi l'expressem en funció de potències, $\frac{dE}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W}{dt}$ L'energia E inclou tots els tipus d'energia possibles del nostre sistema. En processos tèrmics, en general considerem només tres tipus d'energia, la interna, la cinètica i la potencial, de forma que $E = U + \frac{mv^2}{2} + mgy$ i per unitat de massa,

$$\frac{E}{m} = \frac{U}{m} + \frac{v^2}{2} + gy \Rightarrow e = u + \frac{v^2}{2} + gy \text{ en J/kg}$$

Veurem que sempre que existeixen gradients tèrmics, la variació d'energia cinètica i potencial són d'un ordre de magnitud negligible en front de les variacions d'energia interna. Suposem aigua a una velocitat $v=2$ m/s, una alçada $y=10$ m i $T=300$ K: [$c=4180$ J/(kgK)] Observem que $u=cT=4180 \times 300=1254000$ J/kg, $gy=100$ J/kg, $v^2/2=2$ J/kg. Veiem clarament que $u \gg gy$ i $u \gg v^2/2$, el que fa que no considerem en general aquests termes quan tractem fenòmens de transferència de calor.

1.7.3 Balanç d'energia d'un sistema obert

En un sistema obert el flux de massa que travessa la superfície de control és en general una de les formes principals del transport d'energia interna, cinètica i potencial.

Perquè el fluid travessi la frontera calen unes forces de pressió. Aquestes, en el seu desplaçament realitzen l'anomenat treball de flux.

($p v = p/\rho$).

Balanç d'energia d'un sistema obert,

$$\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W_s}{dt} + \frac{\delta W_\mu}{dt} = \frac{dE_\sigma}{dt} - \sum_{i=1}^N \left(e_i + \frac{p_i}{\rho_i} \right) \frac{dm_i}{dt}$$

Negligint $v^2/2$ i gy ,

$$e_i + \frac{p_i}{\rho_i} = u_i + \underbrace{\frac{v_i^2}{2} + gy_i}_{e_i} + \frac{p_i}{\rho_i} \approx u_i + \frac{p_i}{\rho_i} = u_i + p_i v_i = h_i \text{ (entalpia específica)}$$

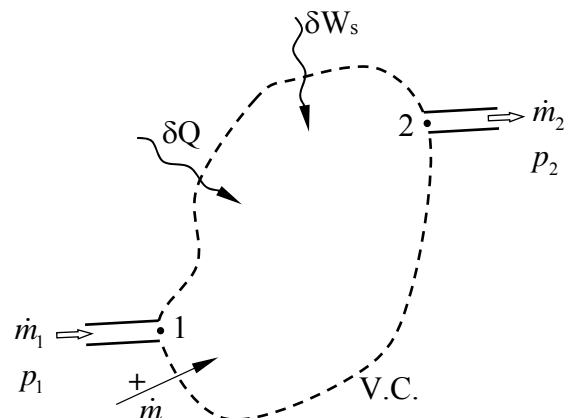
$$\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W_s}{dt} + \frac{\delta W_\mu}{dt} = \frac{dE_\sigma}{dt} - \sum_{i=1}^N h_i \frac{dm_i}{dt}$$

N = nombre de posicions a on té lloc la transferència de massa

h_i =entalpia específica a la localització “i” J/kg

$\frac{\delta Q}{dt}$ = potència tèrmica que travessa la superfície de control. (W)

$\frac{\delta W_s}{dt}$ = potència mecànica aportada al volum de control a través d'un eix. (W)



$\frac{\delta W_\mu}{dt}$ = potència tèrmica aportada al volum de control que té com origen la fricció, en general negligible quan coexisteix amb processos de transferència de calor.

$\frac{dE_\sigma}{dt}$ = variació de l'energia continguda en el volum de control per unitat de temps. (en general deguda a un canvi de temperatura)

$\sum_{i=1}^N h_i \frac{dm_i}{dt}$ = flux d'entalpia degut al cabal que travessa la superfície de control en totes les localitzacions "i" considerades. ($\frac{dm_i}{dt} = +10$ si entren 10 kg/s per la superfície de control)

Si el flux es estacionari $\frac{dE_\sigma}{dt} = 0$ o sigui que no canvia al llarg del temps l'energia interna

continguda al volum de control en aquest cas l'eq. és $\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W_s}{dt} + \frac{\delta W_\mu}{dt} = - \sum_{i=1}^N h_i \frac{dm_i}{dt}$

es la mateixa que fèiem servir a termodinàmica, $\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W_s}{dt} + \frac{\delta W_\mu}{dt} = \Delta[\dot{m}h]$ ($\Sigma h_{\text{sort}} - \Sigma h_{\text{ent}}$)

Al tanto, aquesta última equació només es certa en regim estacionari.

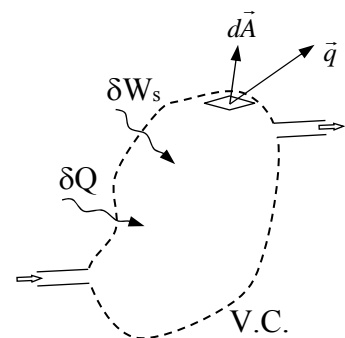
1.7.4 Balanç d'energia en forma integral d'un sistema obert

$$\frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W_s}{dt} + \frac{\delta W_\mu}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} e \rho dv + \iint_{S.C.} \underbrace{\left(e + \frac{p}{\rho} \right)}_{\approx h} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{A})$$

$$\frac{\delta Q}{dt} = \iint_{S.C.} -\frac{\vec{q}}{A} \cdot d\vec{A} + \iiint_{V.C.} \dot{g} \cdot dv$$

Es pot veurà que quan el fluid abandona la superfície de control, el producte escalar $\vec{v} \cdot d\vec{A} > 0$ de forma que el cabal màssic sortint es comptabilitza com positiu i l'entrant com negatiu. Observi que és el mateix que considerem a l'equació del sumatori a l'apartat 1.6.3.

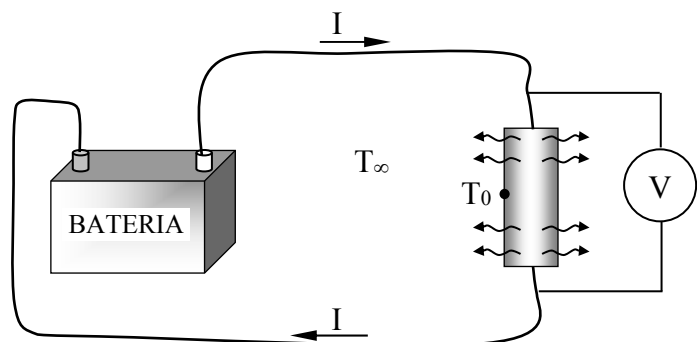
($\frac{dm_i}{dt} = +10$ kg/s de fluid entrant, però observem el signe negatiu davant del sumatori).



Exercici 4: dissipació de calor d'una resistència elèctrica

Connectem una resistència elèctrica de R [Ω] de diàmetre D i longitud L a una bateria de V volts a través d'uns fils de resistència negligible. Aquest conjunt és situa en un recinte amb aire en calma a la temperatura T_∞ . Suposem que assolim el règim estacionari, determinar:

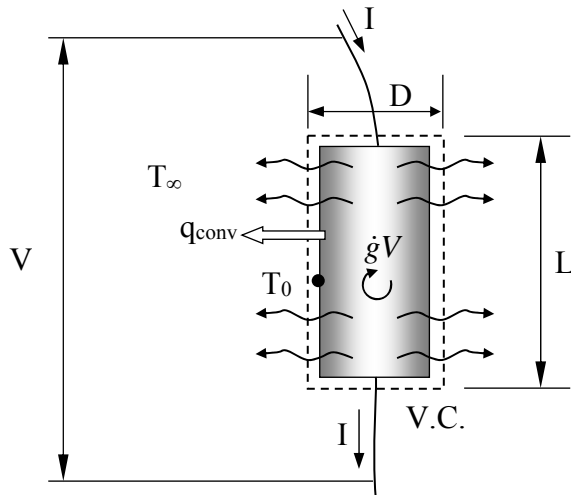
1) El balanç d'energia d'un volum



de control que envolti la resistència.

- 2) El balanç d'energia a un volum de control que envolti a tot el sistema (bateria i resistència)
- 3) La temperatura T_0 de la superfície de la resistència si el coeficient de convecció és h_c i podem negligir la radiació.
- 4) La generació interna de potència.

Solució: 1)



$\dot{E}_{ent} = 0$ no entra potència tèrmica per la S.C.

$\dot{E}_{gen} = IV = P_{elec}$ tota la potència elèctrica es dissipa per efecte Joule

$\dot{E}_{surt} = q_{conv}$ la resistència tèrmica assoleix una temperatura superficial $T_0 > T_\infty$ per poder dissipar per convecció tota la potència elèctrica

$\dot{E}_{emmagtz} = 0$ estem en règim estacionari.

$$\underbrace{\dot{E}_{ent}}_0 + \underbrace{\dot{E}_{gen}}_{P_{elec}} - \underbrace{\dot{E}_{surt}}_{q_{conv}} = \underbrace{\dot{E}_{emmagtz}}_0 \Rightarrow P_{elec} = q_{conv}$$

- 2) El volum de control V.C. també envolta els fils elèctrics. (el W_{elec} no travessa la S.C. !)

$\dot{E}_{ent} = 0$ no entra potència tèrmica.

$\dot{E}_{gen} = 0$ la I no travessa la S.C.

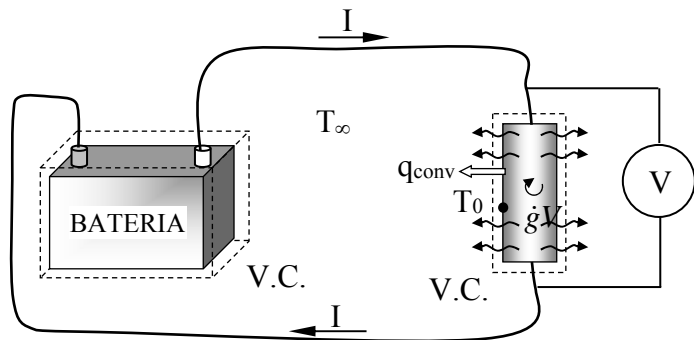
$\dot{E}_{surt} = q_{conv}$ potència de convecció

$\dot{E}_{emmagtz} = -P_{quim}$ la pila cedeix la seva potència química emmagatzemada.

$$\underbrace{\dot{E}_{ent}}_0 + \underbrace{\dot{E}_{gen}}_0 - \underbrace{\dot{E}_{surt}}_{q_{conv}} = \underbrace{\dot{E}_{emmagtz}}_{-P_{quim}} \text{ i per tant}$$

$q_{conv} = P_{quim}$ O sigui, la potència que dissipem per convecció prové justament de l'energia química emmagatzemada a la pila.

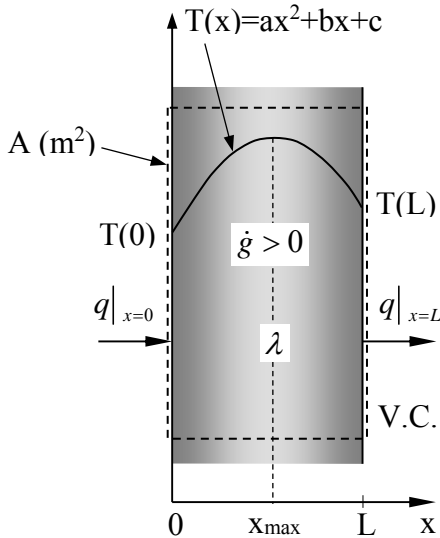
- 3) Igualant la $P_{elec} = IV = \frac{V^2}{R}$ amb la $q_{conv} = h_c A (T_0 - T_\infty)$ trobem T_0 ($A = \text{sup. lateral} + 2 \text{ bases}$)



4) Potència generada, $P_{elec} = \frac{V^2}{R}$, $Vol = \frac{\pi D^2}{4} L$, $\dot{g} = \frac{P_{elec}}{Vol} = \frac{4V^2}{R \pi D^2 L}$ W/m³

Qüestió 5:

A la figura és mostra una paret de grans dimensions de gruix L, conductivitat tèrmica λ i amb una generació interna uniforme de potència \dot{g} W/m³.



En un instant t el perfil de temperatures a la paret és $T(x) = ax^2 + bx + c$ (T esta expressada en graus Celsius i x en metres) Cal realitzar un balanç de potència tèrmica en el V.C. de superfície frontal A (m²) que s'indica a la figura.

Dades:

$L = 0,2$ m, $\dot{g} = 30000$ W/m³, $\lambda = 1$ W/(m·K)
 $A = 1$ m², $a = -15000$, $b = 2600$, $c = 200$

Determinar:

- 1) Potència tèrmica que entra i surt del V.C.
- 2) Quan val la potència emmagatzemada al V.C. a l' instant t considerat.
- 3) T(0), temperatura màxima a la paret i T(L)

$$q(x) = -\lambda A \frac{dT}{dx} = -\lambda A (2ax + b)$$

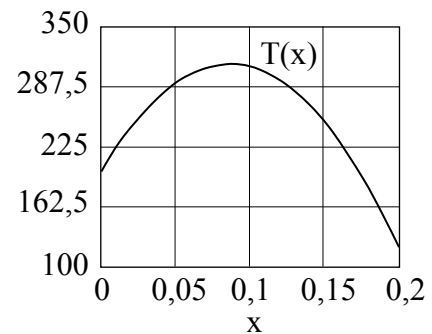
$$\dot{E}_{ent} = q(0) = -2600, \quad \dot{E}_{surt} = q(L) = 3400 \text{ en W}$$

$$\dot{E}_{gen} = \dot{g} \underbrace{A \cdot L}_V = 6000 \text{ W}$$

$$\underbrace{\dot{E}_{ent}}_{-2600} + \underbrace{\dot{E}_{gen}}_{6000} - \underbrace{\dot{E}_{surt}}_{3400} = \dot{E}_{emmagatzemada} = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = 2ax + b = 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{-b}{2a} = 0,087 \text{ m}$$

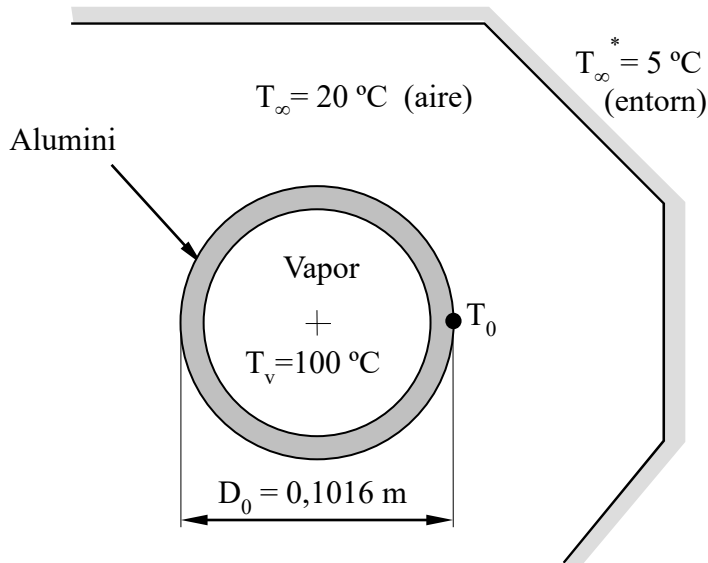
$$T(0) = 200 \text{ }^\circ\text{C}, \quad T(x_{max}) = 313 \text{ }^\circ\text{C}, \quad T(L) = 120 \text{ }^\circ\text{C}$$



Observem que surt potència per les dues cares, $x=0$ i $x=L$ i es justament igual a la potència generada.

1.8 EXERCICIS RESOLTS

Exercici 5: conducte amb flux de radiació directe



Per una canonada horitzontal d'alumini de 4 in. de diàmetre exterior (1 in.=25,4 mm), situada en un recinte amb aire en calma a 20 °C, circula vapor a 100 °C i 1013 mbar (saturat) La canonada bescanvia potència radiant amb el seu entorn a $T_\infty^*=5 \text{ °C}$. També rep exteriorment una potència radiant addicional de 1000 W per metre lineal de canonada que es distribueix uniformement. Calculeu:

- a) La pèrdua de potència del vapor per metre lineal de canonada.
- b) Si aïllem la canonada amb vidre

Emissivitat de l'Alumini $\epsilon = 0,12$

cel·lular i la recobrim exteriorment amb xapa d'alumini comercial, trobeu el gruix necessari per reduir les pèrdues al 25 % del valor calculat a l'apartat anterior.

- c) Trobar el gruix d'aïllant si la seva temperatura exterior ha de ser $T_0=60 \text{ °C}$
- d) Plantegeu un algorisme per al cas que el vapor a la mateixa pressió estigui inicialment a 150 °C (vapor reescalfat).

Nota: Estimeu només aquells valors que no puguin calcular-les amb expressions numèriques convenients. Empeu la fórmula simplificada següent per a determinar el coeficient de convecció de l'aire, $h_c = 1,31 \times \left(\frac{T_0 - T_\infty}{D_{ext}} \right)^{0,25} p^{0,50}$ (p en bars, T_0 temperatura superfície)

$$h_c = 1,31 \times \left(\frac{T_0 - T_\infty}{D_{ext}} \right)^{0,25} p^{0,50} \quad (p \text{ en bars, } T_0 \text{ temperatura superfície})$$

Per al vidre cel·lular entre 35 i 700 K preneu $\lambda_{aill}(\bar{T}) = 0,056 + 1,31 \times 10^{-4} (\bar{T} - 294)$

Taula 1 Valors aproximats per a h_c en diferents processos convectius.

Mecanisme	Fluid	h_c , W/(m ² K)
<i>Canvi de fase</i>	Condensació de vapor d'aigua	5000 – 100000
	Aigua bullent	2500 – 25000
<i>Convecció forçada</i>	Metalls líquids	500 – 20000
	Aigua	250 – 12000
	Orgànics viscosos	50 – 3000
	Aire	15 – 300
<i>Convecció natural</i>	Metalls líquids	150 – 1200
	Aigua	100 – 850
	Orgànics viscosos	5 – 100
	Aire	5 – 20

Solució:

a) Pèrdua de potència amb el tub nu (longitud = L)

Conveni de signes:

Adoptem una direcció radial amb el sentit positiu cap al centre.

$q < 0 \Rightarrow$ pèrdua de potència $q > 0 \Rightarrow$ guany de potència

Dades:

$T_\infty = 20 + 273,15 = 293,15 \text{ K}$ (aire)

$P = 1013 \text{ mbar} = 1,013 \text{ bar}$

$T_\infty^* = 5 + 273,15 = 278,15 \text{ K}$ (entorn)

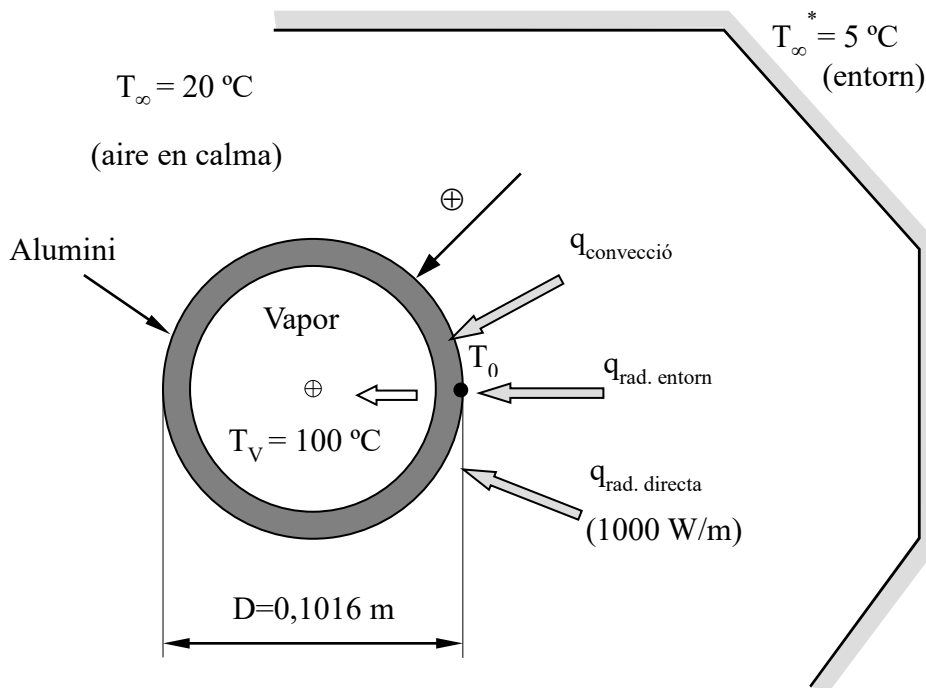
$\alpha_{Al} = \epsilon_{Al} = 0,12$ (Kirchhoff)

$D = 4 \times 25,4 = 101,6 \text{ mm}$

$q_{\text{rad. directa}} = 1000 \text{ W/m}$

a) Pèrdua de potència del tub nu. (longitud L)

Si observem els ordres de magnitud dels coeficients de convecció ens adonem que la resistència superficial exterior amb l'aire, així com la resistència de radiació amb l'entorn són molt més grans que la suma de la resistència del vapor (interior) i la de la xapa. Es recomana que feu els càlculs previs pertinents abans de negligir qualsevol terme essencial d'un problema.



$$h_c(T_0, D_{ext}) = 1,31 \times \left[\frac{T_0 - T_\infty}{D_{ext}} \right]^{0,25} P^{0,50} \quad ; \quad \lambda_{aill}(\bar{T}) = 0,056 + 1,31 \cdot 10^{-4} (\bar{T} - 294) \quad \text{S.I.}$$

En aquest exercici, tractant-se d'un vapor saturat i d'un tub d'alumini (λ elevat), podem considerar $R_{VAPOR} + R_{COND} \ll R_{AIRE}$ la qual cosa representarà un salt tèrmic negligible entre el vapor i la superfície exterior del tub $\Rightarrow T_0 \approx T_v = 373,15 \text{ K}$

Determinem el coef. de convecció de l'aire,

$$h_c(T_0, D_{ext}) = 1,31 \times \left[\frac{T_0 - T_\infty}{D_{ext}} \right]^{0,25} P^{0,50} = 6,94 \frac{W}{m^2 K} \quad (\text{convecció. natural})$$

Àrea de transferència tèrmica: $A_{ext} = \pi DL$

Al no conèixer L treballarem per unitat de longitud.

El balanç d'energia pel tub nu resulta ser,

$$q = q_{conveccio} + q_{radiacio} + q_{rad.directa}$$

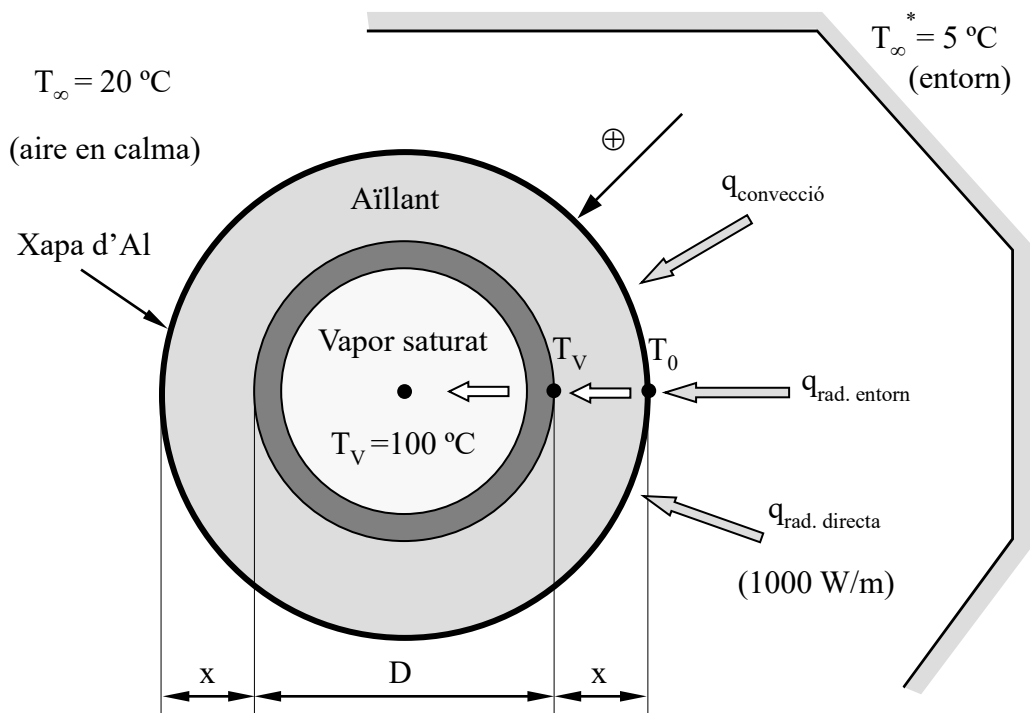
$$q = h_c(T_0, D) A_{ext} (T_\infty - T_0) + \varepsilon_{Al} A_{ext} \sigma (T_\infty^{*4} - T_0^4) + \alpha_{Al} q_{rad.directa} L$$

$$q = h_c(T_0, D) \widehat{\pi DL} (T_\infty - T_0) + \varepsilon_{Al} \widehat{\pi DL} \sigma (T_\infty^{*4} - T_0^4) + \alpha_{Al} 1000 \cdot L$$

$$\frac{q}{L} = h_c(T_0, D) \pi D (T_\infty - T_0) + \varepsilon_{Al} \pi D \sigma (T_\infty^{*4} - T_0^4) + \alpha_{Al} 1000 = -86,3 \frac{W}{m}$$

$$\frac{q}{L} = \underbrace{-177,2}_{Conv.} + \underbrace{(-29,1)}_{Rad.} + \underbrace{120}_{Rad.dir.} = -86,3 \frac{W}{m} \text{ (pèrdues)}$$

b) Pèrdua de potència del tub aïllat amb vidre cel·lular i recobert amb xapa d'Al comercial.



Segons l'enunciat, $\frac{q}{L} = 0,25 \times \left(-86,3 \frac{W}{m} \right) = -21,6 \frac{W}{m}$ (reducció del 75 %)

Incògnites T_0 i x ,

$$\frac{q}{L} \Big|_{cond.} = -21,6 \frac{W}{m} = \frac{T_0 - T_{vapor}}{\ln\left(\frac{D+2x}{D}\right)} \cdot \frac{1}{2\pi \left[0,056 + 1,31e-4 \left(\frac{T_0 + T_{vapor}}{2} - 294 \right) \right]} \quad x = f(T_0)$$

Substituïm $x = f(T_0)$ a la següent equació del balanç a la superfície de l'aïllant,

$$\frac{q}{L}\bigg|_{c+r} = -21,6 \frac{W}{m} = h_c(T_0, D+2x) \pi(D+2x) (T_\infty - T_0) + \varepsilon_{Al} \pi(D+2x) \sigma (T_\infty^{*4} - T_0^4) + \alpha_{Al} 1000$$

Ens queda una equació amb una incògnita, T_0 , que resollem numèricament amb una rutina tipus SOLVE, bisecció o Newton Raphson. Obtenim $T_0 = 53,6 \text{ }^\circ\text{C} = 326,8 \text{ K}$, $x=68,7 \text{ mm}$ $h_c=4,5 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$. A les equacions anteriors hem emprat la conductivitat de l'aïllant a la temperatura mitjana entre la temperatura del vapor i la temperatura superficial T_0

$$\lambda_{aïll}(\bar{T}) = 0,056 + 1,31 \cdot 10^{-4} (\bar{T} - 294) = 0,056 + 1,31 \cdot 10^{-4} \left(\frac{T_{vapor} + T_0}{2} - 294 \right)$$

El coeficient de convecció, $h_c(T_0, D+2x) = 1,31 \times \left[\frac{T_0 - T_\infty}{D+2x} \right]^{0,25} p^{0,50}$, és funció de T_0 i x .

c) Canonada aïllada amb $T_0=60 \text{ }^\circ\text{C} = 333,15 \text{ K}$

En aquest cas, no coneixem la potència q/L . Substituint la temperatura T_0 a les dues equacions emprades a l'apartat anterior, ens queden 2 equacions amb 2 incògnites q/L i el gruix x . Les igualem i obtenim una equació amb el gruix com a única incògnita que resollem per qualsevol dels mètodes abans esmentats.

$$\frac{q}{L} = \frac{T_0 - T_{vapor}}{\ln\left(\frac{D+2x}{D}\right)} \quad (\text{eq. 1}) \quad (\text{incògnites } q/L \text{ i } x)$$

$$2\pi \left[0,056 + 1,31e-4 \left(\frac{T_0 + T_{vapor}}{2} - 294 \right) \right]$$

$$\frac{q}{L} = h_c(T_0, D+2x) \pi(D+2x) (T_\infty - T_0) + \varepsilon_{Al} \pi(D+2x) \sigma (T_\infty^{*4} - T_0^4) + \alpha_{Al} 1000 \quad (\text{eq. 2})$$

Igualem les dues equacions anteriors i trobem l'única incògnita x . Avaluem després q/L . Adjuntem a continuació totes les solucions en una taula.

CONCEPTE	a)	b)	c)
$q_{\text{convecció}}/L$	-177,2 W/m	-113,9 W/m	-119,6 W/m
$q_{\text{rad. entorn}}/L$	-29,1 W/m	-27,7 W/m	-25,8 W/m
$q_{\text{rad. directa}}/L$	+120 W/m	+120 W/m	+120 W/m
$q/L = q_{\text{conducció}}/L$	-86,3 W/m	-21,6 W/m	-25,4 W/m
x (mm)	-	68,7 mm	44,6 mm
$T_0 = T_{\text{sup. ext}}$	100 °C	53,6 °C	60 °C
$T_0 = T_{\text{sup. ext.}}$	373,15 K	326,8 K	333,15 K
$\lambda_{\text{aïllant}}$	-	0,063 W/(m·K)	0,0637 W/(m·K)
h_c	6,94 W/(m ² K)	4,5 W/(m ² K)	5,0 W/(m ² ·K)

2 CONDUCCIÓ UNIDIMENSIONAL EN RÈGIM PERMANENT

2.1 AÏLLANTS TÈRMICS

2.1.1 Generalitats

Anomenem aïllants als materials de conductivitat tèrmica reduïda [$\leq 0,10 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$]. Aquesta conductivitat baixa es pot assolir amb materials purs i homogènis que en general són cars o poc abundants (com el suro, refractari, etc.).

En els aïllants tipus fibra, pols o escames, el material base és conforma de forma molt fina i s'apila deixant una fracció important d'aire entre les fibres, pols o escames. (fibra de vidre, etc.) La conductivitat tèrmica efectiva depèn molt estretament de la densitat global del conjunt. Calen densitats molt baixes per assolir bons aïllants.

Aprofitant la baixa conductivitat de l'aire, es produeixen materials compostos que disposen de moltes bombolles d'aire segellades en una estructura o matriu rígida, que són els anomenats aïllants cel·lulars (els sistemes d'espuma són un exemple)

Al no tractar-se d'un material homogèni, es parla d'una conductivitat tèrmica efectiva.

Si augmentem la temperatura, s'afavoreix la convecció i radiació dins de les bombolles, el que fa incrementar la conductivitat tèrmica efectiva.

La conductivitat tèrmica d'un material porós depèn també de la seva humitat.

Per exemple, la conductivitat d'un totxo sec és $\lambda=0,35 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, la de l'aigua és $\lambda=0,60 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ i en canvi el totxo humit té una conductivitat tèrmica major $\lambda=1,0 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$. Això es pot explicar en part per l'efecte de la convecció, degut al moviment de l'aigua per capil·laritat dins del material porós.

AÏLLANT	$\rho \text{ kg}/\text{m}^3$	$\lambda \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
Manta de fibra de vidre revestida de paper	16	0,046
Planxa de poliestirè expandit estirat (R-12)	55	0,027
Planxa de suro	120	0,039
Bloc de silicat de calci	190	0,055

2.1.2 Aïllament d'una paret plana amb un o varis materials

Exercici 1: problema del forn

Un forn que té una temperatura interior $T_i = 1400 \text{ }^\circ\text{C}$ està construït amb parets de $0,25 \text{ m}$ de gruix i una conductivitat $\lambda_p = 1,2 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$. La temperatura mitjana d'aquesta paret no ha de superar els $1350 \text{ }^\circ\text{C}$

Per reduir les pèrdues hom disposa de maons de (apilats pel cantó de 100 mm),

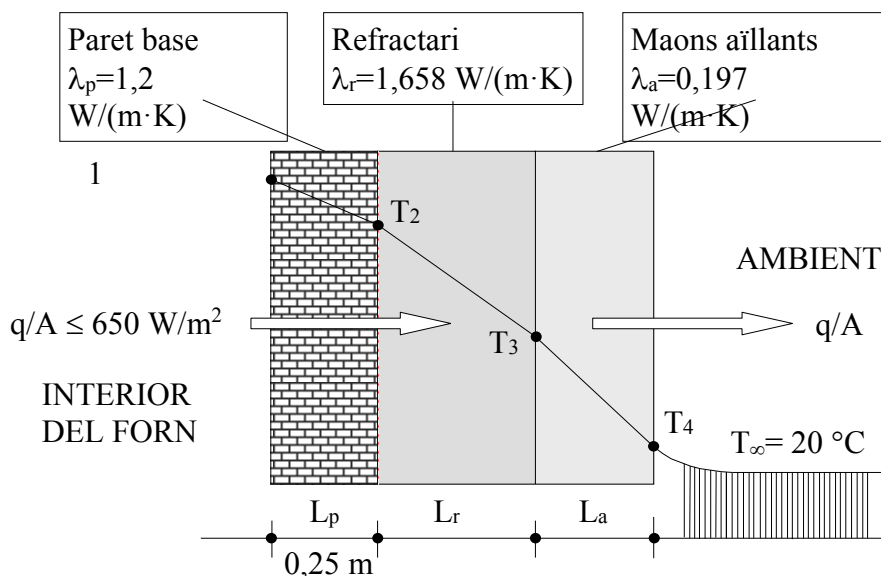
- refractari porós [$\lambda_r = 1,658 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$] i de
- maons aïllants [$\lambda_a = 0,197 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$] de $100 \times 250 \times 60 \text{ mm}$ en ambdós casos.

El refractari porós i l'aïllant suporten, com a màxim, $1300 \text{ }^\circ\text{C}$ i $1100 \text{ }^\circ\text{C}$, respectivament. El forn està en un recinte en el qual la temperatura mitjana de l'ambient (aire i entorn) és $T_\infty = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

El coeficient superficial de transmissió de calor a la superfície exterior de l'aïllant es pot prendre com:

$$h = 3 (T_4 - T_\infty)^{1/3} + 5 \times 10^{-8} \frac{T_4^4 - T_\infty^4}{T_4 - T_\infty}, \quad \frac{W}{m^2 K}$$

El forn és d'unes dimensions que permeten considerar que la transmissió de calor a les parets és unidimensional. Per a l'estat estacionari, trobeu el gruix de les parets que dona les pèrdues mínimes i calculeu la pèrdua calorífica un cop aïllat.



Solució:

- a) Trobar el gruix de les parets del forn que dona les pèrdues mínimes.
 b) Minimitzar també el gruix accepten les pèrdues màximes admissibles.

Limitacions per qüestions tèrmiques i mecàniques:

- 1) $\frac{q}{A} \leq 650 \frac{W}{m^2}$ (pèrdues màximes)
- 2) $T_1 = 1400 \text{ }^\circ\text{C}$ $\frac{T_1 + T_2}{2} \leq 1350 \text{ }^\circ\text{C}$ (temperatura del pla mig de la paret base)
- 3) Temperatura màxima del refractari porós, $T_2 \leq 1300 \text{ }^\circ\text{C}$
- 4) Temperatura màxima de l'aïllant ceràmic, $T_3 \leq 1100 \text{ }^\circ\text{C}$

Dades: $L_p=0,25 \text{ m}$; $\lambda_p=1,2$; $\lambda_r=1,658$; $\lambda_a=0,197$ (S.I.) $L_r=0,1 \text{ m}$; $L_a=0,1 \text{ m}$

$$h_{C+R}(T_4) = 3 (T_4 - T_\infty)^{1/3} + 5 \times 10^{-8} \frac{T_4^4 - T_\infty^4}{T_4 - T_\infty} \quad (T \text{ en } K)$$

Planteig de les equacions bàsiques,

$$\frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_p}{\lambda_p}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{L_r}{\lambda_r}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{L_a}{\lambda_a}} = h_{C+R}(T_4) \times (T_4 - T_\infty)$$

Mentre treballem amb igualtats en les que apareixen només diferències de temperatures, podem emprar graus centígrads. Si en la igualtat considerada, apareix una temperatura a la quarta, caldrà considerar totes les temperatures de la igualtat en graus Kelvin.

Condicció 2)

$$\frac{1400 + T_2}{2} \leq 1350 \text{ }^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad T_2 \leq 1300 \text{ }^\circ\text{C} \quad \text{equivalent a la condició 3)}$$

Apliquem les condicions 1) i 2) a la paret base

$$\frac{q}{A} = \frac{1400 - T_2}{\frac{0,25}{1,2}} \leq 650 \frac{W}{m^2} \quad \Rightarrow \quad T_2 \geq 1264,6 \text{ }^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad T_{2,\min} = 1264,6 \text{ }^\circ\text{C}$$

Si T_2 pren el seu valor màxim $T_{2,\max} = 1300 \text{ }^\circ\text{C}$ aleshores $\frac{q}{A}|_{\min} = \frac{1400 - 1300}{\frac{0,25}{1,2}} = 480 \frac{W}{m^2}$

Per tant (en $^\circ\text{C}$) si $1300 \geq T_2 \geq 1264,6 \quad \Rightarrow \quad 480 \leq \frac{q}{A} \leq 650 \frac{W}{m^2} \quad (1)$

Valor de T_4 per les pèrdues límits

Les pèrdues hauran d'estar compreses entre les pèrdues màximes i mínimes admissibles.

Avaluem T_4 per ambdues pèrdues límits,

$$\frac{q}{A} = h_{C+R}(T_4) \times (T_4 - T_\infty) = 3 \times (T_4 - T_\infty)^{4/3} + 5 \times 10^{-8} (T_4^4 - T_\infty^4) \leq 650 \frac{W}{m^2} \Rightarrow T_4 \leq 59,68^\circ C$$

$$\frac{q}{A} = h_{C+R}(T_4) \times (T_4 - T_\infty) = 3 \times (T_4 - T_\infty)^{4/3} + 5 \times 10^{-8} (T_4^4 - T_\infty^4) \geq 480 \frac{W}{m^2} \Rightarrow T_4 \geq 51,28^\circ C$$

Per tant s'ha de complir simultàniament que, $480 \leq \frac{q}{A} \leq 650 \Rightarrow 51,28 \leq T_4 \leq 59,68$

Essent, $T_{4,\min} = 51,28^\circ C$; $T_{2,\max} = 1300^\circ C$; $\left. \frac{q}{A} \right|_{\min} = 480 \frac{W}{m^2}$ (pèrdua mínima)

$T_{4,\max} = 59,68^\circ C$; $T_{2,\min} = 1264,58^\circ C$; $\left. \frac{q}{A} \right|_{\max} = 650 \frac{W}{m^2}$ (pèrdua màxima)

q/A s'ha d'apropar al valor mínim admissible si volem minimitzar les pèrdues.

Per cada flux de potència q/A comprès entre el flux mínim i màxim, trobem amb les equacions anteriors les temperatures T_2 i T_4 ,

$$\frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_p}{\lambda_p}} \Rightarrow T_2 = T_1 - \frac{q}{A} \times \frac{L_p}{\lambda_p} = \dots$$

$$\frac{q}{A} = h_{C+R}(T_4) \times (T_4 - T_\infty) = 3 \times (T_4 - T_\infty)^{4/3} + 5 \times 10^{-8} (T_4^4 - T_\infty^4) \quad (\text{solve}) \Rightarrow T_4 = \dots$$

Coneguts T_2 i T_4 ens queda per determinar L_a , L_r i T_3

D'acord a l'enunciat $L_a = 0,1 n_a$ i $L_r = 0,1 n_r$ de forma que podem escriure,

$$\frac{q}{A} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{L_r}{\lambda_r}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{L_a}{\lambda_a}} = \frac{T_2 - T_4}{\frac{0,1 n_r}{\lambda_r} + \frac{0,1 n_a}{\lambda_a}}$$

$$\frac{0,1 n_r}{\lambda_r} + \frac{0,1 n_a}{\lambda_a} = \frac{T_2 - T_4}{\frac{q}{A}} \Rightarrow \left[n_r = -\frac{\lambda_r}{\lambda_a} n_a + \frac{\lambda_r}{0,1} \left(\frac{T_2 - T_4}{\frac{q}{A}} \right) \right] \text{ eq. general de les}$$

isopèrdues.

Relació que ens indica com n_r és funció del flux q/A i del nombre n_a de maons aïllants escollits. Posteriorment considerarem el fet de que n_r només pot ser un enter positiu.

Rectes d'isopèrdues mínimes i màximes

Substituïm a l'equació anterior els valors de T_2 , T_4 i q/A per la pèrdua màxima i mínima admissible.

Recta d'isopèrdues mínimes

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{A}_{\min} &= 480 \frac{W}{m^2} \\ T_4 &= 51,28 \text{ } ^\circ C \\ T_2 &= 1300 \text{ } ^\circ C \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$n_{r, \min} = -\frac{1,658}{0,197} n_a + \frac{1,658}{0,1} \left(\frac{1300 - 51,28}{480} \right) = -8,42 n_a + 43,13$$

Recta de isopèrdues màximes

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{A}_{\max} &= 650 \frac{W}{m^2} \\ T_4 &= 59,68 \text{ } ^\circ C \\ T_2 &= 1264,58 \text{ } ^\circ C \end{aligned} \right\} \Rightarrow n_{r, \max} = -\frac{1,658}{0,197} n_a + \frac{1,658}{0,1} \left(\frac{1264,58 - 59,68}{650} \right) = -8,42 n_a + 30,73$$

5) Considerem la condició 4), $T_3 \leq T_{3, \max} = 1100 \text{ } ^\circ C$

Troblem els punts que relacionen n_r i n_a per $T_3 = T_{3, \max}$ ($T_{3, \max} = 1100$ valor màxim admissible)
Per cada flux de potència q/A comprès entre el flux mínim i màxim, obtenim un valor de T_2 i T_4 concrets, de forma que tenim,

$$\frac{q}{A} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{0,1 n_a}{\lambda_a}} \Rightarrow \frac{q}{A} \leq \underbrace{\frac{T_{3, \max} - T_4}{\frac{0,1 n_a}{\lambda_a}}}_{\boxed{n_a \leq \frac{T_{3, \max} - T_4}{\frac{q}{A}} \frac{\lambda_a}{0,1}}}$$

s'ha de complir $\forall q/A$ admissible.

A partir de l'eq. general de les isopèrdues (vàlida $\forall q/A$ admissible),

$$n_r = \frac{\lambda_a}{0,1} \left(\frac{T_2 - T_4}{\frac{q}{A}} \right) - \frac{\lambda_r}{\lambda_a} n_a \quad n_r \geq \frac{\lambda_a}{0,1} \frac{T_2 - T_4}{\frac{0,1 n_a}{\lambda_a}} - \frac{\lambda_r}{\lambda_a} n_a \quad \text{i operant obtenim la}$$

següent relació funcional entre n_r i n_a , $n_r \geq \left(\frac{T_2 - T_{3, \max}}{T_{3, \max} - T_4} \right) \frac{\lambda_r}{\lambda_a} n_a$ Veiem que no es tracta

d'una relació lineal sent la pendent funció de T_2 i T_4 i aquestes de q/A , per tant no constant.
Els extrems de les anteriors desigualtats ens determinen les següents relacions límits,

$$\boxed{n_{a,\text{lim}} = \frac{T_{3,\text{màx}} - T_4}{\frac{q}{A}} \frac{\lambda_a}{0,1}} \Rightarrow \boxed{n_{r,\text{lim}} = \left(\frac{T_2 - T_{3,\text{màx}}}{T_{3,\text{màx}} - T_4} \right) \frac{\lambda_r}{\lambda_a} n_{a,\text{lim}}}$$

Malgrat que es tracti d'una corba, determinem dos punts de la mateixa A, B que corresponen a les pèrdues màximes i mínimes respectivament. Unim els dos punts per una recta ja que com es pot comprovar la pendent varia molt poc en l'interval compres entre aquest dos punts.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{q}{A} \Big|_{\text{màx}} = 650 \frac{W}{m^2} \\ \text{Per } T_4 = 59,68 \text{ }^\circ\text{C} \\ T_3 = 1100 \text{ }^\circ\text{C} \\ T_2 = 1264,58 \text{ }^\circ\text{C} \end{array} \right\} \Rightarrow A(n_a, n_r) = (3,15, 4,2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{q}{A} \Big|_{\text{mín}} = 480 \frac{W}{m^2} \\ \text{Per } T_4 = 51,28 \text{ }^\circ\text{C} \\ T_3 = 1100 \text{ }^\circ\text{C} \\ T_2 = 1300 \text{ }^\circ\text{C} \end{array} \right\} \Rightarrow B(n_a, n_r) = (4,3, 6,9)$$

La recta que aproxima la corba de punts límits i que passa pels punts A i B és la següent,

$$\text{Si } n_r = 2,3545 n_a - 3,2257 \Rightarrow T_3 = 1100$$

$$\text{Si } n_r \geq 2,3545 n_a - 3,2257 \Rightarrow T_3 \leq 1100$$

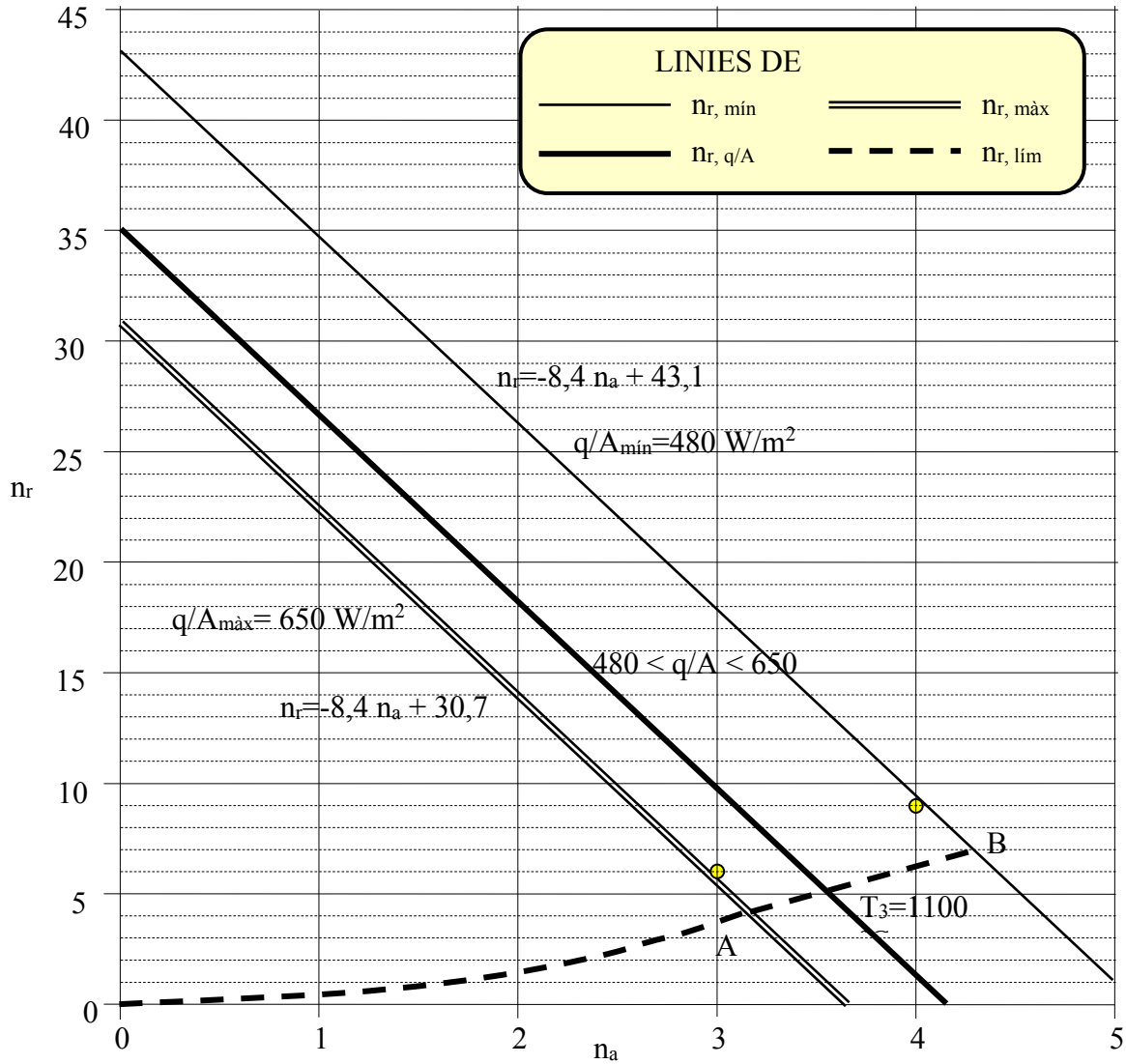
Donat un flux q/A compres entre el valor mínim i màxim, i amb $T_3=1100$ trobem un parell (n_a, n_r) que se situa justament damunt de la recta trobada.

Sabem que fixat un valor de q/A , correspon un valor de T_2 determinat de forma que si augmentem n_r per sobre del seu valor límit, T_3 serà inferior al valor màxim admissible.

$$\frac{q}{A} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{0,1 n_r}{\lambda_r}} \Rightarrow T_3 = T_2 - \frac{q}{A} \frac{0,1 n_r}{\lambda_r}$$

El gràfic que s'adjunta ens permet visualitzar la solució. Per un n_a trobem el n_r que correspon a la isopèrdua mínima. Si prenem el seu valor enter, estem escollint la intersecció immediatament inferior, o sigui la més propera a la recta de pèrdues mínimes. De totes les solucions possibles ens quedem amb la de gruix mínim, que serà la més propera a la recta amb $T_3=1100$

$$n_r(n_a) = E \left[\frac{\lambda_r}{0,1} \left(\frac{T_2 - T_4}{\frac{q}{A}} \right) - \frac{\lambda_r}{\lambda_a} n_a \right] \quad \text{essent} \quad T_2 = T_2 \left(\frac{q}{A} \right) \quad i \quad T_4 = T_4 \left(\frac{q}{A} \right)$$



$n_r(2) = 26$; $n_r(3) = 17$; $n_r(4) = 9$

La solució (4,9) és la que correspon a pèrdues mínimes. Trobem ara per el parell (4,9) el valors definitius de totes les variables,

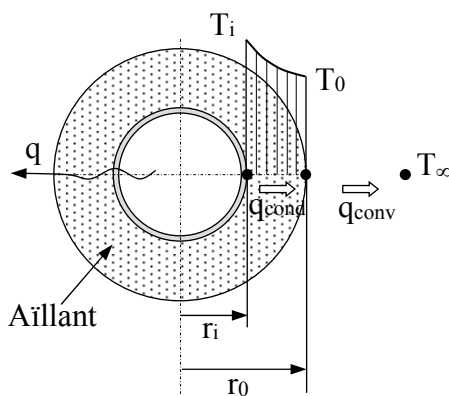
$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{A} &= \frac{T_1 - T_4}{\frac{L_p}{\lambda_p} + \frac{0,1n_r}{\lambda_r} + \frac{0,1n_a}{\lambda_a}} = \frac{1400 - T_4}{\frac{0,1 \times 4}{0,197} + \frac{0,1 \times 9}{1,658} + \frac{0,25}{1,2}} \\ \frac{q}{A} &= h_{C+R}(T_4) \times (T_4 - T_\infty) = 3 \times (T_4 - 20)^4 + 5 \times 10^{-8} \left[(T_4 + 273)^4 - (20 + 273)^4 \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} T_4 = 51,5 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{q}{A} = 484,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{cases}$$

$$\frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_p}{\lambda_p}} \Rightarrow T_2 = 1400 - 484,78 \times \frac{0,25}{1,2} = 1299 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\frac{q}{A} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{0,1n_r}{\lambda_r}} \Rightarrow T_3 = 1299 - 484,78 \times \frac{0,1 \times 9}{1,658} = 1035,85 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Si el que perseguíssim fos minimitzar el gruix aleshores hauriem d'apropar-nos per excés a la corba de isopèrdua màxima. El gruix mínim resulta per (6,3) $n_r=6, n_a=3$.

2.1.3 Aïllament de canonades. Radi crític amb h constant



Si volem reduir les pèrdues tèrmiques d'una canonada, caldrà tenir molt present el concepte de radi crític. Expressem a continuació aquestes pèrdues en funció del radi r_0 que ens delimita el gruix actual d'aïllant (gruix = $r_0 - r_i$)

$$q(r_0) = \frac{T_i - T_0}{\frac{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}{2\pi\lambda_{aïll}L}} = \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{1}{h2\pi r_0L}} = \frac{T_i - T_\infty}{R_{cond} + R_{conv}}$$

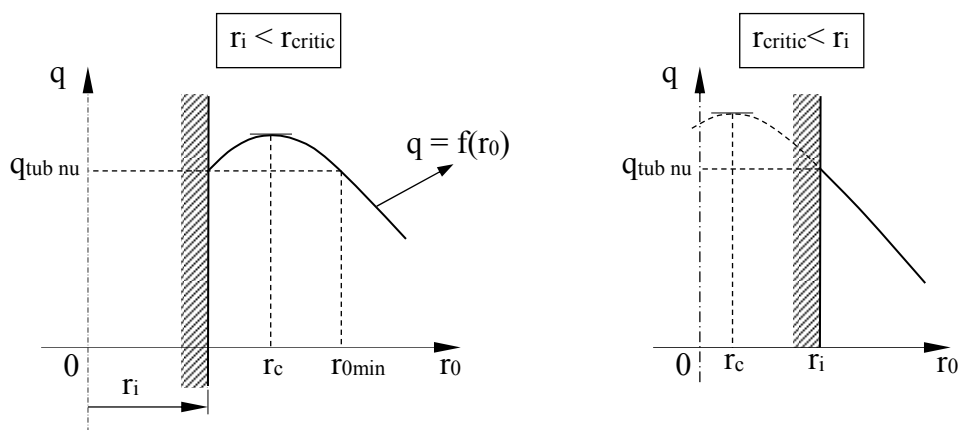
o be
$$q(r_0) = \frac{2\pi L (T_i - T_\infty)}{\frac{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}{\lambda_{aïll}} + \frac{1}{h r_0}}$$

Hipòtesis: $r_i, L, T_\infty, T_i, \lambda_{aïll}, h \rightarrow$ constants

Aleshores $q = f(r_0)$ i veiem que si $r_0 \uparrow$, $\frac{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}{2\pi\lambda_{aïll}L} \uparrow$, $\frac{1}{h2\pi r_0L} \downarrow$ de forma que la suma $\sum_i R_i$ pot augmentar o disminuir segon com variïn la R_{cond} i la R_{conv}

Busquem ara un possible màxim:
$$\frac{dq(r_0)}{dr_0} = \frac{-2\pi L (T_i - T_\infty) \left(\frac{1}{\lambda_{aill} r_0} - \frac{1}{h r_0^2} \right)}{\left[\frac{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}{\lambda_{aill}} + \frac{1}{h r_0} \right]^2} = 0$$

Obtenim $r_0 = \frac{\lambda_{aill}}{h} = r_{critic}$ i com que la $\left. \frac{d^2q}{dr_0^2} \right|_{r=r_0} < 0 \Rightarrow$ correspon a un màxim



Si el coeficient h és moderat i/o λ és gran \Rightarrow el radi crític r_c pot resultar més gran que el radi exterior de la canonada r_i . En aquest cas, tal com és veu a la figura, a l'afegir aïllant les pèrdues augmenten. Per tant, haurem de posar un radi d'aïllant més gran que el r_{0min} perquè és redueixin les pèrdues respecte a les del tub nu. Aquesta situació, acostuma a tenir lloc en aïllants de poca qualitat (λ gran).

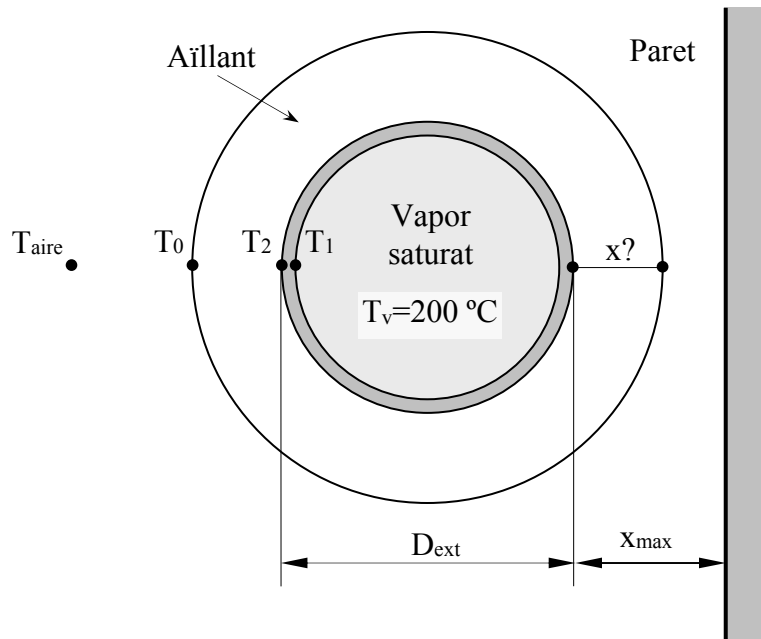
Si el radi crític és inferior al radi de la canonada, la pèrdua de potència tèrmica es redueix per qualsevol quantitat que afegim d'aïllant, tal com es veu a la figura.

Limitacions

Si $T_i > T_0$ la canonada perd potència tèrmica i la temperatura superficial T_0 és redueix dràsticament quan afegim un gruix d'aïllant.

Sabem que $\lambda_{aill} = f\left(\frac{T_i + T_0}{2}\right)$ i $h = f(T_0, T_\infty)$ i per tant λ, h no són constants en

contra de la nostra hipòtesi. Per analitzar i poder conèixer correctament la funció $q=q(r_0)$ cal tenir en compte la dependència de λ i h de la temperatura. En el següent exercici es resol aquesta qüestió.

Exercici 2: Aïllament d'una canonada. Radi crític amb h variable (versió completa)

Un tub horitzontal d'acer al carboni de 3/4 in de diàmetre nominal SCH 40, amb una conductivitat tèrmica $\lambda=42 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ i 15 m de longitud, condueix un vapor saturat a 200 °C i travessa un recinte amb aire en calma a 20 °C , de forma que per aquestes condicions específiques podem considerar un coeficient de transmissió superficial exterior equivalent h que inclou els mecanismes de transferència per convecció i radiació (aproximació lineal), donat per l'expressió següent,

$$h_{C+R} = h(T_0) = 6,88744 + 4,88 \times 10^{-2} (T_0 - 293) \frac{W}{m^2 K} \quad (T_0 = \text{temperatura superficial en K})$$

Coefficient de convecció del vapor saturat, $h_{\text{vap}}=10000 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$

Per limitacions d'espai, si s'aïlla el tub no es poden superar els 70 mm de diàmetre.

Determinar:

- Quines seran les pèrdues de calor (potència tèrmica) del tub nu?
- Les pèrdues de calor si s'aïlla el tub amb el gruix màxim possible (per limitacions d'espai) dels aïllants B (bo) i D (dolent), amb conductivitat tèrmica, $\lambda_B = 0,071 + 1,09E-4 (T-294)$ i $\lambda_D = 0,77 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
- Graficar les pèrdues de calor q (W) en funció del gruix d'aïllant x (mm) pels aïllants B (bo) i D (dolent).
- Quin seria el mínim gruix dels aïllants B i D que caldria emprar per reduir les pèrdues del tub nu en un 25 %. Considera raonables els resultats obtinguts?.

Dades: $\phi_{\text{NOMINAL}}=3/4 \text{ in. SCH 40} \Rightarrow D_{\text{ext}}=26,67 \text{ mm}$, $D_{\text{int}}=20,93 \text{ mm}$

Solució: aïllament d'una canonada (radi crític)

Dades:

$D_2=D_{EXT}=26,67$ mm , $D_1=D_{INT}=20,93$ mm, $L=15$ m , $\lambda_{xapa}=42$ W/(m·K)

$T_{vapor}=200$ °C , $h_{vap}=10000$ W/(m²K) , $T_{aire}=20$ °C

$$h_{C+R} = h(T_0) = 6,88744 + 4,88 \times 10^{-2} (T_0 - 293) \frac{W}{m^2 K} \quad (T_0 = \text{temperatura superficial en K})$$

a) Tub nu (*no negligint res*) $A_1 = \pi D_1 L$; $A_2 = \pi D_2 L$

Al no haver aïllant $T_0=T_2$ (temperatura exterior del tub)

$$q = \frac{T_{vapor} - T_{aire}}{\frac{1}{h_{vapor} A_1} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi \lambda_{xapa} L} + \frac{1}{h(T_0) A_2}}$$

$$q = h(T_0) A_2 (T_0 - T_{aire})$$

$$h(T_0) = 6,88744 + 4,88 \times 10^{-2} (T_0 - 293)$$

A l'igualar les dues primeres equacions, només tenim una incògnita, T_0
 Obtenim, $T_0=472,4$ K i $q=3527,6$ W

b) Tub amb l'aïllament màxim permès: aïllament bo (B)

Sent $\bar{T} = \frac{T_{max} + T_{min}}{2}$, $D_{max}=0,070$ m, $A_{max} = \pi D_{max} L$, $T_{max}=T_2$ i $T_{min}=T_0$

$$q = \frac{T_{vapor} - T_2}{\frac{1}{h_{vapor} A_1} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi \lambda_{xapa} L}}$$

$$q = \frac{T_2 - T_{aire}}{\frac{\ln\left(\frac{D_{max}}{D_2}\right)}{2\pi \lambda_{aill_B}(T_0, T_2) L} + \frac{1}{h(T_0) A_{max}}}$$

$$q = h(T_0) A_{max} (T_0 - T_{aire})$$

$$\lambda_{aill_B}(T_0, T_2) = 0,071 + 1,09 \times 10^{-4} \left(\frac{T_0 + T_2}{2} - 294 \right)$$

$$h(T_0) = 6,88744 + 4,88 \times 10^{-2} (T_0 - 293)$$

Incògnites, T_2, T_0 i q (valors inicial $T_2=T_{vapor}$, $T_0=T_{aire}$ i $q=100$)
 Obtenim, $T_2=472,8$ K , $T_0=332,19$ K , $q=1137,62$ W

b) Tub amb l'aïllament màxim permès: aïllament dolent (D)

Sent $\lambda_{aill_D} = 0,77$ W/(m·K) , $D_{max}=0,070$ m, $A_{max} = \pi D_{max} L$, $T_{max}=T_2$ i $T_{min}=T_0$

$$\left\{ \begin{aligned}
 q &= \frac{T_{\text{vapor}} - T_{\text{aire}}}{\frac{1}{h_{\text{vapor}} A_1} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi \lambda_{\text{xapa}} L} + \frac{\ln\left(\frac{D_{\text{max}}}{D_2}\right)}{2\pi \lambda_{\text{aill_D}} L} + \frac{1}{h(T_0) A_{\text{max}}}} \\
 q &= h(T_0) A_{\text{max}} (T_0 - T_{\text{aire}}) \\
 h(T_0) &= 6,88744 + 4,88 \times 10^{-2} (T_0 - 293)
 \end{aligned} \right.$$

Incògnites, T_0 i q (valors inicial $T_0=T_{\text{vapor}}$ i $q=100$)

Obtenim, $T_0=408,654 \text{ K}$, $q=4780,77 \text{ W} > 3527,6 \text{ W}$ amb el tub nu!!

c) Grafiquem les pèrdues q en funció del gruix x de l'aïllant bo (B)

$$D_0(x) = D_2 + 2 \times \frac{x}{1000} \quad ; \quad x \text{ en mm} \qquad A_0(x) = \pi D_0(x) L$$

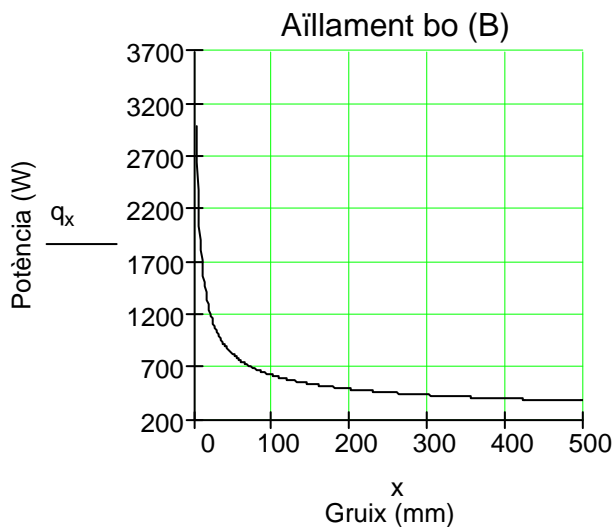
Aïllament bo (B)

$$\left\{ \begin{aligned}
 q &= \frac{T_{\text{vapor}} - T_2}{\frac{1}{h_{\text{vapor}} A_1} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi \lambda_{\text{xapa}} L}} \qquad q = \frac{T_2 - T_{\text{aire}}}{\frac{\ln\left[\frac{D_0(x)}{D_2}\right]}{2\pi \lambda_{\text{aill_B}}(T_0, T_2) L} + \frac{1}{h(T_0) A_0(x)}} \\
 q &= h(T_0) A_0(x) (T_0 - T_{\text{aire}}) \\
 \lambda_{\text{aill_B}}(T_0, T_2) &= 0,071 + 1,09 \times 10^{-4} \left(\frac{T_0 + T_2}{2} - 294 \right) \\
 h(T_0) &= 6,88744 + 4,88 \times 10^{-2} (T_0 - 293)
 \end{aligned} \right.$$

Per cada valor del gruix x :

Incògnites, T_2 , T_0 i q (valors inicial $T_2=T_{\text{vapor}}$, $T_0=T_{\text{aire}}$ i $q=500$)

Obtenim el gràfic de la figura.



c) Grafiquem les pèrdues q en funció del gruix x de l'aïllant dolent (D)

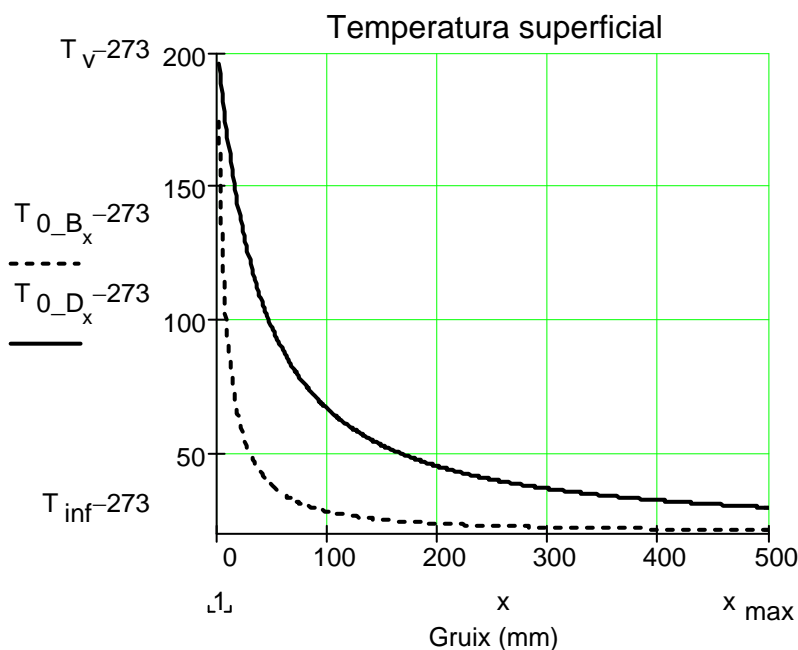
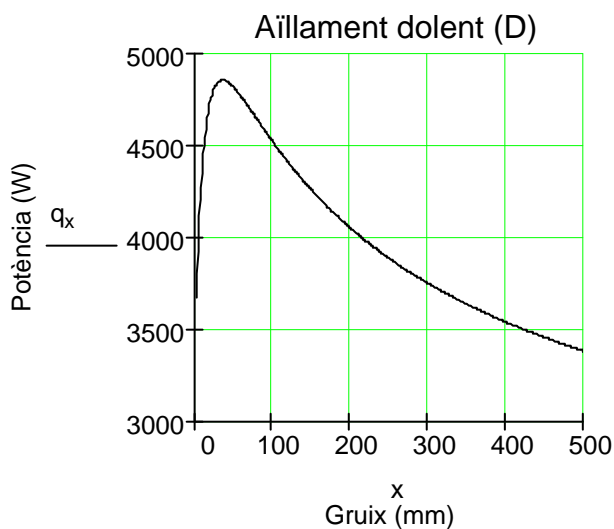
$$\lambda_{aill_D} = 0,77 \text{ W/(m}\cdot\text{K)} \quad D_0(x) = D_2 + 2 \times \frac{x}{1000} \quad ; \quad x \text{ en mm} \quad A_0(x) = \pi D_0(x) L$$

$$T_{max} = T_2 \quad i \quad T_{min} = T_0 \quad h(T_0) = 6,88744 + 4,88 \times 10^{-2} (T_0 - 293)$$

$$\left\{ \begin{aligned} q &= \frac{T_{vapor} - T_{aire}}{\frac{1}{h_{vapor} A_l} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_l}\right)}{2\pi \lambda_{xapa} L} + \frac{\ln\left(\frac{D_0(x)}{D_2}\right)}{2\pi \lambda_{aill_D} L} + \frac{1}{h(T_0) A_0(x)}} \quad ; \quad q = h(T_0) A_0(x) (T_0 - T_{aire}) \end{aligned} \right.$$

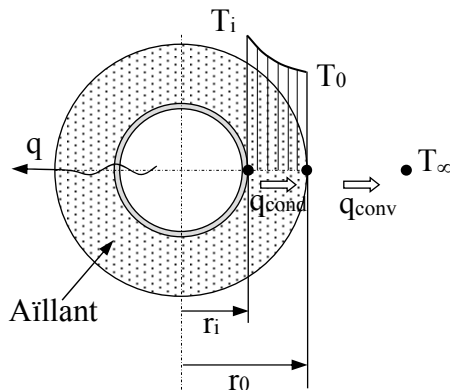
Per cada valor del gruix x :

Incògnites, T_0 i q (valors inicial $T_0 = T_{aire}$ i $q = 100$) Obtenim el gràfic de la figura.



L'apartat d) es resol de forma similar.

2.1.4 Aïllament de dipòsits esfèrics. Radi crític amb λ i h constant



Si volem reduir les pèrdues tèrmiques d'un dipòsit esfèric, caldrà tenir present el mateix concepte de radi crític. Expressem a continuació aquestes pèrdues en funció del radi r_0 que ens delimita el gruix actual d'aïllant (gruix = $r_0 - r_i$)

$$q(r_0) = \frac{T_i - T_0}{\frac{r_0 - r_i}{4\pi r_i r_0 \lambda_{aill}}} = \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{1}{h 4\pi r_0^2}} = \frac{T_i - T_\infty}{R_{cond} + R_{conv}}$$

o be $q(r_0) = \frac{4\pi(T_i - T_\infty)}{\frac{r_0 - r_i}{r_i r_0 \lambda_{aill}} + \frac{1}{h r_0^2}}$ *Hipòtesis:*

$r_i, T_\infty, T_i, \lambda_{aill}, h \rightarrow$ constants

Aleshores $q = f(r_0)$ i veiem que si $r_0 \uparrow$, $\frac{r_0 - r_i}{4\pi r_i r_0 \lambda_{aill}} \uparrow$, $\frac{1}{h 4\pi r_0^2} \downarrow$ de forma

que la suma $\sum_i R_i$ pot augmentar o disminuir segon com variïn la R_{cond} i la R_{conv}

Busquem ara un possible màxim: $\frac{dq(r_0)}{dr_0} = \frac{-4\pi(T_i - T_\infty) \left(\frac{1}{\lambda_{aill} r_0^2} - \frac{2}{h r_0^3} \right)}{\left[\frac{r_0 - r_i}{r_i r_0 \lambda_{aill}} + \frac{1}{h r_0^2} \right]^2} = 0$

Obtenim $r_0 = \frac{2\lambda_{aill}}{h} = r_{critic}$ i com que la $\left. \frac{d^2q}{dr_0^2} \right|_{r=r_0} < 0 \Rightarrow$ correspon a un màxim

Observem que el radi crític per un dipòsit esfèric val el doble del corresponent a una canonada que fes servir el mateix aïllant i amb el mateix coeficient de convecció.

El coeficient de convecció per un dipòsit esfèric es una mica superior (10-25 %) al de un cilindre horitzontal del mateix diàmetre i amb la mateixa temperatura superficial.

Per tant, això significa en general una major necessitat d'emprar bons aïllants (λ petita) quan vulguem reduir les pèrdues d'aquesta geometria per evitar el problema de no superar el radi crític.

Limitacions

Les limitacions son idèntiques a les comentades per l'aïllament de canonades (2.1.3) que es redueixen a que per analitzar i poder conèixer correctament la funció $q=q(r_0)$ cal tenir en compte la dependència de λ i h de la temperatura.

2.2 CONDUCCIÓ AMB GENERACIÓ D'ENERGIA TÈRMICA

2.2.1 Mètode del compte de la vella: variació d'una funció continua en un dx

Suposem que $f(x)$ sigui una funció continua definida a l'interior d'un volum de control V.C.

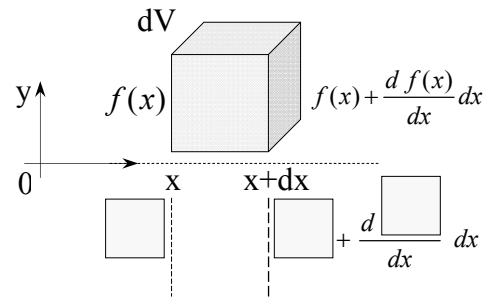
A partir de , $f(x + \Delta x) = \underbrace{f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x}_{\text{aprox.}} + \underbrace{f''(x) \frac{(\Delta x)^2}{2!} + f'''(x) \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots}_{O[(\Delta x)^2]}$ veiem com a la

posició $x+dx$ la funció $f(x)$ s'aproxima al valor

$f(x) + \frac{df(x)}{dx} dx$ amb un error de l'ordre de $(dx)^2$ o sigui molt petit (de 2on. ordre).

Per tant, quan avaluem una propietat $f(x)$ a la posició x , sabem que a la posició $x+dx$ aquesta propietat valdrà

$f(x) + \frac{df(x)}{dx} dx$ com s'il·lustra a la figura. Si el cub de



la figura representa un diferencial de volum, $f(x)$ podria ser la quantitat de moviment que entra per la cara esquerra del cub, la potència tèrmica q_x , etc., qualsevol propietat que es pugui considerar continua. Ho representem per una caixa.

Amb aquest procediment tradicional, com queda de manifest en el títol de l'apartat, han estat deduïdes la majoria de les equacions diferencials que han revolucionat la ciència: equacions de Navier Stokes (eq. diferencial de la quantitat de moviment, de l'energia), i en particular l'equació que deduïm a continuació, l'equació fonamental de la calor.

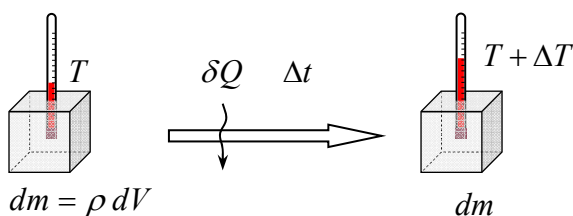
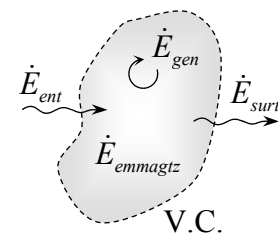
Es molt important que feu la deducció completa de qualsevol equació diferencial perquè només així s'entén a fons el significat físic de la mateixa.

2.2.2 Equació de la difusió de la calor (2ª llei de Fourier)

Hem vist al capítol 1, apartat 1.7 que un balanç de potència tèrmica en un volum de control V.C. el podem representar per la següent equació, $\dot{E}_{ent} + \dot{E}_{gen} - \dot{E}_{surt} = \dot{E}_{emmagtz}$

Recordem que \dot{E}_{ent} és la potència tèrmica que entra i \dot{E}_{surt} la que surt de la superfície de control S.C. La \dot{E}_{gen} és la potència

generada en el volum de control, en general per la conversió d'algun altre tipus d'energia com per exemple l'elèctrica. (efecte Joule)



d'aquesta massa, $\delta Q = dm c_p \Delta T$

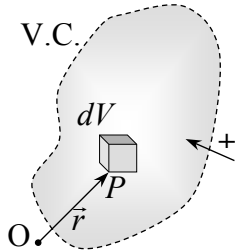
sent c_p la calor específica a pressió constant, J/(kg·K).

Recordem a continuació el concepte de potència emmagatzemada, $\dot{E}_{emmagtz}$ (W)

Si aportem a una massa dm una calor δQ [J] en un temps Δt sabem que la seva temperatura augmentarà un ΔT com s'il·lustra a la figura. La calor aportada és justament igual a la variació d'entalpia

Dividint m. a m. per Δt , $\frac{\delta Q}{\Delta t} = dm c_p \frac{\Delta T}{\Delta t}$ i fent el límit obtenim justament la potència

emmagatzemada al dm en W, $\dot{E}_{emmagtz} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} dm c_p \frac{\Delta T}{\Delta t} = \overbrace{dm}^{\rho dV} c_p \frac{dT}{dt}$



Suposem que en el volum de control V.C. de la figura tenim definit un camp escalar de temperatures $T = T(x, y, z, t)$ amb una generació volumètrica de potència tèrmica expressada per la funció de punt

$$\dot{g} = \dot{g}(x, y, z, t) \frac{W}{m^3} \text{ ambdues referides a una}$$

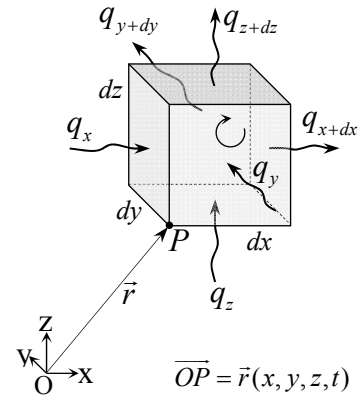
referència cartesiana O.

Deduïrem en aquest apartat l'equació diferencial que governa la transferència de calor en règim transitori per un sòlid homogeni, isòtrop i amb generació interna de calor.

Sigui dV un diferencial de volum situat en el punt P, tal que

$$\overline{OP} = \vec{r}(x, y, z, t)$$

Es tracta de fer un balanç de potència tèrmica en aquest petit diferencial de volum $dV = dx dy dz$



La 1ª llei de Fourier, ens dona la potència tèrmica q_x que travessa la cara $dA_x = dy dz$ en la direcció $x \perp$ a dA_x . Aplicant el mètode del compte de la vella, determinem q_{x+dx} , etc..

$$q_x = \left[-\lambda \overbrace{dy dz}^{dA_x} \frac{\partial T}{\partial x} \right]_x ; \quad q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad , \quad q_y = \left[-\lambda \overbrace{dx dz}^{dA_y} \frac{\partial T}{\partial y} \right]_y ; \quad q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy$$

$$q_z = \left[-\lambda \overbrace{dx dy}^{dA_z} \frac{\partial T}{\partial z} \right]_z ; \quad q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz$$

Multiplicant la generació volumètrica $\dot{g} = \dot{g}(x, y, z, t) \frac{W}{m^3}$ pel volum $dV = dx dy dz$ obtenim la potència generada \dot{E}_{gen} en W. El balanç de potència tèrmica en el volum dV serà,

$$\underbrace{(q_x + q_y + q_z)}_{\dot{E}_{ent}} + \underbrace{\dot{g} dx dy dz}_{\dot{E}_{gen}} - \underbrace{(q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz})}_{\dot{E}_{surt}} = \underbrace{\rho dx dy dz c_p \frac{dT}{dt}}_{\dot{E}_{emmagtz}} \quad \text{que reagrupem,}$$

$$\underbrace{(q_x - q_{x+dx})}_{-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx} + \underbrace{(q_y - q_{y+dy})}_{-\frac{\partial q_y}{\partial y} dy} + \underbrace{(q_z - q_{z+dz})}_{-\frac{\partial q_z}{\partial z} dz} + \dot{g} dV = \overbrace{\rho dV}^{\Delta m} c_p \frac{dT}{dt} \quad \text{i a continuació calculem el}$$

valor dels parèntesis anteriors,

$$q_x - q_{x+dx} = q_x - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) = - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

$$\left. \begin{array}{l} - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = + \overbrace{dydz}^{dA_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = + dV \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ \text{Substituïm } q_x = -\lambda \overbrace{dydz}^{dA_x} \frac{\partial T}{\partial x} \end{array} \right\}$$

$$dV \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + dV \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + dV \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{g} dV = \overbrace{\rho dV}^{\Delta m} c_p \frac{dT}{dt}$$

dividim m. a m. per dV

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{g} = \rho c_p \frac{dT}{dt}$$

aquesta es l'equació general de la difusió

de la calor en coordenades cartesianes o equació fonamental de la calor.

Si λ es uniforme respecte a l'espai (no varia en funció de x,y,z) aleshores la podem treure

factor comú, $\lambda = ct.$ $\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{\nabla^2 T} + \frac{\dot{g}}{\lambda} = \frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$ $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} = \text{difusivitat tèrmica}$

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{g}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{eq. fonamental de la calor } (\lambda = ct.) \quad (\nabla^2 T \text{ laplaciana de T})$$

Aquesta equació, que com hem vist no és mes que el resultat d'un balanç de potència tèrmica en un volum diferencial, s'ha de verificar en tots els punts interns (conducció) del volum de control. A la superfície del volum de control, i podem tenir diferents tipus de condicions de contorn, com per exemple de convecció, de radiació, etc.

Aquestes condicions de contorn ens seran necessàries per poder determinar les constants d'integració de l'equació anterior i poder obtenir així la distribució de temperatures del nostre sòlid en funció de la posició i el temps.

L'expressió de la laplaciana $\nabla^2 T$ en coordenades cilíndriques a on $T = T(\vec{r}, t) = T(r, \phi, z, t)$

resulta,

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

2.2.3 Integració de la 2ª llei de Fourier: paret plana sense generació

Dades: $\lambda = ct., L, \dot{g} = 0 \text{ (W/m}^3\text{)} = ct., h, T_\infty \text{ cts.}$
 Règim estacionari, paret de grans dimensions

Condicions de contorn:

1) $x=0$ $h_1 [T_{\infty 1} - T(0)] = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \frac{q}{A} \Big|_{x=0}$

2) $x=L$ $\frac{q}{A} \Big|_{x=L} = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h_2 [T(L) - T_{\infty 2}]$

Al no haver generació és evident que la potència en $x=0$ serà igual a la potència en $x=L$.

Trobar el flux de potència tèrmica i la distribució de temperatures en funció de x , $\frac{q}{A}\Big|_x$ i $T(x)$

Tractant-se d'una paret de grans dimensions podem negligir l'efecte dels extrems i aleshores veiem que les superfícies isoterms seran plans paral·lels a la superfície de la mateixa paret, o sigui que la temperatura serà només funció de x . En estar en règim estacionari, la temperatura no depèn del temps $\Rightarrow T = T(x)$ i la segona equació de Fourier se'ns simplifica de la següent forma,

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}(\vec{r}, t)}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} = 0} \text{ o be } \boxed{\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) = 0}$$

Si la integrem dos cops respecta a x obtenim $\boxed{T(x) = C_1 x + C_2}$ (lineal com ja sabíem)

Imposem ara la primera condició de contorn, $h_1 [T_{\infty 1} - T(0)] = -\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_{x=0}$ sent $T(0) = C_2$ i la derivada en $x=0$ igual a C_1 , obtenim una equació amb 2 incògnites $h_1 [T_{\infty 1} - C_2] = -\lambda C_1$

Imposem ara la segona condició de contorn, $-\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = h_2 [T(L) - T_{\infty 2}]$

Sent la derivada en $x=L$ igual a C_1 i $T(L) = C_1 L + C_2$ obtenim $-\lambda C_1 = h_2 [C_1 L + C_2 - T_{\infty 2}]$

Si escrivim el sistema en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \lambda & -h_1 \\ -\lambda - h_2 L & -h_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_1 T_{\infty 1} \\ -h_2 T_{\infty 2} \end{bmatrix} \text{ obtenim els valors de les constants d'integració emprant}$$

un manipulador simbòlic, $C_1 = \frac{(T_{\infty 2} - T_{\infty 1}) h_1 h_2}{\lambda h_2 + h_1 h_2 L + \lambda h_1}$ $C_2 = \frac{(\lambda + h_2 L) h_1 T_{\infty 1} + \lambda h_2 T_{\infty 2}}{\lambda h_2 + h_1 h_2 L + \lambda h_1}$

D'aquesta forma coneixem el perfil de temperatures i també la potència tèrmica,

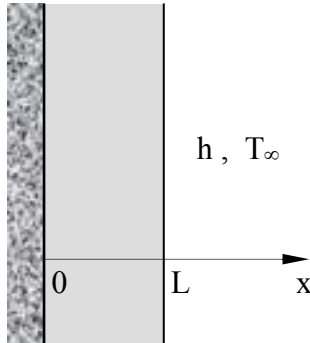
$$\frac{q}{A}\Big|_x = -\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_x = -\lambda C_1 = -\lambda \frac{(T_{\infty 2} - T_{\infty 1}) h_1 h_2}{\lambda h_2 + h_1 h_2 L + \lambda h_1} = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) h_1 h_2 \lambda}{\lambda h_2 + h_1 h_2 L + \lambda h_1} \text{ positiu si } T_{\infty 1} > T_{\infty 2}$$

Si dividim membre a membre per $h_1 h_2 \lambda$ obtenim l'equació que ja coneixíem.

$$\frac{q}{A}\Big|_x = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) h_1 h_2 \lambda}{\lambda h_2 + h_1 h_2 L + \lambda h_1} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{h_2}} \Rightarrow q = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\underbrace{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{\lambda A} + \frac{1}{h_2 A}}_{\sum R_i}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\sum R_i}$$

2.3 PARETS PLANES I SISTEMES RADIALS AMB GENERACIÓ

2.3.1 Paret plana amb generació: perfil de temperatures i potència transferida



Dades: $\lambda = \text{ct.}$, L , \dot{g} (W/m^3) = ct., h , T_∞ cts.
Règim estacionari, paret de grans dimensions

Condicions de contorn:

$$1) \quad x=0 \quad \left. \frac{q}{A} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{superfície aïllada})$$

$$2) \quad x=L \quad \left. \frac{q}{A} \right|_{x=L} = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h [T(L) - T_\infty]$$

Trobar el flux de potència tèrmica i la distribució de temperatures en funció de x , $\left. \frac{q}{A} \right|_x$ i $T(x)$

Tractant-se d'una paret de grans dimensions podem negligir l'efecte dels extrems i aleshores veiem que les superfícies isoterms seran plans paral·lels a la superfície de la mateixa paret, o sigui que la temperatura serà només funció de x . En estar en règim estacionari, la temperatura no depèn del temps $\Rightarrow T = T(x)$ i la segona equació de Fourier se'ns simplifica de la següent forma,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}(\vec{r}, t)}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{\lambda} = 0 \quad \text{o be} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) = -\frac{\dot{g}}{\lambda}$$

Si la integrem respecta a x , $\int d\left(\frac{dT}{dx}\right) = \int -\frac{\dot{g}}{\lambda} dx \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{g}}{\lambda} x + C_1$

En $x=0$ la paret està aïllada i per tant no podem tenir flux de potència tèrmic, o sigui la primera condició de contorn en $x=0$ ens permet trobar la primera constant d'integració C_1

$$\left. \frac{q}{A} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{que substituint a l'última equació,} \quad 0 = -\frac{\dot{g}}{\lambda} \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

Sent la derivada, $\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{g}}{\lambda} x$ i integrant $\int dT = \int -\frac{\dot{g}}{\lambda} x dx \Rightarrow T(x) = -\frac{\dot{g}}{\lambda} \frac{x^2}{2} + C_2$

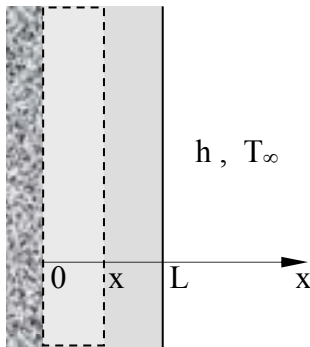
Imposem la segona condició de contorn per trobar la constant C_2 ,

Avaluem el valor de la derivada en $x=L$, $\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = -\frac{\dot{g}L}{\lambda}$ i $T(L) = -\frac{\dot{g}}{\lambda} \frac{L^2}{2} + C_2$

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h [T(L) - T_\infty] \Rightarrow -\lambda \left(-\frac{\dot{g}L}{\lambda} \right) = h \left[\left(-\frac{\dot{g}}{\lambda} \frac{L^2}{2} + C_2 \right) - T_\infty \right]$$

(2ª cond. de contorn en $x = L$)

Trobem C_2 , $C_2 = T_\infty + \frac{\dot{g}L}{h} + \frac{\dot{g}L^2}{2\lambda}$ resultant $T(x) = \frac{\dot{g}L^2}{2\lambda} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] + \frac{\dot{g}L}{h} + T_\infty$



$$\frac{q}{A} \Big|_x = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_x = -\lambda \left(-\frac{\dot{g}x}{\lambda} \right) = \dot{g}x$$

Observem que en el volum de control indicat amb línia de punts i amb una superfície frontal unitària, la potència generada és justament $\dot{g}x$ (evident!)

2.3.2 Paret cilíndrica amb generació: perfil de temperatures i potència transferida

L'expressió de la segona equació de Fourier en coordenades cilíndriques és,

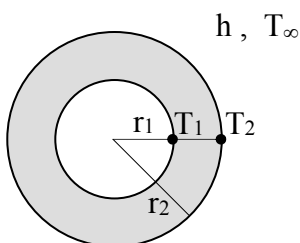
$$\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{\nabla^2 T} + \frac{\dot{g}(\vec{r}, t)}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \text{sent } T = T(\vec{r}, t) = T(r, \phi, z, t)$$

En el següent exercici resollem aquesta equació per un sistema bidimensional en règim estacionari, simetria cilíndrica i amb generació uniforme de potència tèrmica.

En aquest cas $T = T(\vec{r}, t) = T(r)$, $\dot{g}(\vec{r}, t) = \dot{g} = ct$. i l'equació diferencial en derivades parcials es converteix en una equació diferencial ordinària molt senzilla,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}}_0 + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_0 + \frac{\dot{g}(\vec{r}, t)}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \underbrace{\frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t}}_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{g}}{\lambda} = 0$$

Exercici 3: Cilindres coaxials amb i sense generació de potència tèrmica



Dades:

r_1, r_2, L (gran), h, T_∞, λ (tots valors constants)
 \dot{g} (W/m^3) $\neq 0$ per $0 < r < r_1$
 \dot{g} (W/m^3) $= 0$ per $r_1 < r < r_2$
 Règim estacionari. Distribució unidimensional.

Incògnites: $T_1, T_2, T(r), \frac{q}{A} \Big|_r$ per $\forall r$ tal que $0 < r < r_2$

Solució:

Podem imaginar un cilindre interior metàl·lic per on es transporta un corrent elèctric recobert d'un cilindre coaxial no metàl·lic que fa les funcions d'un aïllant elèctric.

Cilindre interior, \dot{g} (W/m³) $\neq 0$ per $0 < r < r_1$

Integrem l'equació diferencial ordinària $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{g}}{\lambda} = 0$ sent $T = T(r)$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{g}}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{g}}{\lambda} r \quad \int \Rightarrow \quad r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{g}}{\lambda} \frac{r^2}{2} + C$$

En $r=0$ per simetria cilíndrica $\frac{dT}{dr} = 0 \Rightarrow C=0$ aleshores obtenim $\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{g}}{2\lambda} r$

(observi que no pot dibuixar una funció amb $\frac{dT}{dr} \neq 0$ en $r=0$ tot conservant la simetria cilíndrica, o sigui amb temperatures idèntiques a la mateixa distància de l'origen)

$$\text{Integrem entre } r \text{ i } r_1, \quad \int_{T(r)}^{T_1} dT = \int_r^{r_1} -\frac{\dot{g}}{2\lambda} r dr \quad \Rightarrow \quad T_1 - T(r) = -\frac{\dot{g}}{2\lambda} \left(\frac{r_1^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right)$$

$$\text{Per } 0 < r < r_1, \quad T(r) = T_1 + \frac{\dot{g}}{4\lambda} (r_1^2 - r^2) \quad \text{sent } T_1 = T(r_1), \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{g}}{2\lambda} r$$

Determinem la potència i el flux de potència tèrmic per $0 < r < r_1$,

$$\begin{cases} q_r = -\lambda A(r) \frac{dT}{dr} \Big|_r = -\lambda (2\pi r L) \left(-\frac{\dot{g}}{2\lambda} r \right) = \dot{g} \pi r^2 L = \dot{g} V(r) \\ \left. \frac{q}{A} \right|_r = \frac{q_r}{A(r)} = \frac{\dot{g} \pi r^2 L}{2\pi r L} = \frac{\dot{g} r}{2} \end{cases}$$

Veiem que la potència $q_r = \dot{g} V(r)$ que travessa la superfície cilíndrica de radi $r < r_1$ és justament la potència generada en el seu volum. Per la hipòtesi de règim estacionari les temperatures d'aquest volum cilíndric de radi r es mantenen invariables al llarg del temps, de forma que la potència tèrmica no es pot acumular en aquest volum i aquesta la hem de dissipar a través de la superfície cilíndrica de radi r .

Cilindre exterior, \dot{g} (W/m³) = 0 per $r_1 < r < r_2$

El perfil de temperatures haurà de ser tal que per qualsevol radi r la potència transferida sigui justament tota la potència generada al cilindre interior.

Determinem la potència i el flux de potència tèrmic per $r_1 < r < r_2$,

$$q_r = q(r_1) = \dot{g} V(r_1) = \dot{g} \pi r_1^2 L = ct. \quad \text{i el flux de potència} \quad \left. \frac{q}{A} \right|_r = \frac{q_r}{A(r)} = \frac{\dot{g} \pi r_1^2 L}{2\pi r L} = \frac{\dot{g} r_1^2}{2r}$$

Determinem ara les temperatures $T_1=T(r_1)$ i $T_2=T(r_2)$

Per $r > r_1$ no tenim generació de potència i per tant podem aplicar les equacions de balanç de les parets compostes. Sent $q = q_r = q(r_1) = \dot{g} V(r_1) = \dot{g} \pi r_1^2 L = ct.$,

$$q = \dot{g} \pi r_1^2 L \stackrel{(2)}{=} \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{T_2 - T_\infty}{\frac{1}{h 2\pi r_2 L}} = \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{1}{2\pi\lambda L} + \frac{1}{h 2\pi r_2 L}} \stackrel{(1)}{=} \dot{g} \pi r_1^2 L = q$$

De la igualtat (1) trobem,
$$T_1 = T_\infty + \frac{\dot{g} r_1^2}{2\lambda} \left[\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{\lambda}{hr_2} \right]$$

De la igualtat (2) trobem,
$$T_2 = T_\infty + \frac{\dot{g} r_1^2}{2hr_2}$$

Troblem el perfil T(r) per $r_1 < r < r_2$,

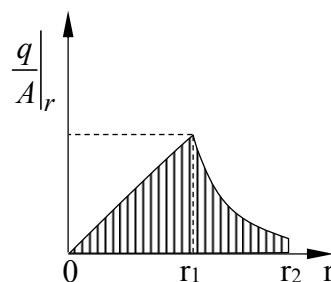
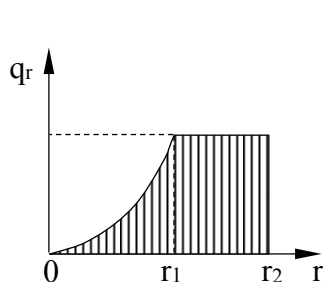
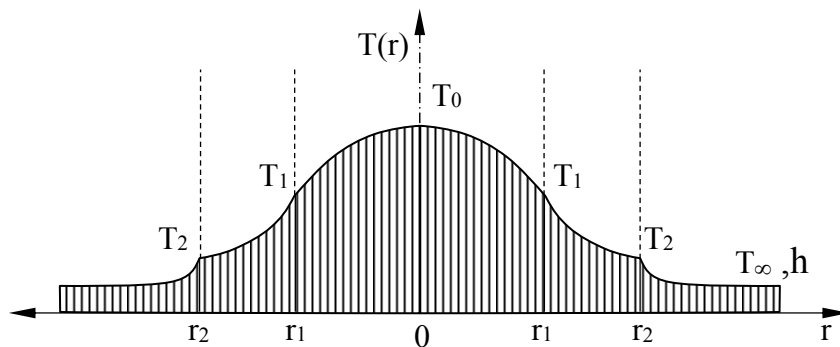
$$q = \dot{g} \pi r_1^2 L = \frac{T_1 - T(r)}{\frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L}} \Rightarrow T(r) = T_1 - \frac{\dot{g} r_1^2}{2\lambda} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

Resultats:

$$T_1 = T_\infty + \frac{\dot{g} r_1^2}{2} \times \left[\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda} + \frac{1}{hr_2} \right] ; T_2 = T_\infty + \frac{\dot{g} r_1^2}{2hr_2}$$

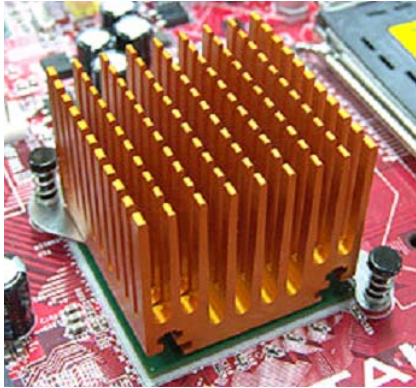
$$\forall r \quad 0 < r < r_1 \quad , \quad T(r) = T_1 + \frac{\dot{g}}{4\lambda} (r_1^2 - r^2) \quad , \quad q(r) = \dot{g} \pi r^2 L = \dot{g} V(r) \quad , \quad \left. \frac{q}{A} \right|_r = \frac{\dot{g} r}{2}$$

$$\forall r \quad r_1 < r < r_2 \quad , \quad T(r) = T_1 - \frac{\dot{g} r_1^2}{2\lambda} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \quad , \quad q(r) = \dot{g} \pi r_1^2 L = \dot{g} V(r_1) \quad , \quad \left. \frac{q}{A} \right|_r = \frac{\dot{g} r_1^2}{2r}$$



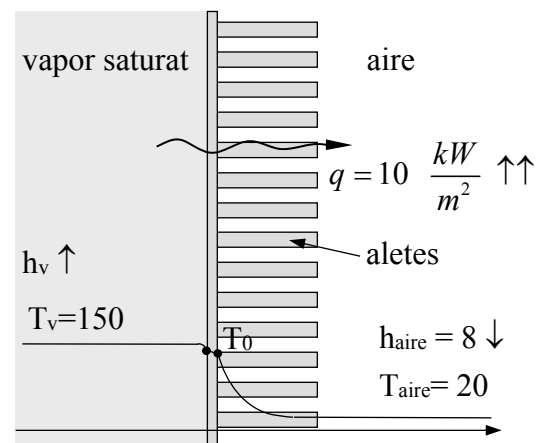
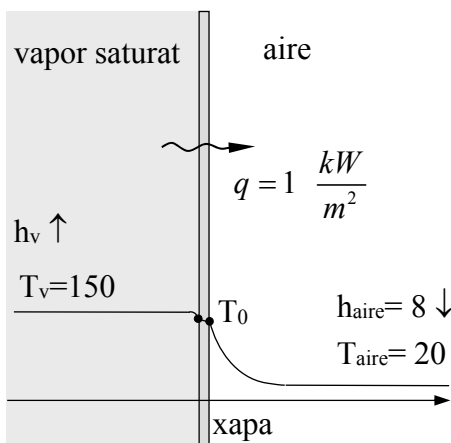
2.4 SUPERFÍCIES ESTESES O ALETES

2.4.1 Introducció



Sabem que el nostre PC funciona millor quan la temperatura ambient es moderada. Els últims anys hem vist emprar dispositius com els de la figura per dissipar la calor generada pel processador del nostre PC. En general damunt de tot s'hi troba un ventilador per afavorir la renovació de l'aire. L'objectiu és aconseguir eliminar tota la potència tèrmica generada pel processador ($q=ct.$) mantenint una temperatura de servei que no superi un cert valor límit.

Aquest elements s'anomenen aletes o superfícies esteSES i el seu conjunt és un dissipador de calor.



A vegades és necessari transferir calor entre dos fluids com per exemple entre el vapor saturat a 150°C i l'aire a 20°C de la figura anterior. Si entre el vapor i l'aire només hi tenim la xapa de separació que es mostra a la figura de l'esquerra la potència transferida és de 1 kW/m^2 .

Si el coeficient de convecció d'algun fluid és molt reduït (\downarrow), com veiem en el cas de l'aire en convecció natural de la figura $h_{aire} = 8 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \downarrow$ i en general en tots els gasos, la transferència de calor queda molt limitada ja que com sabem la resistència tèrmica de

convecció corresponent serà molt gran, $R_{conv} = \frac{1}{h_{aire} A} \uparrow$

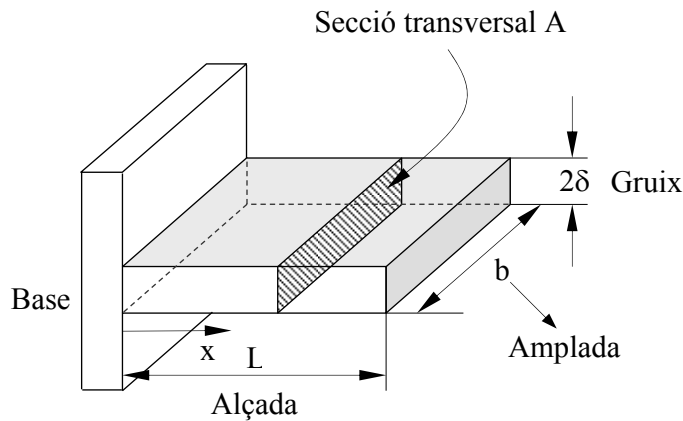
Si afegim les aletes que es mostren a la figura de la dreta (com ho fem amb el xip del nostre PC) al costat a on el coeficient de convecció es reduït veiem com la potència transferida es multiplica per 10 passant a ser ara 10 kW/m^2

Veiem també com la superfície en contacte amb l'aire ha augmentat moltíssim, i això ho hem aconseguit emprant les aletes de la figura tot mantenint el salt tèrmic entre la temperatura del vapor i l'aire.

Si pensem amb l'expressió $q = \underbrace{h_{aire}}_{\uparrow\uparrow} \underbrace{A}_{\uparrow\uparrow} \underbrace{(T_0 - T_{aire})}_{ct.}$ podríem pensar que augmentant la superfície

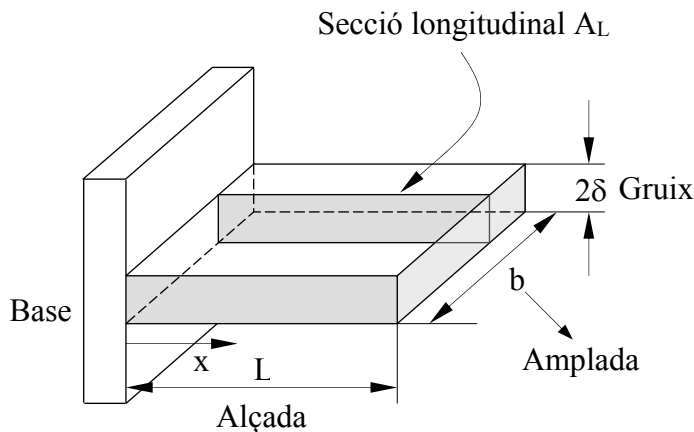
amb contacte de l'aire per 10 ja seria suficient per augmentar la potència també per 10. A on falla el nostre raonament? El problema és que no tota la superfície en contacte amb l'aire es troba a la temperatura de la base T_0 . Quant més ens allunyem de la base, més freda està l'aleta.

2.4.2 Concepte d'aleta o superfície estesa



Una superfície estesa o aleta (fin en anglès) és una extensió de la paret o superfície de transferència de calor cap al fluid circumdant que persegueix augmentar la potència tèrmica transferida al mateix per compensar coeficients de convecció reduïts com succeeix quan treballem amb gasos o líquids en convecció natural ($v=0$ m/s).

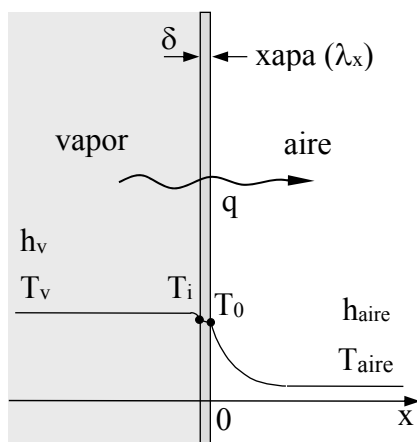
Es mostra a la figura els principals paràmetres que defineixen una aleta de secció recta constant.



Per afavorir la conducció de la calor s'utilitzen en general materials que com els metalls tenen valors alts de conductivitat tèrmica.

Cal distingir entre la secció recta i la secció longitudinal d'una aleta. La secció longitudinal ens determina el que anomenem perfil de l'aleta, que pot ser rectangular, triangular, parabòlic, etc. .

On i quan haurem d'emprar aletes



Exemple: la xapa de la figura separa un recinte amb vapor d'aigua saturat d'un altre amb aire en calma. (conv. natural).

Dades:

$h_{\text{vapor}}=10000$ W/(m²·K) coef. de convecció del vapor d'aigua

$h_{\text{aire}}=10$ W/(m²·K) coef. de convecció de l'aire en calma

Xapa → $\delta=10$ mm ; $\lambda_x=100$ W/(m·K)

Determinar: la potència tèrmica transferida per una superfície de xapa $A=1$ m² (evidentment $A_i=A_o=A=1$ m² , sup. planes)

L'objectiu essencial que persegüim a l'emprar aletes és el d'augmentar la potència tèrmica transferida q .

En aquest cas és molt diferent l'ordre de magnitud dels dos coeficients de convecció, el del vapor d'aigua (10000) és molt més gran que l'altre, el de l'aire (10), aleshores com es veu a la següent equació només una resistència de convecció serà significativa, la de l'aire.

$$q = \frac{T_{\text{vapor}} - T_{\text{aire}}}{\frac{l}{h_{\text{vapor}} A} + \frac{\delta}{\lambda_x A} + \frac{l}{h_{\text{aire}} A}} = \frac{T_{\text{vapor}} - T_{\text{aire}}}{\underbrace{0,0001}_{R_{\text{vapor}}} + \underbrace{0,0001}_{R_{\text{xapa}}} + \underbrace{0,1}_{R_{\text{aire}}}} = \frac{T_{\text{vapor}} - T_{\text{aire}}}{0,1002} \approx \frac{T_{\text{vapor}} - T_{\text{aire}}}{0,1}$$

Com es veu afecten poc les resistències del vapor R_{vapor} i de la xapa R_{xapa}

En general per una xapa metàl·lica que $R_{0i} = \frac{\delta}{\lambda_x A} \ll \frac{1}{h_{\text{aire}} A} = R_{\text{aire}}$ ($10^{-4} \ll 10^{-1}$) i com que

$h_{\text{vapor}} \gg h_{\text{aire}} \Rightarrow R_{\text{vapor}} = \frac{l}{h_{\text{vapor}} A} \ll \frac{l}{h_{\text{aire}} A} = R_{\text{aire}}$ ($10^{-4} \ll 10^{-1}$) i per tant la resistència de

convecció del costat aire és l'única significativa (coll d'ampolla) que controla totalment la potència transferida entre ambdós recintes.

Per tant,

$$q = \frac{T_{\text{vapor}} - T_{\text{aire}}}{\frac{l}{h_{\text{vapor}} A} + \frac{\delta}{\lambda_x A} + \frac{l}{h_{\text{aire}} A}} \approx \frac{T_{\text{vapor}} - T_{\text{aire}}}{\frac{l}{h_{\text{aire}} A}} = h_{\text{aire}} A (T_{\text{vapor}} - T_{\text{aire}})$$

Si pretenem incrementar la potència transferida, essent constants les temperatures d'ambdós recintes, no tenim més opció que augmentar o bé el coeficient de convecció del costat aire (augmentant la velocitat del mateix) o bé la superfície A en contacte amb l'aire.

Aquest és un dels motius perquè en el disseny d'equips tèrmics sempre es procura impulsar els fluids a velocitats altes tot sabent l'augment de les pèrdues de carga que això comporta (funció de la velocitat al quadrat) i la repercussió directa sobre la inversió en els equips de bombeig.

Esgotada l'opció anterior, per qüestions de soroll o de limitacions de pèrdua de carga, s'augmenta la superfície de transferència de calor emprant superfícies esteses o aletes. Aquesta segona opció ens permet assolir una augment molt més important de la potència tèrmica amb una inversió econòmica d'una major magnitud. En general la presència d'aletes també incideix en la dimensió final dels equips de impulsió (menor repercussió).

Com a conclusió veiem que sempre haurem de posar les aletes del costat a on el coeficient de convecció sigui molt petit. Les aletes es fan servir per tant quan el coeficient de transferència de calor per convecció h_c sigui baix, el que succeeix freqüentment en gasos com l'aire, especialment en condicions de convecció natural.

Exemple: Cilindre d'un motor de moto. No podem controlar la velocitat de l'aire, ja que la determina la velocitat del vehicle. En canvi podem incrementar la superfície de transferència tèrmica exposada a l'aire adossant una sèrie d'aletes a la mateixa.

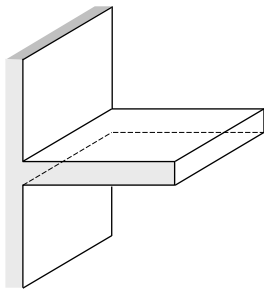
Exemples comuns també són les aletes de refredament de components electrònics així com les emprades en els tubs dels condensadors d'un refrigerador domèstic.

2.4.3 Tipus d'aletes

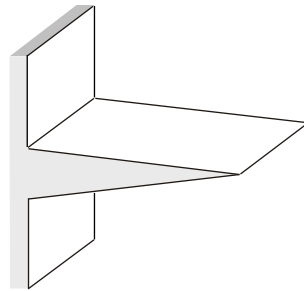
Diferenciem dos tipus bàsics d'aletes: el de pestanya i el d'agulla.

D'acord a la seva secció recta (transversal) les aletes poden ser de secció recta constant o bé variable.

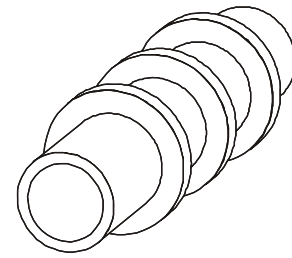
Si ens fixem en la secció longitudinal (perfil) les aletes poden ser de perfil rectangular, triangular, trapezoïdal, parabòlic, etc.. Les aletes adossades transversalment a l'eix d'una paret cilíndrica o tub s'anomenen radials o circulars.



Aleta recta de perfil rectangular

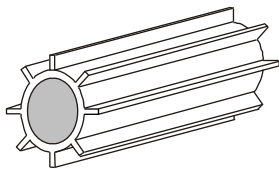


Aleta recta de perfil triangular

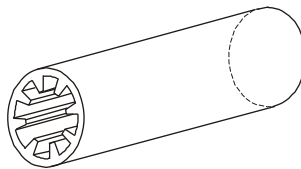


Aletes radials de perfil rectangular

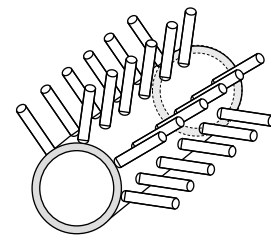
Les aletes tipus pestanya es fan servir per fluids nets (aire, etc.) i les pues o agulles per fluids bruts (gasos de combustió).



Aletes rectes de perfil rectangular en tub circular (longitudinals exteriors)

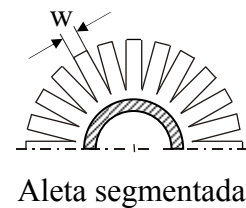
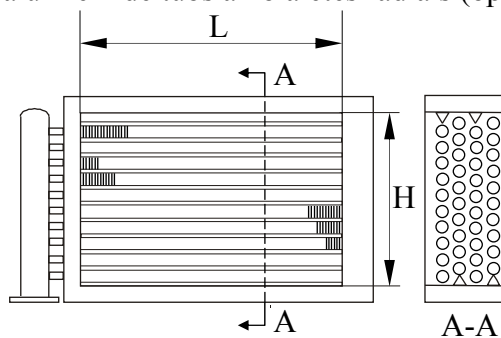
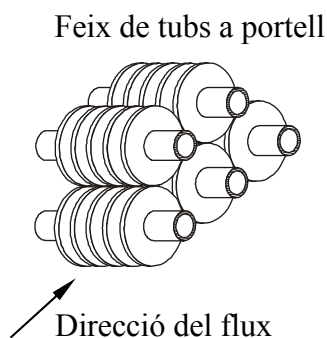


Aletes rectes de perfil trapezoïdal en tub circular (longitudinals interiors)



Aletes d'agulla amb perfil rectangular (cilindriques)

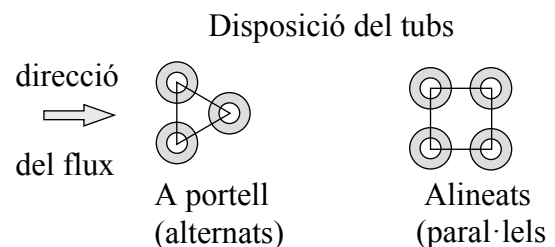
A la següent figura es mostra un feix de tubs amb aletes radials (opcionalment segmentades)



La disposició geomètrica dels tubs a l'espai és pot organitzar de diverses formes.

La facilitat per la neteja mecànica (líquid a pressió), les limitacions en pèrdua de càrrega, la necessitat de disposar d'un alt coeficient de convecció i altres aspectes de procés ens determinen la configuració òptima.

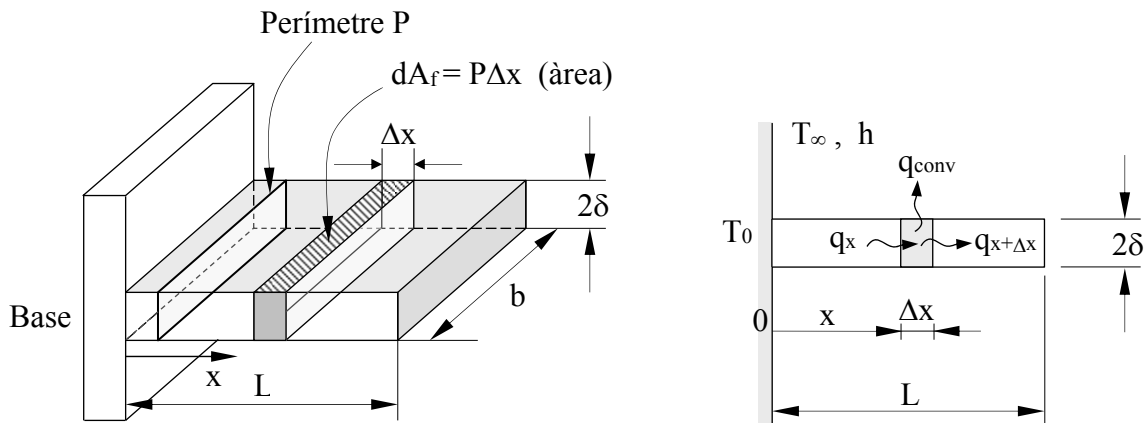
Bàsicament podem considerar la disposició a portell o alternada i la de tubs alineats o paral·lela.



2.4.4 Equació diferencial d'una aleta de secció constant en regim estacionari

Hipòtesis:

1. Propietats constants.
2. Coeficient de convecció constant per tot el perfil de l'aleta.
3. Distribució unidimensional de temperatures $T=T(x)$ (acceptable si $Bi = h \delta/\lambda < 0,1$)
4. Règim estacionari.
5. Sense generació interna de potència tèrmica. $\dot{g} = 0 \text{ W/m}^3$
6. Secció recta constant $A(x)=A$



Volum de control (V.C.) : un Δx d'aleta situat a la distància x de la base (figura anterior).

Balanç d'energia en règim estacionari (hip. 4) i sense generació de calor (hip. 5):

$$q_x = q_{x+\Delta x} + q_{conv} \quad \left\{ \begin{array}{l} q_x = \left[-\lambda A(x) \frac{dT}{dx} \right]_x \quad ; \quad q_{x+\Delta x} = \left[-\lambda A(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+\Delta x} \\ q_{conv} = h P \Delta x \left[T \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) - T_\infty \right] \end{array} \right.$$

$$\overbrace{\left[-\lambda A(x) \frac{dT}{dx} \right]_x}^{q_x} = \overbrace{\left[-\lambda A(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+\Delta x}}^{q_{x+\Delta x}} + \overbrace{h P \Delta x \left[T \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) - T_\infty \right]}^{q_{conv}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[\lambda A(x) \frac{dT}{dx} \right]_{x+\Delta x} - \left[\lambda A(x) \frac{dT}{dx} \right]_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} h P \left[T \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) - T_\infty \right]$$

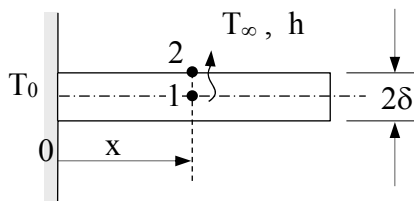
$$\boxed{\frac{d}{dx} \left[\lambda A(x) \frac{dT}{dx} \right] = h P [T(x) - T_\infty]} \quad \text{(equació general)}$$

Si considerem ara les hipòtesis anteriors $\lambda=ct.$ i $A(x)=A=ct.$ i prenem $\theta(x)=T(x)-T_\infty$ resulta,

$$\left. \begin{array}{l} \theta(x) = T(x) - T_\infty \\ \frac{d\theta}{dx} = \frac{dT}{dx} \\ \frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d^2T}{dx^2} \end{array} \right\} \rightarrow \lambda A \frac{d}{dx} \left[\frac{dT}{dx} \right] = h P [T(x) - T_\infty] \Rightarrow \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} = \frac{h P}{\lambda A} \theta(x)$$

Finalment,
$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0}$$
 amb $m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}}$

Es tracta d'una equació diferencial ordinària (una variable independent) de segon ordre (ordre de la derivada) i primer grau (exponent de la derivada). En particular és el que s'anomena una equació lineal homogènia amb coeficients constants que es resol determinant les arrels del seu polinomi característic P(D) (mètode de l'operador D).



D'acord a la hip. 3), acceptable si $Bi = h\delta/\lambda < 0,1$ estem suposant un perfil unidimensional $T=T(x)$ (model amitjanat). Aleshores si la temperatura del punt 1 i 2 son idèntiques per hipòtesis com es possible que l'aleta transfereixi potència tèrmica cap el fluid que l'envolta amb un salt tèrmic nul? Penseu aquesta pregunta.

2.4.5 Solució general

Apliquem per tant la metodologia de l'operador D:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \Rightarrow (D^2 - m^2)\theta = 0 \Rightarrow D = \pm m \quad (2 \text{ arrels característiques})$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(x) &= C_1 e^{-mx} + C_2 e^{+mx} \\ \theta(x) &= C_1 \cosh(mx) + C_2 \sinh(mx) \\ \theta(x) &= C_1 \cosh[m(L-x)] + C_2 \sinh[m(L-x)] \end{aligned} \right\} \text{optem per 3 variants de la solució general}$$

que escollim depenen de les condicions de contorn del model concret.

Essent: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\sinh(0)=0$; $\cosh(0)=1$
 $\sinh'(x) = \cosh(x)$; $\cosh'(x) = \sinh(x)$

2.4.6 Condicions de contorn (c.c.)

Si considerem un contacte perfecte entre la superfície original a T_0 i la base de l'aleta aleshores es complirà la c.c. 1 aplicable a totes les configuracions o models d'aleta,

c.c. 1) $x = 0$, $T(0) = T_0 \Rightarrow \theta_0 = \theta(0) = T_0 - T_\infty$ (c.c. a la base de l'aleta)

a) Convecció a l'extrem.

c.c. 2) $x = L$, $-\lambda A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h A [T(L) - T_\infty] \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = -\frac{h}{\lambda} \theta(L)$ (c.c. a l'extrem)

b) Extrem adiabàtic, $q(L)=0$.

c.c. 2) en $x = L$, $q(L) = -\lambda A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = 0$

c) Temperatura d'extrem coneguda, $T(L)=T_L$.

$$\text{c.c. 2) en } x=L \quad T(L)=T_L \Rightarrow \theta_L = \theta(L) = T_L - T_\infty$$

d) Aleta molt llarga (prou llarga per considerar l'extrem a una temperatura pràcticament igual a T_∞ la del fluid que l'envolta).

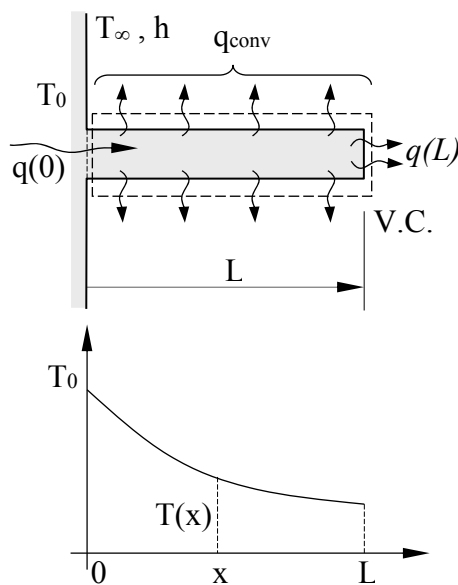
$$\text{c.c. 2) en } x \rightarrow L, \quad T(x) \rightarrow T_\infty \Rightarrow \theta(x) \rightarrow \theta(L) = T_\infty - T_\infty = 0$$

Aplicant les dues condicions de contorn de cada model a la solució general corresponent determinem un perfil de temperatures $T(x)$ i derivant aquest perfil a la posició x , obtenim la potència tèrmica $q(x)$ que travessa la secció recta A de l'aleta en la posició x citada,

$$q(x) = -\lambda A \left. \frac{dT}{dx} \right|_x \quad (\text{W}) \quad \text{potència tèrmica que travessa la secció } x$$

2.4.7 Potència dissipada per l'aleta.

Si coneixem el perfil de temperatures d'una aleta podrem determinar la potència que aquesta dissipa al medi que l'envolta mitjançant dos mètodes.



En règim estacionari la potència tèrmica que travessa l'arrel de l'aleta per conducció coincideix amb la potència que l'aleta dissipa per convecció al medi que l'envolta.

L'afirmació anterior es obvia si pensem en un balanç d'energia al volum de control de la figura.

En general si les pèrdues a l'extrem no són negligibles, el balanç de potència tèrmica al V.C. resulta,

$$q(0) = q_{CONV(0-L)} + q(L)$$

És obvi que la $q(L)$ es dissipa per convecció en el cas a) i per algun mecanisme de transmissió de la calor no concretat en el cas c).

Els conceptes anteriors ens porten a considerar dos mètodes per determinar la potència dissipada per una aleta quan coneixem el perfil de temperatures de la mateixa.

1º Mètode: calculem la potència que travessa per conducció l'arrel de l'aleta.

$$q_0 = q(0) = -\lambda A \left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_{x=0} = -\lambda A \left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x=0} = \dots \quad A = \text{secció recta, (transversal)}$$

2º Mètode: calculem la potència dissipada per convecció al llarg d'una aleta i la que dissipa per l'extrem de la mateixa.

$$\left. \begin{aligned}
 q_{CONV(0-L)} &= \int_0^L h \overbrace{dA_f}^{P dx} \underbrace{[T(x) - T_\infty]}_{\theta(x)} = \int_0^L h P \underbrace{[T(x) - T_\infty]}_{\theta(x)} dx \\
 q(L) &= -\lambda A \left. \frac{dT(x)}{dx} \right|_{x=L}
 \end{aligned} \right\} q(0) = q_{CONV(0-L)} + q(L)$$

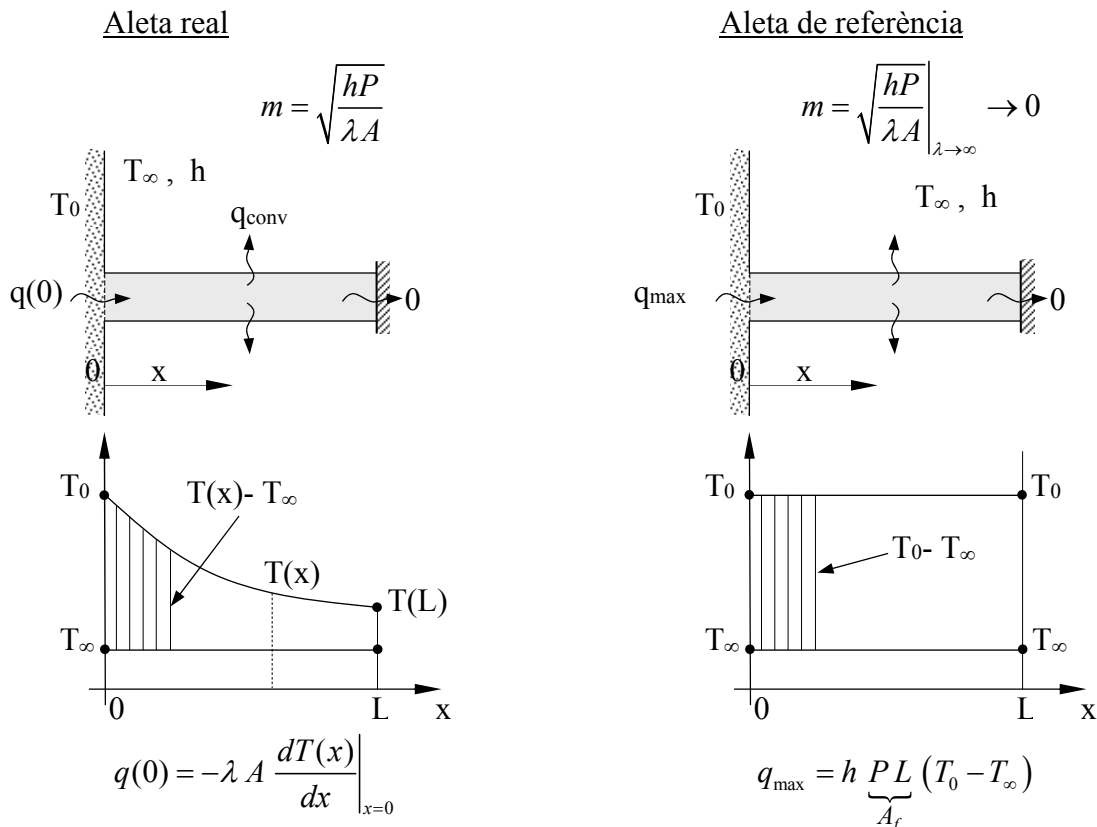
2.4.8 Eficiència d’una superfície estesa o aleta.

Suposem ara conegut el perfil de temperatures $T(x)$ d’una aleta d’extrem adiabàtic (cas b) Es evident que el salt de temperatures entre una aleta real i el fluid que l’envolta, d’acord a la figura, s’anirà reduint conforme ens allunyem de la base de l’aleta. Per tant el flux de potència tèrmica de convecció (W/m^2) serà màxim als voltants de l’arrel o base de l’aleta i mínim al seu extrem. Això equival a dir, que la superfície de l’aleta es menys eficient conforme ens allunyem de la base. Cal tenir molt present aquest concepte alhora de invertir diners en posar aletes a un dispositiu.

Prenem ara una aleta de referència de idèntiques dimensions i condicions de contorn però d’un material amb una conductivitat tèrmica molt elevada ($\lambda \rightarrow \infty$). En aquestes condicions amb el

paràmetre $m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}} \rightarrow 0$ el perfil de temperatures serà $T(x)=T_0$ i com ara el salt tèrmic es

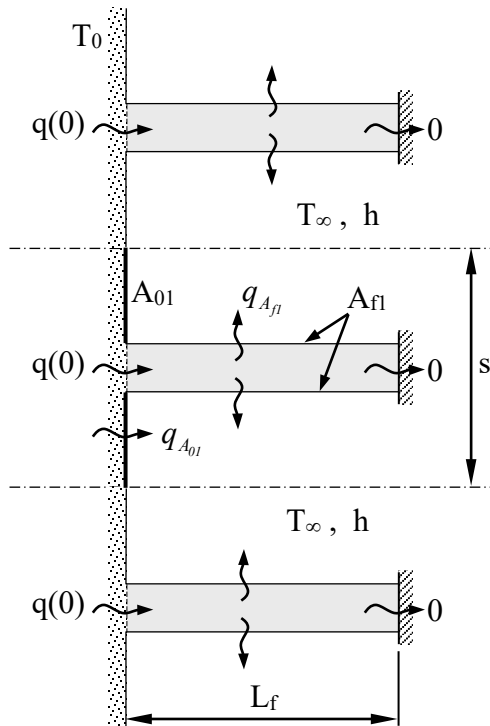
manté constant l’augment de potència tèrmica transferida és directament proporcional a l’augment de superfície estesa. Aquesta aleta de referència és la que transferirà al fluid la potència tèrmica màxima, al ser màxim el salt tèrmic $\forall x$ entre el fluid i l’aleta.



Coneixent el perfil $T(x)$ derivem i trobem la potència tèrmica que travessa l’arrel de l’aleta real.

Definim l'eficiència d'una aleta com $e_f = \frac{q(0)}{q_{max}} < 1$ essent q_{max} la potència dissipada per l'aleta de referència o ideal, $m \rightarrow 0$. Per tant, $q(0) = e_f q_{max} = h e_f \underbrace{A_f}_{PL} (T_0 - T_\infty)$ (amb $e_f < 1$)

Si coneixem l'eficiència d'una aleta determinem la potència dissipada al fluid que l'envolta d'una forma directa i senzilla, $q(0) = h e_f A_f (T_0 - T_\infty)$



L_f = alçada de l'aleta
 P = perímetre d'una aleta (transversal)

A la figura de l'esquerra veiem una superfície amb un conjunt d'aletes.

s = separació entre aletes (cel·la unitaria)

A_{01} = superfície primària d'una aleta
 $A_{f1} = PL$ = superfície estesa d'una aleta

n = nombre total d'aletes

$A_0 = n A_{01}$ superfície primària total
 $A_f = n A_{f1}$ = superfície estesa total

Com que estem considerant aletes d'extrem adiabàtic és evident que $q(0) = q_{A_{f1}}$ o sigui la potència que travessa l'arrel d'una aleta es la que es dissipa per convecció a través de la seva superfície estesa A_{f1}

$q_1 = q_{A_{01}} + \underbrace{q_{A_{f1}}}_{q(0)}$ pot. dissipada per 1 aleta A_{f1} i la superfície primària que li correspon A_{01}

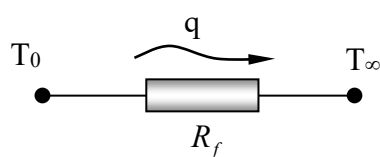
$$\left. \begin{aligned} q_{A_{01}} &= h A_{01} (T_0 - T_\infty) \\ e_f &= \frac{q(0)}{q_{max}} = \frac{q_{A_{f1}}}{q_{max}} = \frac{q_{A_{f1}}}{h A_{f1} (T_0 - T_\infty)} \end{aligned} \right\} q_1 = q_{A_{01}} + q_{A_{f1}} = h A_{01} (T_0 - T_\infty) + e_f h A_{f1} (T_0 - T_\infty)$$

Traiem factor comú $h (T_0 - T_\infty)$ i ens queda $q_1 = h (A_{01} + e_f A_{f1}) (T_0 - T_\infty)$

Superfície amb n aletes

Per n aletes, $q = n q_1 = h (n A_{01} + e_f n A_{f1}) (T_0 - T_\infty)$ i com que $A_0 = n A_{01}$ i $A_f = n A_{f1}$

Resulta,



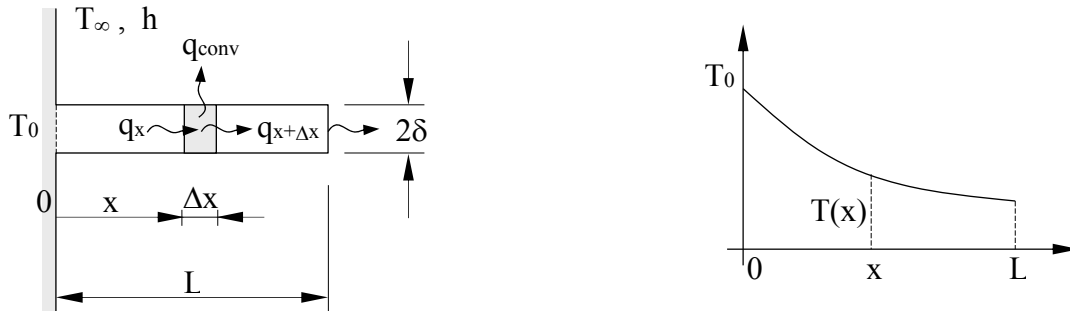
$$q = h (A_0 + e_f A_f) (T_0 - T_\infty) = \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{1}{h (A_0 + e_f A_f)}} = \frac{T_0 - T_\infty}{R_f}$$

Per tant, al posar aletes calcularem la resistència tèrmica de convecció afegint a la superfície primària la superfície estesa de les aletes multiplicada per la

eficiència. Podriem pensar en l'eficiència ($e_f < 1$) com un factor reductor de la superfície de les aletes que quantifica la caiguda del salt tèrmic al llarg de la mateixa.

Resistència a convecció d'una superfície amb n aletes, $R_f = \frac{1}{h(A_0 + e_f A_f)}$

2.4.9 Aleta amb convecció a l'extrem no negligible (cas a)



Condicions de contorn,

c.c.1) $x = 0, \theta(0) = T_0 - T_\infty = \theta_0$ sent $\theta(x) = T(x) - T_\infty$

c.c.2) $x = L, q_L = -\lambda A \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h A [T(L) - T_\infty] \Rightarrow \theta'(x) = \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = -\frac{h}{\lambda} \theta(L)$

Escollim la solució general, $\theta(x) = C_1 \cosh(mx) + C_2 \sinh(mx)$

Derivem l'equació anterior, $\theta'(x) = m C_1 \sinh(mx) + m C_2 \cosh(mx)$

Aplicuem la c.c. 1): per $x=0$ $\theta_0 = C_1 \underbrace{\cosh 0}_1 + C_2 \underbrace{\sinh 0}_0$ i per tant $C_1 = \theta_0$

Aplicuem la c.c. 2): per $x=L$ $\theta'(L) = -\frac{h}{\lambda} \theta(L) = m \theta_0 \sinh(mL) + m C_2 \cosh(mL)$

Substituïm $\theta(L)$ per $\theta(L) = \theta_0 \cosh(mL) + C_2 \sinh(mL)$ resultant l'equació,

$$-\frac{h}{\lambda} [\theta_0 \cosh(mL) + C_2 \sinh(mL)] = m \theta_0 \sinh(mL) + m C_2 \cosh(mL)$$

Sent per tant $C_2 = \frac{-\frac{h}{\lambda} \theta_0 \cosh(mL) - m \theta_0 \sinh(mL)}{\frac{h}{\lambda} \sinh(mL) + m \cosh(mL)} = \frac{-\frac{h}{m\lambda} \cosh(mL) - \sinh(mL)}{\frac{h}{m\lambda} \sinh(mL) + \cosh(mL)} \theta_0$

Substituïnt C_1 i C_2 a l'equació general i aplicant la fórmula,

$$\sinh(a-b) = \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b \quad \text{amb} \quad \begin{cases} a = mL \\ b = mx \end{cases} \quad \text{i de forma similar el cosh(a-b)}$$

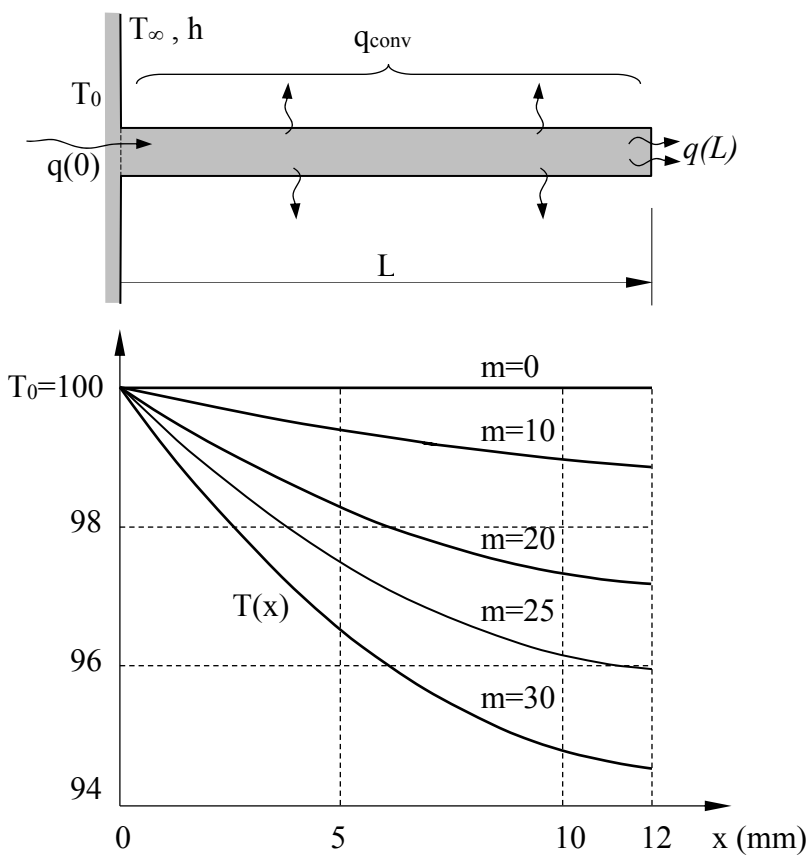
Obtenim la distribució de temperatures al llarg de l'aleta sent $\theta(x) = T(x) - T_\infty$,

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{\cosh[m(L-x)] + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \sinh(mL)} \quad \text{i com que} \quad \begin{cases} \theta(x) = T(x) - T_\infty \\ \theta(0) = T_0 - T_\infty = \theta_0 \end{cases}$$

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \times \frac{\cosh[m(L-x)] + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \sinh(mL)}$$

Veiem ara amb el següent exemple com el perfil de temperatures depèn del paràmetre m.

Exemple: aleta cilíndrica o pua amb $L=12$ mm, $D=4$ mm, $h=100$ W/(m²·K), $T_0=100$ °C, $T_\infty=20$ °C, $\lambda=160$ W/(m·K), $P=\pi D$, $A=\pi D^2/4$, $m=25$



Obtenim $m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}} = 25$

Si representem $T(x)$ ens dona la gràfica de la figura.

Si augmentem la $\lambda \uparrow$ sabem que es redueix $m \downarrow$ i això comporta que el perfil cada vegada s'apropi més a la temperatura T_0 de la base, que es el que ens interessa. Per això en el disseny d'aletes, en general fem servir materials de gran conductivitat tèrmica com els conductors metàl·lics. Veient els perfils per els diferents valors de m, el nostre objectiu serà que el paràmetre m sigui el mes reduït possible. Amb coeficients de convecció reduïts (convecció natural)

també resultaran eficients les aletes ja que també assolirem valors baixos del paràmetre m. Si el valor de $m \rightarrow 0$, $T(x) \rightarrow T_0$ i aleshores la potència dissipada per l'aleta $q \rightarrow h A_f (T_0 - T_\infty)$, sent A_f tota la superfície de l'aleta exposada a convecció.

Potència de conducció en una secció x de l'aleta (amb convecció a l'extrem no negligible)

Derivem i apliquem el 1º mètode, que consisteix en determinar la potència que travessa per conducció la secció x de l'aleta.

$$q(x) = -\lambda A \frac{d\theta(x)}{dx} = -\lambda A \left[\theta_0 \frac{-m \sinh[m(L-x)] - m \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \sinh(mL)} \right]$$

Obtenim
$$q(x) = \lambda A m \theta_0 \frac{\sinh[m(L-x)] + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \sinh(mL)}$$

Potència q_0 dissipada per l'aleta, que avaluem en $x=0$ (arrel o base de l'aleta),

$$q_0 = q(0) = \lambda A m \theta_0 \frac{\sinh(mL) + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \sinh(mL)} = \lambda A m \theta_0 \left[\frac{\tanh(mL) + \frac{h}{m\lambda}}{1 + \frac{h}{m\lambda} \tanh(mL)} \right]$$

Podeu comprovar que $\lambda A m = \lambda A \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}} = \sqrt{hP\lambda A}$

Potència dissipada per convecció entre x_1 i x_2 , $q_{Conv[x_1-x_2]} = q(x_1) - q(x_2)$

Com exercici calcular-ho integrant mitjançant el segon mètode.

Eficiència de l'aleta (amb convecció a l'extrem no negligible)

$$e_f = \frac{q(0)}{q_{\max}} = \frac{q(0)}{h(P L + A)(T_0 - T_\infty)} = \frac{\lambda A m \theta_0 \frac{\sinh(mL) + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \sinh(mL)}}{h(P L + A) \theta_0}$$

Observem que aquesta eficiència depèn del paràmetre $h/m\lambda$.

Si $\frac{h}{m\lambda} \rightarrow 0 \Rightarrow e_f \rightarrow \frac{\lambda A m \tanh(mL)}{h(P L + A)} \approx \frac{\tanh(mL)}{mL} < 1$

Si $\frac{h}{m\lambda} \rightarrow \infty \Rightarrow e_f \rightarrow \frac{\lambda A m \coth(mL)}{h(P L + A)}$

2.4.10 Aleta d'extrem adiabàtic (cas b)

c.c.1) $x = 0$, $\theta(0) = T_0 - T_\infty = \theta_0$

c.c.2) $x = L$, $q_L = -\lambda A \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0$

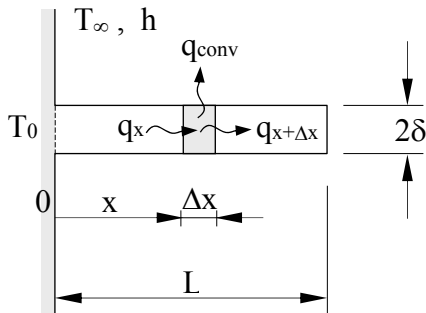
Escollim la solució general, $\theta(x) = C_1 \cosh[m(L-x)] + C_2 \sinh[m(L-x)]$

Derivem l'equació anterior, $\theta'(x) = -m C_1 \sinh[m(L-x)] - m C_2 \cosh[m(L-x)]$

Aplicuem la c.c. 2): per $x=L$ $\theta'(L) = 0 = -m C_1 \underbrace{\sinh 0}_0 - m C_2 \underbrace{\cosh 0}_1 = -m C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

ara la solució ens queda reduïda a $\theta(x) = C_1 \cosh[m(L-x)]$ i aplicuem la c.c. 1),

En $x=0$, $\theta(0) = \theta_0 = T_0 - T_\infty = C_1 \cosh[m(L-0)] \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_0}{\cosh(mL)} = \frac{T_0 - T_\infty}{\cosh(mL)}$

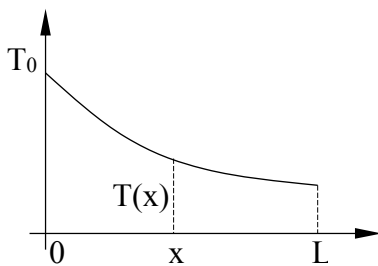


I per tant,

$$\theta(x) = \frac{\theta_0}{\cosh(mL)} \cosh[m(L-x)]$$

O be,

$$T(x) = T_\infty + \frac{(T_0 - T_\infty)}{\cosh(mL)} \cosh[m(L-x)]$$



Potència de conducció en una secció x de l'aleta (extrem adiabàtic)

Derivem $\frac{d\theta(x)}{dx} = -m \frac{\theta_0}{\cosh(mL)} \sinh[m(L-x)]$ i aplicuem el 1º mètode, que consisteix

en determinar la potència que travessa per conducció la secció x de l'aleta.

$$q(x) = -\lambda A \frac{d\theta(x)}{dx} = -\lambda A \left[-m \frac{\theta_0}{\cosh(mL)} \sinh[m(L-x)] \right] = \frac{\lambda A m \theta_0}{\cosh(mL)} \sinh[m(L-x)]$$

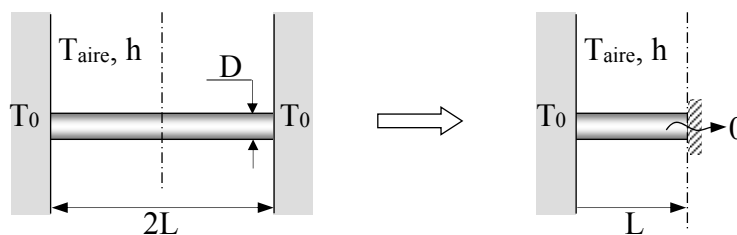
Potència q_0 dissipada per l'aleta, que avaluem en $x=0$ (arrel o base de l'aleta),

$$q_0 = q(0) = \lambda A m \theta_0 \tanh(mL) = \sqrt{\lambda A h P} \theta_0 \tanh(mL)$$

Potència dissipada per convecció entre x_1 i x_2 , $q_{Conv[x_1-x_2]} = q(x_1) - q(x_2)$

Com exercici calcular-ho integrant mitjançant el segon mètode.

Aquest model d'aleta d'extrem adiabàtic és potser el que amb més freqüència es fa servir en el món industrial. Aplicarem aquest model, quan el gruix de l'aleta 2δ sigui tant reduït que puguem negligir la potència tèrmica dissipada per l'extrem en front de la potència dissipada per convecció per la resta de l'aleta. També aplicarem aquest model en els casos de simetria tèrmica com es veu a la següent figura.



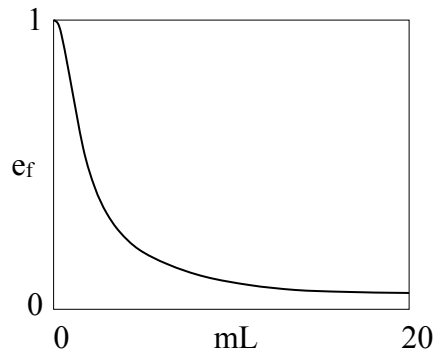
Eficiència de l'aleta (extrem adiabàtic)

$$e_f = \frac{q_0}{q_{max}} = \frac{\lambda A m \theta_0 \tanh(mL)}{h A_f (T_0 - T_\infty)} = \frac{\lambda A m \theta_0 \tanh(mL)}{h P L \theta_0} = \frac{m \tanh(mL)}{\frac{hP}{\lambda A} L} = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

Obtenim finalment l'eficiència per aquest cas,

$$e_f = \frac{q_0}{q_{max}} = \frac{\tanh(mL)}{mL} < 1$$

que grafiquem en funció del paràmetre mL:



2.4.11 Aleta amb temperatura d'extrem coneguda (cas c)

c.c.1) $x = 0$, $\theta(0) = T_0 - T_\infty = \theta_0$

c.c.2) $x = L$, $\theta(L) = T_L - T_\infty = \theta_L$

Escollim la solució general, $\theta(x) = C_1 \cosh[m(L-x)] + C_2 \sinh[m(L-x)]$

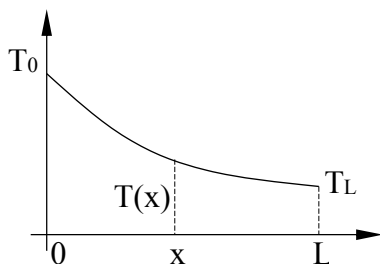
Apliquem la c.c. 2): per $x=L$ $\theta_L = C_1 \underbrace{\cosh 0}_1 + C_2 \underbrace{\sinh 0}_0 = C_1 \Rightarrow C_1 = \theta_L$

Apliquem la c.c. 1): per $x=0$ $\theta_0 = \underbrace{\theta_L}_{C_1} \cosh mL + C_2 \sinh mL \Rightarrow C_2 = \frac{\theta_0 - \theta_L \cosh mL}{\sinh mL}$

Substituint les constants $\theta(x) = \theta_L \cosh[m(L-x)] + \frac{\theta_0 - \theta_L \cosh mL}{\sinh mL} \sinh[m(L-x)]$

Si apliquem l'equació $\sinh(a-b) = \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b$ amb $\begin{cases} a = mL \\ b = m(L-x) \end{cases}$

obtenim l'expressió del perfil de temperatures:



$$\theta(x) = \frac{\theta_L}{\sinh mL} \sinh mx + \frac{\theta_0}{\sinh mL} \sinh[m(L-x)]$$

Calculem el límit d'aquesta expressió quant $m \rightarrow 0$ (λ molt gran, h petita) que farem servir en l'estudi de l'eficiència.

Sent $m, x, y > 0$ $\lim_{m \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sinh mx}{\sinh my}}_0 = \lim_{m \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x \cosh mx}{y \cosh my}}_1 = \frac{x}{y}$

$\theta(x) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\theta_L}{\sinh mL} \sinh mx + \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\theta_0}{\sinh mL} \sinh [m(L-x)] = \frac{\theta_L - \theta_0}{L} x + \theta_0$ i per tant

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0 \quad (\text{perfil lineal})$$

$$q(x) = -\lambda A \frac{dT(x)}{dx} = -\lambda A \frac{T_L - T_0}{L} = \frac{T_0 - T_L}{\frac{L}{\lambda A}}$$

Aquest cas c) resulta imprescindible pel disseny del que anomenem ponts tèrmics (unió de dos superfícies a temperatures iguals o diferents), en els que òbviament la pèrdua per l'extrem no és en absolut negligible, i fins i tot poden superar les pèrdues per convecció.

Potència de conducció en una secció x de l'aleta (temperatura d'extrem coneguda)

Derivem $\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{m\theta_L}{\sinh mL} \cosh mx - \frac{m\theta_0}{\sinh mL} \cosh [m(L-x)]$ i apliquem el 1º mètode,

que consisteix en determinar la potència que travessa per conducció la secció x de l'aleta.

$$q(x) = -\lambda A \frac{d\theta(x)}{dx} = -\lambda A \left[\frac{m\theta_L}{\sinh mL} \cosh mx - \frac{m\theta_0}{\sinh mL} \cosh [m(L-x)] \right]$$

$$q(x) = \frac{\lambda Am}{\sinh mL} \left[\theta_0 \cosh [m(L-x)] - \theta_L \cosh mx \right], \quad m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}}, \quad \boxed{\lambda Am = \sqrt{\lambda AhP}}$$

Potència q_0 dissipada per l'aleta, que avaluem en $x=0$ (arrel o base de l'aleta),

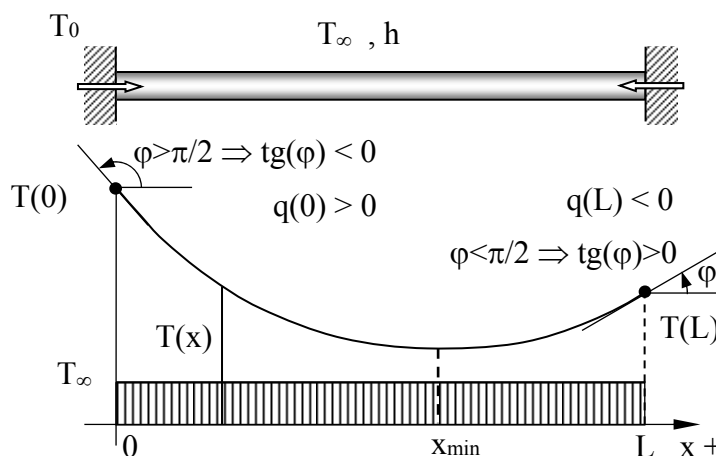
$$q_0 = q(0) = \frac{\lambda Am}{\sinh mL} \left[\theta_0 \cosh mL - \theta_L \right]$$

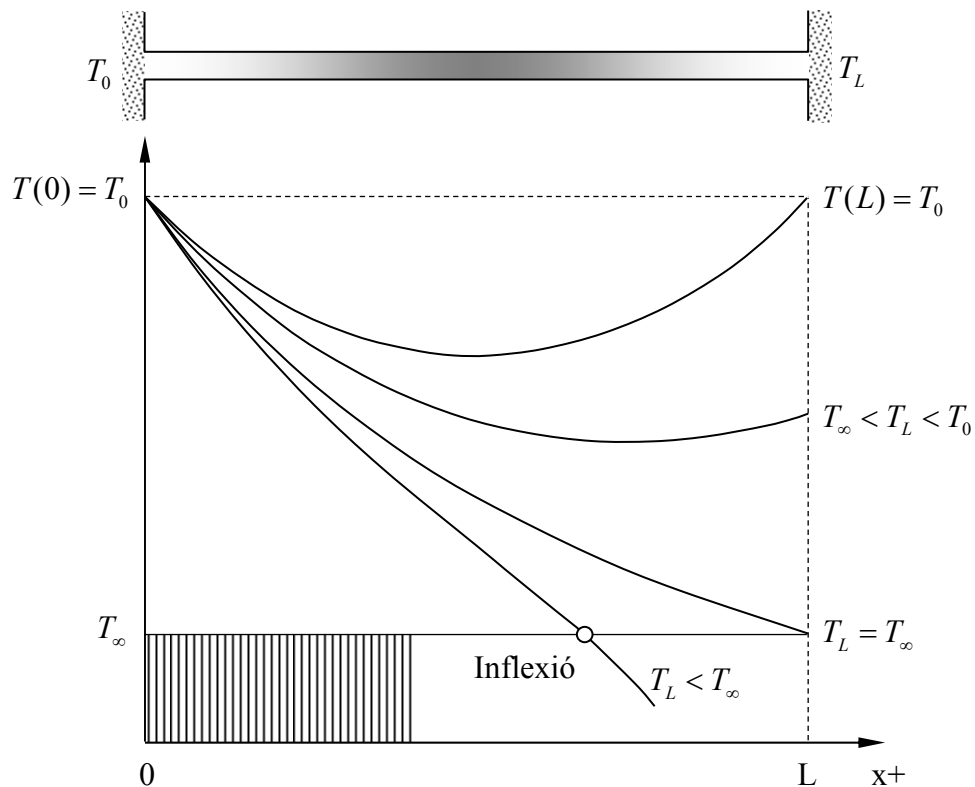
Pèrdues a l'extrem que avaluem en $x=L$, $q_L = q(L) = \frac{\lambda Am}{\sinh mL} \left[\theta_0 - \theta_L \cosh mL \right]$

Potència que dissipa l'aleta per convecció al fluid que l'envolta a T_∞ ,

$$q_{conv(0-L)} = q(0) - q(L) = \frac{\lambda Am}{\sinh mL} (\cosh mL - 1)(\theta_0 + \theta_L)$$

Observem els signes de les potències als extrems amb l'ajuda de la següent figura.





La figura anterior ens fa veure que només en aquest cas c) la potència tèrmica en un extrem pot ser de signe contrari al de l'altre extrem. També es veu com depenen del valor de T_L en relació al valor de T_0 i T_∞ , podem tenir totes les situacions que es mostren a la gràfica.

És obvi que si $T_\infty > T_0$ les gràfiques estarien invertides i per damunt de T_0

Observem que sent $T_L = T_\infty$, la corba té pendent < 0 en $x=L$ i com que $q(L) = -\lambda A \left. \frac{dT}{dx} \right|_L = +$

significa que en aquestes condicions surt potència per aquest extrem. Evidentment el mecanisme no serà per convecció ja que no tenim cap fluid que envolti els dos extrems. En el cas que el signe de dT/dx en $x=0$ i en $x=L$ siguin diferents, podem parlar d'un mínim o màxim relatiu a on $dT/dx=0$. En aquesta secció de l'aleta serà nul·la la potència per conducció.

Eficiència de l'aleta (temperatura d'extrem coneguda)

Tenim dos valors T_0 i T_L coneguts. Quin d'ells farem servir per determinar la q_{max} ?

Aquest es el problema, no ens serveix el valor definit de q_{max}

La potència que travessa l'arrel q_0 pot ser major que el valor definit com a $q_{max} = h A_f (T_0 - T_\infty)$

Observem que si $\left. \begin{matrix} h \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow \infty \end{matrix} \right\} \Rightarrow m \rightarrow 0$ el perfil de temperatures de l'aleta tendeix a un perfil

lineal entre les temperatures T_0 i T_L i no a un valor constant T_0 al llarg de l'aleta, el que ens desmunta el concepte emprat de q_{max} fet servir en els casos a), b) i d).

$$q(0)|_{m \rightarrow 0} = \lim_{m \rightarrow 0} \lambda A m \theta_0 \left(\coth mL - \frac{\theta_L}{\theta_0 \sinh mL} \right) = \frac{\lambda A}{L} (\theta_0 - \theta_L) = \frac{T_0 - T_L}{\frac{L}{\lambda A}}$$

Emprar λ molt gran i h petita equival pràcticament a tenir una aleta aïllada lateralment amb un comportament idèntic al d'una paret de grans dimensions de gruix L .

Per tant **NO podem** aplicar el concepte d'eficiència emprat en els altres models d'aleta.

Per aquest motiu al referir-nos al cas c), s'acostuma a parlar de ponts tèrmics mes que d'aletes.

2.4.12 Aleta molt llarga (cas d).

En aquest cas la temperatura de l'extrem ha de ser pràcticament la del fluid que l'envolta T_∞ . Aquesta situació es presenta en aletes molt llargues i també en aletes d'alçades moderades si aquestes són molt primes. A l'aplicar les condicions de contorn, veurem com aquest model d'aleta molt llarga es vàlid si mL es tal que $e^{-mL} \approx 0$ (*molt petit*) i $e^{+mL} \approx \infty$! (*molt gran*)

$$c.c. 1) \quad x=0, \quad T(0)=T_0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \theta(0) = T_0 - T_\infty$$

$$c.c. 2) \quad x \rightarrow L, \quad T(x) \rightarrow T_\infty \quad \Rightarrow \quad \theta(x) \rightarrow \theta(L) = T_\infty - T_\infty = 0$$

Escollim la solució general, $\theta(x) = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{+mx}$ i li apliquem les 2 c.c. per determinar les constants de integració C_1 i C_2 .

De la c.c. 2) en $x=L$ obtenim $\theta(L) = 0 = C_1 \underbrace{e^{-mL}}_{\approx 0} + C_2 \underbrace{e^{+mL}}_{\approx \infty} = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot \infty \Rightarrow C_2 = 0$ per garantir que θ sigui acotada. (sempre que mL sigui tal que $e^{-mL} \approx 0$ i $e^{+mL} \approx \infty$)

Ara la solució ens queda reduïda a $\theta(x) = C_1 e^{-mx}$ i apliquem la condició de contorn 1),

$$c.c.1) \quad \theta(0) = \theta_0 = C_1 \underbrace{e^{-m \cdot 0}}_1 \Rightarrow C_1 = \theta_0 \quad \text{i per tant la solució final es } \theta(x) = \theta_0 e^{-mx}$$

$$\text{O be, } \frac{\theta(x)}{T(x) - T_\infty} = \frac{\theta_0}{(T_0 - T_\infty)} e^{-mx} \Rightarrow \boxed{T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-mx}}$$

Determinem ara la potència de conducció en una secció x de l'aleta (aleta molt llarga)

Calculem la derivada $\frac{d\theta(x)}{dx} = -m \theta_0 e^{-mx}$ i apliquem el 1º mètode,

$$q(x) = -\lambda A \left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right| = -\lambda A (-m \theta_0 e^{-mx}) = \lambda A m \theta_0 e^{-mx} = \sqrt{\lambda A h P} \theta_0 e^{-mx}$$

Potència $q_0 = q(0)$ dissipada per l'aleta en $x=0$ o sigui a l'arrel o base de l'aleta,

$$q_0 = q(0) = \lambda A m \theta_0 = \lambda A \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}} \theta_0 = \sqrt{\lambda A h P} \theta_0$$

Pèrdues a l'extrem que avaluem en $x=L$, $q_L = q(L) = \lambda A m \theta_0 e^{-mL} = \sqrt{\lambda A h P} \theta_0 e^{-mL}$

Ja que per hipòtesi mL és tal que $e^{-mL} \approx 0$ (*molt petit*) significa que a la pràctica, $q(L)$ és negligible.

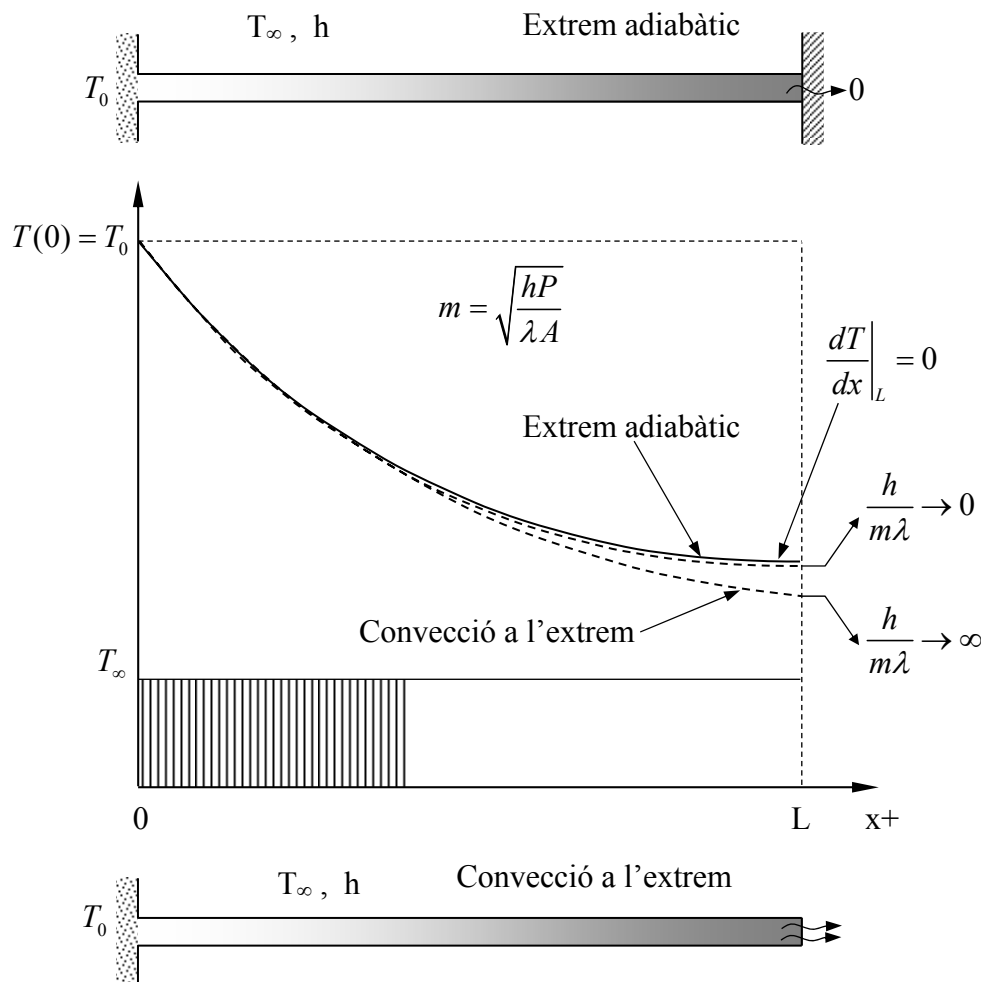
Potència dissipada per convecció entre x_1 i x_2 , $q_{CONV [x_1, x_2]} = q(x_1) - q(x_2)$

Eficiència de l'aleta (molt llarga)

$$e_f = \frac{q_0}{q_{max}} = \frac{\lambda A m \theta_0}{h \underbrace{A_f}_{PL} (T_0 - T_\infty)} = \frac{\lambda A m \theta_0}{h P L \theta_0} = \frac{m}{\frac{hP}{\lambda A} L} = \frac{m}{m^2 L} = \frac{1}{mL} \quad \text{ja que} \quad m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}}$$

Obtenint finalment l'eficiència de l'aleta,
$$e_f = \frac{q_0}{q_{max}} = \frac{1}{mL} < 1$$

Volem comparar ara els perfils de l'aleta d'extrem adiabàtic i l'aleta amb convecció a l'extrem.

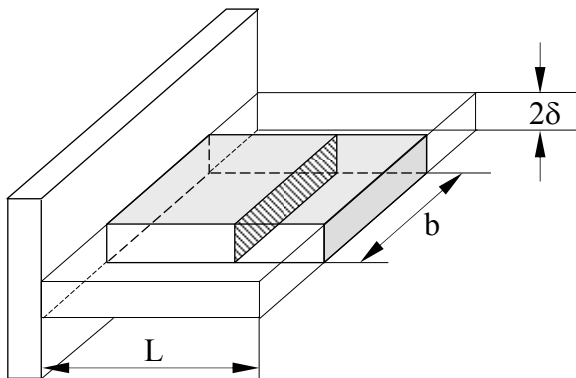


La figura ens fa veure que cau menys la temperatura en l'aleta d'extrem adiabàtic el que resulta molt evident.

En el cas de h petita i/o λ gran, o sigui quan $\frac{h}{m\lambda} \rightarrow 0$ es pot veure com el perfil d'aleta amb convecció a l'extrem s'apropa a el perfil d'aleta d'extrem adiabàtic. La diferenciació es màxima quan $\frac{h}{m\lambda} \rightarrow \infty$ o sigui per h gran i/o λ petita.

Ara be, si mL es tal que $e^{-mL} \approx 0$ (molt petit) aleshores podem fer servir el model (d) d'aleta molt llarga. En aquest cas, els dos models anteriors (a) de convecció a l'extrem i (b) d'extrem adiabàtic donarien els mateixos resultats i coincidirien les tres gràfiques.

2.4.13 Càlcul del paràmetre m per diferents tipus d'aletes



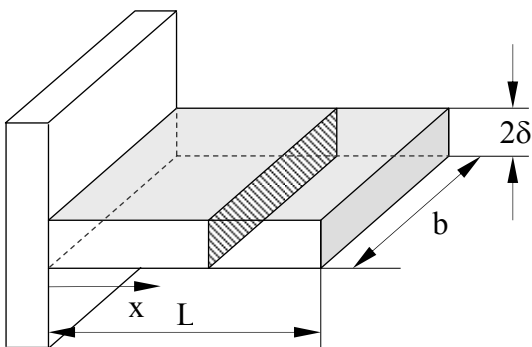
a) Pestanya molt ampla

Suposem una superfície estesa de gran amplada. Per un segment d'aleta d'amplada b,

$$A = b \cdot 2\delta \quad P = 2b$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}} = \sqrt{\frac{h \cdot 2b}{\lambda b \cdot 2\delta}} = \sqrt{\frac{h}{\lambda \delta}}$$

b) Pestanya molt prima en front de l'amplada ($\delta \ll b$)

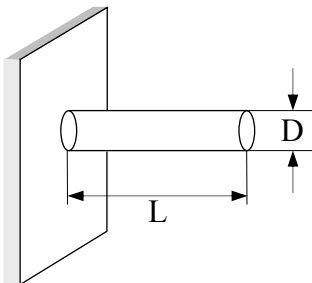


$$A = b \cdot 2\delta \quad P = 2b + 2 \cdot 2\delta$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}} = \sqrt{\frac{h(2b + 2 \cdot 2\delta)}{\lambda b \cdot 2\delta}} \approx \sqrt{\frac{h}{\lambda \delta}}$$

$\delta \ll b$

c) Pua o agulla de diàmetre D



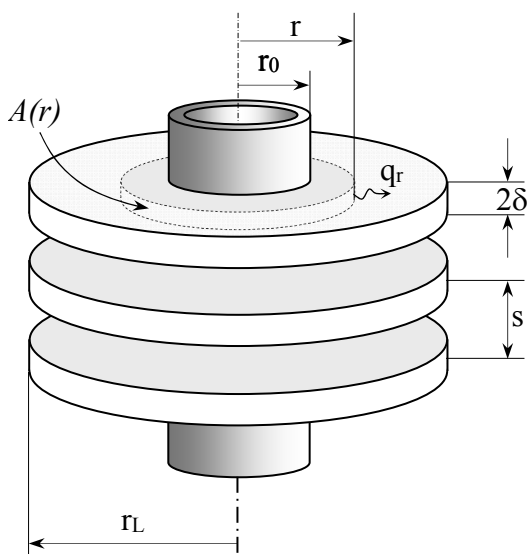
$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad P = \pi D$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}} = \sqrt{\frac{h \pi D}{\lambda \frac{\pi D^2}{4}}} = \sqrt{\frac{4h}{\lambda D}}$$

d) Aleta radial o anular (fórmula aproximada de Schmidt)

Veiem a la figura, que la secció transversal $A(r)$ (\perp a q) no és pas constant sinó que augmenta amb r i aquest fet complica molt l'anàlisi d'aquestes aletes. Si considerem el cas d'aletes anulars d'extrem adiabàtic, i plantegem un balanç de potència a un element diferencial d'aleta obtenim una equació diferencial de Bessel modificada d'ordre 0 amb una solució senzilla que ens permet trobar el perfil de temperatures, però que fa servir funcions de Bessel d'ordre 0 modificades de primera i segona espècie. Si l'extrem no fos adiabàtic, el problema resulta inabordable.

Per evitar aquesta complexitat, utilitzarem una versió simplificada per trobar l'eficiència d'aquestes aletes. D'aquesta forma, també podrem determinar l'eficiència d'aletes anulars amb convecció a l'extrem, fent servir l'estratègia d'augmentar l'alçada de l'aleta just amb el valor de seu semigruix δ ($L_r + \delta$)



Extrem adiabàtic

$$P(r) = 2 \times 2\pi r \text{ (perímetre)}$$

$A(r) = 2\pi r \times 2\delta$ (secció recta) veiem com la secció recta augmenta amb el radi.

$$\frac{P(r)}{A(r)} = \frac{2 \times 2\pi r}{2\pi r \times 2\delta} = \frac{1}{\delta} = ct.$$

$$m = \sqrt{\frac{h}{\lambda_f} \frac{P}{A}} = \sqrt{\frac{h}{\lambda_f} \frac{1}{\delta}} \quad \text{i sent} \quad \phi = \left[\frac{r_L}{r_0} - 1 \right] \left[1 + 0,35 \ln \left(\frac{r_L}{r_0} \right) \right]$$

Fórmula aproximada de Schmidt

$$e_f = \frac{\tanh(m r_0 \phi)}{m r_0 \phi} = \eta \text{ (eficiència)}$$

Aquesta senzilla fórmula dona bons resultats i ens evita haver d'emprar les funcions de Bessel.

Convecció a l'extrem

Si volem considerar la convecció a l'extrem, farem servir un procediment simplificat que consisteix en determinar el factor ϕ augmenten el radi exterior amb el semigruix de l'aleta,

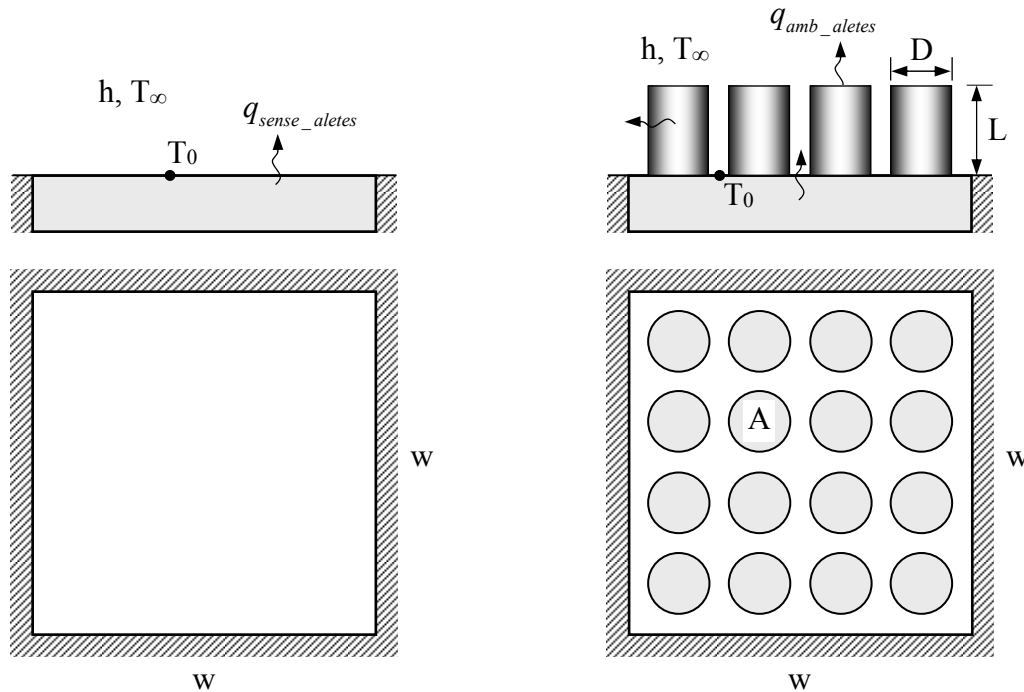
$$r_L + \delta \text{ sent ara } \phi = \left[\frac{r_L + \delta}{r_0} - 1 \right] \left[1 + 0,35 \ln \left(\frac{r_L + \delta}{r_0} \right) \right]$$

En aquest cas la superfície estesa d'una aleta seria $A_{f-1} = \pi \left[(r_L + \delta)^2 - r_0^2 \right] \times 2 \text{ cares}$

De fet es la única forma aproximada de calcular-ho ja que no es pot resoldre l'equació de Bessel amb la condició de contorn de convecció a l'extrem.

2.4.14 Efectivitat d’una aleta (exercici resolt: consolidació de conceptes, cas a).

Volem augmentar la potència tèrmica dissipada a l’aire (h, T_∞) d’una superfície quadrada de costat w que es troba a una temperatura T_0 constant emprant n aletes cilíndriques d’alçada L , diàmetre D , conductivitat tèrmica λ_f i amb un contacte perfecte a la seva base. Volem considerar també una altre sistema format per les mateixes aletes però d’alçada $4L$.



Hipòtesis: a) considerem els mateixos valors T_0, h, T_∞ per la disposició amb i sense aletes b) regim estacionari c) considerem perfil unidimensional $T=T(x)$ (comprovem que el $Bi < 0,1$)

Dades: $D=4 \text{ mm}$, $\lambda_f=11 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, $L=3 \text{ mm}$, $R''_{tc}=0 \text{ (m}^2\cdot\text{K)}/\text{W}$, $w=24 \text{ mm}$, $n=16$ aletes
 $T_\infty=20 \text{ }^\circ\text{C}$, $h=250 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$, $T_0=120 \text{ }^\circ\text{C}$.

Determini per el sistemes aletejats d’alçada L i $4L$,

1) El perímetre P d’una aleta, la seva secció recta A , el paràmetre m , la superfícies estesa A_f i primària A_0 totals, la relació $\frac{A_0 + A_f}{A_{orig}}$, $\frac{A_f}{n A} = \frac{A_{f-1}}{A}$ i reflexioni sobre el seu significat.

$A_{orig}=w \times w=$ superfície original sense aletes , $A_{f-1} =$ sup. estesa d’una aleta (inclou l’extrem)
 $A_0 = w^2 - n A=$ superfície primària total, $A_f = n A_{f-1} =$ superfície estesa total (inclou els extrems)

2) La potència total dissipada per una aleta, per la superfície primària total i per tot el sistema aletejat (A_0+A_f).

3) L’eficiència d’una aleta $e_f = \frac{q_1(0)}{q_{max}}$

4) Relació entre la potència $q_1(0)$ dissipada per una aleta i la potència dissipada per la seva base “ A ” quan no existia l’aleta. (terme anomenat efectivitat o eficàcia d’una aleta)

5) Relació entre la potència dissipada per els sistemes aletejats (L i $4L$) (*amb aletes*) i la potència dissipada per la superfície original (*sense aletes*).

Recollir en un parell de taules els resultats de totes les preguntes en S.I.

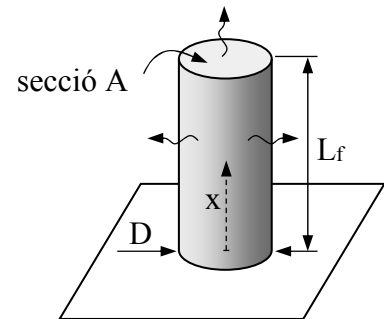
6) Grafiqueu la variació de la potència total, l'eficiència, l'efectivitat i la relació de la potència dissipada amb aletes respecta a la potència sense aletes en funció de l'alçada L. Reflexioni i tregui alguna conclusió en relació a la utilitat de l'eficiència i l'efectivitat.

Solució:

$$1) P = \pi D ; A = \frac{\pi D^2}{4} ; m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda_f A}} ; A_{orig} = w^2$$

$$A_0 = w^2 - nA ; A_f(L_f) = n \underbrace{(PL_f + A)}_{A_{f-1}} \text{ (funció de l'alçada)}$$

$$A_f(L) = 8,042 \times 10^{-4} \text{ m}^2 ; A_f(4L) = 2,614 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$



Observi que les 6 primeres columnes son independents de Lf

L_f	P	A	m	nA	A_{orig}	A_0	A_f	$\frac{A_0 + A_f}{A_{orig}}$	$\frac{A_f}{nA}$
L	0,013	$\frac{1,257}{10^5}$	150,8	$\frac{2,011}{10^4}$	$\frac{5,76}{10^4}$	$\frac{3,749}{10^4}$	$\frac{8,042}{10^4}$	2,05	4
$4L$							$\frac{2,614}{10^3}$	5,19	13

2) La potència que travessa la secció x d'una aleta és (cas a),

$$q_1(x, L_f) = \lambda_f A m (T_0 - T_\infty) \left(\frac{\sinh m(L_f - x) + \frac{h}{m\lambda_f} \cosh m(L_f - x)}{\cosh(mL_f) + \frac{h}{m\lambda_f} \sinh(mL_f)} \right) \text{ Si substituïm } x=0$$

obtenim $q_1(0, L_f)$ la potència total que travessa la base d'una aleta en funció de la seva alçada.

$$q_{A_0} = h A_0 (T_0 - T_\infty) \text{ potència dissipada per la superfície primària total } A_0$$

$$q_{tot}(L_f) = \underbrace{h A_0 (T_0 - T_\infty)}_{q_{sup.primaria A_0}} + \underbrace{n q_1(0, L_f)}_{q_{sup.estesa A_f}} \text{ pot. total dissipada per el sistema aletejat d'alçada } L_f$$

$$3) \text{ Sent } q_{max}(L_f) = h \overbrace{(PL_f + A)}^{A_{f-1}} (T_0 - T_\infty) \Rightarrow e_f(L_f) = \frac{q_1(0, L_f)}{q_{max}(L_f)}$$

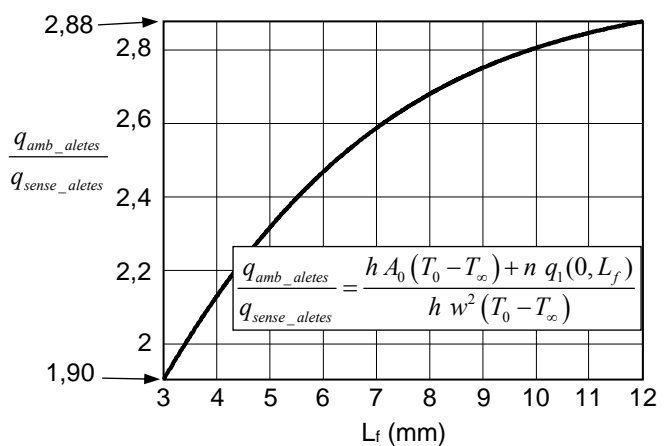
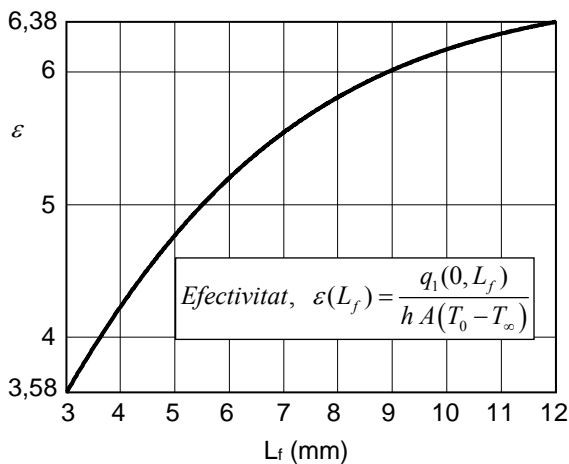
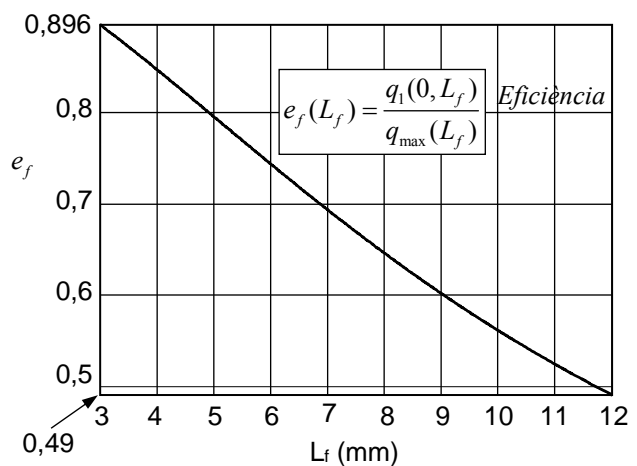
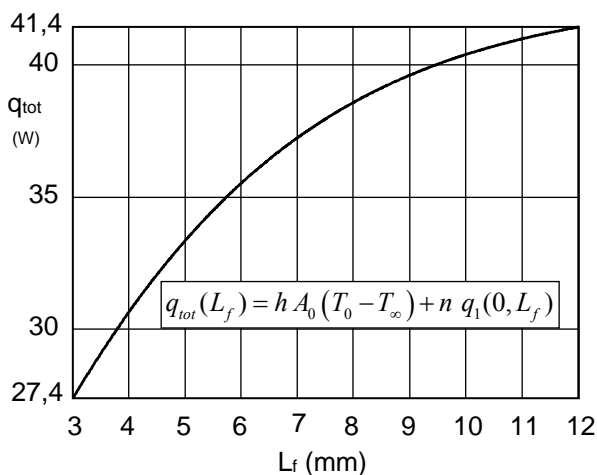
4) $Efectivitat(L_f) = \frac{q_1(0, L_f)}{h A (T_0 - T_\infty)}$ sent $h A (T_0 - T_\infty)$ la potència dissipada per la superfície de la base de l'aleta quan no existia l'aleta.

$$5) \frac{q_{amb_aletes}}{q_{sense_aletes}}(L_f) = \frac{\overbrace{q_{tot}(L_f)}^{q_{tot}(L_f)}}{h w^2 (T_0 - T_\infty)}$$

Aquesta relació és òbviament la més útil per decidir la viabilitat de la inversió a realitzar. Recollim a la següent taula els resultats dels apartats 2,3, 4 i 5 per les alçades L i 4L.

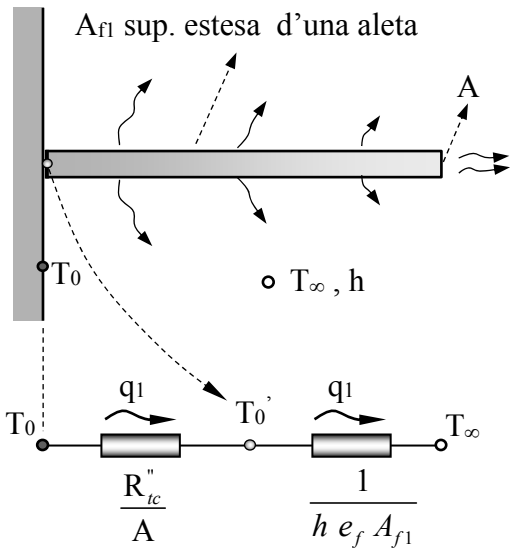
L_f	q_{A_0}	$q_1(0, L_f)$	$q_{tot}(L_f)$	$q_{m\grave{a}x}$	$e_f(L_f)$	$h A(T_0 - T_\infty)$	$\frac{q_1(0, L_f)}{h A(T_0 - T_\infty)}$	$\frac{q_{amb_aletes}}{q_{sense_aletes}}$
L	9,373	1,125	27,379	1,257	0,896	0,314	3,582	1,901
4L		2,003	41,421	4,084	0,490		6,376	2,876

6) Adjuntem les gràfiques corresponents en funció de L_f (es mantenen la resta de variables)



Veiem que a mesura que augmentem l'alçada de les aletes de L a 4L la seva eficiència es redueix dràsticament (de 0,896 a 0,490) i en canvi la seva efectivitat casi es duplica (de 3,582 a 6,376). En el sistema aletejat d'alçada L $q_{amb_aletes}(L) = 1,90 \times q_{sense_aletes}$ i al considerar el sistema d'alçada 4L, $q_{amb_aletes}(4L) = 2,876 \times q_{sense_aletes}$. Es evident que el sistema d'alçada 4L representarà una inversió molt superior al sistema d'alçada L i només el cost previsible o actual de l'augment d'energia recuperada ens permetrà decidir quina alçada es la millor opció. En ocasions apart del tema purament econòmic hi han certes especificacions de funcionament que també condicionen la inversió.

2.4.15 Eficiència d’una aleta amb resistència de contacte a la seva base.



$$\frac{R''_{tc}}{A} + \frac{1}{h e_f A_{f1}} \stackrel{\text{definició}}{=} \frac{1}{h e_{f_Rtc} A_{f1}} \Rightarrow$$

$$e_{f_Rtc} = \frac{1}{\frac{1}{e_f} + h A_{f1} \frac{R''_{tc}}{A}}$$

Sabent que $A_f = n_f A_{f1}$ queda,

$$e_{f_Rtc} = \frac{1}{\frac{1}{e_f} + h \frac{A_f}{n_f} \frac{R''_{tc}}{A}}$$

Calculem la potència amb la fórmula de sempre,

$$q_1 = \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{1}{h e_{f_Rtc} A_{f1}}} \quad (\text{una aleta}) \quad n_f q_1 = n_f \times \left(\frac{T_0 - T_\infty}{\frac{1}{h e_{f_Rtc} A_{f1}}} \right) \quad (n_f \text{ nombre d'aletes})$$

Sent $q = n_f q_1$ la potència transferida per n aletes.

Tipus de contacte



Veiem en els esquemes anteriors els diferents tipus de recolzaments que ens podem trobar. A l’arrel de les aletes ens trobem un salt tèrmic ($T_0 - T_0'$) entre la temperatura de la superfície original T_0 i la de la base de l’aleta T_0' que serà mes o menys important en funció del tipus de contacte abans esmentat. Quan pitjor es el contacte major es aquest salt tèrmic, el que es tradueix amb una reducció considerable de la potència dissipada per l’aleta.

2.4.16 RESUM D’ALETES

a) Aleta amb convecció a l’extrem no negligible (cas a)

c.c.1) $x = 0$, $\theta(0) = T_0 - T_\infty = \theta_0$

c.c.2) $x = L$, $q_L = -\lambda A \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h A [T(x) - T_\infty] \Rightarrow \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = -\frac{h}{\lambda} \theta_L$

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \times \left(\frac{\cosh[m(L-x)] + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \sinh(mL)} \right) \quad \text{sent} \quad m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}}$$

Potència de conducció en una secció x de l’aleta (convecció a l’extrem no negligible)

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = (T_0 - T_\infty) \times \left(\frac{-m \sinh[m(L-x)] - m \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \sinh(mL)} \right)$$

$$q(x) = \lambda A m (T_0 - T_\infty) \times \left(\frac{\sinh[m(L-x)] + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \left(\frac{h}{m\lambda}\right) \sinh(mL)} \right) \quad \boxed{\lambda A m = \sqrt{\lambda A h P}}$$

$$q_0 = q(0) = \lambda A m (T_0 - T_\infty) \times \left(\frac{\tanh mL + \frac{h}{m\lambda}}{1 + \frac{h}{m\lambda} \tanh mL} \right)$$

Eficiència de l’aleta (convecció a l’extrem no negligible)

$$e_f = \frac{q_0}{q_{max}} = \frac{\lambda A m (T_0 - T_\infty) \left(\frac{\tanh mL + \frac{h}{m\lambda}}{1 + \frac{h}{m\lambda} \tanh mL} \right)}{h (PL + A) (T_0 - T_\infty)} < 1 \quad \text{sent} \quad m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}}$$

b) Aleta d'extrem adiabàtic (cas b)

$$c.c.1) \quad x = 0, \quad \theta(0) = T_0 - T_\infty = \theta_0$$

$$c.c.2) \quad x = L, \quad q_L = -\lambda A \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

$$\theta(x) = \frac{\theta_0}{\cosh(mL)} \cosh[m(L-x)] \quad \text{O be,} \quad T(x) = T_\infty + \frac{(T_0 - T_\infty)}{\cosh(mL)} \cosh[m(L-x)]$$

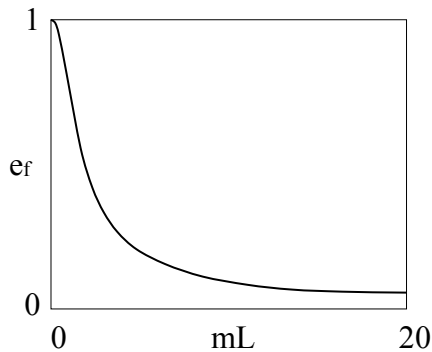
Potència de conducció en una secció x de l'aleta (extrem adiabàtic)

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = -m \frac{(T_0 - T_\infty)}{\cosh(mL)} \sinh[m(L-x)]$$

$$q(x) = -\lambda A \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{\lambda A m (T_0 - T_\infty)}{\cosh(mL)} \sinh[m(L-x)] \quad \text{sent} \quad m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}}$$

$$q_0 = q(0) = \lambda A m (T_0 - T_\infty) \tanh(mL) = \sqrt{\lambda A hP} (T_0 - T_\infty) \tanh(mL)$$

Eficiència de l'aleta (d'extrem adiabàtic)



$$e_f = \frac{q_0}{q_{max}} = \frac{\tanh(mL)}{mL} < 1$$

c) Aleta amb temperatura d'extrem coneguda (cas c)

$$c.c.1) \quad x = 0, \quad \theta(0) = T_0 - T_\infty = \theta_0$$

$$c.c.2) \quad x = L, \quad \theta(L) = T_L - T_\infty = \theta_L$$

$$T(x) = T_\infty + \frac{(T_L - T_\infty)}{\sinh mL} \sinh mx + \frac{(T_0 - T_\infty)}{\sinh mL} \sinh[m(L-x)]$$

$$\theta_{lim}(x) = \lim_{m \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{\theta_L - \theta_0}{L} x + \theta_0$$

i per tant
$$T_{\text{lim}}(x) = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0$$
 essent
$$q(x) = \frac{T_0 - T_L}{\frac{L}{\lambda A}}$$

Potència de conducció en una secció x de l'aleta (temperatura d'extrem coneguda)

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{m(T_L - T_\infty)}{\sinh mL} \cosh mx - \frac{m(T_0 - T_\infty)}{\sinh mL} \cosh [m(L-x)] \quad , \quad m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}}$$

$$q(x) = \frac{\sqrt{\lambda AhP}}{\sinh mL} \left[(T_0 - T_\infty) \cosh [m(L-x)] - (T_L - T_\infty) \cosh mx \right] \quad , \quad \boxed{\sqrt{\lambda AhP} = \lambda Am}$$

$$q_0 = q(0) = \frac{\sqrt{\lambda AhP}}{\sinh mL} \left[(T_0 - T_\infty) \cosh mL - (T_L - T_\infty) \right]$$

$$q_L = q(L) = \frac{\sqrt{\lambda AhP}}{\sinh mL} \left[(T_0 - T_\infty) - (T_L - T_\infty) \cosh mL \right]$$

$$q_{\text{conv } (0-L)} = q(0) - q(L) = \frac{\sqrt{\lambda AhP}}{\sinh mL} (\cosh mL - 1)(T_0 + T_L - 2T_\infty)$$

Secció i condició de potència mínima a l'interval 0-L

1) Si el signe $[q(0)] = \text{signe } [q(L)]$ determinem el mínim o màxim relatiu de $q(x)$:

$$\frac{dq(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x_{\text{min}} = \frac{1}{m} \ln \sqrt{\frac{\theta_0 e^{mL} - \theta_L}{\theta_0 - \theta_L}} \quad \text{si } e^{mL} > \frac{\theta_L}{\theta_0} \text{ i } \theta_0 > \theta_L \text{ o } e^{mL} < \frac{\theta_L}{\theta_0} \text{ i } \theta_0 < \theta_L$$

Altrament determinem $\min[q(0), q(L)]$ i sabrem la posició del mínim absolut.

2) Si el signe $[q(0)] \neq \text{signe } [q(L)]$ determinem $q(x)=0$

$$\frac{dT(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x_{q \rightarrow 0} = \frac{1}{m} \ln \sqrt{\frac{e^{mL} - \frac{\theta_L}{\theta_0}}{\frac{\theta_L}{\theta_0} - 1}} = \frac{1}{m} \ln \sqrt{\frac{\theta_0 e^{mL} - \theta_L}{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}}$$

$$\text{si } e^{mL} > \frac{\theta_L}{\theta_0} \text{ i } e^{mL} > \frac{\theta_0}{\theta_L} \text{ o } e^{mL} < \frac{\theta_L}{\theta_0} \text{ i } e^{mL} < \frac{\theta_0}{\theta_L} \Rightarrow \exists x_{q \rightarrow 0} \in [0, L] \quad | \quad q(x_{q \rightarrow 0}) = 0$$

Podem comprovar les equacions anteriors resolent numèricament $q(x)=0$ amb qualsevol solver (HP, Mathcad, etc.) malgrat que sempre es millor disposar de les equacions explícites.

(Parcial 06/04/2001)
$$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda_a A}} = 51,5 \quad L=60 \text{ mm}$$

$$\theta_0 = T_0 - T_\infty \quad , \quad \theta_L = T_L - T_\infty \quad \text{comprovem que } \text{signe}[q(0)] \neq \text{signe}[q(L)]$$

$$x_{q \rightarrow 0} = \frac{1}{m} \ln \sqrt{\frac{\theta_0 e^{mL} - \theta_L}{\theta_L - \theta_0 e^{-mL}}} = 0,036 \text{ mm} \quad , \quad e^{mL} = 21,98 > \frac{\theta_0}{\theta_L} = 1,829 \quad \text{i} \quad e^{mL} > \frac{\theta_L}{\theta_0} = 0,547$$

En aquest exercici del 06/04/2001 veiem que si s'anul·la la potència en $x=36$ mm.
Cal reflexionar que succeeix quan $T_L=T_\infty$

Eficiència de l'aleta (temperatura d'extrem coneguda) No definida

d) Aleta molt llarga (cas d).

$$c.c.1) \quad x=0 \quad , \quad T(0)=T_0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \theta(0) = T_0 - T_\infty$$

$$c.c.2) \quad x \rightarrow L \quad , \quad T(x) \rightarrow T_\infty \quad \Rightarrow \quad \theta(x) \rightarrow \theta(L) = T_\infty - T_\infty = 0$$

$$\theta(x) = \theta_0 e^{-mx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-mx}}$$

Potència de conducció en una secció x de l'aleta (aleta molt llarga)

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = -m \theta_0 e^{-mx} \quad q(x) = -\lambda A \frac{d\theta(x)}{dx} = \sqrt{\lambda AhP} \theta_0 e^{-mx}$$

$$q_0 = q(0) = \lambda A m (T_0 - T_\infty) = \sqrt{\lambda A hP} (T_0 - T_\infty)$$

$$q_L = q(L) = \lambda A m (T_0 - T_\infty) e^{-mL} = \sqrt{\lambda AhP} (T_0 - T_\infty) e^{-mL} \quad mL \approx \text{prou gran} \quad \Rightarrow \quad q_L \approx 0$$

Eficiència de l'aleta (molt llarga)

$$\boxed{e_f = \frac{q_0}{q_{max}} = \frac{1}{mL} < 1}$$

Eficiència d'una aleta amb resistència de contacte a la seva base.

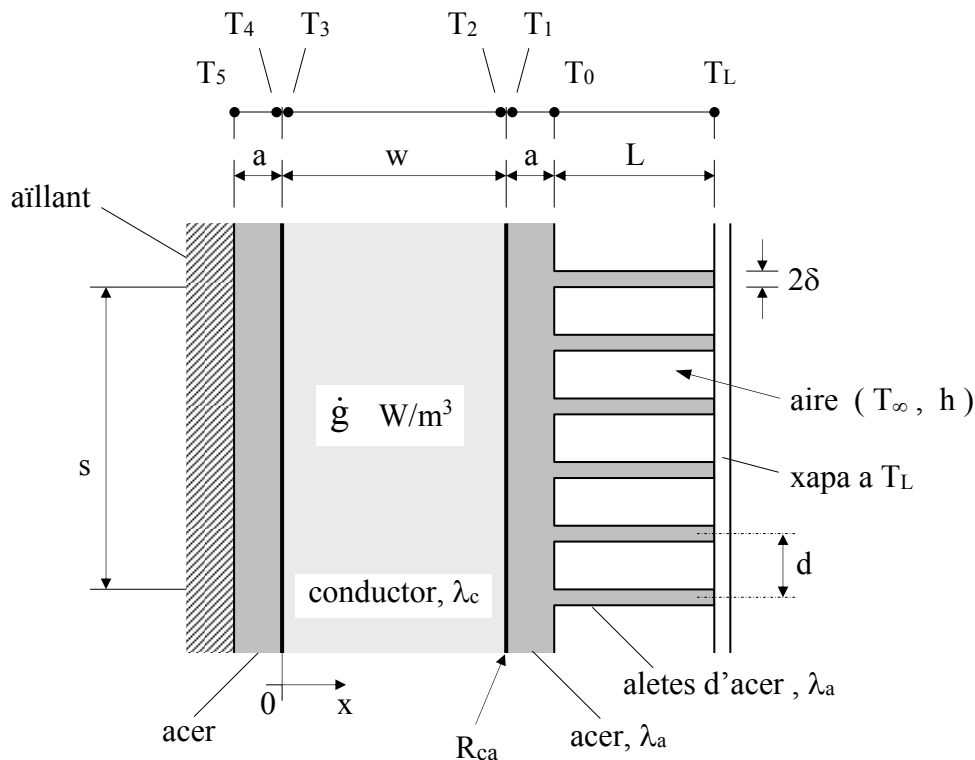
$$\text{Eficiència} \quad e_{f_Rtc} = \frac{1}{\frac{1}{e_f} + h A_{f1} \frac{R_{tc}''}{A}} \quad \text{sent} \quad R_{tc}'' = \left[\frac{m^2 \cdot K}{W} \right] \quad \text{la resistència de contacte de la base.}$$

i A la secció recta de l'aleta. A_{f1} = la superfície estesa d'una aleta

$$\text{Ara podem calcular la potència amb la fórmula de sempre} \quad q_1 = \frac{T_0 - T_\infty}{\frac{1}{h e_{f_Rtc} A_{f1}}}$$

2.5 EXERCICIS RESOLTS

Exercici 4: examen parcial proposat el 06/04/2001 (cas c)



Un conductor elèctric pla de grans dimensions, gruix w i conductivitat tèrmica λ_c s'encamisa amb unes plaques d'acer de gruix a i conductivitat tèrmica λ_a . Una de les plaques disposa d'un conjunt d'aletes rectes integrades (resistència de contacte = 0) de secció transversal uniforme (constant). La potència generada \dot{g} pel conductor s'elimina per la superfície estesa que s'indica a la figura.

Entre les aletes i circula aire fred a la temperatura T_∞ . Prenem per l'aire un coeficient de convecció h uniforme per tot el recinte i negligim la radiació. La superfície oposada del conductor està perfectament aïllada. Entre el conductor i les plaques d'acer s'interposa una resistència de contacte de valor R_{ca}

Dades: $w=100$ mm ; $a=50$ mm ; $s=500$ mm ; $L=60$ mm ; $d=20$ mm ; $\delta=1$ mm ;
 $\lambda_a=37,7$ W/(m·K) ; $\lambda_c=21,9$ W/(m·K) ; $R_{ca}=10^{-3}$ (m² K)/W ; $T_2=55$ °C

$T_\infty=25$ °C ; $h=100$ W/(m²K) ; $T_L=35$ °C ; $A_c=s^2=0,25$ m² (sup. frontal considerada)

Si en estat estacionari mesurem la temperatura mínima del conductor elèctric $T_2=55$ °C i amb les dades considerades, determinar per una superfície A_c (quadrat de costat s) del conductor elèctric:

- 1) Temperatures T_0 , T_1 en °C i la potència generada al conductor elèctric.
- 2) Potència tèrmica que les aletes cedeixen a l'aire.
- 3) Potència tèrmica transferida pels extrems de les aletes.
- 4) Distribució de temperatures del conductor elèctric (eix x) i la temperatura T_5 en °C
- 5) Secció de l'aleta a on la potència tèrmica transferida sigui mínima. (distància des de la base)

NOTA: Enquadrar tots els resultats finals. Concreti el conveni de signes emprat.

No s'accepten resultats numèrics sense la justificació corresponent (equacions, etc.)

Solució (S.I.) :

$$n_{\text{aletes}} = s/d = 25 \quad P = 2s = 1 \quad A = s2\delta = 0,001 \quad A_0 = (s - n_{\text{aletes}}2\delta)s = 0,225 \quad A_c = s^2 = 0,25$$

$$A_f = 2Lsn_{\text{aletes}} = 1,5 \quad m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda_a A}} = 51,5 \quad \frac{a}{\lambda_a A_c} = 5,305 \times 10^{-3} \quad \frac{R_{ca}}{A_c} = 0,004$$

$$1) \quad q = \frac{T_2 - T_0}{\frac{R_{ca}}{A_c} + \frac{a}{\lambda_a A_c}} = h A_0 (T_0 - T_\infty) + n_{\text{aletes}} \times \underbrace{\frac{\lambda A m}{\sinh(mL)} [(T_0 - T_\infty) \cosh(mL) - (T_L - T_\infty)]}_{q_0}$$

La potència q generada a la placa conductora s'ha de dissipar per les aletes i la superfície primària, en estar el sistema en règim estacionari.

(Taula 3.4 Incropera) De la igualtat anterior trobem $T_0 = 43,29 \text{ }^\circ\text{C}$ i $q = 1258,6 \text{ W}$

$$\dot{g} = \frac{q}{A_c w} = 50346 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}, \quad q = \frac{T_1 - T_0}{R_{1_0}} \Rightarrow T_1 = 49,96 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$2) \quad \frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{\frac{\theta_L}{\theta_0} \sinh(mx) + \sinh[m(L-x)]}{\sinh(mL)} \Rightarrow q_x = n_{\text{aletes}} \times \left(-\lambda_a A \frac{d\theta}{dx} \Big|_x \right)$$

$$\text{Amb } \theta(x) = T(x) - T_\infty \quad ; \quad \theta_0 = T_0 - T_\infty \quad ; \quad \theta_L = T_L - T_\infty$$

$$\text{Si } x=0 \quad q_{x=0} = 847,2 \text{ W}$$

$$\text{Si } x=L \quad q_{x=L} = -406,5 \text{ W}$$

$$q_{\text{cedeix a l'aire}} = q_{x=0} - q_{x=L} = 1253,6 \text{ W (cedits a l'aire per les aletes)} = \int_0^L h P \theta(x) dx$$

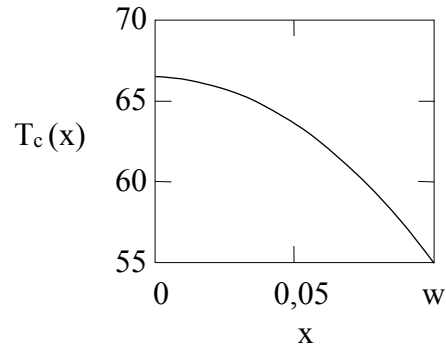
$$3) \quad q_{\text{extrem}} = q_{x=L} = -406,5 \text{ (cedits pels extrems de les aletes)}$$

Veiem que pels extrems ens entra potència que es transfereix a l'aire.

$$4) \quad \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{\lambda} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{c.c.1} \quad \frac{dT}{dx} = 0 \text{ en } x = 0 \\ \text{c.c.2} \quad T(w) = T_2 \text{ en } x = w \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{g}}{\lambda}x + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$T_c(x) = -1149 x^2 + 66,5 \quad (^\circ\text{C})$$

$$T_5 = T_4 = T_3 = T_c(0) = 66,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

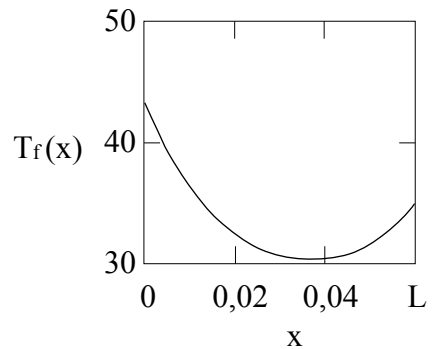


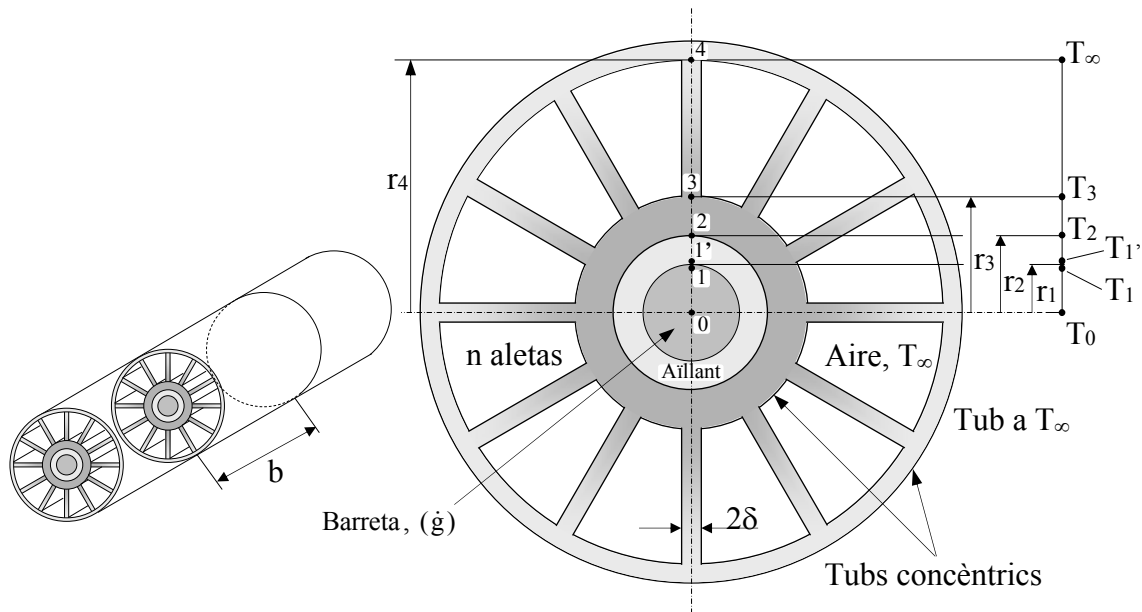
5) Perfil de temperatures de les aletes

$$T_f(x) = 25 + \frac{10 \sinh(51,5x) + (43,29 - 25) \sinh[51,5(0,06 - x)]}{\sinh(3,09)}$$

$$\frac{dT_f(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0,036 \text{ m} = 36 \text{ mm} \quad (q_x=0)$$

El gràfic ens visualitza la posició d'aquest mínim.



Exercici 5: examen parcial proposat el 02/11/2001 (cas c)

Dades: $r_1=10$ mm , $r_2=12$ mm , $r_3=17$ mm , $r_4=40$ mm , **$b=0,6$ m**

Barreta: $T_1=60$ °C ; $\lambda_b=1,5$ W/(m·K) ; *Aïllant:* $\lambda_a=0,5$ W/(m·K) ; $R_{tc}=10^{-3}$ (m² K)/W

Aletes: $n=12$; $\delta=1$ mm ; $\lambda_f=15$ W/(m·K) ; $h=50$ W/(m²K) ; $T_\infty=20$ °C ; $T_4=T_\infty=20$ °C

Una barreta **molt llarga** de radi r_1 i conductivitat tèrmica λ_b té una generació tèrmica volumètrica interna i uniforme \dot{g} (W/m³). La barreta s'envolta d'un aïllant tèrmic de gruix $r_2 - r_1$ i conductivitat tèrmica λ_a . Entre la barreta i l'aïllant s'interposa una resistència de contacte R_{tc} .

Mitjançant un termoparell coneixem la temperatura de la superfície exterior de la barreta T_1 . La barreta i l'aïllant que l'envolta es troben a l'interior del conjunt format per dos tubs concèntrics ($\lambda = \lambda_f$) units mitjançant les n aletes (λ_f) longitudinals de secció recta rectangular constant i semigrues δ que es mostren a la figura. Negligim la resistència de contacte entre aquest conjunt i la superfície externa (punt 2) de l'aïllant.

Entre les aletes tenim aire fred a la temperatura T_∞ . El tub exterior que envolta a les aletes es troba a la mateixa temperatura T_∞ . Prenem per l'aire un coeficient de convecció h uniforme per tot el recinte i negligim la radiació. En estat estacionari i considerant un tram de longitud b :

- El valor en °C de la temperatura T_3 és,
 - [0 , 35)
 - [35 , 45)
 - [45 , 55)
 - [55 , 100]
 - Cap de les anteriors
- La generació interna de potència tèrmica (uniforme) \dot{g} en kW/m³ a la barreta és,
 - [0 , 1000)
 - [1000 , 1100)
 - [1100,1200)
 - [1200,2000]
 - Cap de les anteriors
- La potència tèrmica en W que el conjunt de les 12 aletes cedeix a l'aire interior és,
 - [0 , 50)
 - [50 , 80)
 - [80 , 100)
 - [100 , 200]
 - Cap de les anteriors
- La potència tèrmica en W que la superfície primària cedeix a l'aire interior és,
 - [40 , 50)
 - [50 , 60)
 - [60 , 70)
 - [70 , 75]
 - Cap de les anteriors

- 5) La potència tèrmica en **W** que el conjunt de les 12 aletes transfereix pels extrems, (+ si surt)
 a) [-90 , 50) b) [50 , 100) c) [100 , 200) d) [200, 300] e) Cap de les anteriors
- 6) L'eficiència η_f d'una d'aquestes aletes és,
 a) [0 , 0.2) b) [0.2 , 0.4) c) [0.4 , 0.7) d) [0.7 , 1] e) Cap de les anteriors
- 7) Si anomenem $L=r_4-r_3$, trobar la posició x (**mm**) de l'aleta a on la potència tèrmica transferida per conducció sigui mínima. (distància des de la base).
 a) $\left[0, \frac{L}{4}\right)$ b) $\left[\frac{L}{4}, \frac{L}{2}\right)$ c) $\left[\frac{L}{2}, \frac{2}{3}L\right)$ d) $\left[\frac{2}{3}L, L\right]$ e) Cap de les anteriors

Suposi a partir d'ara que la generació de potència val **2000 kW/m³** i la **T₀= 124,51 °C**

- 8) El valor en °C de la temperatura T₁ a la superfície de la barreta és,
 a) [0 , 40) b) [40 , 80) c) [80 , 100) d) [100, 110] e) Cap de les anteriors
- 9) La temperatura **T(r)** en °C per un punt de la barreta tal que $r = \frac{2}{3} \times r_1$ val,
 a) [50 , 100) b) [100 , 115) c) [115 , 120) d) [120, 130] e) Cap de les anteriors
- 10) La temperatura en °C de la temperatura **T₁** just després de **T₁** a la resistència de contacte és,
 a) [0 , 30) b) [30 , 60) c) [60 , 100) d) [100 , 110] e) Cap de les anteriors

Dades

b=0,6 , h=50 , T_∞=20 , T₁=60 ; Per les preguntes 8,9 i 10 $g=2000 \text{ kW/m}^3$ T₀=124,51 °C

Solució (S.I.) :

$$n=12 \quad L=r_4-r_3 \quad P=2b \quad A=b \cdot 2\delta \quad A_p=(2\pi r_3-n \cdot 2\delta) b$$

$$A_f=2 L b n \quad A_{tc}=A_1=2\pi r_1 \quad m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda_f A}} = 57,7 \quad T_L=T_\infty$$

1)

$$\frac{T_1 - T_3}{\frac{R_{tc}}{2\pi r_1 b} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda_a b} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi \lambda_f b}} = h A_p (T_3 - T_\infty) + n \times \sqrt{h P \lambda_f A} (T_3 - T_\infty) \frac{\cosh(mL) - \frac{T_L - T_\infty}{T_3 - T_\infty}}{\sinh(mL)}$$

(Taula 3.4 Incropera) De la igualtat anterior trobem T₃=32,6 °C i q=211,9 W

2) $\dot{g} = \frac{q}{\pi r_1^2 b} = 1124 \frac{\text{kW}}{\text{m}^3}$

$$3) \frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{\frac{\theta_L}{\theta_b} \sinh(mx) + \sinh[m(L-x)]}{\sinh(mL)} \Rightarrow q_x = n \times \left(-\lambda_f A \frac{d\theta}{dx} \Big|_x \right)$$

Amb $\theta(x) = T(x) - T_\infty$; $\theta_b = T_3 - T_\infty$; $\theta_L = T_L - T_\infty = 0$

Si $x=0$ $q_{x=0} = 180,6 \text{ W}$; Si $x=L$ $q_{x=L} = 89,5 \text{ W}$

$q_{\text{cedeix a l'aire}} = q_{x=0} - q_{x=L} = 91,2 \text{ W}$ (cedits a l'aire per les n aletes) $= \int_0^L h P \theta(x) dx$

4) $q = h A_p (T_3 - T_\infty) = 31,3 \text{ W}$

5) $q_{\text{extrems}} = q_{x=L} = 89,5$ (cedits pels extrems de les n aletes) 6) e) 7) En $x=L$

$$8,9) \frac{1}{r} \times \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{g}}{\lambda} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{c.c.1} \quad \frac{dT}{dr} = 0 \text{ en } r=0 \\ \text{c.c.2} \quad T(0) = T_0 \text{ en } r=0 \end{array} \right\} \Rightarrow r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{g}}{2\lambda} r^2 + C \stackrel{\text{cc1}}{\Rightarrow} C = 0$$

$$T(r) = T_0 - \frac{\dot{g}}{4\lambda} r^2 \quad ; \quad T_1 = T(r_1) = 91,2 \text{ }^\circ\text{C} \quad ; \quad T\left(\frac{2r_1}{3}\right) = 109,7 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$10) q = \frac{T_1 - T_{1'}}{\frac{R_{tc}}{2\pi r_1 b}} \Rightarrow T_{1'} = 81,2 \text{ }^\circ\text{C}$$

Exercici 6: examen parcial proposat el 31/10/2002 (cas a)

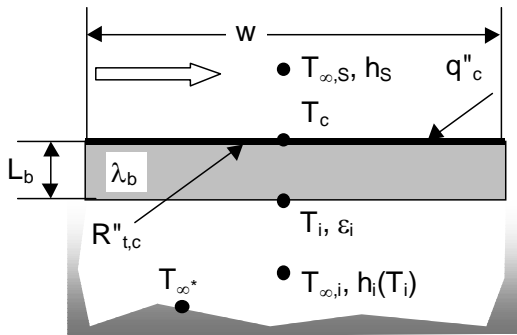


Fig. 1

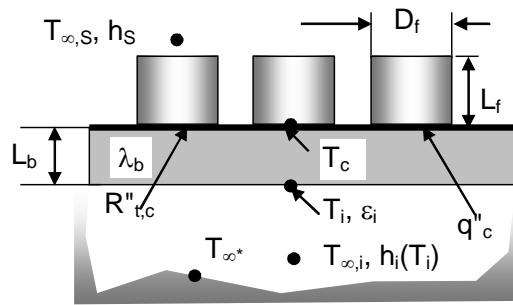


Fig. 2

Dades:

Figura 1, sense aletes					
$T_{\infty,s}$ (°C)	h_s [W/(m ² ·K)]	q''_c (W/m ²)	$R''_{t,c}$ [(m ² ·K)/W]	L_b (m)	w (m)
20	250	12000	0,0001	0,005	0,0127
λ_b W/(m·K)	h_i [W/(m ² ·K)]	ϵ_i	$T_{\infty,i} = T_{\infty,*}$ °C	$T_{c,m\grave{a}x}$ °C	$q''_{c,m\grave{a}x}$ W/m ²
1	$0,66 T_i - T_{\infty,i} ^{1/4}$	0,85	40	75	14000

Figura 2, amb aletes cilíndriques			
N_f	D_f (m)	L_f (m)	λ_f [W/(m·K)]
9 aletes	0,003	0,003	280
La resta de paràmetres igual que a la taula anterior			

Un circuit integrat (xip) molt prim d'amplada i fondària w , genera una potència q''_c ($\equiv q/A|_c$) (per m² de superfície). Es disposa sobre una tarja de circuits impresos de gruix L_b i conductivitat tèrmica λ_b , existint entre la tarja i el xip una resistència tèrmica de contacte $R''_{t,c}$. El xip es refrigera per la part superior amb aire a $T_{\infty,s}$ en convecció forçada amb un coeficient de transferència de calor per convecció h_s (negligeixi la radiació en aquesta banda).

Per la part inferior, la tarja dissipa calor per convecció natural i radiació. El coeficient de convecció a la part inferior és proporcional a la diferència de temperatures entre la part inferior de la tarja (a T_i) i l'aire (a $T_{\infty,i}$) elevada a 1/4, $h = a |T_i - T_{\infty,i}|^{1/4}$. Per calcular les pèrdues per radiació a la part inferior de la tarja suposi un entorn de grans dimensions a temperatura uniforme $T_{\infty,*}$ i una emissivitat de la tarja de ϵ_i . **Negligint les pèrdues pels laterals de la tarja de circuits impresos.** Determinar:

- 1) La temperatura del xip, T_c
- 2) El valor en °C de la temperatura de la part inferior de la tarja, T_i
- 3) La potència tèrmica en **W** que el xip cedeix a l'aire superior.
- 4) De la potència tèrmica dissipada per la tarja a la part inferior per convecció i radiació, el % corresponent a la radiació amb l'entorn.

Si la temperatura del xip no pot superar el valor $T_{c,m\grave{a}x}$ i la potència màxima dissipada pel xip és per metre quadrat $q''_{c,m\grave{a}x}$ ($\equiv q/A|_c$) **trobar,**

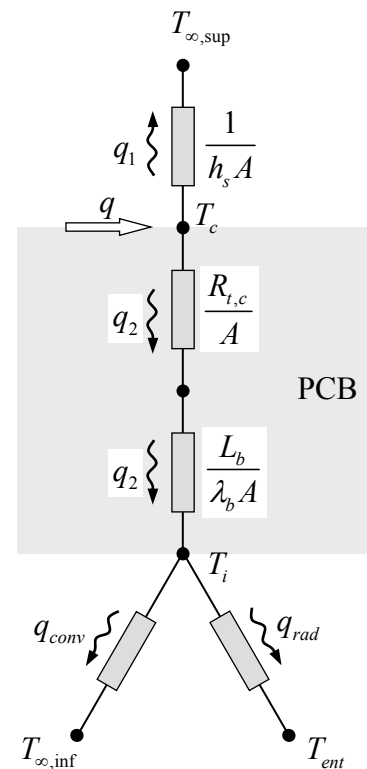
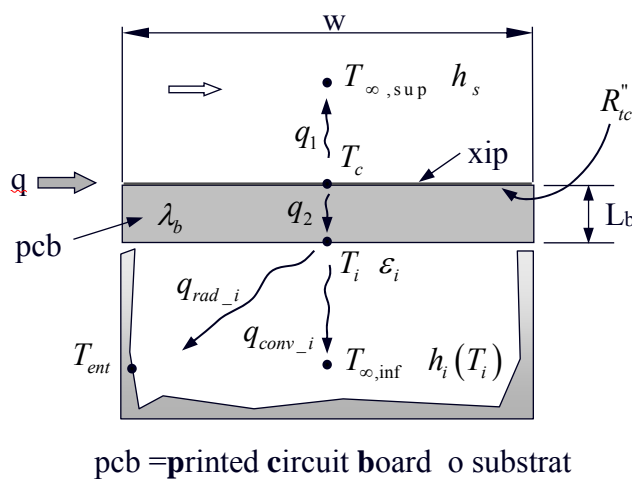
- 5) El màxim gruix, $L_{b,m\grave{a}x}$ en mm amb el que es pot dissenyar la tarja de circuits impresos.

Per tal d'augmentar els components del xip, i per tant la potència tèrmica que dissipa, s'instal·la a la part superior del xip un dissipador de calor amb N_f aletes cilíndriques de conductivitat tèrmica λ_f , diàmetre D_f i llargada L_f . Tot el conjunt té unes dimensions w d'amplada i w de fondària (quadrat $w \times w$) igual que quan no hi havia aletes. Trobar,

- 6) La potència tèrmica en W que el xip dissipa per la part superior (superfície primària + aletes) quan $T_c = T_{c, \text{màx}}$
- 7) L'eficiència e_f d'una d'aquestes aletes, definida com la relació entre la potència realment dissipada i la màxima que pot dissipar en les condicions establertes ($T_c = T_{c, \text{màx}}$)
- 8) El nombre de Biot Bi d'una d'aquestes aletes.

Solució: (prof. Bonals)

1-2) Determinem T_c (temp. del xip) i T_i (temp. de la part inferior de la tarja) en $^{\circ}C$,



Balanç de calor al xip, $q = q_1 + q_2$

$$q = \underbrace{h_s A (T_c - T_{\infty,s})}_{q_1} + \underbrace{\frac{T_c - T_i}{\frac{R''_{tc}}{A} + \frac{L_b}{\lambda_b A}}}_{q_2} \quad (\text{eq. 1})$$

Sent $q=12000 \text{ A}$, $A = w^2$ i $h_i(T_i) = 0,66 |T_i - T_{\infty,i}|^{0,25}$

Balanç d'energia a la cara inferior, $q - q_1 = q_{conv_i} + q_{rad_i}$

$$q - \underbrace{h_s A (T_c - T_{\infty,s})}_{q_1 = q_{conv_s}} = \underbrace{h_i(T_i) A (T_i - T_{\infty,i})}_{q_{conv_i}} + \underbrace{\varepsilon_i A \sigma (T_i^4 - T_{ent}^4)}_{q_{rad_i}} \quad (\text{eq. 2})$$

Aïllem T_c de l'equació 2 i la substituïm a l'equació 1. Ens queda una equació amb una sola incògnita, T_i

$$T_i = 339,21 \text{ K} = 66,06 \text{ } ^{\circ}C$$

$$T_c = 340,30 \text{ K} = 67,15 \text{ } ^{\circ}C$$

3) Potència tèrmica en **W** que el xip cedeix a l'aire superior.

$$q_1 = h_s A (T_c - T_{\infty,s}) = 1,90 \text{ W}$$

4) De la potència tèrmica dissipada per la tarja a la part inferior per convecció i radiació, el % corresponent a la radiació amb l'entorn

$$q_{conv_i} = h_i (T_i) A (T_i - T_{\infty,i}) = 0,0063 \text{ W} \quad q_{rad_i} = \varepsilon_i A \sigma (T_i^4 - T_{ent}^4) = 0,0282 \text{ W}$$

$$\frac{\overbrace{\varepsilon_i A \sigma (T_i^4 - T_{ent}^4)}^{q_{rad_i}}}{\underbrace{h_i (T_i) A (T_i - T_{\infty,i})}_{q_{conv_i}} + \underbrace{\varepsilon_i A \sigma (T_i^4 - T_{ent}^4)}_{q_{rad_i}}} \times 100 = 81,8 \%$$

Si la temperatura del xip no pot superar el valor $T_{c,m\grave{a}x}$ i la potència màxima dissipada pel xip és per metre quadrat $q''_{c,m\grave{a}x} (\equiv q/A|_c) = 14000$ **trobar**,

5) El màxim gruix, $L_{b,m\grave{a}x}$ amb el que es pot dissenyar la tarja de circuits impresos és, en **mm**

$$\text{Ara } T_c = T_{c,max} = 75 \text{ }^\circ\text{C} \quad \text{i} \quad \left. \frac{q}{A} \right|_{\max} = 14000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad q_{\max} = 14000 \times A \quad \text{sent } A = w^2$$

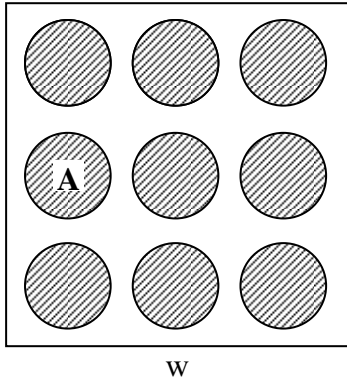
$$14000 \underbrace{A}_{\cancel{A}} - \underbrace{h_s \underbrace{A}_{\cancel{A}} (T_{c,max} - T_{\infty,s})}_{q_{conv_s}} = \underbrace{h_i (T_i) \underbrace{A}_{\cancel{A}} (T_i - T_{\infty,i})}_{q_{conv_i}} + \underbrace{\varepsilon_i \underbrace{A}_{\cancel{A}} \sigma (T_i^4 - T_{ent}^4)}_{q_{rad_i}}$$

$$14000 - \underbrace{h_s (T_{c,max} - T_{\infty,s})}_{13750} = \underbrace{h_i (T_i) (T_i - T_{\infty,i})}_{46,115} + \underbrace{\varepsilon_i \sigma (T_i^4 - T_{ent}^4)}_{203,885} \Rightarrow T_i = 343,0 \text{ K} = 69,88 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$14000 \underbrace{A}_{\cancel{A}} = \underbrace{h_s \underbrace{A}_{\cancel{A}} (T_{c,max} - T_{\infty,s})}_{13750} + \underbrace{\frac{T_{c,max} - T_i}{\underbrace{\frac{R''_{tc}}{\cancel{A}} + \frac{L_{b,max}}{\lambda_b \cancel{A}}}_{250}}}_{\Rightarrow} \Rightarrow L_{b,max} = 0,0204 \text{ m} = 20,249 \text{ mm}$$

Per tal d'augmentar els components del xip, i per tant la potència tèrmica que dissipa, s'instal·la a la part superior del xip un dissipador de calor amb N_f aletes cilíndriques de conductivitat tèrmica λ_f , diàmetre D_f i llargada L_f . Tot el conjunt té unes dimensions w d'amplada i w de fondària (quadrat $w \times w$) igual que quan no hi havia aletes. Trobar,

6) La potència tèrmica en **W** que el xip dissipa per la part superior (sup. primària + aletes) quan $T_c = T_{c,m\grave{a}x}$



$$P = \pi D_f \quad A = \frac{\pi D_f^2}{4} = 7,069 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad m = \sqrt{\frac{h_s P}{\lambda_f A}} = 34,503$$

$$A_0 = w^2 - n_f A = 9,767 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$A_f = n_f (P L_f + A) = 3,181 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$q_1(x) = \lambda_f A m (T_{c,\max} - T_{\infty,s}) \left(\frac{\sinh m(L_f - x) + \frac{h_s}{m\lambda_f} \cosh m(L_f - x)}{\cosh mL_f + \frac{h_s}{m\lambda_f} \sinh mL_f} \right) \text{ pot. d'una aleta (cas a)}$$

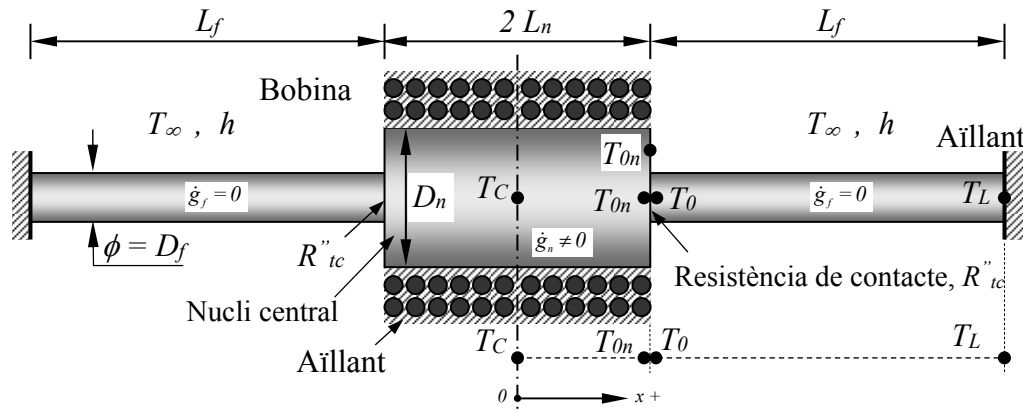
$$q_{conv_sup} = \underbrace{h_s A_0 (T_{c,\max} - T_{\infty,s})}_{q_{primaria}=1,343} + \underbrace{n_f q_1(0)}_{q_f=4,35} = 5,693 \text{ W}$$

7) L'eficiència e_f d'una d'aquestes aletes, definida com la relació entre la potència realment dissipada i la màxima que pot dissipar en les condicions establertes ($T_c = T_{c, \max}$)

$$e_f = \frac{q_1(0)}{h_s (P L_f + A) (T_{c,\max} - T_{\infty,s})} = 0,995$$

8) El nombre de Biot Bi d'una d'aquestes aletes.

$$Bi = \frac{h_s \times \frac{D_f}{2}}{\lambda_f} = 1,339 \times 10^{-3} \ll 0,1 \quad \text{o sigui que té sentit considerar una única temperatura a cada secció x de les aletes i per tant el model emprat és aplicable.}$$

Exercici 7: examen parcial proposat el 28/10/2004 (cas b)**Dades:**

Nucli central: cilindre ($2L_n$) envoltat per una bobina (amb generació) (subíndex= n)
 $D_n=18$ mm , $\lambda_n=17$ W/(m·K) , $L_n=24$ mm , $\dot{q}_n = 1 \times 10^5$ W/m³ , $R''_{tc}=2 \times 10^{-4}$ (m²·K)/W

Cilindre (L_f): fora de la bobina (sense generació) (subíndex= f):
 $D_f= 6$ mm , $\lambda_f= 42$ W/(m·K) , $L_f= 40$ mm , $T_\infty= 30$ °C , $h = 10$ W/(m²K)

Un cilindre d'acer amb conductivitat tèrmica λ_n de longitud $2L_n$ i diàmetre D_n (nucli central) s'envolta d'una bobina per escalfar-lo emprant inducció magnètica que representa una generació tèrmica volumètrica interna i uniforme de \dot{q}_n (W/m³). A cada una de les bases del nucli central i recolzem un cilindre també d'acer, però de conductivitat tèrmica λ_f de longitud L_f i diàmetre D_f , sense generació de potència tèrmica $\dot{q}_f = 0$ exposat a un ambient d'aire en calma a la temperatura T_∞ i un coeficient de convecció h , sent negligible la radiació tèrmica amb l'entorn. Entre aquests cilindres i el nucli central s'interposa una resistència de contacte R''_{tc} i l'extrem oposat dels mateixos es considera adiabàtic.

Hipòtesis: a) Règim estacionari b) Considerem flux unidimensional en el nucli central en estar aquest aïllat lateralment. c) Ambdues bases del nucli central ($x = \pm L_n$) estan a la temperatura uniforme T_{0n}
d) Just després de la resistència de contacte la temperatura és T_0 (base del cilindre L_f)
Determinar tots els resultats de l'exercici per **mitja peça**, o sigui des de $x=0$ fins a $x=L_n+L_f$,

Trobar:

- 1) L'eficiència $e_{f,tc}$ d'una d'aquestes aletes (cilindre L_f) considerant la resistència de contacte.
- 2) El valor en °C de la temperatura T_{0n} en $x = +L_n$ (base del nucli central) .
- 3) El valor en °C de la temperatura T_0 en $x = +L_n$ just després de la resistència de contacte.
- 4) Potència cedida a l'aire en **W** per la superfície primària en $x = +L_n$.
- 5) Potència cedida a l'aire en **W** pel cilindre de longitud L_f .
- 6) La temperatura del centre ($x=0$) del nucli central T_C en °C .
- 7) El perfil de temperatures $T(x)$ del nucli central en °C .

Si a partir d'ara els extrems no estan aïllats i la seva temperatura té un valor fixat $T_L = T_\infty$
trobar:

- 8) Potència (W) que la superfície primària i el cilindre (L_f) cedeixen per convecció a l'aire.
- 9) Temperatura T_{0n} en °C de la base del nucli central en $x = +L_n$.
- 10) Potència tèrmica transferida per l'extrem del cilindre de longitud L_f en $x = L_n+L_f$.

Escrigui el seu **cognom i nom** a la part superior d'aquest enunciat i els **resultats a la taula** adjunta: (error admissible $\pm 1\%$)

Pregunta	Variable	Resultats numèrics	Unitats
1)	$\epsilon_{f_{tc}} = \eta_{f_{tc}}$	0,88	-
2)	T_{0n}	98,70	°C
3)	T_0	95,40	°C
4)	$q_{sup. primària}$	0,16	W
5)	$q_{f_{conv}}$	0,46	W
6)	T_C	100,3	°C
7)	$T(x)$	$-2941,2 x^2 + 100,3$	°C
8)	$q_{sup.prim.} + q_{f_{conv}}$	0,11	W
9)	T_{0n}	51,50	°C
10)	q_L	0,50	W

Solució (S.I.) :

Dades:

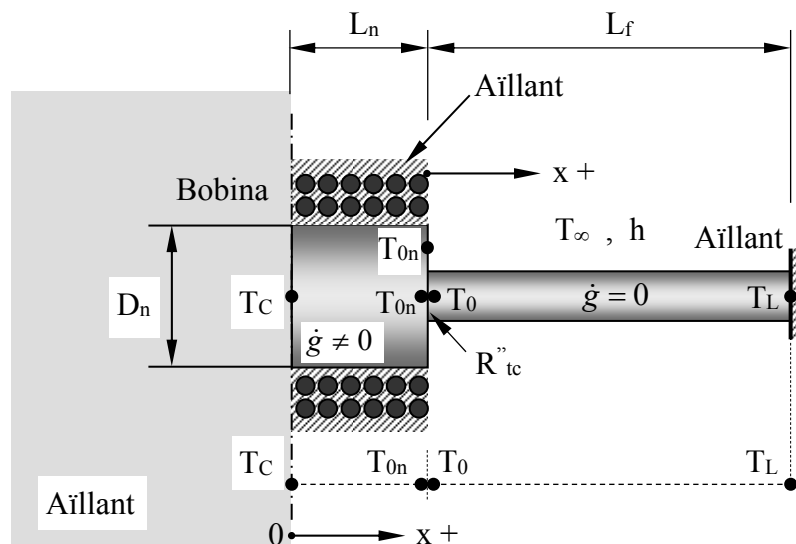
Nucli central: cilindre ($2L_n$) envoltat per una bobina (amb generació) (subíndex= n)
 $D_n=18\text{ mm}$, $\lambda_n=17\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, $L_n=24\text{ mm}$, $\dot{g}_n = 1 \times 10^5\text{ W/m}^3$, $R''_{tc}=2 \times 10^{-4}\text{ (m}^2\cdot\text{K)/W}$

Cilindre (L_f): fora de la bobina (sense generació) (subíndex= f):

$D_f= 6\text{ mm}$, $\lambda_f= 42\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, $L_f= 40\text{ mm}$, $T_\infty= 30\text{ }^\circ\text{C}$, $h = 10\text{ W/(m}^2\text{K)}$

Solució (S.I.) :

En $x=0$ tenim un pla de simetria i per tant un pla adiabàtic que ens permet eliminar la meitat del sistema. Així doncs, el mig nucli ($0-L_n$) està aïllat en $x=0$ i per la seva superfície lateral, de forma que és fàcil veure que en regim estacionari tota la potència generada (q_{tot}) en el seu volum s'hagi de dissipar una part per la superfície primària i la resta per l'aleta [$q_f(0)$] ja que aquesta es troba aïllada per l'extrem.

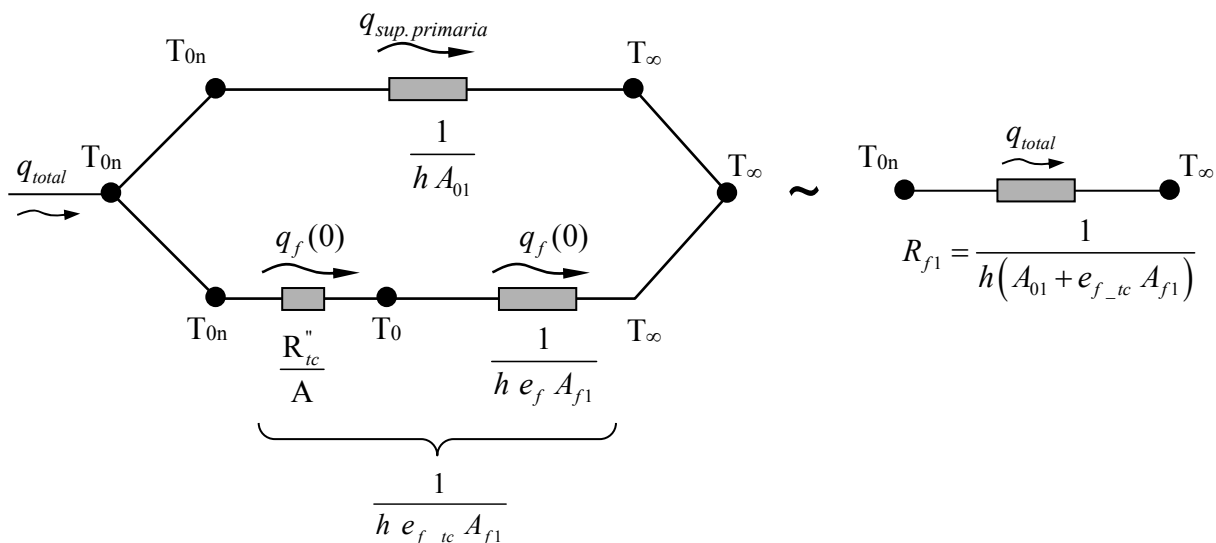


$$A_n = \frac{\pi D_n^2}{4} \text{ (secció del nucli)} ; A = \frac{\pi D_f^2}{4} \text{ (secció de l'aleta)} ; P = \pi D_f \text{ (perímetre de l'aleta)}$$

$$A_{f1} = P L_f \text{ (sup. estesa de l'aleta sense l'extrem)} ; A_{01} = A_n - A \text{ (superfície primària)}$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda_f A}} ; e_f = \frac{\tanh(m L_f)}{m L_f} = 0,92 \text{ (eficiència de l'aleta, cas b)}$$

$$e_{f_tc} = \frac{1}{\frac{1}{e_f} + h A_{f1} \frac{R_{tc}''}{A}} = 0,88 \text{ (eficiència de l'aleta amb resistència de contacte a la base)}$$



$$R_{f1} = \frac{1}{h_c (A_{01} + e_{f_tc} A_{f1})} = 112,4 \text{ és la resistència tèrmica equivalent entre } T_{0n} \text{ i } T_{\infty}$$

$$q_{total} = \dot{g}_n A_n L_n \text{ (potència generada en mig nucli)} \quad q_{total} = \frac{T_{0n} - T_{\infty}}{R_{f1}} \Rightarrow T_{0n} = 98,7 \text{ } ^\circ C$$

Troblem la temperatura en $x=+L_n$ just després de la resistència de contacte.

$$q_{sup.primaria} = h A_{01} (T_{0n} - T_{\infty}) \quad q_f = q_{tot} - q_{sup.primaria} \quad q_f = \frac{T_{0n} - T_0}{\frac{R_{tc}''}{A}} \quad T_0 = 95,4 \text{ } ^\circ C$$

Perfil de temperatures d'una aleta d'extrem adiabàtic, cas b):

Per l'estudi de l'aleta resulta pràctic considera l'eix x amb l'origen a la seva base o arrel.

$$T_f(x) = T_{\infty} + \frac{T_0 - T_{\infty}}{\cosh(m L_f)} \cosh[m(L_f - x)] \quad T_f(0) = 95,4 \text{ } ^\circ C \quad T_f(L_f) = 87,9 \text{ } ^\circ C$$

Potència que travessa per conducció la secció x de l'aleta:

$$q_f(x) = \lambda_f A m \frac{T_0 - T_{\infty}}{\cosh(m L_f)} \sinh[m(L_f - x)] \quad q_f(0) = 0,46 \text{ W (arrel)} \quad q_f(L_f) = 0$$

Perfil de temperatures del nucli central: al estar la superfície lateral del nucli ben aïllada aquest es comporta com una paret plana de grans dimensions, de forma que $T=T(x)$ sent per tant les isoterms segments rectes paral·lels al eix vertical. (resolt a l'apartat 2.3.1)

Per determinar el perfil de temperatures del nucli considerem l'eix x proposat a l'enunciat.

Condicions de contorn: 1) En $x=0$ $\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$ per simetria i 2) En $x=L_n$ $T(L_n)=T_{0n}$

Eq. diferencial $\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{\lambda_n} = 0 \quad \int \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{g}}{\lambda_n}x + C \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 = -\frac{\dot{g}}{\lambda_n} \cdot 0 + C$

I per tant $C=0 \quad \int \Rightarrow \quad T(x) = -\frac{\dot{g}}{\lambda_n} \frac{x^2}{2} + D \quad \Rightarrow \quad T(L_n) = T_{0n} = -\frac{\dot{g}}{\lambda_n} \frac{L_n^2}{2} + D$

Obtenim $D = T_{0n} + \frac{\dot{g}}{\lambda_n} \frac{L_n^2}{2}$ i $T(x) = \frac{-\dot{g}_n x^2}{2\lambda_n} + T_{0n} + \frac{\dot{g}_n L_n^2}{2\lambda_n} = \frac{\dot{g}_n L_n^2}{2\lambda_n} \left[1 - \left(\frac{x}{L_n} \right)^2 \right] + T_{0n}$

En aquest plantejament no hem fet servir la condició de contorn de convecció, ja que coneixem T_{0n} i partim de la hipòtesis (no del tot assumible!) que en $x=L_n$ $T(L_n)=T_{0n}$ tant a l'arrel com a la superfície primària de les aletes. Així doncs arribem a la mateixa expressió que emprant la penúltima equació de l'apartat 2.3.1

$T_{Centre} = T(0) \Rightarrow T_{Centre} = 100,3^\circ C \quad i \quad T(x) = -2941,2 x^2 + 100,3 \quad ^\circ C$

A partir d'ara l'extrem de l'aleta no està aïllat i la seva temperatura està fixada a $T_L=T_\infty$

$q_{f-}(x) = \frac{\lambda_f A m}{\sinh(mL_f)} \left[(T_{0n} - T_\infty) \cosh[m(L_f - x)] - \underbrace{(T_L - T_\infty)}_0 \cosh mx \right] \quad \forall x \quad 0 < x < L_f$

Posem un guionet per indicar les noves variables en relació a l'apartat anterior.

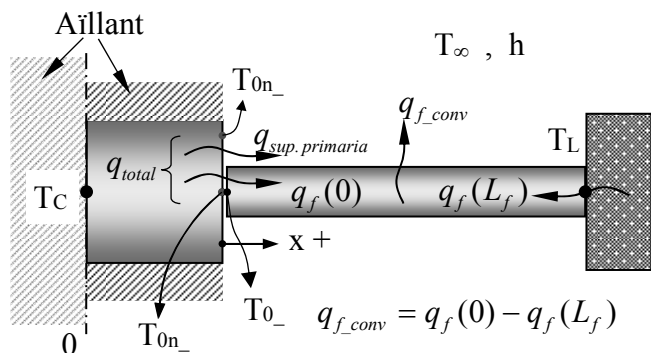
Tot observant l'esquema anterior amb resistències tèrmiques:

$q_{f-}(0) = \frac{T_{0n} - T_{0-}}{\frac{R_{tc}''}{A}}, \quad (I)$

$q_{f-}(0) = \lambda_f A m (T_{0n} - T_\infty) \coth(mL_f) \quad (II)$

$q_{total} = \underbrace{h_c A_{01} (T_{0n} - T_\infty)}_{q_{sup. primaria}} + \underbrace{q_{f-}(0)}_{q_{arrel aleta}} \quad (III)$

(3 eq. → Incògnites T_{0n} , T_{0-} , $q_{f-}(0)$)



$q_{f,conv} = q_f(0) - q_f(L_f)$

$q_{aire} = q_{sup.primaria} + q_{f,conv}$

El q_{total} és la potència generada en la meitat del nucli, ja calculada al primer apartat i que amb regim estacionari hem de transferir

integrament a l'exterior. De (III) obtenim T_{0n} . Igualant (I)=(II) i substituint el valor trobat de

T_{0n} obtenim T_{0-} . Obtenim $T_{0n} = 51,5^\circ C \quad T_{0-} = 47,5^\circ C \quad q_{f-}(0) = 0,6 \text{ W}$

$q_{f-}(0) = +0,562$

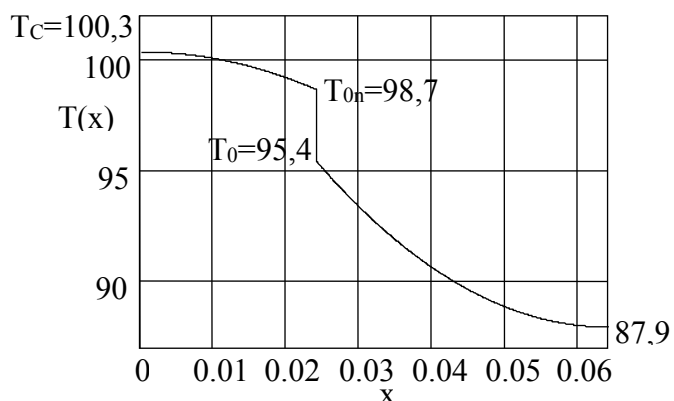
$q_{f-}(L_f) = +0,498$

$q_{f,conv} = q_{f-}(0) - q_{f-}(L_f) = +0,065$

$q_{sup.primaria} = h A_{01} (T_{0n} - T_\infty) = 0,049$

$q_{aire} = q_{f,conv} + q_{sup.primaria} = 0,113$

Totes les potències en W.



3 MÈTODES NUMÈRICS

3.1 INTRODUCCIÓ A LES DIFERÈNCIES FINITES

Els mètodes de resolució analítics no poden abordar la majoria de geometries i condicions de contorn que es plantegen en els problemes habituals d'enginyeria.

La *dificultat* que representa voler determinar per un sistema donat una distribució contínua (infinitos valors) de temperatura, *es redueix dràsticament* si ens conformem a obtenir tan sols una distribució discreta. (nombre finit).

Aquest mètode consisteix en el fet d'aproximar les derivades pel quocient incremental que s'obté emprant les temperatures d'un nombre finit de punts convenientment escollits, l'anomenada distribució discreta de temperatures.

Plantejant en diferències a cada punt l'equació diferencial que governa la conducció de la calor, la segona de Fourier, obtenim un sistema algebraic d'equacions, que un cop resolt ens permet trobar l'esmentada distribució discreta de temperatures.

3.2 APROXIMACIÓ DE LES DERIVADES EN DIFERÈNCIES FINITES.

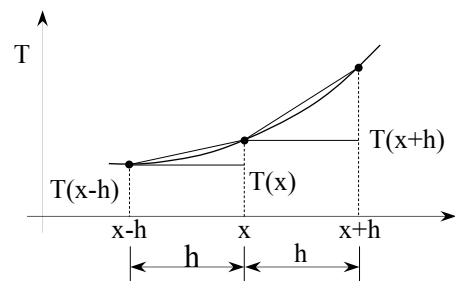
3.2.1 Primera derivada en diferències

En la resolució numèrica d'un problema de conducció de calor emprant computadores digitals, el primer pas és transformar l'equació diferencial que governa el fenomen substituint les derivades parcials per diferències. Per aquest procediment obtenim un sistema d'equacions que resollem emprant les quatre operacions aritmètiques bàsiques; l'anomenat càlcul numèric, que les computadores realitzen tan eficaçment.

Sigui $T(x)$ una funció que es pot desenvolupar en sèrie de Taylor. Aleshores el desenvolupament de Taylor de les funcions $T(x+h)$ i $T(x-h)$ en el punt x resulta,

$$(1) \quad T(x+h) = T(x) + h T'(x) + \frac{h^2}{2!} T''(x) + \frac{h^3}{3!} T'''(x) + \dots$$

$$(2) \quad T(x-h) = T(x) - h T'(x) + \frac{h^2}{2!} T''(x) - \frac{h^3}{3!} T'''(x) + \dots$$



Aïllant $T'(x)$ de l'equació (1), obtenim,

$$T'(x) = \frac{T(x+h) - T(x)}{h} - \frac{h}{2} T''(x) - \frac{h^2}{6} T'''(x) \dots = \frac{T(x+h) - T(x)}{h} + O(h)$$

Anomenem primera diferència endavant a l'expressió

$$T'(x) = \frac{T(x+h) - T(x)}{h} + O(h) \quad \text{que}$$

aproxima $T'(x)$ amb un error de l'ordre de l'increment considerat h .

Aïllant $T'(x)$ de l'equació (2) obtenim la 1^a diferència enrere,

$$T'(x) = \frac{T(x) - T(x-h)}{h} + O(h)$$

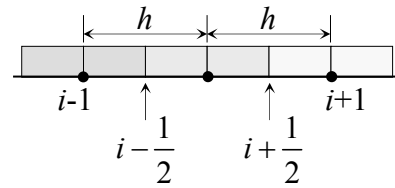
Restant les eq. (1) i (2) resulta la 1^a diferència central, $T'(x) = \frac{T(x+h) - T(x-h)}{2h} + O(h^2)$

3.2.2 Notació

Introduïm la notació següent:

$$x = i h \quad ; \quad x + h = (i + 1) h \quad ; \quad x - h = (i - 1) h$$

$$T(x) = T_i \quad ; \quad T(x + h) = T_{i+1} \quad ; \quad T(x - h) = T_{i-1}$$



Primera derivada:

$$\frac{dT}{dx} \Big|_i = \frac{T_{i+1} - T_i}{h} + O(h)$$

Primera diferència endavant (FD) (F=forward D=difference)

Amb la notació establerta escrivim les diferències anteriors,

$$\frac{dT}{dx} \Big|_i = \frac{T_i - T_{i-1}}{h} + O(h)$$

Primera diferència enrere (BD) (B=backward)

$$\frac{dT}{dx} \Big|_i = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

Primera diferència central (CD)

Podem veure gràficament que la diferència central representa una aproximació millor $O(h^2)$.

Restant els desenvolupaments de $T(x + h) = T\left(x + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right)$ i $T(x - h) = T\left(x + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)$ en el punt

$x + \frac{h}{2}$ obtenim les expressions, $\frac{dT}{dx} \Big|_{i+\frac{1}{2}} = \frac{T_{i+1} - T_i}{h} + O(h^2)$ i $\frac{dT}{dx} \Big|_{i-\frac{1}{2}} = \frac{T_i - T_{i-1}}{h} + O(h^2)$

Veiem que $\frac{T_{i+1} - T_i}{h}$ aproxima millor a la $\frac{dT}{dx} \Big|_{i+\frac{1}{2}}$ que a la $\frac{dT}{dx} \Big|_i$ ja que $O(h^2) \ll O(h)$

3.2.3 Segona derivada en diferències

Desenvolupem per Taylor la funció $T(x+2h)$ i $T(x-2h)$ en el punt x :

$$(3) \quad T(x + 2h) = T(x) + 2h T'(x) + 2h^2 T''(x) + \frac{4}{3} h^3 T'''(x) + \dots$$

$$(4) \quad T(x - 2h) = T(x) - 2h T'(x) + 2h^2 T''(x) - \frac{4}{3} h^3 T'''(x) + \dots$$

Eliminant $T'(x)$ de les equacions (1) i (3) obtenim la segona diferència endavant (FD):

$$T''(x) = \frac{T(x) - 2T(x+h) + T(x+2h)}{h^2} - h T'''(x) + \dots$$

Eliminant $T'(x)$ entre les equacions (2) i (4) obtenim la segona diferència enrere (BD):

$$T''(x) = \frac{T(x-2h) - 2T(x-h) + T(x)}{h^2} + h T'''(x) - \dots$$

Sumant les equacions (1) i (2) i aïllant la $T''(x)$ obtenim la segona diferència central (CD):

$$T''(x) = \frac{T(x-h) - 2T(x) + T(x+h)}{h^2} - \underbrace{\frac{1}{12}h^2 T^{(iv)}(x) + \dots}_{O(h^2)} \Rightarrow \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_i = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} + O(h^2)$$

3.2.4 Resum de primeres i segones derivades en diferències

Emprant la notació establerta anteriorment, exposem en forma de resum algunes aproximacions en diferències de la primera i segona derivada, que ens permetran convertir una equació diferencial en una equació algebraica.

Derivades de 1r. ordre:

a) Fórmules de 2 punts

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_i = \frac{T_{i+1} - T_i}{h} + O(h) \quad \text{Primera diferència endavant (FD)} \quad (\text{F=forward D=difference})$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_i = \frac{T_i - T_{i-1}}{h} + O(h) \quad \text{Primera diferència enrere (BD)} \quad (\text{B=backward})$$

b) Fórmules de 3 punts

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_i = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad \text{Primera diferència central (CD)}$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_i = \frac{-3T_i + 4T_{i+1} - T_{i+2}}{2h} + O(h^2) \quad (\text{FD}) \quad \left. \frac{dT}{dx} \right|_i = \frac{T_{i-2} - 4T_{i-1} + 3T_i}{2h} + O(h^2) \quad (\text{BD})$$

Derivades de 2n. ordre

a) Fórmules de 3 punts

Segona diferència enrere (BD)

$$\left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_i = \frac{T_{i-2} - 2T_{i-1} + T_i}{h^2} + O(h)$$

Segona diferència endavant (FD)

$$\left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_i = \frac{T_i - 2T_{i+1} + T_{i+2}}{h^2} + O(h)$$

$$\left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_i = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} + O(h^2) \quad \text{Segona diferència central (BD)}$$

b) Fórmules de 4 punts

$$\left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_i = \frac{2T_i - 5T_{i+1} + 4T_{i+2} - T_{i+3}}{h^2} + O(h^2) \quad (\text{FD})$$

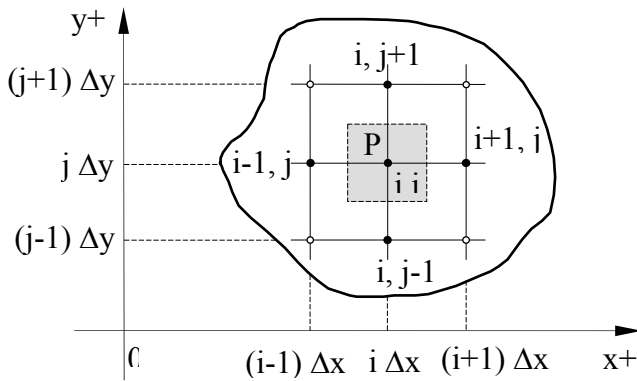
$$\left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_i = \frac{-T_{i-3} + 4T_{i-2} - 5T_{i-1} + 2T_i}{h^2} + O(h^2) \quad (\text{BD})$$

Substituint en una equació diferencial les derivades per les seves aproximacions en diferències, convertim un problema inabordable en la resolució d'un sistema d'equacions, en general amb un nombre considerable d'incògnites.

3.2.5 Equació en diferències: conducció bidimensional en estat estacionari

En un punt (x,y) interior del sòlid es verifica la segona equació de Fourier, que en règim estacionari resulta, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{g}(x,y)}{\lambda} = 0$

Siguin (x,y) les coordenades del node A, representatiu del domini ombrejat a la figura. D'acord amb la notació escollida prèviament,



$$x = i \Delta x \quad y = j \Delta y$$

$$T(x, y) = T(i \Delta x, j \Delta y) \equiv T_{i,j}$$

$$\dot{g}(x, y) = \dot{g}(i \Delta x, j \Delta y) \equiv \dot{g}_{i,j}$$

Malla rectangular

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}$$

Substituint a l'equació segona de Fourier, arribem a l'expressió algebraica,

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + \frac{\dot{g}_{i,j}}{\lambda} = 0$$

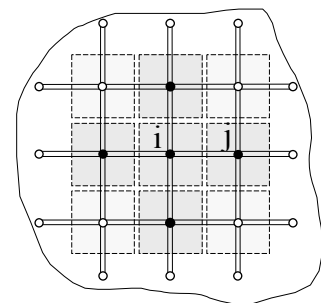
Si $\Delta x = \Delta y$ i $\dot{g}_{i,j} = 0$ resulta, $T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$

O be $T_{i,j} = \frac{\sum \text{Temperatures que envolten el node "i"}}{4} = \text{Mitjana aritmetica}$

3.3 DISCRETITZACIÓ DEL CONTINU

3.3.1 Domini, node i malla

Anomenem *discretitzar* el fet de substituir el model continu de la matèria per una partició o mosaic d'aquesta. Anomenem *domini* a cada element discret d'aquest mosaic, i *node* el seu centre on considerem concentrada tota la seva massa. Quan més fina és la discretització, més s'aproxima la temperatura del node al valor mitjà de la temperatura del domini. El mateix succeeix a la resta de propietats assignades al node.



Enllacem els nodes amb línies o conductes ficticis per on suposarem que es transfereix la calor, la qual cosa constitueix l'anomenada *malla* o *retícula*.

Dos nodes *i* i *j* estaran *connectats* o enllaçats, si la línia o el conducte que els uneix és normal a la superfície comuna entre els dos dominis respectius.

3.3.2 Discretització del temps

En règim transitori algunes temperatures canvien al llarg del temps. Determinar l'evolució de les temperatures en qualsevol instant representa en la majoria dels problemes reals d'enginyeria tèrmica una dificultat inabordable.

Si ens conformem a conèixer la distribució de temperatures en cada interval de temps, el problema es torna més fàcilment resoluble. Per tant, subdividim o discretitzem el temps en intervals Δt i els numerem de forma que a l'interval n li correspon l' instant de temps $t = n \Delta t$. T_i^n representa la temperatura del node i en l' instant $t_n = n \Delta t$.

3.4 EQUACIÓ GENERAL EN DIFERÈNCIES. MÈTODE DEL BALANÇ

3.4.1 Equació general del balanç d'energia

Conductàncies entre nodes de conductivitats diferents

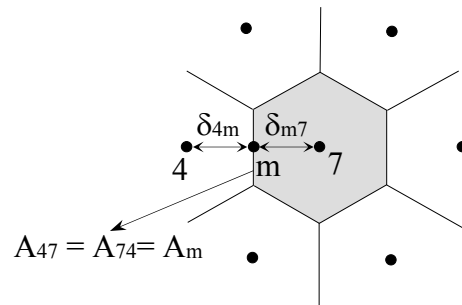
Suposem que el node "7" amb el domini poligonal de la figura i el node veí "4" són de materials amb conductivitats tèrmiques diferents,

Essent "m" un punt de la frontera entre els dos dominis, anomenem $A_m = A_{47} = A_{74}$ a la superfície de contacte entre el domini del node "7" i el del node "4".

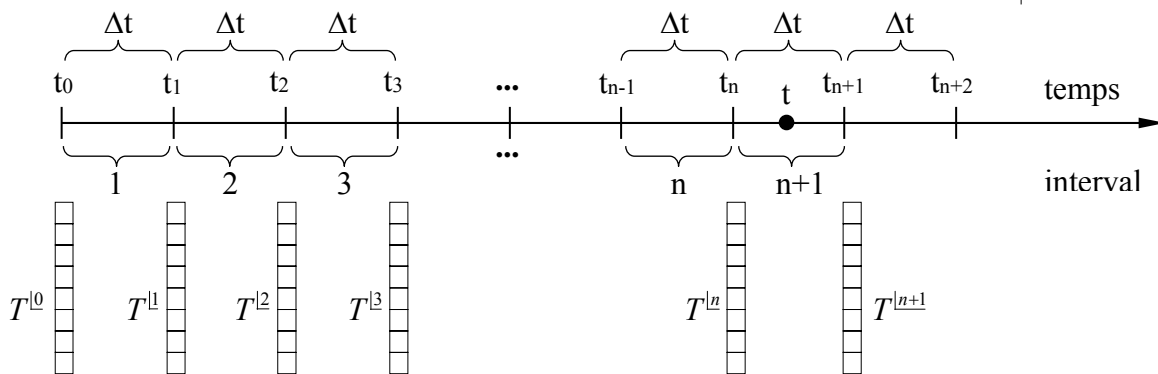
Representem per K_{47} la conductància de paret plana entre el node "4" i el node "7" de la figura.

$$R_{4m} = \frac{\delta_{4m}}{\lambda_4 A_m} \quad ; \quad R_{m7} = \frac{\delta_{m7}}{\lambda_7 A_m}$$

$$K_{47} = K_{74} = \frac{1}{R_{4m} + R_{m7}} = \frac{1}{\frac{\delta_{4m}}{\lambda_4 A_m} + \frac{\delta_{m7}}{\lambda_7 A_m}}$$



Considerem l' instant t comprès entre t_n i t_{n+1}



Temps en funció de l'interval,

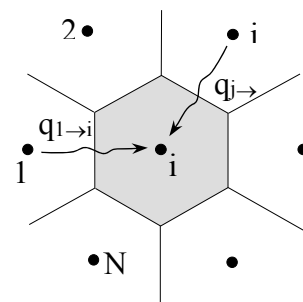
$$t_n = n \Delta t < t < t_{n+1} = (n+1) \Delta t$$

El balanç d'energia amitjanat del node "i" a l' instant de temps t tal que $t_n < t < t_{n+1}$, i prenent com a volum de control el domini del node "i" resulta,

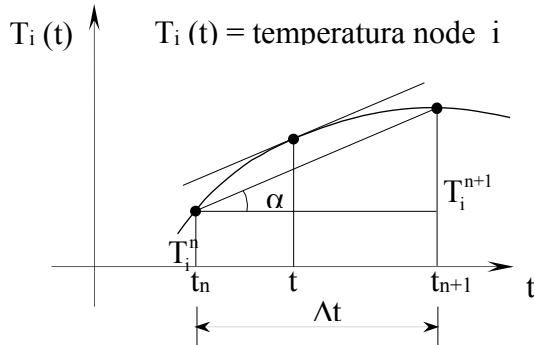
$$\left. \frac{\delta Q}{dt} \right|_i = \left. \frac{dE_\sigma}{dt} \right|_i + 0 \quad \text{sent} \quad \left. \frac{\delta Q}{dt} \right|_i \quad \text{tota la potència que s'aporta al node}$$

"i" a l' instant t i $\left. \frac{dE_\sigma}{dt} \right|_i$ és la variació en el temps de l'energia continguda en el node "i" a l' instant t .

Representem per $q_{j \rightarrow i}^t$ la potència que el node "j" cedeix al node "i" a l' instant t , que d'acord amb el conveni establert, serà positiva quan el node guanya potència, $q_{j \rightarrow i}^t = K_{ji}^t (T_j^t - T_i^t)$ ($q_{j \rightarrow i}^t > 0$ si $T_j > T_i$)



Per tant $\left. \frac{\delta Q}{dt} \right|_i = \sum_{j=1}^N K_{ji}^t (T_j^t - T_i^t) + (\dot{g}_i V_i)^t$ essent $(\dot{g}_i V_i)^t$ la potència generada a l' instant t en el node "i" de volum V_i .



$$\left. \frac{dE_{\sigma}}{dt} \right|_i = (\rho_i V_i c_i)^t \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_i = (\rho_i V_i c_i)^t \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

Si igualem, resulta l'equació general del balanç d'energia per al node i a l' instant $t_n < t < t_{n+1}$

$$\sum_{j=1}^N K_{ji}^t (T_j^t - T_i^t) + (\dot{g}_i V_i)^t = C_i^t \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$C_i^t = (\rho_i V_i c_i)^t$, capacitat calorífica del node "i" a l' instant t

Partim d'unes temperatures conegudes, al inici d'un interval de temps, per trobar el valor de les temperatures incògnites al final del mateix interval de temps. Considerem l'interval $n+1$,
 Temperatures inicials del interval $\rightarrow T_i^{|n}$ variables conegudes (per $t=0$ temp. inicials)
 Temperatures finals del interval $\rightarrow T_i^{|n+1}$ variables incògnites Interval $n+1$

3.4.2 Mètode explícit

Es calcula la potència aportada al node "i" en funció de les temperatures conegudes $T_i^{|n}$ de l' instant de temps t_n i que corresponen a les temperatures inicials de l'interval $n+1$ ($t_n = n\Delta t$)

Considerant per tant $t=t_n$ a l'equació general del balanç d'energia i posant el superíndex n per representar el temps

$t_n = n\Delta t$ resulta,

$$\sum_{j=1}^N K_{ji}^{|n} (T_j^{|n} - T_i^{|n}) + (\dot{g}_i V_i)^{|n} = C_i^{|n} \frac{T_i^{|n+1} - T_i^{|n}}{\Delta t} \quad N = \text{nodes en contacte amb el node "i".}$$

Aïllem la temperatura $T_i^{|n+1}$ i obtenim una expressió explícita en funció de temperatures conegudes,

$$T_i^{|n+1} = \frac{\Delta t}{C_i^{|n}} \left[\sum_{j=1}^N K_{ji}^{|n} T_j^{|n} + (\dot{g}_i V_i)^{|n} \right] + \left[1 - \frac{\Delta t}{C_i^{|n}} \sum_{j=1}^N K_{ji}^{|n} \right] T_i^{|n}$$

Aquesta equació determina la temperatura $T_i^{|n+1}$ del node "i" al final del interval de temps $(n+1)$ en un instant $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ com s'ha vist a partir de les temperatures del sistema en un instant anterior t_n . Si escollim un interval de temps Δt de manera que el segon claudàtor resulti positiu, la solució és estable.

$$1 - \frac{\Delta t}{C_i^{|n}} \sum_{j=1}^N K_{ji}^{|n} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Condicció d'estabilitat,}$$

$$\Delta t \leq \frac{C_i^{|n}}{\sum_{j=1}^N K_{ji}^{|n}}, \quad \forall i \quad \forall n$$

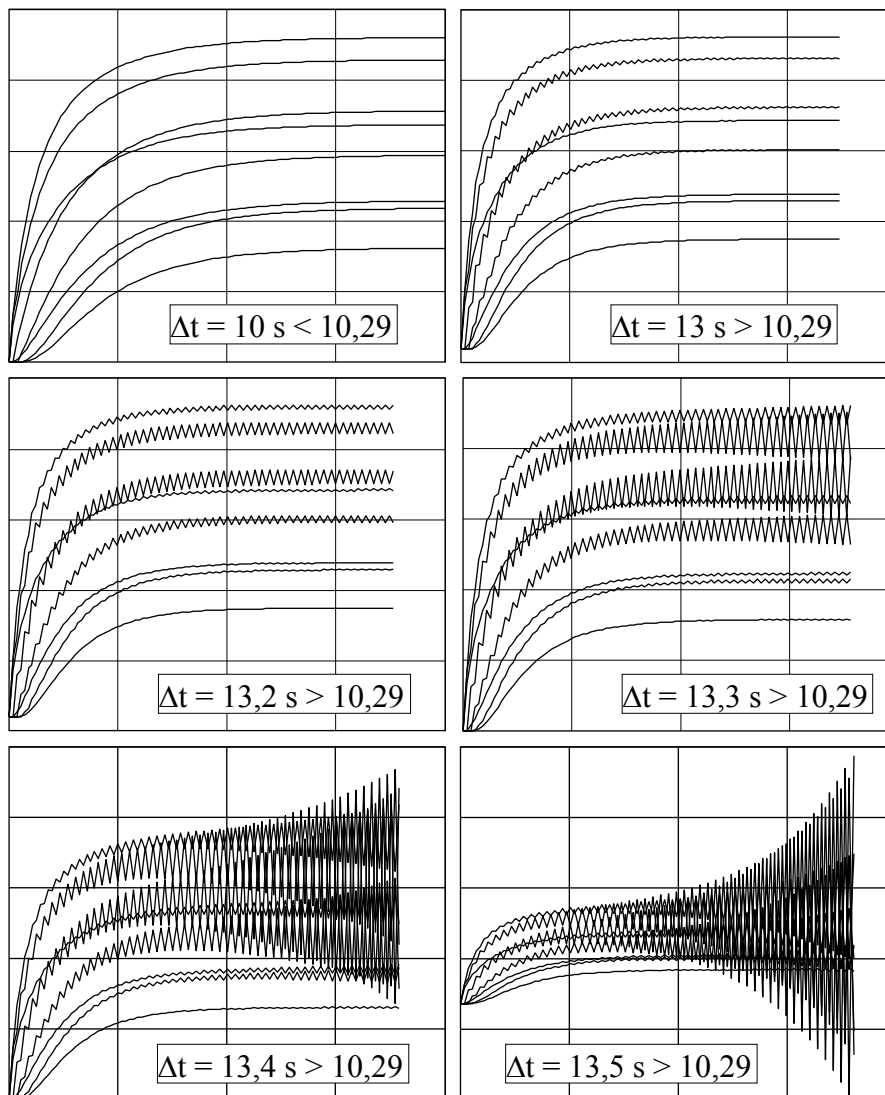
El Δt ha de ser el mateix per tots els nodes i per totes les iteracions.

Elecció del Δt en el mètode explícit

En una variant de l'exercici 1 (examen 23/11/2002), que considerava aire i radiació amb l'entorn obteníem un $\Delta t_{max. admissible} = 10,29 s$ això significa que no podem fer servir en el mètode explícit un Δt més gran. També sabem que aquest valor es el mínim de la taula

definida pel terme $\frac{C_i}{\sum_{j=1}^{n_i} K_{ij}}$ per $i=1,2,\dots,n_i$ (n_i =nombre de nodes incògnita)

Veiem amb els següents gràfics com es comporta el mètode explícit quan fem servir intervals de temps Δt propers al màxim acceptable.



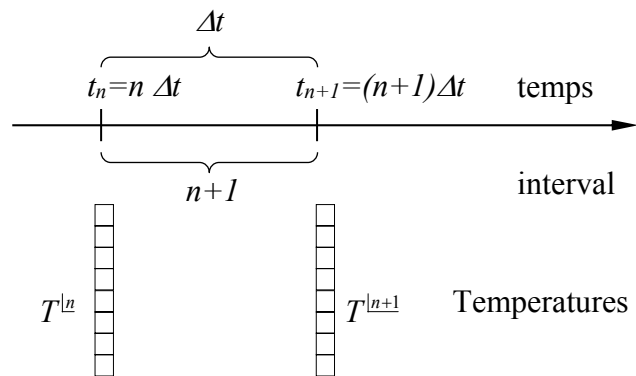
Veiem que si superem un $\Delta t = 13 s$ la inestabilitat apareix de forma molt sobtada.

Mireu com augmenta la inestabilitat en un simple augment de 0,4 s com resulta al passar de $\Delta t = 13 s$ a un $\Delta t = 13,4 s$. Per aquest motiu escollirem un valor pel Δt prou més petit que el $\Delta t_{max. admissible}$ i es recomanable cercar el límit real simplement graficant els resultats tal com es veu en les anteriors figures. (aquest comportament es funció exclusiva de la geometria i condicions de contorn de cada sistema)

3.4.3 Mètode implícit

Es calcula la potència aportada al node “i” en funció de les temperatures incògnites T_i^{n+1} de l’instant de temps t_{n+1} i que corresponen a les temperatures finals de l’interval de temps $n+1$.

Considerant per tant $t = t_{n+1}$ a l’equació general del balanç d’energia i posant el superíndex $n+1$ a les temperatures per identificar-ne l’instant $t_{n+1}=(n+1)\Delta t$, resulta:



$$\sum_{j=1}^N K_{ji}^{n+1} (T_j^{n+1} - T_i^{n+1}) + (\dot{g}_i V_i)^{n+1} = C_i^{n+1} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

Cada equació conté N+1 incògnites essent N el nombre de nodes en contacte amb el node i .

Essent N_T el nombre de nodes de temperatura desconeguda del sistema, haurem de resoldre un sistema de N_T equacions amb N_T incògnites. Aquest mètode és intrínsecament estable per qualsevol valor de l’interval Δt . Quan més fina sigui la discretització en l’espai i en el temps, la solució obtinguda s’aproximarà millor a la distribució real de temperatures.

Quan el nombre d’incògnites és gran resulta pràctic resoldre el sistema d’equacions, per un mètode iteratiu com per exemple el de Gauss-Seidel, ja que el procés d’acumulació d’errors d’arrodoniment és molt més reduït que en els mètodes directes.

Per emprar aquest mètode aïllem de l’equació del node i la temperatura T_i^{n+1} ,

$$T_i^{n+1} = \frac{T_i^n + \frac{\Delta t}{C_i^{n+1}} \left[\sum_{j=1}^N K_{ji}^{n+1} T_j^{n+1} + (\dot{g}_i V_i)^{n+1} \right]}{1 + \frac{\Delta t}{C_i^{n+1}} \sum_{j=1}^N K_{ji}^{n+1}}$$

Tractant-se d’un mètode intrínsecament estable per tot Δt , podem fer el límit quan $\Delta t \rightarrow \infty$

Es pot comprovar fàcilment que si $\Delta t \rightarrow \infty$, $T_i^{n+1} \rightarrow T_i$ (estacionari)

3.4.4 Mètode mixt o de mitjana ponderada: CRANK-NICOLSON (F=0,5)

Sigui F un factor de ponderació inferior a la unitat. En aquest mètode calculem la potència que rep el node “i” com la suma ponderada amb els factors F i $1-F$ de les potències tèrmiques calculades en funció de les temperatures de l’instant t_n i t_{n+1} respectivament.

$$\left. \frac{\delta Q}{dt} \right|_i = F \left[\sum_{j=1}^N q_{j \rightarrow i}^n + (\dot{g}_i V_i)^n \right] + (1-F) \left[\sum_{j=1}^N q_{j \rightarrow i}^{n+1} + (\dot{g}_i V_i)^{n+1} \right]$$

A l’instant t_n totes les variables són conegudes, i per tant el primer claudàtor resultarà ser una constant en l’equació del node corresponent.

Si anomenem, $g_i^E = F (\dot{g}_i V_i)^n + (1-F) (\dot{g}_i V_i)^{n+1}$ $C_i^E = F C_i^n + (1-F) C_i^{n+1}$

obtenim una expressió més compacta del mètode mixt o de la mitjana ponderada,

L’equació del balanç per al node “i” en aquest cas resulta,

$$F \sum_{j=1}^N K_{ji}^{ln} (T_j^{ln} - T_i^{ln}) + (1-F) \sum_{j=1}^N K_{ji}^{ln+1} (T_j^{ln+1} - T_i^{ln+1}) + g_i^{lf} = C_i^{lf} \frac{T_i^{ln+1} - T_i^{ln}}{\Delta t}$$

Si aïllem la temperatura del node “i” en l’ instant t_{n+1} resulta,

$$T_i^{ln+1} = \frac{F \sum_{j=1}^N K_{ji}^{ln} T_j^{ln} + (1-F) \sum_{j=1}^N K_{ji}^{ln+1} T_j^{ln+1} + \left[\frac{C_i^{lf}}{\Delta t} - F \sum_{j=1}^N K_{ji}^{ln} \right] T_i^{ln} + g_i^{lf}}{\frac{C_i^{lf}}{\Delta t} + (1-F) \sum_{j=1}^N K_{ji}^{ln+1}}$$

Condicció d’estabilitat $\Delta t \leq \frac{C_i^{lf}}{F \sum_{j=1}^N K_{ji}^{ln}}$, $\forall i \forall n$

Si assignem al paràmetre F el valor 0,5 el mètode mixt o de mitjana ponderada s’anomena de *Crank Nicolson*. En aquest mètode, el càlcul de la potència aportada al node en l’interval de temps comprès entre t_n i t_{n+1} es realitza de la manera següent:

- 50% emprant les temperatures de l’ instant t_n (explícit)
- 50% emprant les temperatures de l’ instant t_{n+1} (implícit)

En cas de ser acceptable considera que la capacitat calorífica del node és independent de la seva temperatura (almenys en l’interval de treball), aleshores la condició d’estabilitat es converteix en la següent,

Condicció d’estabilitat ($F=0,5$ $C_i^{ln} = C_i^{ln+1}$):

$$\Delta t \leq \frac{0,5 C_i^{ln} + 0,5 C_i^{ln+1}}{0,5 \sum_{j=1}^N K_{ji}^{ln}} = \frac{2 C_i^{ln}}{\sum_{j=1}^N K_{ji}^{ln}} = 2 \Delta t_{EXPLICIT} \quad , \quad \forall i \quad \forall n$$

3.5 CONDUCTÀNCIES INTERNODALS

3.5.1 Notació

Per a un sistema de coordenades determinat utilitzem les orientacions dels seus eixos respectius per designar les conductàncies d’un node qualsevol amb els nodes que l’envolten.

Exemple: sistema de coordenades cartesià.

$$K_{(i,j) \rightarrow (i+1,j)} = K_{x+} \quad ; \quad K_{(i,j) \rightarrow (i-1,j)} = K_{x-} \quad ; \quad K_{(i,j) \rightarrow (i,j+1)} = K_{y+} \quad ; \quad K_{(i,j) \rightarrow (i,j-1)} = K_{y-}$$

K_{x+} conductància d’un node amb el node de la seva dreta (en la direcció i sentit de l’eix $x+$)

Aquesta notació resulta útil en casos de certa complexitat, com per exemple en coordenades esfèriques. A continuació per simplificar utilitzem només un nombre per representar cada node.

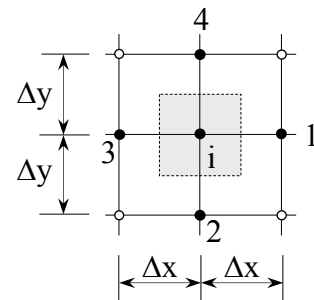
3.5.2 Malles rectangulars

Malla rectangular tridimensional

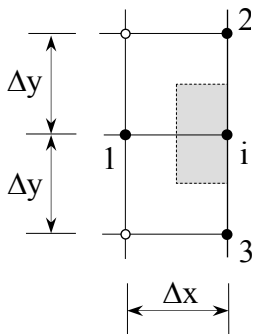
a) Node interior

$$K_{i1} = K_{x+} = \frac{\lambda \Delta y \Delta z}{\Delta x} = K_{i3} = K_{x-} \quad , \quad K_{i4} = K_{y+} = \frac{\lambda \Delta x \Delta z}{\Delta y} = K_{i2} = K_{y-}$$

$$K_{z+} = \frac{\lambda \Delta x \Delta y}{\Delta z} = K_{z-} \quad , \quad \Delta V_i = \Delta x \Delta y \Delta z$$



b) Node de contorn amb convecció



$$K_{i\infty} = h \Delta y \Delta z = K_{x+} \quad , \quad K_{i1} = \frac{\lambda \Delta y \Delta z}{\Delta x} = K_{x-}$$

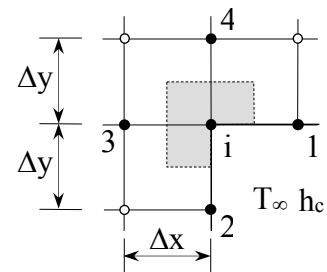
$$K_{i2} = K_{y+} = \frac{\lambda \frac{\Delta x}{2} \Delta z}{\Delta y} = \frac{\lambda \Delta x \Delta z}{2 \Delta y} = K_{i3} = K_{y-}$$

$$K_{z+} = \frac{\lambda \frac{\Delta x}{2} \Delta y}{\Delta z} = \frac{\lambda \Delta x \Delta y}{2 \Delta z} = K_{z-} \quad , \quad \Delta V_i = \frac{\Delta x}{2} \Delta y \Delta z = \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2}$$

c) Node cantoner interior amb convecció.

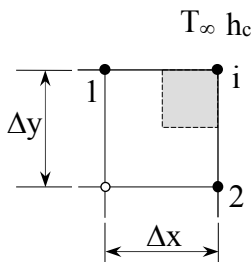
$$K_{i1} = \frac{\lambda \frac{\Delta y}{2} \Delta z}{\Delta x} = \frac{\lambda \Delta y \Delta z}{2 \Delta x} = K_{x+} \quad , \quad K_{i3} = \frac{\lambda \Delta y \Delta z}{\Delta x} = K_{x-}$$

$$K_{i4} = \frac{\lambda \Delta x \Delta z}{\Delta y} = K_{y+} \quad , \quad K_{z+} = \frac{\lambda \frac{3}{4} \Delta x \Delta y}{\Delta z} = \frac{3 \lambda \Delta x \Delta y}{4 \Delta z} = K_{z-}$$



$$\Delta V_i = \frac{3}{4} \Delta x \Delta y \Delta z \quad , \quad K_{i2} = \frac{\lambda \frac{\Delta x}{2} \Delta z}{\Delta y} = \frac{\lambda \Delta x \Delta z}{2 \Delta y} = K_{y-} \quad , \quad K_{i\infty} = h \left(\frac{\Delta x + \Delta y}{2} \right) \Delta z$$

d) Node cantoner exterior amb convecció.



$$K_{i1} = \frac{\lambda \frac{\Delta y}{2} \Delta z}{\Delta x} = \frac{\lambda \Delta y \Delta z}{2 \Delta x} = K_{x-} \quad , \quad \Delta V_i = \frac{1}{4} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$K_{i2} = \frac{\lambda \frac{\Delta x}{2} \Delta z}{\Delta y} = \frac{\lambda \Delta x \Delta z}{2 \Delta y} = K_{y-} \quad , \quad K_{i\infty} = h \left(\frac{\Delta x + \Delta y}{2} \right) \Delta z$$

Malla rectangular bidimensional

En aquest cas la distribució de temperatures és uniforme en el sentit de l'eix z.

Calculem les conductàncies substituint $\Delta z=1$ en les expressions obtingudes en el cas anterior de malla rectangular tridimensional, excepte per a K_{z+} i K_{z-} que òbviament no considerem.

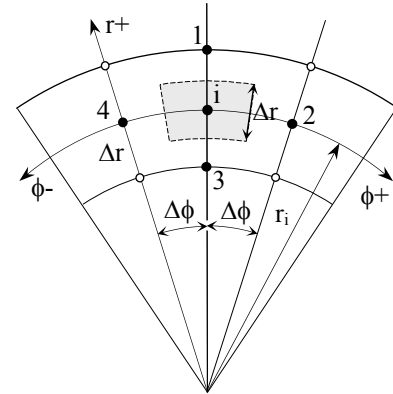
3.5.3 Malles cilíndriques

Malla tridimensional cilíndrica.

$$K_{i1} = \frac{\lambda \left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \phi \Delta z}{\Delta r} = K_{r+}, \quad \Delta V_i = r_i \Delta \phi \Delta r \Delta z$$

$$K_{i3} = \frac{\lambda \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \phi \Delta z}{\Delta r} = K_{r-}, \quad K_{z+} = \frac{\lambda r_i \Delta \phi \Delta r}{\Delta z} = K_{z-}$$

$$K_{i2} = K_{\phi+} = \frac{\lambda \Delta r \Delta z}{r_i \Delta \phi} = K_{i4} = K_{\phi-}$$



Malla bidimensional cilíndrica

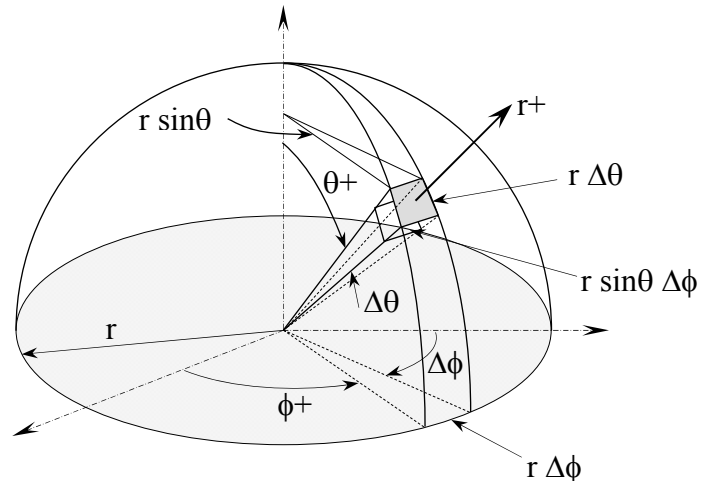
En aquest cas la distribució de temperatures és uniforme en el sentit de l'eix z.

Calculem les conductàncies substituint Δz=1 en les expressions obtingudes en el cas anterior de malla tridimensional cilíndrica, excepte per a K_{z+} i K_{z-} que òbviament no considerem.

3.5.4 Malles esfèriques

$$K_{\phi+} = \frac{\lambda \Delta r \chi_i \Delta \theta}{\chi_i \sin \theta_i \Delta \phi} = \frac{\lambda \Delta r \Delta \theta}{\sin \theta_i \Delta \phi} = K_{\phi-}$$

$$\Delta V = (r_i \sin \theta_i \Delta \phi) (r_i \Delta \theta) \Delta r = r_i^2 \sin \theta_i \Delta \phi \Delta \theta \Delta r$$



$$K_{r+} = \frac{\lambda \left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right) \sin \theta_i \Delta \phi}{\Delta r} = \frac{\lambda \left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \sin \theta_i \Delta \theta \Delta \phi}{\Delta r}$$

$$K_{r-} = \frac{\lambda \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right) \sin \theta_i \Delta \phi}{\Delta r} = \frac{\lambda \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \sin \theta_i \Delta \theta \Delta \phi}{\Delta r}$$

$$K_{\theta+} = \frac{\lambda \chi \sin \left(\theta_i + \frac{\Delta \theta}{2} \right) \Delta \phi \Delta r}{\chi \Delta \theta} = \frac{\lambda \sin \left(\theta_i + \frac{\Delta \theta}{2} \right) \Delta \phi \Delta r}{\Delta \theta}$$

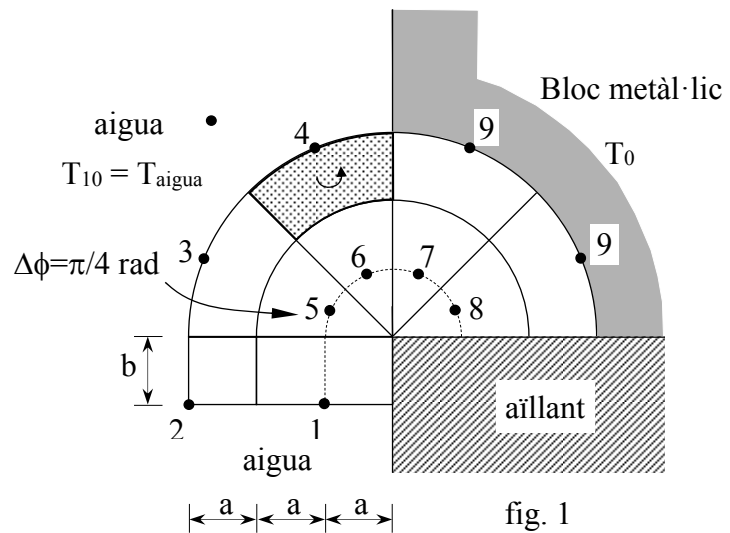
$$K_{\theta-} = \frac{\lambda \chi \sin \left(\theta_i - \frac{\Delta \theta}{2} \right) \Delta \phi \Delta r}{\chi \Delta \theta} = \frac{\lambda \sin \left(\theta_i - \frac{\Delta \theta}{2} \right) \Delta \phi \Delta r}{\Delta \theta}$$

3.6 SOLUCIÓ MATRICIAL (examen numèric del 23/11/2002)

3.6.1 Règim estacionari

$n_i=8$ nodes amb temperatura incògnita
 $n_c=2$ nodes de contorn (el bloc metàl·lic node 9 i l'aigua node 10)
 $n_t = n_i + n_c = 10$ nodes totals

La matriu de conductàncies K és una matriu de 8×10 ($n_i=8$ files i $n_t=10$ columnes).



	1	2	3	4	5	6	7	8	9 bloc	10 aig
1	0	✓	0	0	✓	0	0	0	0	✓
2	✓	0	✓	0	0	0	0	0	0	✓
3	0	✓	0	✓	✓	0	0	0	0	✓
4	0	0	✓	0	0	✓	0	0	✓	✓
5	✓	0	✓	0	0	✓	0	0	0	0
6	0	0	0	✓	✓	0	✓	0	0	0
7	0	0	0	0	0	✓	0	✓	✓	0
8	0	0	0	0	0	0	✓	0	✓	0

Escribim com exemple l'equació del node 4,

$$\sum_{j=1}^{n_t=10} K_{4j} (T_j - T_4) + \dot{g}_4 V_4 = K_{43} (T_3 - T_4) + K_{46} (T_6 - T_4) + K_{49} (T_9 - T_4) + K_{4-10} (T_{10} - T_4) + \dot{g}_4 V_4 = 0$$

Observem que si "j" no es veï (1,2,4,5,7,8) aleshores el valor de K_{4j} a la matriu K és 0.

$$\sum_{j=1}^{10} K_{4j} (T_j - T_4) + \dot{g}_4 V_4 = \underbrace{K_{43} T_3 + K_{46} T_6}_{\sum_{j=1}^8 K_{4j} T_j} + \underbrace{K_{49} T_9 + K_{4-10} T_{10}}_{\sum_{j=9}^{10} K_{4j} T_j (contorn)} - \underbrace{(K_{43} + K_{46} + K_{49} + K_{4-10})}_{\sum_{j=1}^{10} K_{4j}} T_4 + \dot{g}_4 V_4 = 0$$

I per tant, $\sum_{j=1}^{10} K_{4j} (T_j - T_4) + \dot{g}_4 V_4 = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^8 K_{4j} T_j + \sum_{j=9}^{10} K_{4j} T_j - \left(\sum_{j=1}^{10} K_{4j} \right) T_4 + \dot{g}_4 V_4 = 0$

Sumem la primera fila, $\sum_{j=1}^{10} K_{1j} = K_{1-2} + K_{1-5} + K_{1-10}$ i substituïm el seu valor canviat de signe a

$-\sum_{j=1}^{10} K_{1j}$ la posició (1,1) de la matriu K. Sumem la fila 2 i substituïm el resultat $-\sum_{j=1}^{10} K_{2j}$ a la posició (2,2), etc.

Quan a la matriu de conductàncies li sumem les seves files, i el resultat canviat de signe

$-\sum_{j=1}^{10} K_{ij}$ el posem a la diagonal obtenim la matriu que anomenem [KI | KC],

	1	2	3	4	5	6	7	8	9 bloc	10 aig
1	$-\sum K_{1j}$	K_{12}	0	0	K_{15}	0	0	0	0	K_{1-10}
2	K_{21}	$-\sum K_{2j}$	K_{23}	0	0	0	0	0	0	K_{2-10}
3	0	K_{32}	$-\sum K_{3j}$	K_{34}	K_{35}	0	0	0	0	K_{3-10}
4	0	0	K_{43}	$-\sum K_{4j}$	0	K_{46}	0	0	K_{49}	K_{4-10}
5	K_{51}	0	K_{53}	0	$-\sum K_{5j}$	K_{56}	0	0	0	0
6	0	0	0	K_{64}	K_{65}	$-\sum K_{6j}$	K_{67}	0	0	0
7	0	0	0	0	0	K_{76}	$-\sum K_{7j}$	K_{78}	K_{79}	0
8	0	0	0	0	0	0	K_{87}	$-\sum K_{8j}$	K_{89}	0

Submatriu KI (simètrica)
(nodes incògnites)

Submatriu KC
(nodes de contorn)

Passem ara el terme de generació i els termes de contorn $K_{49}T_9 + K_{4-10}T_{10}$ al segon membre,

$$\sum_{j=1}^8 K_{4j} T_j + \left(-\sum_{j=1}^{10} K_{4j} \right) T_4 = -\dot{g}_4 V_4 - \sum_{j=9}^{10} K_{4j} T_j \quad \text{És fàcil comprovar que aquesta expressió}$$

equivale al producte matricial que indiquem a continuació, sent $g_i = \dot{g}_i V_i$ per $i=1,2,..8$

	1	2	3	4	5	6	7	8	T	G	KC	TC
1	$-\sum K_{1j}$	K_{12}	0	0	K_{15}	0	0	0	T_1	g_2	0 K_{1-10}	
2	K_{21}	$-\sum K_{2j}$	K_{23}	0	0	0	0	0	T_2	g_2	0 K_{2-10}	
3	0	K_{32}	$-\sum K_{3j}$	K_{34}	K_{35}	0	0	0	T_3	g_3	0 K_{3-10}	
4	0	0	K_{43}	$-\sum K_{4j}$	0	K_{46}	0	0	T_4	g_4	K_{49} K_{4-10}	T_9
5	K_{51}	0	K_{53}	0	$-\sum K_{5j}$	K_{56}	0	0	T_5	g_5	0 0	T_{10}
6	0	0	0	K_{64}	K_{65}	$-\sum K_{6j}$	K_{67}	0	T_6	g_6	0 0	
7	0	0	0	0	0	K_{76}	$-\sum K_{7j}$	K_{78}	T_7	g_7	K_{79} 0	
8	0	0	0	0	0	0	K_{87}	$-\sum K_{8j}$	T_8	g_8	K_{89} 0	

Matrius Dimensions: KI (8x8), T_{est} (8x1), G (8x1), KC (8x2), TC (2x1)

Obtenim l'equació matricial $KI \times T_{est} = -G - KC \times TC \Rightarrow T_{est} = KI^{-1} \times (-G - KC \times TC)$ (solució matricial) Per tant si ens muntem a partir de la matriu de conductàncies completa K les matrius KI, KC, G i TC, obtenim d'una forma directa les temperatures de l'estat estacionari amb una simple operació matricial.

3.6.2 Règim transitori: mètode explícit (examen del 23/11/2002)

Equació de la potència aportada al node “i” en funció de les variables conegudes a l’ instant n ($t_n = n \Delta t$),

$$\sum_{j=1}^{n_r} K_{ji}^{ln} (T_j^{ln} - T_i^{ln}) + g_i^{ln} = C_i^{ln} \frac{T_i^{ln+1} - T_i^{ln}}{\Delta t} \quad \text{on} \quad g_i^{ln} = (\dot{g}_i V_i)^{ln} \quad \text{i} \quad C_i^{ln} = (\rho_i V_i c_i)^{ln}$$

Si K_{ij} son els elements de la matriu de conductàncies K, aleshores $n_t = n_i + n_c = 10$ és el nombre total de nodes que intervenen en el problema (nombre de columnes), sent per tant $n_i = 8$ el nombre d’incògnites (també nombre de files) i $n_c = 2$ el nombre de nodes de contorn. Tots els elements d’aquesta matriu que corresponen a conductàncies entre nodes que no tenen contacte tèrmic són nuls. Si aïllem de l’equació anterior T_i^{ln+1} obtenim les temperatures dels nodes “i” a l’ instant n+1 en funció de les temperatures a l’ instant anterior n.

$$T_i^{ln+1} = T_i^{ln} + \frac{\Delta t}{C_i^{ln}} \left[\sum_{j=1}^{n_r} K_{ij}^{ln} T_j^{ln} - T_i^{ln} \sum_{j=1}^{n_c} K_{ij}^{ln} + g_i^{ln} \right] \quad \text{ja que} \quad K_{ji}^{ln} = K_{ij}^{ln}$$

Sabem que la solució és estable si es compleix la condició següent,

Condició d’estabilitat o convergència, $\Delta t \leq \frac{C_i^{ln}}{\sum_{j=1}^{n_r} K_{ij}^{ln}}, \quad \forall i \quad \forall n$

Per començar, resulta pràctic organitzar-se en paper les següents taules necessàries per crear les matrius amb les que resoldrem matricialment tots els mètodes transitoris. El mínim de la penúltima columna és el valor màxim acceptable de l’interval de temps Δt que podem fer servir en el mètode explícit perquè aquest sigui estable. En general escollirem un valor inferior i arrodonit.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum_{j=1}^{10} K_{ij}$	V_i	C_i	$\frac{C_i}{\sum_{j=1}^{10} K_{ij}}$	g_i
1	0	✓	0	0	✓	0	0	0	0	✓	✓	✓	✓	✓	0
2	✓	0	✓	0	0	0	0	0	0	✓	✓	✓	✓	✓	0
3	0	✓	0	✓	✓	0	0	0	0	✓	✓	✓	✓	✓	0
4	0	0	✓	0	0	✓	0	0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
5	✓	0	✓	0	0	✓	0	0	0	0	✓	✓	✓	✓	0
6	0	0	0	✓	✓	0	✓	0	0	0	✓	✓	✓	✓	0
7	0	0	0	0	0	✓	0	✓	✓	0	✓	✓	✓	✓	0
8	0	0	0	0	0	0	✓	0	✓	0	✓	✓	✓	✓	0

Matrius pel càlcul matricial: (recordem $n_t = n_i + n_c = 10$)

$$T_i^{ln+1} = T_i^{ln} + \frac{\Delta t}{C_i^{ln}} \times \left[\sum_{j=1}^{10} K_{ij}^{ln} T_j^{ln} - T_i^{ln} \sum_{j=1}^{10} K_{ij}^{ln} + g_i^{ln} \right], \text{ si desglossem (I),}$$

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\Delta t}{C_i^n} \times \left[\underbrace{\sum_{j=1}^{n_i=8} K_{ij}^n T_j^n + \sum_{j=9}^{n_i=10} K_{ij}^n T_j^n}_{(I)} + \left(-\sum_{j=1}^{n_i=10} K_{ij}^n \right) T_i^n + g_i^n \right]$$

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\Delta t}{C_i^n} \times \left[\sum_{j=1}^{n_i=8} K_{ij}^n T_j^n + \left(-\sum_{j=1}^{n_i=10} K_{ij}^n \right) T_i^n + \sum_{j=9}^{n_i=10} K_{ij}^n T_j^n + g_i^n \right]$$



$$TF = TN + DTC \times (KI \times TN + KC \times TC + G) \quad (\text{expressió matricial})$$

$C_i^n = (\rho_i V_i c_i)^n$, capacitat calorífica del node i a l' instant n

El vector G té tots els elements nuls excepte els que corresponen a nodes amb generació (node 4). TN i TF son els vectors de les temperatures dels nodes als instants n i $n+1$ respectivament (dimensió $n \times 1$).

TC és un vector amb totes temperatures de contorn. (dimensió $n_c \times 1$).

	1	2	3	4	5	6	7	8	TN	9	10	TC	G
1	$-\sum K_{1j}$	K_{12}	0	0	K_{15}	0	0	0	T_1	0	K_{1-10}		0
2	K_{21}	$-\sum K_{2j}$	K_{23}	0	0	0	0	0	T_2	0	K_{2-10}		0
3	0	K_{32}	$-\sum K_{3j}$	K_{34}	K_{35}	0	0	0	T_3	0	K_{3-10}		0
4	0	0	K_{43}	$-\sum K_{4j}$	0	K_{46}	0	0	T_4	K_{49}	K_{4-10}	T_9	g_4
5	K_{51}	0	K_{53}	0	$-\sum K_{5j}$	K_{56}	0	0	T_5	0	0	T_{10}	0
6	0	0	0	K_{64}	K_{65}	$-\sum K_{6j}$	K_{67}	0	T_6	0	0		0
7	0	0	0	0	0	K_{76}	$-\sum K_{7j}$	K_{78}	T_7	K_{79}	0		0
8	0	0	0	0	0	0	K_{87}	$-\sum K_{8j}$	T_8	K_{89}	0		0

Matrius KI (simètrica) × TN + KC × TC + G
 Dimensions (8×8) (8×1) (8×2) (2×1)(8×1)

DTC matriu de 8×8, (amb l'HP la podem crear amb MTH MATR MAKE 8 IDN 'DTC' STO)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\Delta t/C_1$	0	0	0	0	0	0	0
2	0	$\Delta t/C_2$	0	0	0	0	0	0
3	0	0	$\Delta t/C_3$	0	0	0	0	0
4	0	0	0	$\Delta t/C_4$	0	0	0	0
5	0	0	0	0	$\Delta t/C_5$	0	0	0
6	0	0	0	0	0	$\Delta t/C_6$	0	0
7	0	0	0	0	0	0	$\Delta t/C_7$	
8	0	0	0	0	0	0	0	$\Delta t/C_8$

Amb l'HP escriuríem ' $TN + DTC \times (KI \times TN + KC \times TC + G)$ ', 'TF' STO
 Avaluem numèricament 'TF' i assignem el seu valor a TN per tornar a iterar.

Validesa del procediment matricial en el mètode explícit.

En el mètode explícit, si les conductàncies K_{ji} , capacitats calorífiques C_i o be la generació, fossin dependents de la temperatura, a cada iteració caldria actualitzar les matrius DTC, KI, KC, i G. Això faria molt poc pràctic el mètode matricial. Per això, la solució matricial resulta especialment interessant quan les matrius DTC, KI, KC i G són constants durant tot el procés iteratiu.

3.6.3 Règim transitori: mètode implícit

Equació general de la potència tèrmica aportada al node "i" en funció de les temperatures desconegudes de l' instant $n+1$,

$$\sum_{j=1}^{n_i=10} K_{ij}^{[n+1]} (T_j^{[n+1]} - T_i^{[n+1]}) + g_i^{[n+1]} = C_i^{[n+1]} \frac{T_i^{[n+1]} - T_i^{[n]}}{\Delta t}, \quad \mathbf{n}_t = \mathbf{n}_i + \mathbf{n}_c = 10, \quad g_i^{[n+1]} = (\dot{g}_i V_i)^{[n+1]},$$

$$C_i^{[n+1]} = (\rho_i V_i c_i)^{[n+1]}$$

Suposem ara K_{ij} , C_i i g_i cts. $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n_i=10} K_{ij} T_j^{[n+1]} - \left(\sum_{j=1}^{n_i=10} K_{ij} \right) T_i^{[n+1]} + g_i = \frac{C_i}{\Delta t} T_i^{[n+1]} - \frac{C_i}{\Delta t} T_i^{[n]}$

$\sum_{j=1}^{n_i=10} K_{ij} T_j^{[n+1]} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n_i=8} K_{ij} T_j^{[n+1]}}_{\text{nodes de temperatura incògnita}} + \underbrace{\sum_{j=9}^{n_i=10} K_{ij} T_j}_{\text{nodes de contorn (de temperatura coneguda)}}$ Substituïm i treïem $T_i^{[n+1]}$ de factor comú,

$$\sum_{j=1}^{n_i=8} K_{ij} T_j^{[n+1]} - \left(\sum_{j=1}^{n_i=10} K_{ij} \right) T_i^{[n+1]} - \frac{C_i}{\Delta t} T_i^{[n+1]} = -g_i - \sum_{j=9}^{n_i=10} K_{ij} T_j - \frac{C_i}{\Delta t} T_i^{[n]}$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n_i=8} K_{ij} T_j^{[n+1]} - \left(\sum_{j=1}^{n_i=10} K_{ij} + \frac{C_i}{\Delta t} \right) T_i^{[n+1]}}_{(KI - CDT) \times TF} = \underbrace{-g_i}_{-G} - \underbrace{\sum_{j=9}^{n_i=10} K_{ij} T_j}_{-KC \times TC} - \underbrace{\frac{C_i}{\Delta t} T_i^{[n]}}_{-CDT \times TN}$$

(KI - CDT) × TF = -G - KC × TC - CDT × TN (expressió matricial)

Sent $CDT = DTC^{-1}$ Aleshores $TF = (KI-CDT)^{-1} \times (-G - KC \times TC - CDT \times TN)$

	G	KC	TC	CDT								TN		
	g2	0 K1-10		C1/Δt	0	0	0	0	0	0	0	0	T1 ^{ln}	
	g2	0 K2-10		0	C2/Δt	0	0	0	0	0	0	0	T2 ^{ln}	
	g3	0 K3-10		0	0	C3/Δt	0	0	0	0	0	0	T3 ^{ln}	
	g4	K49 K4-10	T9	0	0	0	C4/Δt	0	0	0	0	0	T4 ^{ln}	= 2º memb.
	g5	0 0	T10	0	0	0	0	C5/Δt	0	0	0	0	T5 ^{ln}	
	g6	0 0		0	0	0	0	0	C6/Δt	0	0	0	T6 ^{ln}	
	g7	K79 0		0	0	0	0	0	0	C7/Δt			T7 ^{ln}	
	g8	K89 0		0	0	0	0	0	0	0	0	C8/Δt	T8 ^{ln}	
	G	KC	TC	CDT								TN		
	(8×1)	(8×2)	(2×1)	(8×8)								(8×1) (8×1)		

	1	2	3	4	5	6	7	8	TF
1	$-\sum_{j=1}^N K_{1j} - \frac{C_1}{\Delta t}$	K12	0	0	K15	0	0	0	T1 ^{ln+1}
2	K21	id.	K23	0	0	0	0	0	T2 ^{ln+1}
3	0	K32	id.	K34	K35	0	0	0	T3 ^{ln+1}
4	0	0	K43	id.	0	K46	0	0	T4 ^{ln+1}
5	K51	0	K53	0	id.	K56	0	0	T5 ^{ln+1}
6	0	0	0	K64	K65	id.	K67	0	T6 ^{ln+1}
7	0	0	0	0	0	K76	id.	K78	T7 ^{ln+1}
8	0	0	0	0	0	0	K87	$-\sum_{j=1}^N K_{8j} - \frac{C_8}{\Delta t}$	T8 ^{ln+1}
	KI - CDT								TF
	(8×8)								(8×1) (8×1)

Solució matricial: $TF = (KI - CDT)^{-1} \times (-G - KC \times TC - CDT \times TN)$ sent $CDT = DTC^{-1}$

Si TN son les temperatures a l' instant n, TF representen les temperatures a l' instant n+1.

Per determinar la següent iteració haurem de assignar TF a TN i continuar avaluant numèricament TF.

Desenvolupar l'equació per un node qualsevol i comprovar que s'obtenen els mateixos termes que quan calculem el producte matricial anterior.

3.6.4 Validesa del procediment matricial en el mètode implícit.

No és aplicable la solució matricial del mètode implícit, si les conductàncies K_{ji} , capacitats calorífiques C_i o be la generació, fossin dependents de la temperatura. En aquest cas les matrius CDT, KI, KC, i G serien funció de les temperatures desconegudes o incògnites. Per tant la solució matricial només l'aplicarem si les matrius CDT, KI, KC, i G son matrius constants durant tot el procés iteratiu.

3.6.5 Procediment amb l'HP (mètode implícit)

- 1) Escriure en paper les matrius generals esmentades a la pàgina 3 d'aquests apunts.
- 2) Per resoldre el mètode implícit fem servir les matrius KI, KC, G, TN, TC, CDT
- 3) Obrim cometes ' ' i escrivim $(KI-CDT)^{-1} \times (-G - KC \times TC - CDT \times TN)$ ENTER
'TF' STO
- 4) Comprovem que TN contingui totes les temperatures inicials
- 5) Polsem, TF (vermell) ➔ EVAL (o be \rightarrow num) i copiem els resultats al nostre full.
- 6) Polsem (blau) ↶ TN per assignar a TN l'últim valor calculat de TF que tenim a la pila.
- 7) Tornem a 5) per determinar una nova iteració.

3.6.6 Règim transitori: mètode de CRANK-NICOLSON (F=0,5)

Sigui F un factor de ponderació inferior a la unitat. En aquest mètode calculem la potència que rep el node i com la suma ponderada amb els factors F i $1-F$ de les potències tèrmiques calculades en funció de les temperatures de l'instant n i $n+1$ respectivament.

$$\left. \frac{\delta Q}{dt} \right|_i = F \left[\sum_{j=1}^{n_i} q_{j \rightarrow i}^{[n]} + (\dot{g}_i V_i)^{[n]} \right] + (1-F) \left[\sum_{j=1}^{n_i} q_{j \rightarrow i}^{[n+1]} + (\dot{g}_i V_i)^{[n+1]} \right]$$

A l'instant n totes les variables són conegudes, i per tant el primer claudàtor resultarà ser una constant en l'equació del node corresponent.

Si anomenem, $g_i^{[F]} = F (\dot{g}_i V_i)^{[n]} + (1-F) (\dot{g}_i V_i)^{[n+1]}$ $C_i^{[F]} = F C_i^{[n]} + (1-F) C_i^{[n+1]}$

L'equació del balanç per al node i resulta,

$$F \sum_{j=1}^{n_i} K_{ji}^{[n]} (T_j^{[n]} - T_i^{[n]}) + (1-F) \sum_{j=1}^{n_i} K_{ji}^{[n+1]} (T_j^{[n+1]} - T_i^{[n+1]}) + g_i^{[F]} = C_i^{[F]} \frac{T_i^{[n+1]} - T_i^{[n]}}{\Delta t}$$

Si considerem les mateixes hipòtesis que en el mètode implícit, o sigui que CDT, KI, KC, i G son matrius constants durant tot el procés iteratiu, obtenim,

$$F \sum_{j=1}^{n_i} K_{ji} (T_j^{[n]} - T_i^{[n]}) + (1-F) \sum_{j=1}^{n_i} K_{ji} (T_j^{[n+1]} - T_i^{[n+1]}) + g_i = C_i \frac{T_i^{[n+1]} - T_i^{[n]}}{\Delta t}$$

Desglossant els sumatoris de forma similar al realitzat en els apartats anteriors arribem a la solució matricial d'aquest mètode. Resulta un exercici interessant d'auto avaluació per l'alumne. Arribem a,

$$[(1-F) \times KI - CDT] \times TF = [-(F \times KI + CDT) \times TN - KC \times TC - G] \text{ sent } 0 < F < 1$$

$$TF = [(1-F) \times KI - CDT]^{-1} \times [-(F \times KI + CDT) \times TN - KC \times TC - G]$$

Si suposem $F=0,5$ el mètode s'anomena de CRANK-NICOLSON.
Els criteris de validesa són els mateixos que hem trobat pel mètode implícit.

3.6.7 Balanç global de potència

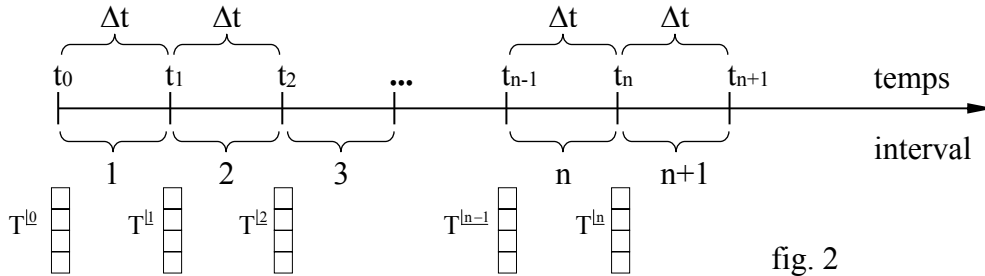


fig. 2

Quan a la matriu de conductàncies li sumem les seves files, i el resultat canviat de signe

$$-\sum_{j=1}^{n_i=10} K_{ij} \text{ el posem a la diagonal obtenim la matriu que anomenem [KI | KC]}$$

És evident que $q_{j \rightarrow i} = K_{ji} \times (T_j - T_i)$ i $q_{i \rightarrow j} = K_{ij} \times (T_i - T_j)$ de forma que $q_{j \rightarrow i} = -q_{i \rightarrow j}$

Escrivim l'equació del node "i" corresponent a l'interval n+1 (de t_n a t_{n+1}) de l'examen numèric del 23/11/2002, emprant el mètode explícit,

$$\sum_{j=1}^{n_i=10} K_{ij} (T_j^{ln} - T_i^{ln}) + g_i = C_i \frac{T_i^{ln+1} - T_i^{ln}}{\Delta t} \quad \text{desglossem les potències corresponent als nodes de}$$

contorn de la resta de nodes,

$$\sum_{j=1}^{n_i=8} K_{ij} (T_j^{ln} - T_i^{ln}) + K_{i9} (T_9^{ln} - T_i^{ln}) + K_{i-10} (T_{10}^{ln} - T_i^{ln}) + g_i = C_i \frac{T_i^{ln+1} - T_i^{ln}}{\Delta t} \quad \text{eq. del node "i"}$$

Sumen les $n_i=8$ equacions (tots els nodes incògnites), i obtenim el balanç global de potències (tota la peça) a l'interval n+1 (de t_n a t_{n+1}),

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n_i=8} \left[\sum_{j=1}^{n_i=8} K_{ij} (T_j^{ln} - T_i^{ln}) \right]}_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_i=8} K_{i9} (T_9^{ln} - T_i^{ln})}_{q_{\text{bloc}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_i=8} K_{i-10} (T_{10}^{ln} - T_i^{ln})}_{q_{\text{aigua}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_i=8} g_i}_{q_{\text{gen}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_i=8} C_i \frac{T_i^{ln+1} - T_i^{ln}}{\Delta t}}_{q_{\text{emmagatzemada}}} \quad (W)$$

Que el primer terme sigui nul es dedueix del fet que sempre que apareix a l'equació del node "i" el terme de potència $q_{j \rightarrow i}$ també apareix a l'equació del node "j" el terme de potència $q_{i \rightarrow j}$ sent evidentment $q_{j \rightarrow i} = -q_{i \rightarrow j}$ de forma que la seva suma val 0. Per tant, al fer la suma global per tota la peça, només **NO** s'anul·len els termes de potència amb el contorn i la generació, que abans hem considerat separatament.

3.6.8 Balanç global d'energia acumulada

Per facilitar el raonament, ens cenyirem a l'examen proposat el 23/11/2002 i calcularem les energies acumulades en els dos primers intervals de temps. L'energia (J) involucrada en el

primer interval de temps per tota la peça $\left(\sum_{i=1}^{ni=8} \dots \right)$ val, *Primer interval*,

$$\sum_{i=1}^{n_i=8} \left[\Delta t \sum_{j=1}^{n_i=8} K_{ij} (T_j^{l0} - T_i^{l0}) \right] + \sum_{i=1}^{n_i=8} \Delta t K_{i9} (T_9^{l0} - T_i^{l0}) + \sum_{i=1}^{n_i=8} \Delta t K_{i-10} (T_{10}^{l0} - T_i^{l0}) + \sum_{i=1}^{n_i=8} \Delta t g_i = \sum_{i=1}^{n_i=8} C_i (T_i^{l1} - T_i^{l0})$$

Segon interval,

$$\sum_{i=1}^{n_i=8} \left[\Delta t \sum_{j=1}^{n_i=8} K_{ij} (T_j^{l1} - T_i^{l1}) \right] + \sum_{i=1}^{n_i=8} \Delta t K_{i9} (T_9^{l1} - T_i^{l1}) + \sum_{i=1}^{n_i=8} \Delta t K_{i-10} (T_{10}^{l1} - T_i^{l1}) + \sum_{i=1}^{n_i=8} \Delta t g_i = \sum_{i=1}^{n_i=8} C_i (T_i^{l2} - T_i^{l1})$$

Si sumem els termes no nuls de les dos equacions anteriors, i ho escrivim amb sumatoris, resulta,

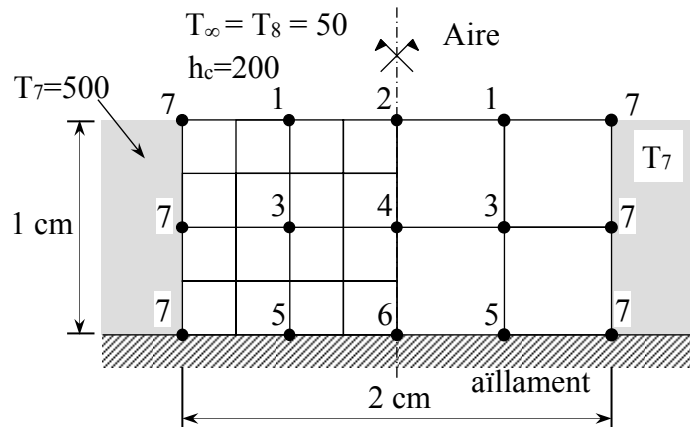
$$\underbrace{\sum_{k=0}^1 \sum_{i=1}^{n_i=8} \Delta t K_{i9} (T_9^{lk} - T_i^{lk})}_{E_{\text{bloc}}} + \underbrace{\sum_{k=0}^1 \sum_{i=1}^{n_i=8} \Delta t K_{i-10} (T_{10}^{lk} - T_i^{lk})}_{E_{\text{aigua}}} + \underbrace{\sum_{k=0}^1 \sum_{i=1}^{n_i=8} \Delta t g_i}_{E_{\text{gen}}} = \underbrace{\sum_{k=0}^1 \sum_{i=1}^{n_i=8} C_i (T_i^{k+1} - T_i^k)}_{E_{\text{emmagatzemada}}}$$

Si volem considerar n intervals de temps, aleshores l'índex k hauria de variar de 0 a n-1. Si consideréssim el mètode implícit el procediment és similar, però aleshores caldria considerar les temperatures que apareixen al primer membre a l'instant n+1.

3.7 EXERCICIS RESOLTS (amb mètodes matricials)

Exercici 1: tira ceràmica envoltada d'un bloc metàl·lic (transitori, mètode explícit)

Una tira ceràmica ($\lambda=3$, $\rho=1600$, $c=800$ S.I.) de 1×2 cm s'interposa entre dos blocs metàl·lics que es mantenen a $T_{\text{bloc}}=500$ °C. La part inferior de la ceràmica es pot considerar ben aïllada. La part superior s'exposa a aire a 50 °C en convecció forçada $h_{\text{aire}}=200$ W/(m²K). En l'instant $t=0$ el material ceràmic es troba a 500 °C



- Determini el interval de temps mínim que garanteixi l'estabilitat (mètode explícit) i faci servir en aquest exercici un interval de temps $\Delta t=2$ segons. Emprant el mètode explícit trobar per $t=12$ s (regim transitori),
- Les temperatures de tots els nodes
- Balanç de potències al segon interval de temps.
- El balanç de calor de tota la peça durant els 6 intervals de temps. ($\Delta t=2$ s)

Procediment de resolució:

En un principi cal preparar la matriu K de conductàncies, la suma de les seves files, el vector de volums, de capacitats calorífiques, de generació, i un vector per determinar el màxim interval de temps que podem fer servir en el mètode explícit.

	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum_{j=1}^{10} K_{ij}$	V_i	C_i	$\frac{C_i}{\sum_{j=1}^{10} K_{ij}}$	g_i
1	0	✓	✓	0	0	0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	0
2	✓	0	0	✓	0	0	0	✓	✓	✓	✓	✓	0
3	✓	0	0	✓	✓	0	✓	0	✓	✓	✓	✓	0
4	0	✓	✓	0	0	✓	0	0	✓	✓	✓	✓	0
5	0	0	✓	0	0	✓	✓	0	✓	✓	✓	✓	0
6	0	0	0	✓	✓	0	0	0	✓	✓	✓	✓	0

K

Ara posem la columna $\sum_{j=1}^{10} K_{ij}$ canviada de signe a la diagonal de la submatriu de 6x6 i obtenim

les matriu KI i KC . Prenem el valor mínim de la penúltima columna. Sabem que el nostre Δt haurà de ser menor que aquest valor mínim perquè la solució sigui matemàticament estable. A l'enunciat ens fixen el $\Delta t=2$ s i al ser menor al valor mínim, sabem que el mètode serà estable.

Amb el $\Delta t=2$ s i amb les capacitats calorífiques de cada node $C_i = \rho_i V_i c_i$ podem determinar la matriu DTC següent,

	1	2	3	4	5	6
1	$\Delta t/C_1$	0	0	0	0	0
2	0	$\Delta t/C_2$	0	0	0	0
3	0	0	$\Delta t/C_3$	0	0	0
4	0	0	0	$\Delta t/C_4$	0	0
5	0	0	0	0	$\Delta t/C_5$	0
6	0	0	0	0	0	$\Delta t/C_6$

DTC matriu de 6x6, (amb l'HP la podem crear amb MTH MATR MAKE 6 IDN 'DTC' STO)

Expressió matricial del mètode explícit: $TF = TN + DTC \times (KI \times TN + KC \times TC + G)$

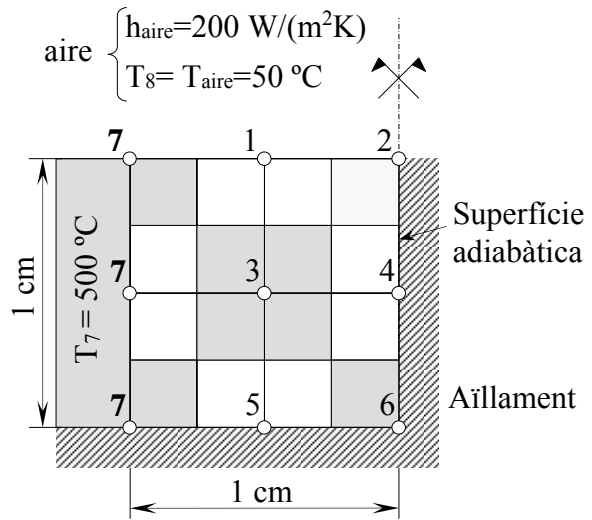
Amb l'HP escriuríem 'TF=TN+DTCx(KIxTN+KCxTC+G)' 'TF' STO
 Avaluem numèricament 'TF' i assignem el seu valor a TN per tornar a iterar.

Per la primera iteració TN es un vector columna que val 500 a totes les seves 6 posicions, es el vector inicial. Si feu l'avaluació numèrica, trobareu TF que seran les temperatures del final del primer interval, o sigui obtindrem el vector T_i^{l1} sent $i=1,2,..6$

Ara haurem d'assignar aquest vector TF al vector TN i tornarem a avaluar l'expressió matricial, i trobarem així, el vector T_i^{l2} sent $i=1,2,..6$ del final del segon interval.

Solució matricial detallada:

Al tenir un pla de simetria, ens quedem amb la meitat de la peça. Tenim per tant sis nodes incògnites 1, 2, 3, 4, 5 i 6, i dos nodes de contorn, el bloc 7 i l'aire 8 de temperatura coneguda.



Dades:

Δx	0,005	m
Δy	0,005	m
Δz	1	m
Δt	2	s
h_{aire}	200	W/(m ² ·K)

n_i	6	incògnites
n_c	2	contorn
n_{iter}	6	iteracions

$T_7 = T_{bloc}$	500	°C
$T_8 = T_{aire}$	50	°C
$T_{inicial} = T_{bloc}$	500	°C

λ	3	W/(m·K)
ρ	1600	kg/m ³
c_p	800	J/(kg K)

1) Determinem la matriu de conductàncies K (matriu de 6×8)

Només calculem les conductàncies $K_{i,j}$ quan $i < j$ (per damunt de la diagonal), després simetritzem la submatriu de 6×6 .

Conductàncies dels nodes incògnites sense considerar els nodes de contorn:

$$K_{1,2} = \frac{\lambda \frac{\Delta y}{2} \Delta z}{\Delta x}, \quad K_{1,3} = \frac{\lambda \Delta x \Delta z}{\Delta y}, \quad K_{2,4} = \frac{K_{1,3}}{2}, \quad K_{3,4} = 2 K_{1,2}$$

$$K_{3,5} = K_{1,3}, \quad K_{4,6} = K_{2,4}, \quad K_{5,6} = K_{1,2}$$

Conductàncies amb els nodes de contorn 7 (bloc) i 8 (aire)

$$K_{1,8} = h_{aire} \Delta x \Delta z, \quad K_{1,7} = K_{1,2}, \quad K_{3,7} = 2 K_{1,2}, \quad K_{5,7} = 2 K_{1,2}, \quad K_{2,8} = h_{aire} \frac{\Delta x}{2} \Delta z$$

Obtenim la matriu incompleta,

$$K := \left(\begin{array}{l} A \leftarrow K \\ \text{for } i \in 1..n_i \\ \quad \text{for } j \in i..n_i \\ \quad \quad \text{var} \leftarrow A_{i,j} \\ \quad \quad A_{j,i} \leftarrow \text{var} \\ A \end{array} \right)$$

$$K_{provisional} = \begin{bmatrix} 0 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Simetritzem ara la submatriu quadrada de 6×6

Primer assignem la matriu K a la matriu local A i després simetritzem. Obtenim així la matriu completa K de conductàncies. En una matriu de petites dimensions, es faria manualment.

Matriu completa de conductàncies: $K = \begin{bmatrix} 0 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 1 \\ 1,5 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & 1,5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Si multipliquem aquesta matriu K per un vector columna unitari, obtenim un vector columna SK amb la suma de les files de la matriu K , com es mostra a continuació,

$$SK = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 1 \\ 1,5 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & 1,5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_K \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3,5 \\ 12 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ara posem aquest vector de sumes a la diagonal d'una matriu quadrada de 6×6 fent servir la funció matricial “diag()”

$$SK = \text{diag}(SK) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Extraiem de la matriu K les submatrius $KI_{provisional}$ de 6×6 i KC de 6×2

$$KI_{provisional} = \begin{bmatrix} 0 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & 1,5 & 0 \end{bmatrix} \text{ (falta la diagonal)} \quad KC = \begin{bmatrix} 1,5 & 1 \\ 0 & 0,5 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1,5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A la matriu $KI_{provisional}$ li restem el vector SK de les sumes de les files de la matriu K i obtenim la matriu KI definitiva.

$$KI = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & 1,5 & 0 \end{bmatrix}}_{KI_{provisional}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{SK} = \underbrace{\begin{bmatrix} -7 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 & -3,5 & 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -12 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1,5 & 3 & -6 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -6 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & 1,5 & -3 \end{bmatrix}}_{KI_{definitiva}}$$

2) Calculem els volums dels nodes

$$V_1 = \Delta x \frac{\Delta y}{2} \Delta z \quad ; \quad V_2 = \frac{V_1}{2} \quad ; \quad V_3 = 2V_1 \quad ; \quad V_4 = 2V_2 \quad ; \quad V_5 = V_1 \quad ; \quad V_6 = V_2$$

$$i=1,2,\dots,6 \quad , \quad C_i = \rho V_i c_p \quad , \quad DT_i = \frac{C_i}{\sum_{j=1}^{10} K_{ij}} \quad , \quad G_i = 0 \quad , \quad TN_i = 0$$

Obtenim les següents matrius,

$$V = \begin{bmatrix} 1,25 \times 10^{-5} \\ 6,25 \times 10^{-6} \\ 2,5 \times 10^{-5} \\ 1,25 \times 10^{-5} \\ 1,25 \times 10^{-5} \\ 6,25 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 32 \\ 16 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix} \quad DT = \begin{bmatrix} 2,3 \\ 2,3 \\ 2,7 \\ 2,7 \\ 2,7 \\ 2,7 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad TN0 = \begin{bmatrix} 500 \\ 500 \\ 500 \\ 500 \\ 500 \\ 500 \end{bmatrix} \quad TC = \begin{bmatrix} 500 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Observeu que podeu obtenir la matriu $DT = SK^{-1} \times C$ (SK és la matriu anterior de 6×6)
 TN0 es el vector de temperatures inicials. Assignem TN0 a TN, $TN = TN0$

3) Trobem el Δt màxim admissible perquè el càlcul sigui estable.

$$\Delta t_{\text{màx. admissible}} = \min(DT) = 2,3 \text{ s}$$

L'enunciat ens fixa el interval de temps en 2 segons, $\Delta t = 2 \text{ s}$ ($< \Delta t_{\text{màx. admissible}}$)

4) Temperatures del transitori (6 intervals de temps)

Troben la matriu CDT: es una matriu diagonal amb els termes, $CDT_{i,i} = \frac{C_i}{\Delta t} = \frac{\rho V_i c_p}{\Delta t}$

(la notació CDT vol recordar C dividit per DT)

Matricialment $CDT = \text{diag}(C) \times \left(\frac{1}{\Delta t}\right)$ La funció matricial “diag()” converteix un vector

columna de 6 elements en una matriu quadrada de 6×6 que te els 6 elements a la diagonal.

Recordem que $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ o sigui la inversa d'una matriu diagonal es troba

fent els inversos dels elements de la diagonal.

D'aquesta forma obtenim $DTC = CDT^{-1}$ (la notació DTC vol recordar DT dividit per C)

Troblem les temperatures per el mètode explícit,

$$TF = TN + DTC \cdot (KI \cdot TN + KC \cdot TC + G)$$

$$TN1 = TF$$

$$TN = TN1$$

$$TF = TN + DTC \cdot (KI \cdot TN + KC \cdot TC + G)$$

$$TN2 = TF$$

$$TN = TN2$$

$$TF = TN + DTC \cdot (KI \cdot TN + KC \cdot TC + G)$$

$$TN3 = TF$$

$$TN = TN3$$

$$TF = TN + DTC \cdot (KI \cdot TN + KC \cdot TC + G)$$

$$TN4 = TF$$

$$TN = TN4$$

$$TF = TN + DTC \cdot (KI \cdot TN + KC \cdot TC + G)$$

$$TN5 = TF$$

$$TN = TN5$$

$$TF = TN + DTC \cdot (KI \cdot TN + KC \cdot TC + G)$$

$$TN6 = TF$$

$$TN = TN6 \quad \text{temperatura al final del 6e interval}$$

Temperatures resultants,

$$TN0^T = [500 \quad 500 \quad 500 \quad 500 \quad 500 \quad 500] \quad \text{trasposta del vector de temperatures inicials}$$

$$TN1^T = [443,75 \quad 443,75 \quad 500 \quad 500 \quad 500 \quad 500]$$

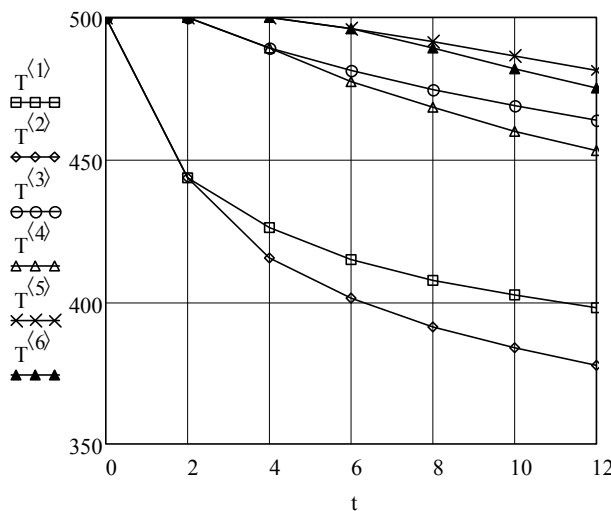
$$TN2^T = [426,17 \quad 415,63 \quad 489,45 \quad 489,45 \quad 500 \quad 500]$$

$$TN3^T = [414,75 \quad 401,56 \quad 481,54 \quad 477,59 \quad 496,04 \quad 496,04]$$

$$TN4^T = [407,71 \quad 391,07 \quad 474,46 \quad 468,28 \quad 491,35 \quad 489,12]$$

$$TN5^T = [402,21 \quad 383,63 \quad 468,74 \quad 460,03 \quad 486,22 \quad 482,14]$$

$$TN6^T = [397,98 \quad 377,54 \quad 463,77 \quad 453,12 \quad 481,48 \quad 475,38]$$



Òbviament comprovem que el node 2 és el que es refreda més ràpidament, al ser un node a la superfície sotmès a una forta convecció forçada ($h_{aire}=200$)

I els nodes que es mantenen més calents son els nodes 5 i 6. El 5 perquè es troba just al costat del bloc metàl·lic i el 6 perquè es troba conductivament més aïllat.

5) Potència tèrmica bescanviada amb l'aire i el bloc metàl·lic al segon l'interval (n=2) (considerar tota la peça)

$$q_{aire} = 2 \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 8] \times (T_{aire} - TN1[i]) = -1181,25 \quad i = \text{subindex node} \quad ;$$

$$q_{bloc} = 2 \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 7] \times (T_{bloc} - TN1[i]) = 168,8$$

$$q_{gen} = 2 \sum_{i=1}^{n_i=6} G[i] = 0 \quad ; \quad q_{emmagtz} = 2 \sum_{i=1}^{n_i=6} \left(C[i] \times \frac{TN2[i] - TN1[i]}{\Delta t} \right) = -1012,5$$

$$\text{quadre_q} = q_{aire} + q_{bloc} + q_{gen} - q_{emmagtz} = 0$$

6) Determinem per els 6 primers intervals l'energia tèrmica total bescanviada amb l'aigua, amb el bloc metàl·lic i l'emmagatzemada. [J] (tota la peça) (W)

$$E_{aigua} = 2 \times \left[\underbrace{\Delta t \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 8] \times (T_{aire} - TN0[i])}_{1^\circ \text{ interval}} + \underbrace{\Delta t \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 8] \times (T_{aire} - TN1[i])}_{2^\circ \text{ interval}} + \dots \right. \\ \left. + \underbrace{\Delta t \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 8] \times (T_{aire} - TN2[i])}_{3^\circ \text{ interval}} + \underbrace{\Delta t \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 8] \times (T_{aire} - TN3[i])}_{4^\circ \text{ interval}} + \dots \right. \\ \left. + \underbrace{\Delta t \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 8] \times (T_{aire} - TN4[i])}_{5^\circ \text{ interval}} + \underbrace{\Delta t \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 8] \times (T_{aire} - TN5[i])}_{6^\circ \text{ interval}} + \dots \right] = -13649,7$$

$$E_{gen} = 2 \left(6 \cdot \Delta t \sum_{i=1}^{n_i=6} G[i] \right) = 0 \quad \Delta E_{emmagtz} = \sum_{i=1}^{n_i=6} C[i] \times (TN6[i] - T_{inicial}) = -10029,2$$

$$E_{bloc} = 2 \times \left[\begin{aligned} & \underbrace{\Delta t \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 7] \times (T_{bloc} - TN 0[i])}_{1^\circ \text{ interval}} + \underbrace{\Delta t \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 7] \times (T_{bloc} - TN 1[i])}_{2^\circ \text{ interval}} + \dots \\ & + \underbrace{\Delta t \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 7] \times (T_{bloc} - TN 2[i])}_{3^\circ \text{ interval}} + \underbrace{\Delta t \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 7] \times (T_{bloc} - TN 3[i])}_{4^\circ \text{ interval}} + \dots \\ & + \underbrace{\Delta t \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 7] \times (T_{bloc} - TN 4[i])}_{5^\circ \text{ interval}} + \underbrace{\Delta t \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 7] \times (T_{bloc} - TN 5[i])}_{6^\circ \text{ interval}} + \dots \end{aligned} \right] = 3620,4$$

quadre_E = E_aire + E_bloc + E_gen - ΔE_emmagatz = 0

7) Determinem l'estat estacionari (per un mètode directe)

$$T_{est} = KI^{-1} (-G - KC \cdot TC)$$

$$T_{est}^T = [373,1 \quad 342,4 \quad 432,7 \quad 409,2 \quad 448,6 \quad 428,9] \text{ (}^\circ\text{C)}$$

Potències dissipades per tota la peça en regim estacionari [W]:

$$q_{aire} = 2 \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 8] \times (T_{aire} - T_{est}[i]) = -938,63$$

$$q_{bloc} = 2 \sum_{i=1}^{n_i=6} K[i, 7] \times (T_{bloc} - T_{est}[i]) = +938,63$$

$$q_{gen} = 2 \sum_{i=1}^{n_i=6} G[i] = 0 \quad ; \quad \text{quadre}_q = q_{aire} + q_{bloc} + q_{gen} = 0$$

Exercici 2: mètodes numèrics (examen 23/11/2002) (mètode explícit)

Es vol estudiar l'evolució en el temps d'una peça sòlida semicilíndrica ($D=60 \text{ mm}$) encastada en un bloc metàl·lic i sobre una base aïllant que per simplificar el problema considerem perfecta. Al instant $t = 0$ la temperatura de tota la peça és T_0 i de forma sobtada es sotmet la peça a una corrent d'aigua a T_{aigua} (node 10) en convecció forçada.

Per el node 4 de conductivitat tèrmica λ_4 hi circula una corrent elèctrica tal que podem considerar una generació de potència tèrmica (efecte Joule) per aquest node de g_4 (W) per metre de fondària.

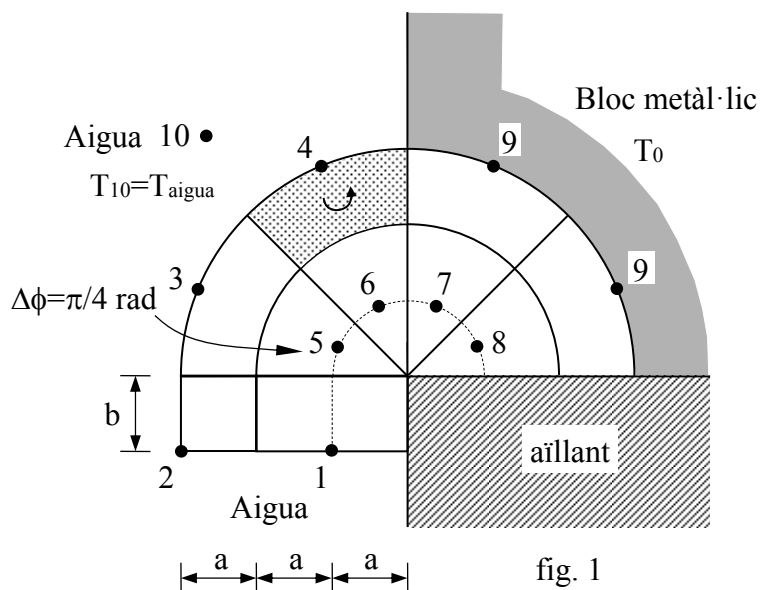


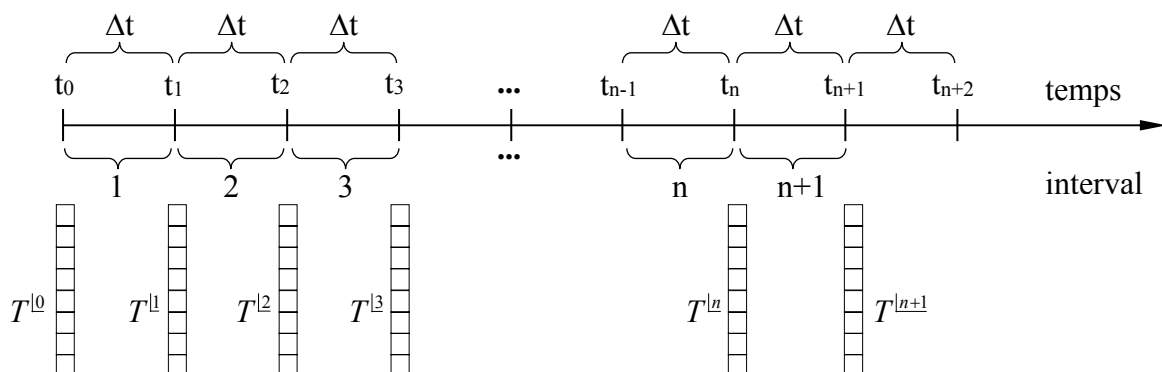
fig. 1

Determinar aplicant el mètode explícit:

- 1) L'expressió algebraica i numèrica de les conductàncies del node 4 amb els seus veïns
- 2) Plantejar algebraica i numèricament pel primer interval de temps l'equació del balanç de calor del node 4. (amb el Δt donat a les dades)
- 3) L'expressió del Δt màxim admissible que garanteixi un càlcul estable del règim transitori.
- 4) Emprant el Δt donat a les dades trobar la distribució de temperatures en °C del règim transitori. T^{l1} , T^{l2} , T^{l3} corresponent als instants t_1 , t_2 , t_3 (veure fig. 2). Expliqui els detalls de la metodologia emprada.
- 5) Pel segon interval de temps, tot explicant el procediment emprat, calcular la potència tèrmica (W) bescanviada amb l'aigua, amb el bloc metàl·lic, la generada i l'emmagatzemada a la peça. Verificar en aquest interval de temps el quadre de potències de tota la peça (que equival a sumar les equacions dels 8 nodes) (el node 9 també cedeix calor al node 4)
- 6) Trobar pels dos primers intervals de temps l'energia tèrmica (J) total bescanviada amb l'aigua, amb el bloc metàl·lic, la generada i l'emmagatzemada a tota la peça.
- 7) Trobar la distribució de temperatures (°C) en règim estacionari de tots els nodes per un mètode directe. Expliqui els detalls de la metodologia emprada.

Dades:

Volums (m^3): $V_1=2 \cdot 10^{-4}$, $V_2=1 \cdot 10^{-4}$, $V_3=1,963 \cdot 10^{-4}$, $V_5=1,571 \cdot 10^{-4}$
 $\lambda_4 = 160 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$; $\lambda_i = 0,5 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ $\forall i \neq 4$ (conductivitat tèrmica)
 $\forall i \quad c_p = 850 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ (calor específica) ; $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ (densitat)
 $\Delta\phi = \pi/4 \text{ rad}$; $\Delta z = 1 \text{ m}$; $a = b = 0,010 \text{ m}$; Generació del node 4 , $g_4 = 100 \text{ W}$
 Considerar per l'aigua en convecció forçada un coeficient de convecció $h_c=50 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$
 $T_0 = 200 \text{ }^\circ\text{C}$ es la temperatura de tota la peça per $t = 0$; $T_{10}=T_{\text{aigua}}=20 \text{ }^\circ\text{C}$
 $\Delta t = 10 \text{ s}$ per calcular el transitori. Comptador de intervals $n = 1,2,3, \dots$



Nota: lliurar amb el vostre examen el full de resultats tot indicant el nom, cognom i permutació. S'avaluaran només els conceptes que s'expliquin amb detall.

1) Dades: (solució matricial)

$$\begin{array}{lllll}
 \lambda_4 = 160 & \lambda = 0,5 & g_4 = 100 & \Delta t = 10 & h_c = 50 \\
 a = 0,010 & b = 0,010 & \Delta z = 1 & \rho = 2700 & c_p = 850 \\
 \Delta \phi = \pi/4 & n_i = 8 & n_c = 2 & n_t = n_i + n_c & \text{Niter} = 100 \\
 T_0 = 200 & T_\infty = 20 & T_{\text{inicial}} = T_0 & \text{(temp. inicial per } t=0 \text{ s)} &
 \end{array}$$

2) Conductàncies de conducció: (només calculem $K_{i,j}$ quan $i < j$, després simetritzem)

$$\begin{array}{lll}
 K_{1,2} = \frac{\lambda b \Delta z}{2a} & K_{1,5} = \frac{\lambda 2a \Delta z}{b + \frac{\pi}{8} a} & K_{2,3} = \frac{\lambda a \Delta z}{b + \frac{\pi}{8} 3a} \\
 R_{3m} = \frac{\frac{\pi}{8} 3a}{\lambda a \Delta z} & R_{m4} = \frac{\frac{\pi}{8} 3a}{\lambda_4 a \Delta z} & K_{3,4} = \frac{1}{R_{3m} + R_{m4}} \quad ; \quad K_{3,5} = \frac{\lambda \frac{\pi}{4} 2a \Delta z}{2a} \\
 R_{4m} = \frac{a}{\lambda_4 2a \frac{\pi}{4} \Delta z} & R_{m6} = \frac{a}{\lambda 2a \frac{\pi}{4} \Delta z} & K_{4,6} = \frac{1}{R_{4m} + R_{m6}}
 \end{array}$$

(el node 9 es el bloc metàl·lic) $K_{4,9} = K_{3,4}$ $K_{5,6} = \frac{\lambda 2a \Delta z}{\frac{\pi}{4} a}$ $K_{6,7} = K_{5,6}$

$$K_{7,8} = K_{5,6} \quad K_{7,9} = K_{3,5} \quad K_{8,9} = K_{3,5}$$

2bis) Conductàncies de convecció (el node 10 es l'aigua)

$$K_{1,10} = h_c 2a \Delta z \quad , \quad K_{2,10} = h_c (a + b) \Delta z \quad , \quad K_{3,10} = h_c \left(\frac{\pi}{4} 3a \right) \Delta z \quad , \quad K_{4,10} = h_c \left(\frac{\pi}{4} 3a \right) \Delta z$$

Aquestes conductàncies son constants al considerar en aquest exercici un coeficient de convecció constant. En general h_c és funció de la temperatura. Aleshores ja no seria molt adient emprar el mètode matricial ja que hauríem d'anar recalculant i actualitzant aquestes conductàncies a les matrius KI i KC.

$$K := \left(\begin{array}{c} A \leftarrow K \\ \text{for } i \in 1..n_i \\ \quad \text{for } j \in i..n_i \\ \quad \quad \text{var} \leftarrow A_{i,j} \\ \quad \quad A_{j,i} \leftarrow \text{var} \\ A \end{array} \right)$$

Simetritzem ara la submatriu KI quadrada de 8 per 8

Primer assignem la matriu K a la matriu local A i després simetritzem.

Matriu total de conductàncies (inclou les conductàncies amb el contorn, nodes 9 i 10):

K =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.25	0	0	0.72	0	0	0	0	1
2	0.25	0	0.23	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0.23	0	0.42	0.39	0	0	0	0	1.18
4	0	0	0.42	0	0	0.78	0	0	0.42	1.18
5	0.72	0	0.39	0	0	1.27	0	0	0	0
6	0	0	0	0.78	1.27	0	1.27	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1.27	0	1.27	0.39	0
8	0	0	0	0	0	0	1.27	0	0.39	0

A la fila 4, per exemple, veiem totes les conductàncies del node 4 amb tots els seus veïns (el 3 i el 6) i amb els nodes 9 i 10 de contorn.

Ara sumem cada fila i posem el resultat canviat de signe a la diagonal de la submatriu de 8x8. Guardarem aquest resultat al vector SUM_K.

$$SUM_K[i] = \sum_{j=1}^{n_i=10} K[i,j] \quad K[i,i] = -SUM_K[i]$$

$$SUM_K^T = (1.968 \quad 1.48 \quad 2.223 \quad 2.807 \quad 2.384 \quad 3.329 \quad 2.939 \quad 1.666)$$

A continuació es mostra la matriu de conductàncies K amb les diagonals plenes (suma de cada fila canviada de signe).

En realitat la següent matriu és la [KI | KC] solapades. I només es diferencia de la matriu de conductàncies K en que estan plens els termes de la diagonal.

K =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1.968	0.25	0	0	0.718	0	0	0	0	1
2	0.25	-1.48	0.23	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0.23	-2.223	0.423	0.393	0	0	0	0	1.178
4	0	0	0.423	-2.807	0	0.783	0	0	0.423	1.178
5	0.718	0	0.393	0	-2.384	1.273	0	0	0	0
6	0	0	0	0.783	1.273	-3.329	1.273	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1.273	-2.939	1.273	0.393	0
8	0	0	0	0	0	0	1.273	-1.666	0.393	0

Càlcul dels volums i capacitats calorífiques,

$$\begin{aligned}
 \underline{V}_1 &:= b \cdot 2 \cdot a \cdot \Delta z & \underline{V}_2 &:= \frac{V_1}{2} & \underline{V}_3 &:= \frac{\pi \cdot (9 \cdot a^2 - 4 \cdot a^2)}{8} & \underline{V}_4 &:= V_3 \\
 \underline{V}_5 &:= \frac{\pi \cdot 4 \cdot a^2}{8} & \underline{V}_6 &:= V_5 & \underline{V}_7 &:= V_5 & \underline{V}_8 &:= V_5
 \end{aligned}$$

A partir d'ara suposeu que l'índex "i" varia de 1 a 8, el nombre total de nodes amb temperatura incògnita.

$$C[i] = \rho V[i] c_p \quad ; \quad DT[i] = \frac{C[i]}{SUM_K[i]} \quad ; \quad G[i] = 0.0$$

El node 4 és l'únic amb generació de potència tèrmica, $G[4] = 100$ $T_{inicial} = 200$

Vector TC de temperatures de contorn

$$TC[1]=T_0$$

$$TC[2]= T_\infty$$

Inicialitzem el vector TN de temperatures

$$TN[i]=T_{inicial} \quad (i=1,2,\dots,n_i=8)$$

$$V = \begin{pmatrix} 2 \times 10^{-4} \\ 1 \times 10^{-4} \\ 1.963 \times 10^{-4} \\ 1.963 \times 10^{-4} \\ 1.571 \times 10^{-4} \\ 1.571 \times 10^{-4} \\ 1.571 \times 10^{-4} \\ 1.571 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 459 \\ 229.5 \\ 450.6 \\ 450.6 \\ 360.5 \\ 360.5 \\ 360.5 \\ 360.5 \end{pmatrix} \quad DT = \begin{pmatrix} 233.2 \\ 155.1 \\ 202.7 \\ 160.5 \\ 151.2 \\ 108.3 \\ 122.7 \\ 216.4 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad TN = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} \quad TC = \begin{pmatrix} 200 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Guardem el vector inicial de temperatures per el càlcul posterior de potències, $TN_0=TN$
 Ara assignem la submatriu de 8×8 de la matriu K a la matriu KI dels nodes incògnites i la submatriu de 8×2 a la matriu KC del nodes de contorn.

$$KI = \begin{pmatrix} -1.968 & 0.25 & 0 & 0 & 0.718 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & -1.48 & 0.23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.23 & -2.223 & 0.423 & 0.393 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.423 & -2.807 & 0 & 0.783 & 0 & 0 \\ 0.718 & 0 & 0.393 & 0 & -2.384 & 1.273 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.783 & 1.273 & -3.329 & 1.273 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.273 & -2.939 & 1.273 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.273 & -1.666 \end{pmatrix} \quad KC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1.178 \\ 0.423 & 1.178 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.393 & 0 \\ 0.393 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Trobem el Δt màxim admissible perquè el càlcul sigui estable:

$$\Delta t_{\max_admissible} = \min(DT) \quad \Delta t_{\max_admissible} = 108,3$$

L'enunciat ens fixa $\Delta t=10$ s ($< \Delta t_{\max}!$) el que ens garanteix l'estabilitat matemàtica.

4) Resolem l'estat transitori

Determinem la matriu DTC:

$$DTC[i,i] = \frac{\Delta t}{C[i]} \quad i = 1, 2, \dots, n_i = 8$$

$$DTC = \begin{pmatrix} 0.022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.044 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.022 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.028 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.028 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.028 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.028 \end{pmatrix}$$

$$TF = TN + DTC \cdot (KI \cdot TN + KC \cdot TC + G)$$

$$TN1 = TF$$

$$TN = TN1$$

$$TF = TN + DTC \cdot (KI \cdot TN + KC \cdot TC + G)$$

$$TN2 = TF$$

$$TN = TN2$$

$$TF = TN + DTC \cdot (KI \cdot TN + KC \cdot TC + G)$$

$$TN3 = TF$$

$$TN = TN3$$

Temperatures de l'estat transitori (3 intervals de temps)

$$TN0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} \quad TN1 = \begin{pmatrix} 196.1 \\ 192.2 \\ 195.3 \\ 197.5 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} \quad TN2 = \begin{pmatrix} 192.3 \\ 184.7 \\ 190.8 \\ 195.1 \\ 199.9 \\ 199.9 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} \quad TN3 = \begin{pmatrix} 188.6 \\ 177.7 \\ 186.4 \\ 192.9 \\ 199.6 \\ 199.8 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$$

5) Determinem la potència tèrmica bescanviada amb l'aigua i el bloc metàl·lic al segon interval (n=2):

$$q_{aigua} = \sum_{i=1}^{n_i=8} K[i,10] \times (T_{\infty} - TN1[i]) = -763,9 \quad ; \quad q_{bloc} = \sum_{i=1}^{n_i=8} K[i,9] \times (T_0 - TN1[i]) = 1,1$$

$$q_{gen} = \sum_{i=1}^{n_i=8} G[i] = 100 \quad ; \quad q_{emmagtz} = \sum_{i=1}^{n_i=8} \left(C[i] \times \frac{TN2[i] - TN1[i]}{\Delta t} \right) = -662,8$$

$$quadre_q = q_{aigua} + q_{bloc} + q_{gen} - q_{emmagtz} = 5,7 \times 10^{-13}$$

6) Determinem per els dos primers intervals l'energia tèrmica total bescanviada amb l'aigua, amb el bloc metàl·lic i l'emmagatzemada. [J]

$$E_{\text{aigua}} = \Delta t \underbrace{\sum_{i=1}^{n_i=8} K[i,10] \times (T_{\infty} - TN0[i])}_{\text{Primer interval}} + \Delta t \underbrace{\sum_{i=1}^{n_i=8} K[i,10] \times (T_{\infty} - TN1[i])}_{\text{Segon interval}} = -15479,9$$

$$E_{\text{bloc}} = \Delta t \underbrace{\sum_{i=1}^{n_i=8} K[i,9] \times (T_0 - TN0[i])}_{\text{Primer interval}} + \Delta t \underbrace{\sum_{i=1}^{n_i=8} K[i,9] \times (T_0 - TN1[i])}_{\text{Segon interval}} = 10,5$$

$$E_{\text{gen}} = 2 \Delta t \sum_{i=1}^{n_i=8} G[i] = 2 \cdot 10 \cdot 100 = 2000 \quad ; \quad \Delta E_{\text{emmagtz}} = \sum_{i=1}^{n_i=8} C[i] \times (TN2[i] - T_{\text{inicial}}) = -13469,4$$

$$\Delta E_{\text{emmagtz}} = \sum_{i=1}^{n_i=8} [C[i] \times (TN2[i] - T_{\text{inicial}})] = -13469,4$$

$$\text{quadre}_E = E_{\text{aigua}} + E_{\text{bloc}} + E_{\text{gen}} - \Delta E_{\text{emmagtz}} = 1,1 \times 10^{-11}$$

7) Determinem l'estat estacionari

$$T_{\text{est}} = KI^{-1}(-G - KC \cdot TC) = [43,8 \quad 28,5 \quad 49,4 \quad 113 \quad 81,3 \quad 112,4 \quad 143,3 \quad 156,7]$$

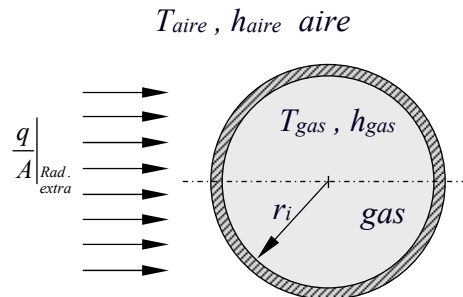
Potències dissipades per tota la peça en regim estacionari [W]:

$$q_{\text{aigua}} = \sum_{i=1}^{n_i=8} K[i,10] \times (T_{\infty} - T_{\text{est}}[i]) = -176,1 \quad ; \quad q_{\text{bloc}} = \sum_{i=1}^{n_i=8} K[i,9] \times (T_0 - T_{\text{est}}[i]) = 76,11$$

$$q_{\text{gen}} = \sum_{i=1}^{n_i=8} G[i] = 100 \quad ; \quad \text{quadre}_q = q_{\text{aigua}} + q_{\text{bloc}} + q_{\text{gen}} = -2,8 \times 10^{-14}$$

Exercici 3: mètodes numèrics (variant examen 29/04/2009) (mètode implícit)

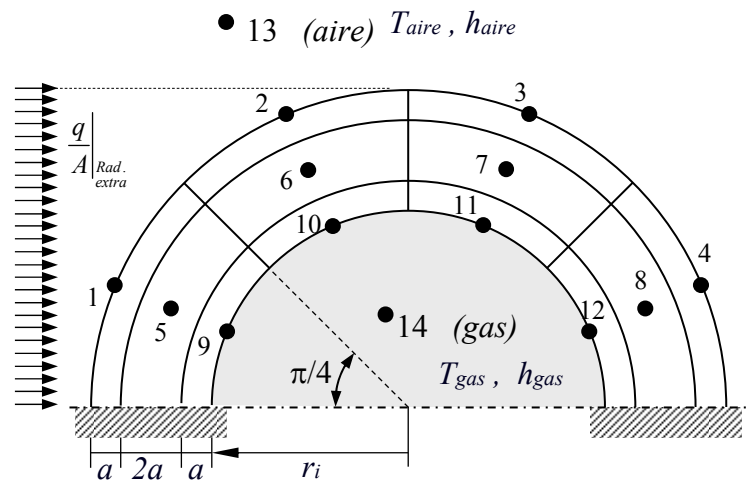
La figura mostra la secció d'una canonada de gran longitud que transporta un gas, que en una certa posició es troba a la temperatura T_{gas} , l'aire que l'envolta està a la temperatura T_{aire} i sobre ella incideix addicionalment un flux q/A de radiació extra. (negligim la radiació amb l'entorn)



Al incidir la radiació extra només per un costat es vol estudiar la variació de temperatures azimuthal i radial d'aquesta canonada.

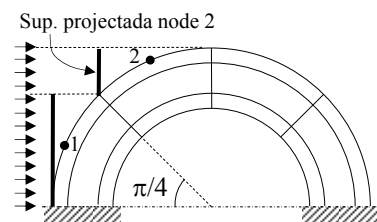
Aprofitant la simetria de la peça estudiarem l'evolució en el temps (3 intervals de temps) de les temperatures dels nodes indicats a la 2ª figura.

Al instant $t = 0$ la temperatura de tot el conducte és igual a la temperatura de l'aire (node 13) i de forma sobtada introduïm per el canal interior el gas a T_{gas} °C (node 14).

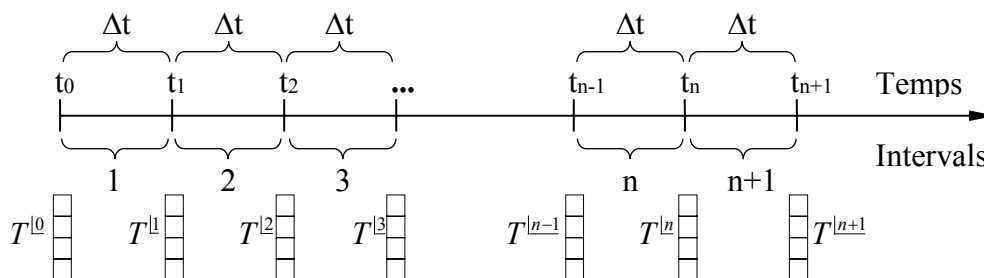


Considerem un Δz en el sentit normal al paper i suposem T_{gas} constant per tot el Δz . Quan determinem la potència bescanviada entre la canonada i el gas, comprovarem aquesta hipòtesi.

Només els nodes 1, i 2 reben la radiació extra. Per determinar la potència de radiació extra absorbida per els nodes 1 i 2 cal considerar l'àrea projectada d'aquest nodes en la direcció del flux com s'indica a la figura adjunta i l'absorbància corresponent.



A continuació indiquem la notació emprada per identificar les temperatures dels diferents intervals de temps.



Per determinar el transitori faci servir el comptador de intervals de temps $n = 1, 2, 3, \dots$

Dades:*(dominis 1,2,3...,12)*

$\Delta\varphi$	$\pi/4$	rad	(radi) r_i	0,040	m	λ	11	W/(m·K)
a	2	mm	h_{aire}	7	W/(m ² ·K)	ρ	7200	kg/m ³
Δz	0,1	m	h_{gas}	50	W/(m ² ·K)	c_p	500	J/(kg K)
q/A	5000	W/m ²	α	0,8	absorb.	$T_{13}=T_{aire}$	0	°C
Δt	60	s	$T_{inicial}=T_{13}$	0	°C	$T_{14}=T_{gas}$	80	°C

Determinar: *(mínim 3 xifres significatives, error màxim admissible $\pm 1\%$)*

- 1) *Expressió algebraica i valor numèric* de les conductàncies K_{1-2} , K_{1-5} i K_{1-13} , el volum V_2 , la capacitat calorífica C_2 i la potència de radiació extra absorbida, per el node 2 (unitats S.I.)
- 2) *Valor numèric* de les matrius KI, KC, V, C i G (adjuntar als fulls quadriculats)
- 3) Equació **algebraica** del balanç de potencia tèrmica del node 2 per el segon interval de temps emprant el mètode implícit.
- 4) Determinar l'interval de temps Δt màxim admissible que garanteixi un càlcul estable del regim transitori si féssim servir el **mètode explícit**

A partir d'ara faci servir el **MÈTODE IMPLÍCIT** amb el Δt facilitat a la taula de dades.

- 5) Trobar la distribució de temperatures en °C al final de cadascun dels tres primers intervals de temps T^{11} , T^{12} i T^{13} corresponents als instants Δt , $2\Delta t$ i $3\Delta t$ segons.
(T^{10} son les temperatures inicials o sigui iguals a les de l'aire)
- 6) Calculi l'energia tèrmica (J) bescanviada amb l'aire, amb el gas, la generada i l'emmagatzemada (*per tot el conducte*), en el tercer interval de temps. Verifiqui en aquest tercer interval de temps un quadre d'energies.
- 7) Temperatures T_i en °C de l'estat estacionari a partir de un mètode directe.
- 8) Per l'estat estacionari calculi la potencia tèrmica (W) bescanviada amb l'aire, amb el gas i la generada (*per tot el conducte*): (conveni de signes q és + quan la peça guanya potencia)
- 9) Determini en estat estacionari la potència azimuthal $q_{2\rightarrow 3} + q_{6\rightarrow 7} + q_{10\rightarrow 11}$ que es transfereix de la meitat esquerra a la meitat dreta *del mig conducte* que es mostra a la figura . Quina fracció representa aquesta potència azimuthal de la potència de radiació extra absorbida per el mig conducte (Δz !). Es negligible aquesta potència azimuthal amb les dades d'aquest enunciat ?
- 10) Si la velocitat del gas es igual a $u_{gas}=5$ m/s , la seva densitat es $\rho_{gas}=1,8$ kg/m³ i el seu calor específic a la temperatura T_{gas} es de $c_{p,gas}=1100$ J/(kg·K), determini la variació de temperatura del gas en el tram Δz facilitat a la primera taula. D'acord al resultat anterior, te algun suggeriment en relació al valor del Δz de l'enunciat, es acceptable, podem augmentarlo o es millor disminuir-lo ?

Full de resultats a omplir per l'alumne:

- 1) *Expressió algebraica i valor numèric* de: les conductàncies K_{1-2} , K_{1-5} i K_{1-13} , el volum V_2 del node 2, la capacitat calorífica C_2 del node 2 i la potència de radiació extra absorbida per el node 2. (unitats S.I.)

$$K_{1,2} = \frac{\lambda a \Delta z}{\frac{\pi}{4}(r_i + 4a)} = 0,05836 \quad K_{1,5} = \frac{\lambda \frac{\pi}{4}(r_i + 3a) \Delta z}{2a} = 9,9353 \quad K_{1,13} = h_{aire} \frac{\pi}{4}(r_i + 4a) \Delta z = 0,0264$$

$$V_2 = \frac{\pi}{8} [(r_i + 4a)^2 - (r_i + 3a)^2] \Delta z = 7,38274 \times 10^{-6} \quad C_2 = \rho V_2 c_p = 26,5779$$

$$\text{Pot. de rad. extra absorbida per el node 2} = G_2 = \frac{q}{A_{rad. extra}} \left(r_i + 4a \right) \left(1 - \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \Delta z \quad \alpha = 5,624 \text{ W}$$

- 2) **Valor numèric** de les matrius KI, KC, V, C i G (adjuntar als fulls quadriculats)
- 3) Equació **algebraica** (en funció de les variables) del balanç de potència tèrmica del node 2 per el segon interval de temps emprant el **mètode implícit**.

$$K_{12} (T_1^{l2} - T_2^{l2}) + K_{32} (T_3^{l2} - T_2^{l2}) + K_{62} (T_6^{l2} - T_2^{l2}) + K_{13-2} (T_{13}^{l2} - T_2^{l2}) + G_2 = C_2 \frac{(T_2^{l2} - T_2^{l1})}{\Delta t}$$

- 4) Determinar l'interval de temps màxim admissible que garanteixi un càlcul estable del regim transitori emprant el **mètode explícit**

$$\Delta t = 2,47478 \text{ s}$$

A partir d'ara el mètode considerat serà el **MÈTODE IMPLÍCIT** \longrightarrow

- 5) Trobar la distribució de temperatures **en °C** al final de cadascun dels tres primers intervals de temps T^{l1} , T^{l2} i T^{l3} corresponents als instants Δt , $2\Delta t$ i $3\Delta t$ segons. (*mètode implícit*)

t(s)	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₁₂	°C
Δt	14,03	9,85	6,67	6,37	13,35	9,74	6,97	6,66	13,88	10,5	7,9	7,6	$\leftarrow T^{l1}$
$2\Delta t$	26	18,91	13,35	12,56	25,28	18,79	13,65	12,87	25,67	19,47	14,53	13,76	$\leftarrow T^{l2}$
$3\Delta t$	36,47	27,12	19,58	18,24	35,72	26,99	19,87	18,54	35,98	27,56	20,68	19,36	$\leftarrow T^{l3}$

- 6) Calculi l'energia tèrmica (J) bescanviada amb l'aire, amb el gas, la generada i l'emmagatzemada **per tot el conducte**, en el tercer interval de temps. Verifiqui en aquest tercer interval de temps un quadre d'energies. (*mètode implícit*)

E _{AIRE} (J)	E _{GAS} (J)	E _{GENERADA} (J)	-E _{EMMAGATZEMADA} (J)	Quadre d'energia = $\sum E_i$
-321,1	4079	2304	6062	$3,18 \times 10^{-12}$

- 7) Temperatures T_i en °C del estat estacionari a partir de un mètode directe.

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}
119,18	100,78	83,31	77,01	118,24	100,47	83,47	77,18	117,45	100,13	83,49	77,27

8) Per l'estat estacionari calculi la potència tèrmica (W) bescanviada amb l'aire, amb el gas i la generada **per tot el conducte**: (conveni de signes: q és + quan la peça guanya potència)

$q_{\text{AIRE}} \text{ (W)}$	$q_{\text{GAS}} \text{ (W)}$	$q_{\text{GENERADA}} \text{ (W)}$	quadre de potències = $\sum q_i$
-20,07	-18,33	38,4	$2,9 \times 10^{-13}$

9) Determini en estat estacionari la potència azimuthal $q_{2 \rightarrow 3} + q_{6 \rightarrow 7} + q_{10 \rightarrow 11}$ que es transfereix de la meitat esquerra a la meitat dreta **del mig conducte** que es mostra a la figura . Quina fracció representa aquesta potència azimuthal de la potència de radiació extra absorbida **per el mig conducte** (Δz !). Es negligible aquesta potència azimuthal amb les dades d'aquest enunciat ?

$q_{\text{azimutal}} = q_{2 \rightarrow 3} + q_{6 \rightarrow 7} + q_{10 \rightarrow 11} = 4,3502 \text{ W}$	$\frac{100 \times q_{\text{azimutal}}}{q_{\text{rad.extra.absorb.}_{\text{mig conducte}}}} = 22,66$
--	---

10) Si la velocitat del gas es igual a $u_{\text{gas}} = 5 \text{ m/s}$, la seva densitat es $\rho_{\text{gas}} = 1,8 \text{ kg/m}^3$ i el seu calor específic a la temperatura T_{gas} es de $c_{p,\text{gas}} = 1100 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$, determini la variació de temperatura del gas en el tram Δz facilitat a la primera taula. D'acord al resultat anterior, te algun suggeriment en relació al valor del Δz de l'enunciat, es acceptable, podem augmentar-lo o es millor disminuir-lo ?

Escriu les equacions que fa servir per trobar ΔT	Cabal màssic	Variació de la temperatura
$S_{\text{gas}} = \pi r_i^2$; $\dot{m}_{\text{gas}} = \rho_{\text{gas}} u_{\text{gas}} S_{\text{gas}}$; $q = -18,3294 \frac{\text{W}}{\text{m}}$	\dot{m}_{gas}	ΔT
$ q = \dot{m}_{\text{gas}} c_{p,\text{gas}} \Delta T$ $\Rightarrow \Delta T = \frac{ q }{\dot{m}_{\text{gas}} c_{p,\text{gas}}}$	0,01767 kg/s	0,9429 °C

Suggeriment respecta al valor de Δz : si haguéssim d'analitzar el comportament tèrmic d'uns metres de canonada, la desratitzariem longitudinalment amb intervals de $\Delta z = 0,1 \text{ m}$ i aniríem recalculant la temperatura del gas del següent interval d'acord als càlculs fets en aquest apartat. Finalment provaríem amb un interval Δz menor, la meitat per exemple, i aleshores en funció dels resultats prendríem decisions.

Solució matricial detallada

Dades:

$\Delta\phi$	$\pi/4$	rad	(radi) r_i	0,040	m	λ	11	W/(m·K)
a	2	mm	h_{aire}	7	W/(m ² ·K)	ρ	7200	kg/m ³
Δz	0,1	m	h_{gas}	50	W/(m ² ·K)	c_p	500	J/(kg K)
q/A	5000	W/m ²	α	0,8	absorb.	$T_{13} = T_{\text{aire}}$	0	°C
Δt	60	s	$T_{\text{inicial}} = T_{13}$	0	°C	$T_{14} = T_{\text{gas}}$	80	°C

El material del conducte és inoxidable AISI 316 a 600 K.

El flux de potència radiant extra és, $\left. \frac{q}{A} \right|_{\text{rad.extra}} = 5000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

Tenim $n_i = 12$ nodes incògnita , $n_c = 2$ nodes contorn , $n_t = n_i + n_c$ nodes totals

Limitem les iteracions a $N_{\text{iter}} = 100$ La temperatura inicial per $t = 0 \text{ s} \rightarrow T_{\text{inicial}} = T_{\text{aire}}$

1) Conductàncies de conducció i convecció (només calculem $K_{i,j}$ quan $i < j$, després simetritzem) Assignem totes les conductàncies a la matriu K_T també anomenada $[K | KC]$ als apunts o matriu de conductàncies totals.

$$K_{1,2} = \frac{\lambda a \Delta z}{\frac{\pi}{4}(r_i + 4a)} = 0,05836 \quad K_{1,5} = \frac{\lambda \frac{\pi}{4}(r_i + 3a) \Delta z}{2a} = 9,9353$$

$$K_{1,13} = h_{aire} \frac{\pi}{4}(r_i + 4a) \Delta z = 0,0264 \quad ; \quad K_{2,3} = K_{1,2} \quad K_{2,6} = K_{1,5} \quad K_{2,13} = K_{1,13}$$

$$K_{3,4} = K_{1,2} \quad K_{3,7} = K_{1,5} \quad K_{3,13} = K_{1,13} \quad K_{4,8} = K_{1,5} \quad K_{4,13} = K_{1,13}$$

$$K_{5,6} = \frac{\lambda 2a \Delta z}{\frac{\pi}{4}(r_i + 2a)} = 0,12732 \quad K_{5,9} = \frac{\lambda \frac{\pi}{4}(r_i + a) \Delta z}{2a} = 9,0713 \quad K_{6,7} = K_{5,6}$$

$$K_{6,10} = K_{5,9} \quad K_{7,8} = K_{5,6} \quad K_{7,11} = K_{5,9} \quad K_{8,12} = K_{5,9}$$

$$K_{9,10} = \frac{\lambda a \Delta z}{\frac{\pi}{4}r_i} \quad K_{9,14} = h_{gas} \frac{\pi}{4}r_i \Delta z \quad K_{10,11} = K_{9,10} \quad K_{10,14} = K_{9,14}$$

$$K_{11,12} = K_{9,10} \quad K_{11,14} = K_{9,14} \quad K_{12,14} = K_{9,14}$$

Aquestes conductàncies son constants al considerar en aquest exercici tots els coeficients de convecció constants. En general h_c és funció de la temperatura. Aleshores ja no seria molt adient emprar el mètode matricial ja que hauríem d'anar recalculant i actualitzant aquestes conductàncies a les matrius K_I i K_C .

$$K := \left(\begin{array}{l} A \leftarrow K \\ \text{for } i \in 1..n_i \\ \quad \text{for } j \in i..n_j \\ \quad \quad \left| \text{var} \leftarrow A_{i,j} \right. \\ \quad \quad \left| A_{j,i} \leftarrow \text{var} \right. \\ A \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Simetritzem ara la submatriu } K_I \text{ quadrada de } 12 \text{ per } 12 \\ \text{Primer assignem la matriu } K \text{ a la matriu local } A \text{ i després} \\ \text{simetritzem.} \end{array}$$

Determinem les superfícies (en m^2) projectades dels nodes 1 i 2 en la direcció del flux de radiació directe així com les potències radiants absorbides per els mateixos,

$$A_{p1} := (r_i + 4 \cdot a) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \Delta z = 0.00339 \quad A_{p2} := (r_i + 4 \cdot a) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \Delta z = 0.00141$$

Les potències radiants absorbides per els nodes 1 i 2 (únics nodes exposats a la radiació) son,

$$G_1 := q_{A_rd} \cdot A_{p1} \cdot \alpha = 13.576 \quad G_2 := q_{A_rd} \cdot A_{p2} \cdot \alpha = 5.624$$

2) Matriu K de conductàncies (inclou les conductàncies amb el contorn, nodes 13 i 14)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0.0584	0	0	9.9353	0	0	0	0	0	0	0	0.0264	0
2	0.0584	0	0.0584	0	0	9.9353	0	0	0	0	0	0	0.0264	0
3	0	0.0584	0	0.0584	0	0	9.9353	0	0	0	0	0	0.0264	0
4	0	0	0.0584	0	0	0	0	9.9353	0	0	0	0	0.0264	0
5	9.9353	0	0	0	0	0.1273	0	0	9.0713	0	0	0	0	0
6	0	9.9353	0	0	0.1273	0	0.1273	0	0	9.0713	0	0	0	0
7	0	0	9.9353	0	0	0.1273	0	0.1273	0	0	9.0713	0	0	0
8	0	0	0	9.9353	0	0	0.1273	0	0	0	0	9.0713	0	0
9	0	0	0	0	9.0713	0	0	0	0	0.07	0	0	0	0.1571
10	0	0	0	0	0	9.0713	0	0	0.07	0	0.07	0	0	0.1571
11	0	0	0	0	0	0	9.0713	0	0	0.07	0	0.07	0	0.1571
12	0	0	0	0	0	0	0	9.0713	0	0	0.07	0	0	0.1571

A la fila 4, per exemple, veiem totes les conductàncies del node 4 amb tots els seus veïns (el 3 i el 8) i amb el node 13 (aire) de contorn.

Ara sumem cada fila i posem el resultat canviat de signe a la diagonal de la submatriu de 12x12. Guardarem aquest resultat al vector SUM_K.

$$SUM_K[i] = \sum_{j=1}^{n_i=14} K[i, j] \quad K[i, i] = -SUM_K[i]$$

SUM_K ^T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	10.02	10.078	10.078	10.02	19.134	19.261	19.261	19.134	9.298	9.368	9.368	9.298

Ara substituïm a la diagonal de la submatriu de 12x12 els valor anteriors.

A continuació es mostra la matriu de conductàncies K amb les diagonals plenes (suma de cada fila canviada de signe).

En realitat la següent matriu es la [KI | KC] solapades. I només es diferencia de la matriu de conductàncies K en que estan plens els termes de la diagonal.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	-10.02	0.058	0	0	9.935	0	0	0	0	0	0	0	0.026	0
2	0.058	-10.078	0.058	0	0	9.935	0	0	0	0	0	0	0.026	0
3	0	0.058	-10.078	0.058	0	0	9.935	0	0	0	0	0	0.026	0
4	0	0	0.058	-10.02	0	0	0	9.935	0	0	0	0	0.026	0
5	9.935	0	0	0	-19.134	0.127	0	0	9.071	0	0	0	0	0
6	0	9.935	0	0	0.127	-19.261	0.127	0	0	9.071	0	0	0	0
7	0	0	9.935	0	0.127	-19.261	-19.261	0.127	0	0	9.071	0	0	0
8	0	0	0	9.935	0	0	0.127	-19.134	0	0	0	9.071	0	0
9	0	0	0	0	9.071	0	0	0	-9.298	0.07	0	0	0	0.157
10	0	0	0	0	0	9.071	0	0	0.07	-9.368	0.07	0	0	0.157
11	0	0	0	0	0	0	9.071	0	0	0.07	-9.368	0.07	0	0.157
12	0	0	0	0	0	0	0	9.071	0	0	0.07	-9.298	0	0.157

Càlcul dels volums i capacitats calorífiques,

$$V_1 := \frac{\pi}{8} \cdot [(r_i + 4 \cdot a)^2 - (r_i + 3 \cdot a)^2] \cdot \Delta z \quad V_5 := \frac{\pi}{8} \cdot [(r_i + 3 \cdot a)^2 - (r_i + a)^2] \cdot \Delta z$$

$$V_9 := \frac{\pi}{8} \cdot [(r_i + a)^2 - r_i^2] \cdot \Delta z \quad V_2 := V_1 = 7.38274 \times 10^{-6} \quad V_6 := V_5 \quad V_{10} := V_9$$

$$V_3 := V_1 \quad V_7 := V_5 \quad V_{11} := V_9 \quad V_4 := V_1 \quad V_8 := V_5 \quad V_{12} := V_9$$

A partir d'ara suposeu que l'índex "i" varia de 1 a n_i=12, el nombre total de nodes amb temperatura incògnita.

$$C[i] = \rho V[i] c_p \quad ; \quad DT[i] = \frac{C[i]}{SUM_K[i]} \quad ; \quad G[i] = 0.0$$

Els nodes 1 i 2 són els únics amb generació de potència tèrmica, que serà justament la potència radiant absorbida per aquest nodes $G[1]=13,576 \text{ W}$ i $G[2]=5,624 \text{ W}$

Vector TC de temperatures de contorn $TC[1]=T_{\text{aire}}$ $TC[2]=T_{\text{gas}}$
 Inicialitzem el vector TN de temperatures $TN[i]=T_{\text{inicial}}=T_{\text{aire}}$ ($i=1,2,\dots,12$)

$V =$	$C =$	$DT =$	$G =$	$TN =$
$7.38274 \cdot 10^{-6}$	26.5779	2.652	13.576	0
$7.38274 \cdot 10^{-6}$	26.5779	2.637	5.624	0
$7.38274 \cdot 10^{-6}$	26.5779	2.637	0	0
$7.38274 \cdot 10^{-6}$	26.5779	2.652	0	0
$1.3823 \cdot 10^{-5}$	49.7628	2.601	0	0
$1.3823 \cdot 10^{-5}$	49.7628	2.584	0	0
$1.3823 \cdot 10^{-5}$	49.7628	2.584	0	0
$1.3823 \cdot 10^{-5}$	49.7628	2.601	0	0
$6.44026 \cdot 10^{-6}$	23.185	2.493	0	0
$6.44026 \cdot 10^{-6}$	23.185	2.475	0	0
$6.44026 \cdot 10^{-6}$	23.185	2.475	0	0
$6.44026 \cdot 10^{-6}$	23.185	2.493	0	0

Vector amb les temperatures de contorn, $TC = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \end{pmatrix}$

Matriu de conductàncies dels nodes incògnites amb el sumatori canviat de signe a les diagonals

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-10.02	0.0584	0	0	9.9353	0	0	0	0	0	0	0
2	0.0584	-10.0784	0.0584	0	0	9.9353	0	0	0	0	0	0
3	0	0.0584	-10.0784	0.0584	0	0	9.9353	0	0	0	0	0
4	0	0	0.0584	-10.02	0	0	0	9.9353	0	0	0	0
5	9.9353	0	0	0	-19.134	0.1273	0	0	9.0713	0	0	0
6	0	9.9353	0	0	0.1273	-19.2613	0.1273	0	0	9.0713	0	0
7	0	0	9.9353	0	0	0.1273	-19.2613	0.1273	0	0	9.0713	0
8	0	0	0	9.9353	0	0	0.1273	-19.134	0	0	0	9.0713
9	0	0	0	0	9.0713	0	0	0	-9.2985	0.07	0	0
10	0	0	0	0	0	9.0713	0	0	0.07	-9.3685	0.07	0
11	0	0	0	0	0	0	9.0713	0	0	0.07	-9.3685	0.07
12	0	0	0	0	0	0	0	9.0713	0	0	0.07	-9.2985

3) Expressió algebraica del balanç de potència tèrmica del node 2 per el segon interval de temps emprant el mètode implícit: es mostra l'equació al full de resultats.

Matriu dels nodes de contorn

	1	2
1	0.0264	0
2	0.0264	0
3	0.0264	0
4	0.0264	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0.1571
10	0	0.1571
11	0	0.1571
12	0	0.1571

4) Trobem el Δt màxim admissible perquè el càlcul del mètode explícit sigui estable:

$$\Delta t_{\text{max_admissible}} = \min(DT) \quad \Delta t_{\text{max_admissible}} = 2,47478 \text{ s}$$

L'enunciat ens proposa treballar a partir d'ara amb el mètode implícit i ens fixa $\Delta t=60 \text{ s}$ ($> \Delta t_{\text{max}}$!) Sabem que emprant aquest mètode no ens tenim que preocupar de l'estabilitat de la resolució matemàtica. Altre cosa serà si els resultats seran o no prou bons en comparació, per exemple, de valors experimentals.

Resolem l'estat transitori (mètode implícit)

Determinem la matriu DTC:

$$CDT[i,i] = \frac{C[i]}{\Delta t} \quad i = 1, 2, 3, \dots, 12$$

$$\text{CDT} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 0.443 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.443 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.443 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.443 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.829 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.829 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.829 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.829 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.386 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.386 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.386 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.386 \end{array} \end{array}$$

$$\text{TF} = (\text{KI} - \text{CDT})^{-1} \times (-\text{G} - \text{KC} \times \text{TC} - \text{CDT} \times \text{TN})$$

$$\text{TN1} = \text{TF}$$

$$\text{TN} = \text{TN1}$$

$$\text{TF} = (\text{KI} - \text{CDT})^{-1} \times (-\text{G} - \text{KC} \times \text{TC} - \text{CDT} \times \text{TN})$$

$$\text{TN2} = \text{TF}$$

$$\text{TN} = \text{TN2}$$

$$\text{TF} = (\text{KI} - \text{CDT})^{-1} \times (-\text{G} - \text{KC} \times \text{TC} - \text{CDT} \times \text{TN})$$

$$\text{TN3} = \text{TF}$$

$$\text{TN} = \text{TN3}$$

5) Trobar la distribució de temperatures en °C al final de cadascun dels tres primers intervals de temps T^1 , T^2 i T^3 corresponents als instants Δt , $2\Delta t$ i $3\Delta t$ segons.

(T^0 son les temperatures inicials o sigui iguals a les de l'aire)

$$\text{TN0}^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\text{TN1}^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 14.03 & 9.85 & 6.67 & 6.37 & 13.35 & 9.74 & 6.97 & 6.66 & 13.88 & 10.5 & 7.9 & 7.6 \end{array} \end{array}$$

$$\text{TN2}^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 26 & 18.91 & 13.35 & 12.56 & 25.28 & 18.79 & 13.65 & 12.87 & 25.67 & 19.47 & 14.53 & 13.76 \end{array} \end{array}$$

$$\text{TN3}^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 36.47 & 27.12 & 19.58 & 18.24 & 35.72 & 26.99 & 19.87 & 18.54 & 35.98 & 27.56 & 20.68 & 19.36 \end{array} \end{array}$$

6) Calculi l'energia tèrmica (J) bescanviada amb l'aire, amb el gas, la generada i l'emmagatzemada (per tot el conducte), en el tercer interval de temps. Verifiqui en aquest

tercer interval de temps un quadre d'energies.

$$\dot{E}_{aire} = 2 \Delta t \sum_{i=1}^{n_i=12} \underbrace{K[i,13] \times (T_{gas} - TN3[i])}_{\text{Tercer interval}} = -321.1 W \quad ; \quad \dot{E}_{generada} = 2 \Delta t \sum_{i=1}^{n_i=12} G[i] = 2304 W$$

$$\dot{E}_{gas} = 2 \Delta t \sum_{i=1}^{n_i=12} \underbrace{K[i,14] \times (T_{gas} - TN3[i])}_{\text{Tercer interval}} = 4079 W$$

$$\Delta \dot{E}_{emmagatz} = 2 \sum_{i=1}^{n_i=12} [C[i] \times (TN3[i] - TN2[i])] = 6062 W$$

Comprovem ara el quadre d'aquest balanços.

Quadre_E = $E_{aire} + E_{gas} + E_{generada} - \Delta E_{emmagatz} = 3,18 \times 10^{-12}$ (equival a sumar les 12 eq. dels 12 nodes corresponents als 3er. interval de temps, prèviament multiplicades membre a membre per Δt perquè siguin energies i no potències)

7) Temperatures T_i en °C de l'estat estacionari a partir de un mètode directe.

Observem que podríem trobar les temperatures de l'estat estacionari a base de fer moltes iteracions de l'estat transitori. Aquest seria un mètode no directe. Si fem servir l'equació matricial $KI \times T_{est} = -G - KC \cdot TC \Rightarrow T_{est} = KI^{-1}(-G - KC \cdot TC)$ obtenim una solució matricial. Aquest procediment, es el que anomenem un mètode directe.

$$T_{est}^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	119.18	100.78	83.31	77.01	118.24	100.47	83.47	77.18	117.45	100.13	83.49	77.27

8) Per l'estat estacionari calculi la potència tèrmica (W) bescanviada amb l'aire, amb el gas i la generada (per tot el conducte): (conveni de signes q és + quan la peça guanya potència)

$$q_{aire} = 2 \sum_{i=1}^{n_i=12} K[i,13] \times (T_{gas} - T_{est}[i]) = -20,7 W \quad ; \quad q_{generada} = 2 \sum_{i=1}^{n_i=12} G[i] = 38,4 W$$

$$q_{gas} = 2 \sum_{i=1}^{n_i=12} K[i,14] \times (T_{gas} - T_{est}[i]) = -18,33 W$$

Comprovem ara el quadre d'aquest balanços. *Quadre_q* = $q_{aire} + q_{gas} + q_{generada} = 2,9 \times 10^{-13}$

9) Determini en estat estacionari la potència azimuthal $q_{2 \rightarrow 3} + q_{6 \rightarrow 7} + q_{10 \rightarrow 11}$ que es transfereix de la meitat esquerra a la meitat dreta del mig conducte que es mostra a la figura. Quina fracció representa aquesta potència azimuthal de la potència de radiació extra absorbida per el mig conducte (Δz !). Es negligible aquesta potència azimuthal amb les dades d'aquest enunciat ?

$$q_{azimutal_1_2} := K_{1,2} \cdot (T_{est_1} - T_{est_2}) + K_{5,6} \cdot (T_{est_5} - T_{est_6}) + K_{9,10} \cdot (T_{est_9} - T_{est_{10}}) = 4.5483$$

$$q_{azimutal_2_3} := K_{2,3} \cdot (T_{est_2} - T_{est_3}) + K_{6,7} \cdot (T_{est_6} - T_{est_7}) + K_{10,11} \cdot (T_{est_{10}} - T_{est_{11}}) = 4.3502$$

$$\frac{100 \times q_{azimutal_2 \rightarrow 3}}{q_{rad.extra.absorb.mig.conducte}} = 22.6572$$

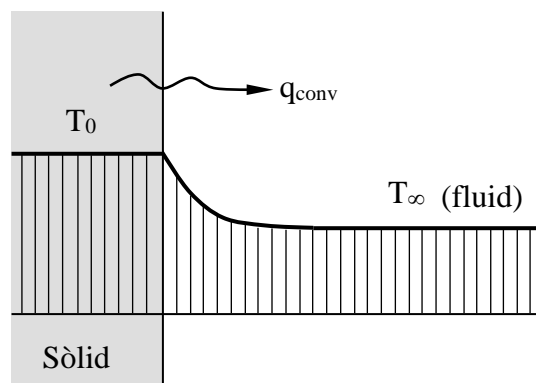
$$\underbrace{q_{rad.extra.absorb.mig.conducte}}_{q_{generada}}$$

11) Resp.: explicada al full de resultats.

4 CONVECCIÓ

4.1 MECANISME FÍSIC DE LA CONVECCIÓ

Entre dos elements, un sòlid i un fluid en contacte i a temperatures diferents sabem que la Termodinàmica ens concreta que la calor es transferirà del element més calent al més fred, independentment de l'estat de cada element.



Recordant el que varem dir al capítol 1, la transferència de calor per convecció es compon de dos mecanismes simultanis. El primer d'ells és la difusió o conducció de la calor a nivell molecular en la zona de la interfase o superfície de contacte entre el sòlid i el fluid.

Si el fluid es mou com a conseqüència d'un aparell mecànic impulsor, com ara una bomba, o un ventilador, o un sòlid en moviment relatiu al fluid, etc., es produeix un procés de renovació del fluid a

la interfase, aportent-se fluid nou i fred (a $T_\infty < T_0$ d'acord a la figura) a una velocitat $u_\infty > 0$ que facilita la transferència de calor per conducció del sòlid al fluid.

Si no disposem d'un aparell impulsor, la velocitat del fluid no pertorbat serà $u_\infty = 0$ (o sigui la gran massa de

fluid estarà en repòs) i la transferència de calor, com sabem, es reduirà notablement. En aquest cas, també apareix un moviment induït del fluid a la zona propera a la interfase. El paquets o blocs de fluid que toquen la interfase reben calor per conducció, o sigui molècula a molècula. Això fa que augmenti localment la temperatura d'aquest paquets i es redueixi la seva densitat (especialment si parlem d'un gas). Els paquets, a una densitat inferior, es troben envoltats d'un fluid a una densitat superior. Això fa que l'empenta d'Arquímedes $E = \rho_\infty V_{paquet} g$ sigui superior al pes del paquet $P = \rho V_{paquet} g$ sent ρ la densitat del paquet o bloc de fluid a la interfase, que òbviament es menor que ρ_∞ , la densitat del fluid sense pertorbar o escalfar. En aquest cas, $E > P$ i observem un moviment ascendent del fluid (moviment induït o natural).

Definició: definim com a convecció a la transferència de calor entre un sòlid i un fluid en contacte directe, degut a la conducció de la calor a la interfase i al transport d'energia que comporta el moviment del fluid, tant si aquest moviment es impulsat o natural.

Experimentalment es comprova que la transferència de calor per convecció depèn molt estretament de les propietats del fluid, la viscositat dinàmica μ , la conductivitat tèrmica λ , la densitat ρ i el calor específic c_p . També depèn de la velocitat del fluid, de la configuració geomètrica, de la rugositat de la superfície i del tipus de flux que tinguem establert (laminar o turbulent) No depèn del material de la superfície malgrat si de la seva rugositat.

Fora de les micro o nanoescales, sempre es verifica la “**condició de no lliscament**”, o sigui el fluid en contacte amb la superfície sòlida està en repòs. Justament aquesta condició de no lliscament es la responsable del desenvolupament del perfil de velocitats. Anomenem capa límit hidrodinàmica a la zona on es presenten aquests gradients de velocitat.

Si treballem amb micro o nanoescales la velocitat a la paret ja no la podem considerar nul·la.

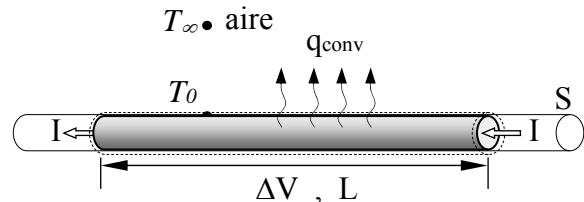
Qüestió 1: Un fil metàl·lic de diàmetre D i longitud L s'exposa a una corrent d'aire de velocitat u_∞ perpendicular al mateix. Sent la conductància elèctrica del fil σ_{elec} $R = \frac{L}{\sigma_{elec} S}$, mesurem

una diferència de temperatures entre la superfície T_0 del fil i la temperatura T_∞ de l'aire igual a ΔT i la tensió aplicada entre borns es ΔV determinar en regim estacionari l'expressió del coeficient de convecció mig, suposant que la dissipació de potència tèrmica per convecció es uniforme al llarg de tot el fil ($T_0 = ct.$ per tot el fil) i que podem negligir la radiació.

$$R_{elec} = \frac{1}{\sigma_{elec}} \frac{L}{S} \rightarrow I = \frac{\Delta V}{R_{elec}} \rightarrow$$

$$\rightarrow P_{elec} = I \Delta V = \frac{\Delta V^2}{R_{elec}} = \frac{\sigma_{elec} S \Delta V^2}{L} \rightarrow$$

$$\rightarrow P_{elec} = h_c \underbrace{\pi D L}_A \underbrace{(T_0 - T_\infty)}_{\Delta T} \rightarrow h_c = \sigma_{elec} \frac{D \Delta V^2}{4 L^2 \Delta T}$$



4.1.1 Flux forçat o natural (amb o sense impulsió)

Convecció forçada: el moviment del fluid esta produït per un element mecànic extern, del tipus bomba, ventilador, sòlid en moviment relatiu al fluid, etc.

Exemples: bombeig industrial de fluids en canonades, impulsió d'aire en conductes de ventilació o acondicionament, moviment de l'aire damunt d'un ala d'avió, etc.

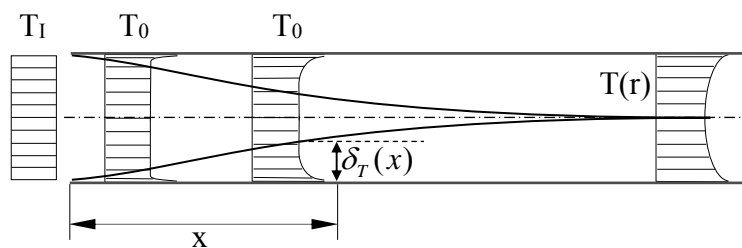
Convecció natural: no hi cap element mecànic impulsor de forma que la velocitat del fluid no pertorbat (lluny de la superfície sòlida o interfase, o sigui no escalfat o refredat) es nul·la, $u_\infty=0$. En aquest cas, el moviment del fluid es degut a la diferència de densitats entre el fluid proper a la interfase i la resta de fluid no pertorbat. Apareix per tant un moviment induït o natural, exclusivament als voltants de la interfase, a causa de les forces d'empenta que originen una corrent ascendent de fluid calent en contacte amb el sòlid.

Exemples: escalfament de l'aire al voltant d'un radiador domèstic, el refredament d'un got de llet exposat a l'ambient, etc.

4.1.2 Flux intern o extern

Flux intern:

Direm que el flux es intern quan el fluid es veu forçat a circular confinat en un conducte, de forma que el sòlid envolta i guia al fluid. En aquest cas, el fluid es troba sotmès a la viscositat en tot el seu camp de flux, a causa de que el fluid es troba limitat en tota la seva extensió per superfícies sòlides.

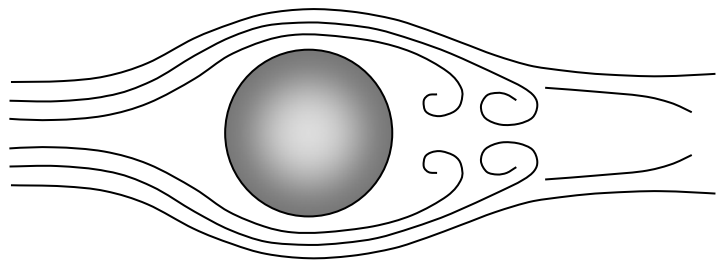


Exemples: un fluid circulant per un riu no seria un flux intern, ja que el riu disposa de una superfície lliure sense efectes viscosos o de fricció.

Seria fluid intern, la circulació de qualsevol fluid industrial a través de tubs o canonades.

Flux extern:

Un flux es extern si aquest no es troba confinat, i per tant el fluid circula externament a l'objecte. A la figura veiem com el fluid interacciona externament amb l'esfera o cilindre.



Exemples: aire circulant damunt d'una placa plana, tant normalment com longitudinalment a la mateixa, quan el vent incideix sobre un edifici, aire circulant damunt una ala d'avió, flux sobre un feix de tubs, etc.

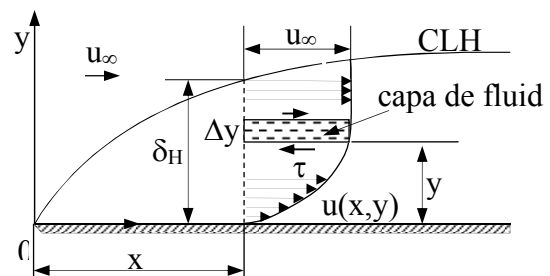
4.2 CAPA LÍMIT HIDRODINÀMICA (placa plana)

4.2.1 Concepte

Es un fet observat, que quan les partícules de fluid impacten amb les irregularitats de qualsevol superfície assoleixen una velocitat mitjana nul·la “**condició de no lliscament**”. Aquest conjunt de partícules que toquen la paret amb velocitat nul·la frenen la velocitat de la capa de partícules contigües, que a la vegada frenen la següent capa, i així podem seguir fins que a una distància $\delta_H(x)$ de la superfície els efectes son pràcticament negligibles ($u=0,99 u_\infty$).

Usem el subíndex ∞ per denotar les condicions del flux lliure fora de la capa límit.

La capa de fluid indicada a la figura, te capes de fluid mes lentes per sota i mes ràpides per damunt. Això es manifesta, amb un esforç tallant τ que la frena per sota, i una esforç tallant $\tau+\Delta\tau$ en sentit contrari que l'accelera per damunt.



Realitzant un balanç de forces i de quantitat de moviment sobre una capa d'alçada diferencial podem determinar una equació diferencial que ens permetrà trobar el perfil de velocitats.

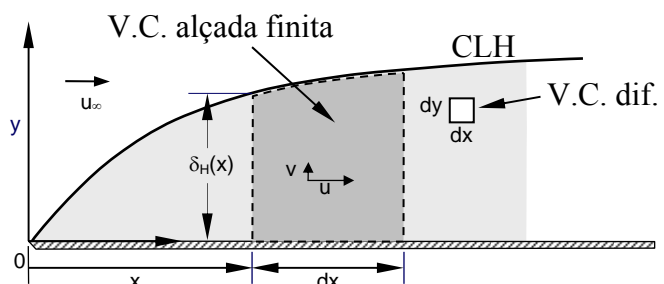
Si coneixem el perfil de velocitats $u(x,y)$ i suposem que el fluid es Newtonià (μ funció només de la temperatura i no de la pressió), podem calcular la força tangencial que exerceix el fluid

sobre la paret, $\tau_0(x) = \mu \left. \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0}$ N/m² sent μ la viscositat dinàmica. Tenim dues opcions,

per fer el balanç de quantitat de moviment en la CLH segons el volum de control emprat.

$$2 \text{ opcions } \begin{cases} \text{V.C. diferencial} & \Rightarrow \begin{cases} \text{Eq. diferencial de la} \\ \text{quantitat de moviment} \end{cases} \\ \text{V.C. d'alçada finita} & \Rightarrow \begin{cases} \text{Balanç integral de quantitat} \\ \text{de moviment de von Kármán} \end{cases} \end{cases}$$

A la figura es veuen els 2 volums de control considerats a l'interior de la capa límit, el diferencial i el volum de control d'alçada finita $\delta_H(x)$ emprat per von Kármán.



4.2.2 Capa límit de velocitat o hidrodinàmica laminar (CLH)

Mètode aproximat de von Kármán

Es realitza un balanç de quantitat de moviment i de forces en el volum de control d'alçada finita de la figura anterior (és un mètode aproximat).

Hipòtesis considerades:

1) Fluid incompressible, 2) Regim estacionari, 3) Viscositat dinàmica μ constant, 4) La pressió no es funció de l'alçada, $p=p(x)$, 5) Suposem negligible la tensió tangencial en la direcció vertical de l'eix "y" (o sigui $v \ll u$), sent u i v les components horitzontal i vertical de la velocitat a la regió de la capa límit.

Aproximem el perfil de velocitats real mitjançant un polinomi de 3er grau,

$u(x, y) = a_3(x) y^3 + a_2(x) y^2 + a_1(x) y + a_0(x)$ i determinem els seus 4 coeficients emprant les següents 4 condicions de contorn,

- 1) En $y=0$ $u(x,0)=0$
- 2) En $y = \delta_H(x)$ $u[x, \delta_H(x)] = u_\infty$
- 3) En $y = \delta_H(x)$ $\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{y=\delta_H(x)} = 0$
- 4) En $y = 0$ $\left. \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$

Les 3 primeres c.c. son òbvies. La quarta es determina a partir de la equació diferencial de la quantitat de moviment, $\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{dp}{dx}$, al ser $u=v=0$ a la paret i sent $\frac{dp}{dx} = 0$ al

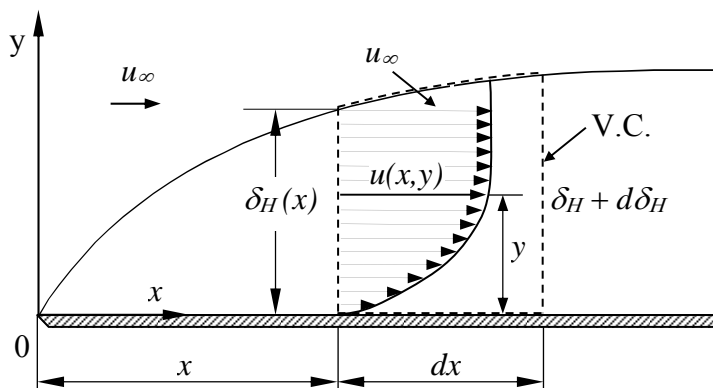
considerar el cas de flux lliure amb $u_\infty=ct$, $p + \frac{\rho u_\infty^2}{2} = ct$. $\Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\rho \frac{2 u_\infty}{2} \frac{du_\infty}{dx} = 0$

Aplicant les 4 c.c. obtenim molt fàcilment el polinomi,

$$\frac{u(x, y)}{u_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_H(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_H(x)} \right)^3$$

Observem que de moment la funció $\delta_H(x)$ es desconeguda i per tant ens cal determinar aquesta funció si volem conèixer el perfil de velocitats $u(x,y)$

CAPA LÍMIT HIDRODINÀMICA

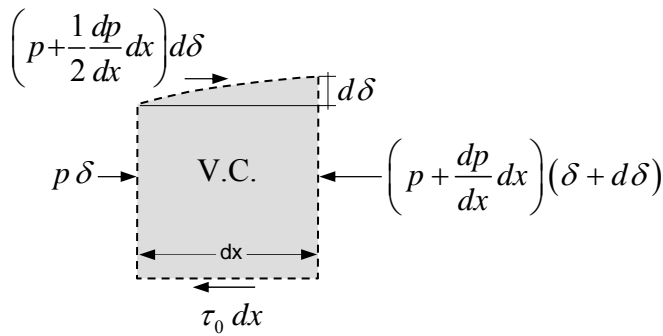


Determinem el balanç de forces sobre el V.C. saben que $p=p(x)$

En x la pressió origina una força igual a $p \delta$ en el sentit positiu.

(considerem una amplada unitària)
En $x+dx$ la força es en sentit oposat $\left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) (\delta + d \delta)$

Indiquem totes les forces a la següent figura.



Si fem el balanç de totes les forces obtenim, $dF_x = -\left(\tau_0 + \frac{dp}{dx} \delta_H\right) dx$

La quantitat de moviment que entra per la secció x, val $\int_0^{\delta_H} \rho u^2 dy$ ja que

$dm = \rho u dy$ al considerar una amplada unitària de la placa. Trobareu la resta en qualsevol text de

Mecànica de Fluids (SHAMES, etc.) Així arribem al balanç integral de quantitat de moviment i obtenim l'equació exposada al següent apartat.

4.2.3 Equació de la quantitat de moviment en la forma integral de von Kármán

$$-\tau_0 - \frac{dp}{dx} \delta_H(x) = -\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_H(x)} [u_\infty - u(x, y)] u(x, y) dy + \frac{du_\infty}{dx} \int_0^{\delta_H(x)} \rho u(x, y) dy$$

4.2.4 Capa límit hidrodinàmica laminar (CLH)

Sent $\frac{u(x, y)}{u_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_H(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_H(x)}\right)^3$ i $\tau_0(x) = \mu \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{3 u_\infty}{2 \delta_H(x)}$ Observeu la

possibilitat de que $u_\infty = u_\infty(x)$ en el cas d'un conducte de forma cònica per exemple. Substituint aquestes expressions a l'equació integral arribem a la següent equació diferencial,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{39}{280} \rho u_\infty^2 \delta_H(x) \right) = \frac{3}{2} \mu \frac{u_\infty}{\delta_H(x)} \Rightarrow \delta_H d\delta_H = \frac{140}{13} \frac{\mu}{\rho u_\infty} dx \quad (\text{resolem})$$

$$\delta_H(x) = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \quad \text{amb} \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{i} \quad \text{arribem a} \quad \boxed{\frac{\delta_H(x)}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{sent} \quad Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}}$$

Aquesta equació ens dona un valor aproximat del gruix de capa límit hidrodinàmica en funció de x però resulta útil el seu plantejament per la seva senzillesa. Blasius resol numèricament l'equació diferencial de la quantitat de moviment a la CLH, i obté l'anomenada solució exacta,

$$\boxed{\frac{\delta_H(x)}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{sent} \quad Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}} \quad (\text{solució exacta de Blasius per la CLH laminar})$$

Observem que en una placa plana, quan $x \uparrow$ (augmenta) el nombre de Reynolds també augmenta $Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \uparrow$ a diferència del que passa en un tub, en que el Reynolds val

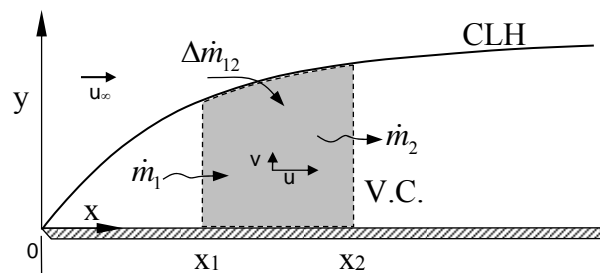
$Re_D = \frac{u_\infty D}{\nu}$ per tot el tub i no varia excepte si varia la velocitat o les propietats del fluid.

Qüestió 2: Determinar el gruix de capa límit i la distribució de velocitats a la posició x de la placa plana de la figura anterior. Dades: x, u_∞ i propietats.

$$\left. \begin{array}{l} x, u_\infty \\ Prop. \rho, \mu \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \right\} \rightarrow \left\{ \delta_H(x) = \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}} \right\} \rightarrow \frac{u(x, y)}{u_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_H(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_H(x)}\right)^3$$

Si fem servir el polinomi cúbic, per ser coherents i precisos, hem de fer servir la solució de von Kármán (amb el 4,64).

Qüestió 3: Determinar el cabal màssic $\Delta\dot{m}_{12}$ que entra per la part superior al V.C. o sigui a la capa límit entre x_1 i x_2 . Recordem que la CLH es la zona o on es manifesta la fricció de la paret, o sigui a on ens trobem velocitats menors a u_∞



Es natural que entri $\Delta\dot{m}_{12}$ al V.C. ?

Dades: x_1, x_2, u_∞ , propietats (consideri una amplada unitària)

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \rho, \mu \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \dot{m}_1 = \int_0^{\delta_H(x_1)} \rho u(x_1, y) dy \\ \dot{m}_2 = \int_0^{\delta_H(x_2)} \rho u(x_2, y) dy \end{matrix} \right\} \rightarrow \Delta\dot{m}_{12} = \dot{m}_2 - \dot{m}_1$$

Ja hem vist abans com trobar el perfil de velocitats $u(x_1, y)$ i $u(x_2, y)$ Penseu a quina velocitat s'introdueix aquest cabal màssic $\Delta\dot{m}_{12}$ al V.C. ? La resposta es òbvia, i us servirà per poder entendre el balanç d'energia en aquest V.C.

4.2.5 Coeficient de fricció local $C_f(x)$ i promig \bar{C}_f

Definim el coeficient de fricció local com la constant de proporcionalitat entre la tensió tangencial a la paret (funció de x) i l'energia cinètica de la corrent de flux lliure. (fora de la capa límit)

$$\underbrace{\tau_0(x)}_{\text{definició}} \equiv C_f \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 \Rightarrow C_f(x) = \frac{\tau_0(x)}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2}$$

$$C_f(x) = \frac{\tau_0(x)}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \tau_0(x) = \mu \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{3 u_\infty}{2 \delta_H(x)} \\ \delta_H(x) = \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}} \text{ sent } Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}, \nu = \frac{\mu}{\rho} \end{matrix} \right] \Rightarrow C_f(x) = \frac{0,646}{\sqrt{Re_x}}$$

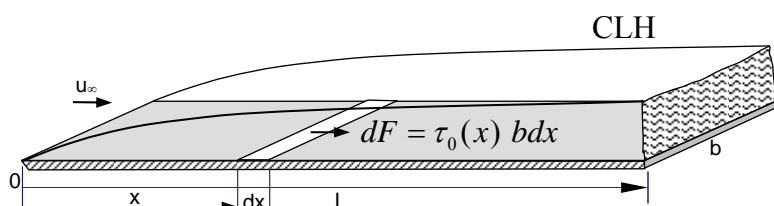
Per una placa de llargada L i amplada b, es defineix el coeficient de fricció promig, \bar{C}_f

$$\bar{C}_f = \frac{1}{bL} \int_{x=0}^L C_f(x) b dx = 2 C_f(L) = \frac{1,292}{\sqrt{Re_L}} \text{ (valor promig per la placa 0-L) (aprox.)}$$

$$\bar{C}_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}} \text{ (solució exacta, Blasius)} ; \quad \bar{\tau}_0 = \bar{C}_f \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 \text{ (valor promig de la tensió a la paret)}$$

Força d'arrossegament sobre tota la placa 0-L $F_{0-L} = \bar{\tau}_0 \times bL$

Qüestió 4: Determinar la força d'arrossegament que l'aire a la velocitat u_∞ i temperatura T_∞ realitza sobre la cara superior de la placa plana de la figura de longitud L i amplada b.



Dades: u_∞, T_∞, L, b

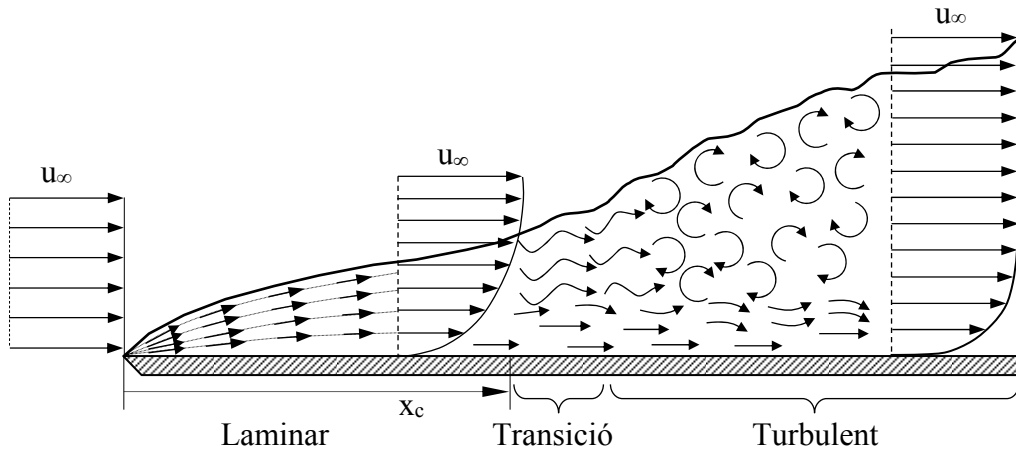
$$x \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \nu = \frac{\mu}{\rho} \\ Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \end{matrix} \right\} \rightarrow \delta_H(x) = \frac{4,64x}{\sqrt{Re_x}} \rightarrow \tau_0(x) = \mu \frac{3 u_\infty}{2 \delta_H(x)} \rightarrow \left[F_{0-L} = \int_0^L \tau_0(x) b dx \right]$$

$$\text{Formulació exacta, } x \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu \end{matrix} \right\} \rightarrow Re_x \rightarrow \left[\bar{C}_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_x}} \right] \rightarrow \left[\bar{\tau}_0 = \bar{C}_f \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 \right] \rightarrow [F_{0-L} = \bar{\tau}_0 \times b L]$$

4.2.6 Capa límit hidrodinàmica turbulenta (CLH)

D'aquest apartat, per simplificar, donarem només les equacions i no entrarem en més detalls.

$$\left. \begin{matrix} \text{CLH zona laminar} & 0 < x \leq x_{critic} \\ \text{CLH zona turbulenta} & x > x_{critic} \end{matrix} \right\} \text{ sent } x_{critic} = \frac{Re_c \nu}{u_\infty} \text{ ja que } Re_c = \frac{u_\infty x_{critic}}{\nu} = 5 \times 10^5$$



$$\text{CLH turbulenta desde } x=0 \rightarrow \delta_H(x) = \frac{0,381 x}{Re_x^{0,2}}$$

$$\text{CLH turbulenta desde } x > x_{critic} \rightarrow \frac{\delta_H(x)}{x} = \frac{0,381}{Re_x^{0,2}} - \frac{10256}{Re_x} \text{ per } 5 \times 10^5 < Re_x < 10^7$$

Coefficient de fricció local turbulenta per placa plana

$$[\text{Schlichting}] \rightarrow C_f(x) = \frac{0,0592}{Re_x^{0,2}} \text{ vàlida per } 5 \times 10^5 < Re_x < 10^7$$

$$[\text{Schultz - Grunow}] \rightarrow C_f(x) = \frac{0,370}{(\log Re)^{2,584}} \text{ vàlida per } 10^7 < Re_x < 10^9$$

Coefficient promig de fricció en placa plana amb zona laminar i zona turbulenta

$$\text{CLH zona laminar } 0 < x \leq x_c \rightarrow C_f^L(x) = 0,664 Re_x^{-0,5}$$

$$\text{CLH zona turbulenta } x > x_c \rightarrow C_f^T(x) = 0,0592 Re_x^{-0,2}$$

$$\bar{C}_f = \frac{1}{\underbrace{bL}_A} \left(\int_{x=0}^{x_c} \underbrace{C_f^L(x)}_b \underbrace{dx}_{dA} + \int_{x_c}^L \underbrace{C_f^T(x)}_b \underbrace{dx}_{dA} \right) = \frac{0,074}{\text{Re}_L^{0,2}} - \frac{0,074 \text{Re}_c^{0,8} - 1,328 \text{Re}_c^{0,5}}{\text{Re}_L} \begin{cases} \text{Re}_c = \frac{u_\infty x_c}{\nu} \\ \text{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu} \end{cases}$$

Vàlida per $\text{Re}_c < \text{Re}_L < 10^7$ (propietats a la temperatura de film)

4.3 CAPA LÍMIT TÈRMICA (placa plana)

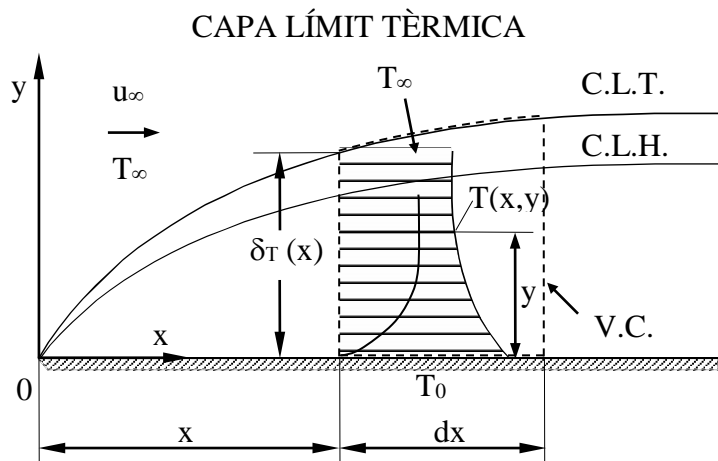
Suposem que un fluid a temperatura constant T_∞ i velocitat u_∞ circula per damunt d'una placa plana a la temperatura uniforme T_0 . Entre la placa i el fluid s'estableix un gradient de temperatures. La regió a on es manifesten els gradients de temperatura l'anomenem capa límit tèrmica (CLT). S'accepta que en $y = \delta_T(x)$ quan $T(x, y) = 1,01 T_\infty$ si $T_0 > T_\infty$ o bé quan $T(x, y) = 0,99 T_\infty$ si $T_0 < T_\infty$.

Polinomi cúbic, $\theta(x, y) = b_3(x) y^3 + b_2(x) y^2 + b_1(x) y + b_0(x) \Rightarrow 4 \text{ c.c.}$

Igual que amb la CLH, aproximem el perfil de temperatures amb un polinomi també de 3er grau, $\theta(x, y)$ al que imposarem 4 c.c. .

Emprem la variable $\theta(x, y)$ a fi d'homogeneïtzar les condicions de contorn: $\theta(x, y) = T(x, y) - T_0$

El perfil de temperatures haurà de complir així doncs, 4 condicions de contorn amb les que determinarem els 4 coeficients del polinomi:



- 1) En $y=0$ $T(x,0) = T_0$
- 2) En $y = \delta_T(x)$ $T [x, \delta_T(x)] = T_\infty$
- 3) En $y = \delta_T(x)$ $\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=\delta_T(x)} = 0$
- 4) En $y = 0$ $\left. \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$

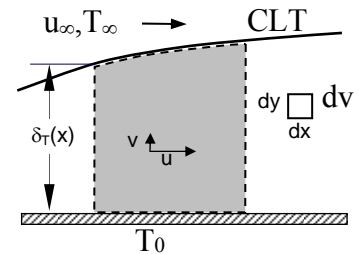
4.3.1 Equació de la distribució de temperatures amb polinomi de 3º grau.

Condicions de contorn homogènies: [considerant $\theta(x, y) = T(x, y) - T_0$]

- 1) En $y=0$ $T(x,0) = T_0 \Rightarrow \theta(x,0) = 0$
- 2) En $y = \delta_T(x)$ $T [x, \delta_T(x)] = T_\infty \Rightarrow \theta [x, \delta_T(x)] = \theta_\infty$
- 3) En $y = \delta_T(x)$ $\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=\delta_T(x)} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \right|_{y=\delta_T(x)} = 0$
- 4) En $y = 0$ $\left. \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$

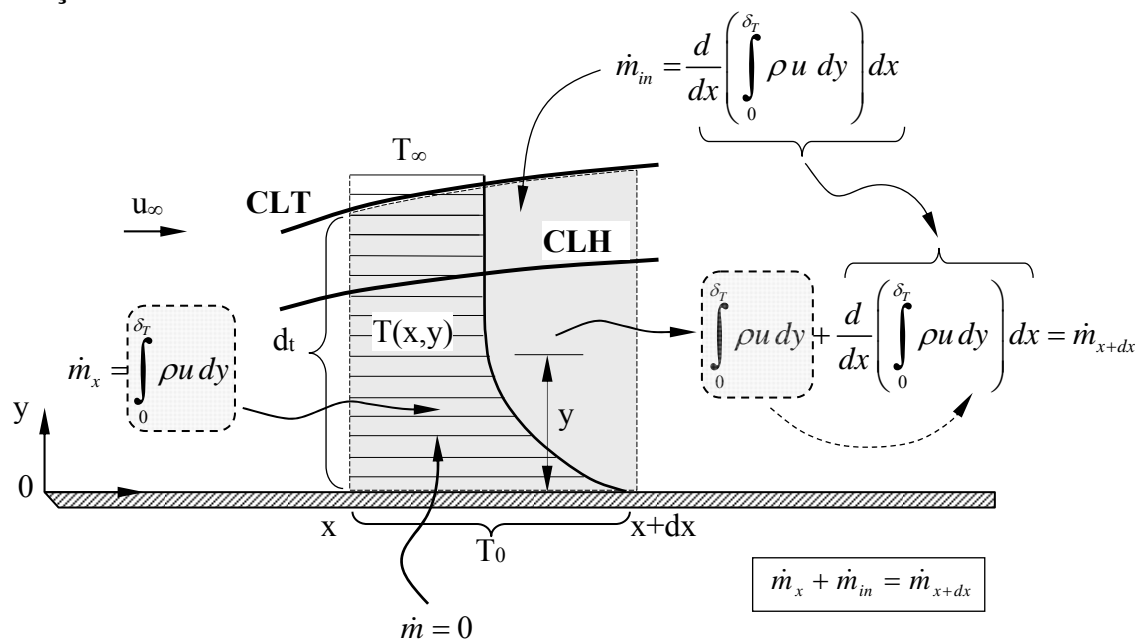
Aplicant les 4 c.c. obtenim
$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_\infty} = \frac{T(x, y) - T_0}{T_\infty - T_0} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T(x)} \right)^3$$

Observem que de moment $\delta_T(x)$ és incògnita i per tant encara no podem determinar el perfil de temperatures. Caldrà fer una balanç de potència tèrmica en el V.C. per poder calcular $\delta_T(x)$. Per determinar aquest perfil de temperatures tenim també dues opcions, segons el V.C. emprat per fer el balanç de potència tèrmica.



- 2 opcions $\left\{ \begin{array}{l} \text{V.C. diferencial} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Eq. diferencial de} \\ \text{l'energia a la CLT} \end{array} \right. \\ \text{V.C. d'alçada finita} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Balanç integral de} \\ \text{l'energia de von Kármán} \end{array} \right. \end{array} \right.$

Balanç de massa:



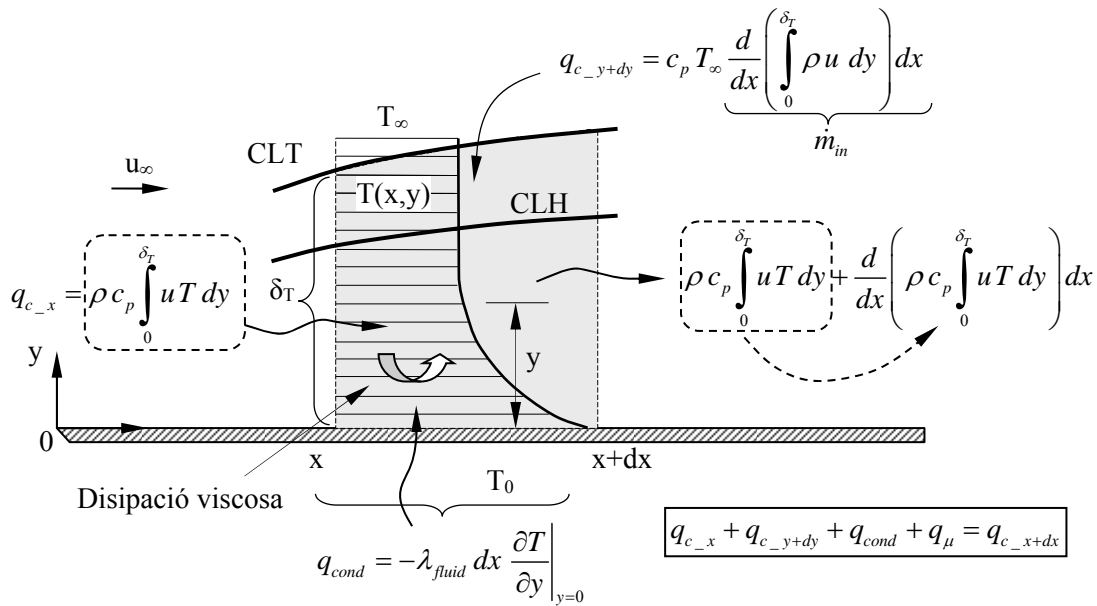
Els balanços de la figura anterior son el que en general anomenem el mètode del “compte de la vella” que es basa en que si coneixem una funció $F(x)$ a la posició x , i acceptem que es tracta en general de funcions contínues, el valor de la funció en el punt $x+dx$ serà, $F(x) + \frac{dF(x)}{dx} dx$

Balanç d'energia en el V.C. diferencial i d'alçada finita de von Kármán:

Dissipació viscosa per unitat de volum,
$$\frac{\delta W_\mu}{dV dt} = \frac{\delta \dot{W}_\mu}{dV} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad \left(\frac{W}{m^3} \right)$$

Podeu trobar el detalls de la deducció d'aquest terme en qualsevol text de mecànica de fluids.

Dissipació viscosa en el V.C. dif. (d'alçada finita):
$$q_\mu = \int_0^{\delta} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dV = \left(\int_0^{\delta} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \right) dx$$



Realitzant el balanç d'energia $q_{c-x} + q_{c-y+dy} + q_{cond} + q_\mu = q_{c-x+dx}$ arribem a l'equació integral de l'energia de von Kármán.

4.3.2 Equació de l'energia en la forma integral de von Kármán

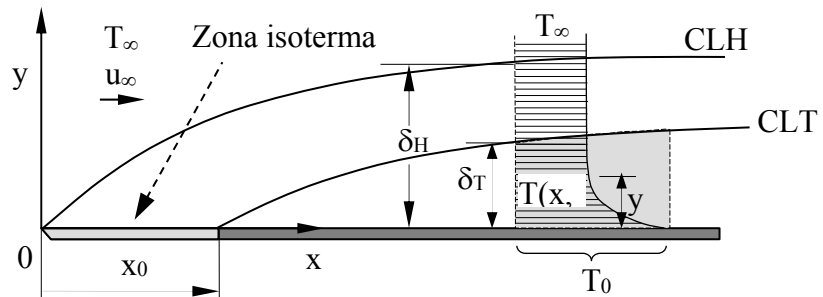
Aplicant el balanç de potències al V.C. d'alçada finita obtenim,

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_T(x)} (T_\infty - T(x, y)) u(x, y) dy \right] + \frac{\mu}{\rho c_p} \left[\int_0^{\delta_H(x)} \left[\frac{du(x, y)}{dy} \right]^2 dy \right] = \alpha \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}$$

En general, quan tenim processos de transferència de calor, el segon terme del primer membre, el terme de la dissipació viscosa, és negligible.

4.3.3 Gruix de CLT amb zona inicial isoterma

Aplicant l'equació anterior de l'energia en la forma integral de von Kármán i fent servir els dos perfils, el de velocitats i el de temperatures obtenim l'equació que relaciona els dos gruixos de capa límit amb zona inicial isoterma, zona que és manté a



la temperatura del fluid T_∞

$$\frac{\delta_H(x)}{\delta_T(x)} = 1,026 \times Pr^{1/3} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{-1/3}$$

com que ja sabem

determinar $\delta_H(x)$ amb aquesta equació podrem calcular $\delta_T(x)$ que ens feia falta per el perfil de temperatures.

Si $x_0=0$ $\frac{\delta_H(x)}{\delta_T(x)} = 1,026 \times Pr^{1/3} \Rightarrow \frac{\delta_H}{\delta_T} \approx Pr^{1/3}$ sent $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$

$\frac{\delta_H}{\delta_T} \approx \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{1/3}$ veiem que la disposició relativa de les capes límits hidrodinàmica i tèrmica depèn de forma directa del quocient entre la difusivitat del impuls mecànic (o viscositat cinemàtica $\nu = \frac{\mu}{\rho}$) i la difusivitat tèrmica $\left(\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}\right)$. Ara estem en condicions de determinar el perfil de temperatures i representem la solució en forma esquemàtica.

Qüestió 5: determinar el perfil de temperatures a partir de $x, x_0, u_\infty, T_\infty$ i les propietats.

$$\left\{ \begin{array}{l} x, x_0 \\ u_\infty, T_\infty \\ Prop. \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \\ \nu = \frac{\mu}{\rho} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \delta_H(x) = \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}} \right\} \rightarrow \left\{ \delta_T(x) = \frac{\delta_H(x)}{1,026} Pr^{-1/3} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4} \right]^{1/3} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \frac{T(x, y) - T_0}{T_\infty - T_0} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T(x)}\right)^3 \right\}$$

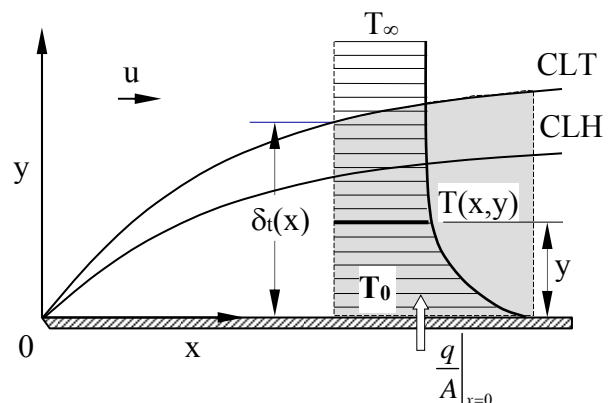
I amb aquest resultats podrem trobar la potència tèrmica transferida per la placa.

4.3.4 Coeficient de convecció laminar: placa plana

$$\frac{q}{A} \Big|_{y=0} = -\lambda_{fluid} \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} \stackrel{def.}{=} h_x (T_0 - T_\infty)$$

Definim el coeficient de convecció local:

$$h_x = \frac{-\lambda_{fluid} \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0}}{(T_0 - T_\infty)}$$



D'aquesta forma podem trobar el coeficient de convecció local a partir del perfil de temperatures. Integrant trobem el valor mig del coeficient de convecció $\bar{h}_{0-L} = \frac{1}{bL} \int_{x=0}^L h_x b dx$

$$\bar{h}_{0-L} = \frac{1}{bL} \int_{x=0}^L h_x b dx$$

Definim el nombre de Nusselt (local) com, $Nu_x = \frac{h(x)x}{\lambda_{fluid}}$ i el mig com $Nu_{0-L} = \frac{\bar{h}_{0-L} x}{\lambda_{fluid}}$

Qüestió 6: tenim una placa plana de llargada L i amplada b, amb $x_0=0$ (sense zona inicial isoterma), temperatura i velocitats del fluid, T_∞, u_∞ (regim laminar), i temperatura uniforme T_0 . Determinar el coeficient de convecció i Nusselt local i mig de la placa,

$$\left[\begin{array}{l} x, x_0 = 0 \\ u_\infty, T_\infty \\ Prop. \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{l} Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \\ \delta_H(x) = \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{l} \delta_T(x) = \frac{\delta_H(x)}{1,026} Pr^{-1/3} \\ u(x, y) = \dots, T(x, y) = \dots \end{array} \right] \rightarrow \left[h_x = \frac{-\lambda_{fluid} \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0}}{(T_0 - T_\infty)} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[h_x = 0,331 \frac{\lambda_{fluid}}{x} Pr^{\frac{1}{3}} Re_x^{0,5} \right] \rightarrow \left[Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda_{fluid}} = 0,331 Pr^{\frac{1}{3}} Re_x^{0,5} \right] \text{ Nusselt local}$$

La solució exacta de Blasius dona el coeficient 0,332 en lloc de 0,331. Per tant el Nusselt mig exacta de Blasius és,

$$\left[\bar{h}_{0-L} = \frac{1}{bL} \int_{x=0}^L h_x b dx \right] \rightarrow \left[\bar{h}_{0-L} = 2 h_{x=L} = 0,664 \frac{\lambda_{fluid}}{x} Pr^{\frac{1}{3}} Re_L^{0,5} \right] \rightarrow \left[Nu_{0-L} = 0,664 Pr^{\frac{1}{3}} Re_L^{0,5} \right]$$

sent $Re_L = \frac{u_\infty L}{\nu}$ el valor del nombre de Reynolds a l'extrem de la placa.

La transició entre règim laminar i turbulent en placa plana s'assoleix entre un Reynolds de 2×10^5 fins a 5×10^5 . En general prendrem un Reynolds crític igual a $Re_c = 5 \times 10^5$ malgrat en general caldrà escollir un valor en funció de la rugositat i condicions geomètriques de la superfície. Totes les propietats es determinen a $T_f = \frac{T_\infty + T_0}{2}$, temperatura de film.

4.3.5 Coeficient de convecció turbulent: placa plana

$$CLH \text{ zona laminar} \quad 0 < x \leq x_c \rightarrow Nu_x^L = 0,332 Re_x^{0,5} Pr^{\frac{1}{3}}$$

$$CLH \text{ zona turbulenta} \quad x > x_c \rightarrow Nu_x^T = 0,029 Re_x^{0,8} Pr^{0,43}$$

$$Nu_{0-L} = \frac{1}{\underbrace{bL}_A} \left(\int_{x=0}^{x_c} Nu_x^L \overbrace{b dx}^{dA} + \int_{x_c}^L Nu_x^T b dx \right) = 0,036 Pr^{0,43} (Re_L^{0,8} - Re_c^{0,8}) + 0,664 Pr^{\frac{1}{3}} Re_c^{0,5}$$

$$\text{sent } Nu_{0-L} = \frac{\bar{h}_{0-L} L}{\lambda_{fluid}}, \quad Re_L = \frac{u_\infty L}{\nu} \quad \text{i} \quad Re_c = \frac{u_\infty x_c}{\nu} \quad (\text{un valor entre } 2 \times 10^5 \text{ fins a } 5 \times 10^5)$$

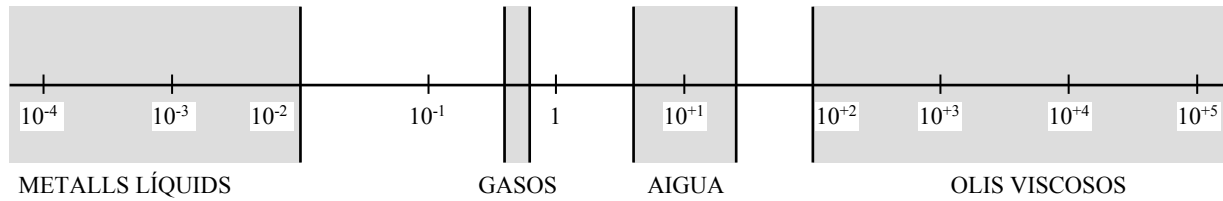
D'aquesta forma podem trobar un coeficient de convecció mig per una placa plana de llargada L i amplada b que tingui una zona laminar i la resta turbulenta.

Totes les propietats s'han de determinar a la temperatura de film $T_f = (T_0 + T_\infty)/2$

4.3.6 Exemple: càlcul de la capa límit tèrmica laminar per un metall líquid

Objectius: (convecció forçada: placa plana)

- Introduir el significat del número de Prandtl, en relació als gruixos de capa límit hidrodinàmica i tèrmica. Visualitzar en un dibuix l'espectre discret de números de Prandtl
- Càlcul del coef. de convecció (nº de Nusselt), del perfil de temperatures i del gruix de capa límit per un metall líquid (importància en el disseny de bescanviadors compactes de la indústria aeroespacial). Incloem al final una taula amb les propietats d'alguns metalls líquids.



Espectre discret del número de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ (definició n° de Prandtl)

Relació del número de Prandtl amb els gruixos de capa límit.

Sabem que la capa límit hidrodinàmica és la zona del flux on es produeix la difusió de l'impuls mecànic, sent la viscositat cinemàtica ν la propietat que mesura aquesta difusió. Anàlogament, la capa límit tèrmica és la zona del flux on es produeix la difusió de la calor i és la difusivitat tèrmica α la propietat que la mesura.

$$\left. \begin{array}{l} \delta_H(x) \text{ és proporcional a } \nu^n \\ \delta_T(x) \text{ és proporcional a } \alpha^n \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\delta_H(x)}{\delta_T(x)} \text{ és proporcional a } \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^n = Pr^n$$

Metalls Líquids, $Pr \rightarrow 0 \quad \frac{\delta_H}{\delta_T} \ll 1 \Rightarrow \delta_H \ll \delta_T$

Gasos, $Pr = 0,7 \quad \frac{\delta_H}{\delta_T} \approx 1 \Rightarrow \delta_H \approx \delta_T$

Aigua, $Pr > 1 \quad \frac{\delta_H}{\delta_T} > 1 \Rightarrow \delta_H > \delta_T$

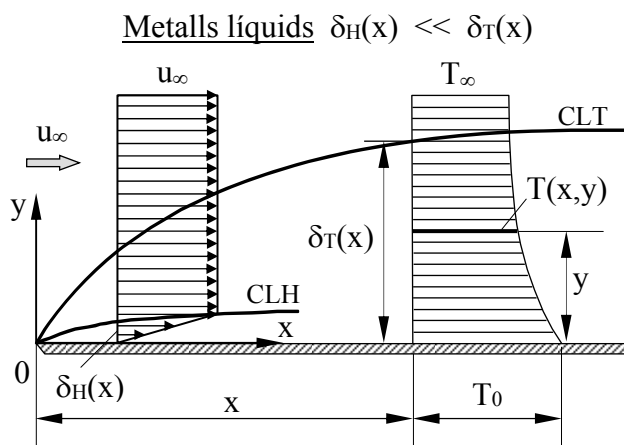
Olis viscosos, $Pr \rightarrow \infty \quad \frac{\delta_H}{\delta_T} \gg 1 \Rightarrow \delta_H \gg \delta_T$

Gruix de capa límit tèrmica, número de Nusselt i perfil de temperatures per a un metall líquid en règim laminar.

Els metalls líquids són emprats para aconseguir transferències elevades de calor, per exemple, en el disseny de bescanviadors compactes de la indústria aeroespacial.

Dades de partida: $Pr = 0,01$ (metall líquid); Determinar: $\delta_T(x), \frac{\delta_H}{\delta_T}, Nu_x$

Per un metall líquid el número de $Pr \rightarrow 0$ i com $\frac{\delta_H}{\delta_T} \approx Pr^n \Rightarrow \delta_H \ll \delta_T$



Al ser molt menor $\delta_H(x) \ll \delta_T(x)$ el perfil de velocitats dins de la capa límit tèrmica es pràcticament u_∞ .

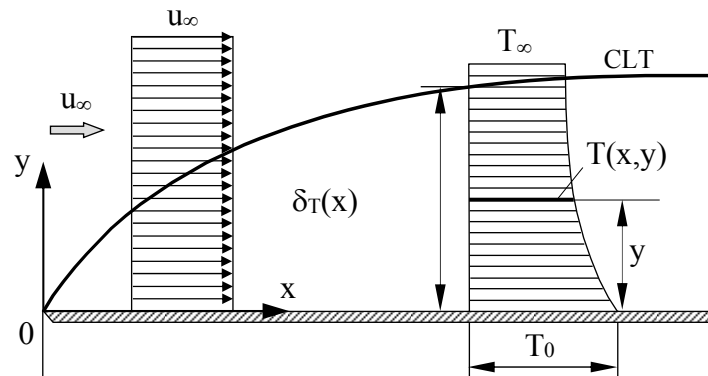
Per tant, negligim la petita distribució de velocitats $u(x,y)$ a la capa límit hidrodinàmica i considerem una distribució de velocitats uniforme i igual a u_∞ a tota la capa límit tèrmica.

Metalls líquids: model límit $\delta_H(x) \ll \delta_T(x)$

Observem que si sumem i restem T_0 a l'expressió obtenim,

$$T_\infty - T(x, y) = T_\infty - T_0 - T(x, y) + T_0 = \underbrace{(T_\infty - T_0)}_{\theta_\infty} - \underbrace{(T(x, y) - T_0)}_{\theta(x, y)}$$

Per tant $T_\infty - T(x, y) = \theta_\infty - \theta(x, y)$ que ens serà útil a la següent integral.



$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_T(x)} (T_\infty - T(x, y)) u(x, y) dy \right] + \frac{\mu}{\rho c_p} \left[\int_0^{\delta_H(x)} \left(\frac{du(x, y)}{dy} \right)^2 dy \right] = \alpha \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Prenent, $\frac{\theta(x, y)}{\theta_\infty} = \frac{T(x, y) - T_0}{T_\infty - T_0} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T(x)} \right)^3$; $u(x, y) = u_\infty = ct.$

Substituint en el primer membre de l'equació integral de conservació de l'energia, l'expressió de $T_\infty - T(x, y)$ així com el polinomi cúbic $\theta(y)$ resulta,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^{\delta_T(x)} \left[\theta_\infty - \theta_\infty \left(\frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T(x)} \right)^3 \right) \right] u_\infty dy \right\} &= \dots \\ \dots = \theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^{\delta_T(x)} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T(x)} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T(x)} \right)^3 \right] dy \right\} &= \dots \\ \dots = \theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx} \left[y - \frac{3}{2} \frac{y^2}{2\delta_T(x)} + \frac{1}{2} \frac{y^4}{\delta_T(x)^3} \right]_0^{\delta_T(x)} &= \theta_\infty u_\infty \frac{3}{8} \frac{d\delta_T(x)}{dx} \quad (\text{1er. membre eq. integ.}) \end{aligned}$$

Calculem el 2º membre $= \alpha \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}$ i com $\theta(x, y) = T(x, y) - T_0 \Rightarrow \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y}$

de forma que $\frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} = \theta_\infty \left[\frac{3}{2\delta_T(x)} - \frac{3}{2} \frac{y^2}{\delta_T(x)^3} \right] \Rightarrow \left. \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\theta_\infty}{\delta_T(x)}$

Igalant els dos membres obtenim una equació diferencial en $\delta_T(x)$,

$$\theta_\infty u_\infty \frac{3}{8} \frac{d\delta_T(x)}{dx} = \frac{3\theta_\infty}{2\delta_T(x)} \Rightarrow 2\delta_T d\delta_T = \frac{8\alpha}{u_\infty} dx \Rightarrow \delta_T(x) = \sqrt{\frac{8\alpha x}{u_\infty}}$$

Definició del coeficient de convecció local

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{A}_{cond. fluid} &= -\lambda_{fluid} \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} \\ \frac{q}{A}_{convecció} &= h_x (T_0 - T_\infty) \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_x = \frac{-\lambda_{fluid} \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}}{(T_0 - T_\infty)} = \frac{-\lambda_{fluid} \left. \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}}{-\theta_\infty}$$

$$\text{De forma que, } h_x = \frac{-\lambda_{fluid} \left. \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}}{-\theta_\infty} = \frac{-\lambda_{fluid} \frac{3 \theta_\infty}{2 \delta_T(x)}}{-\theta_\infty} = \frac{3 \lambda}{2 \delta_T(x)} = \frac{3 \lambda}{2} \sqrt{\frac{u_\infty}{8 \alpha x}}$$

Si emprem les següents variables adimensionals,

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c} \quad ; \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c}{\lambda} \quad ; \quad Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \quad ; \quad Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda_{fluid}}$$

Resulta, $Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda_{fluid}} = 0,53 \sqrt{Re_x Pr}$ que és l'expressió del Nusselt local.

Relació de capa límit hidrodinàmica i tèrmica (règim laminar)

El gruix de capa límit hidrodinàmica és, $\delta_H(x) = \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}}$ evidentment no depèn del Pr.

$$\frac{\delta_H(x)}{\delta_T(x)} = \frac{\frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}}}{\frac{\frac{4,64 x}{\sqrt{8 \alpha x}}}{\sqrt{u_\infty}}} = \frac{\sqrt{u_\infty x}}{\sqrt{\nu}} = 4,64 \sqrt{\frac{\nu}{8 \alpha}} \approx 1,64 \sqrt{Pr}$$

Substituint el valor del número de Pr = 0,01 resulta $\frac{\delta_H}{\delta_T} = 0,16$

Per tant el gruix de capa límit hidrodinàmica representa el 16 % aproximadament del gruix de capa límit tèrmica (règim laminar), sent així acceptable el model emprat.

Propietats d'alguns metalls líquids

METALL LÍQUID	T (K)	λ W/(m·K)	ρ kg/m ³	c_p J/(kg K)	$\mu \times 10^4$ kg/(m·s)	Pr
Plom PF 600 K	650	16,7	10530	158	23,9	0,023
	900	20,4	10230	155	14,9	0,011
Liti PF 453 K	500	43,7	514	4340	5,31	0,053
	900	55,9	473	4160	2,47	0,018
Mercuri PF 234 K	300	8,4	13530	140	14,9	0,025
	600	12,1	12780	140	8,31	0,010
Potassi PF 337 K	400	45,5	814	800	4,9	0,0086
	900	34,4	692	740	1,5	0,0031
Sodi PF 371 K	500	79,2	900	1335	4,2	0,0071
	900	62,1	792	1255	2,0	0,0040

Qüestió 7: un metall líquid [NaK, 45% - 55%, Pr=0,026] circula per el interior d'un tub de diàmetre $D_0=8 \text{ mm}=2r_0$ i temperatura superficial $T_0=120 \text{ }^\circ\text{C}$. En una secció a on el perfil de temperatures esta ja desenvolupat, aquest presenta un perfil de temperatures parabòlic (*flux*

laminar) $T(r) = T_0 - 5,229 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$ Al tractar-se d'un metall líquid suposem com a model,

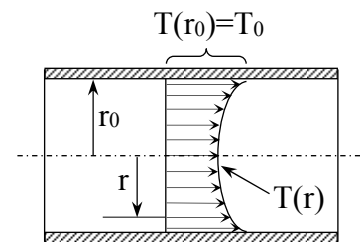
la simplificació d'un perfil de velocitats pla $u_m=0,2 \text{ m/s}$

Determinar:

- 1) El nombre de Reynolds 2) El flux de potència q/A a la superfície del tub
- 3) La temperatura mitja global T_m de la corrent (*mitja entàlpica*)
- 4) El coeficient de convecció local h en aquesta secció

Propietats: $\lambda = 25,6 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$, $\rho = 887,4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$,

$\nu = 6,522 \times 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, $c_p = 1130 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$



Solució:

1) El nombre de Reynolds val, $Re_D = \frac{u_m D_0}{\nu} = 2453$

2) Derivant el perfil de temperatures trobem el flux de potència, $\frac{dT}{dr} = 10 \times \frac{2r}{r_0^2}$

Obtenim $\left. \frac{q}{A} \right|_{r=r_0} = -\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_0} = -\lambda \left(10 \times \frac{2r}{r_0^2} \right) \Big|_{r=r_0} = -\frac{20\lambda}{r_0} = -128000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

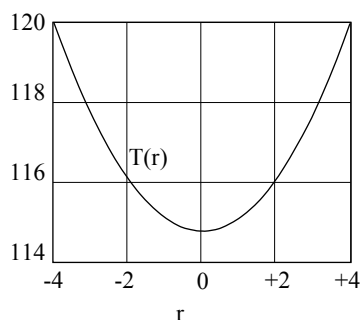
El signe negatiu ens diu que el sentit d'aquest flux és cap a l'eix del tub, o sigui estem escalfant el fluid.

3) Integrant trobem la temperatura mitja entàlpica de la corrent,

$$T_m = \frac{\int_0^{D_0/2} \rho u_m \overbrace{2\pi r dr}^{dS} T(r)}{\rho u_m \frac{\pi D_0^2}{4}} = 117,4 \text{ }^\circ\text{C} \quad (\text{si es multiplica al numerador i el denominador per } c_p)$$

queda mes clar que es tracta d'una temperatura mitja entàlpica)

4) De l'equació $q = h A (T_m - T_0)$ aïllem $h = \frac{\left. \frac{q}{A} \right|_{r=r_0}}{(T_m - T_0)} = \frac{-128000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{(117,4 - 120)} = 48958 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$



Destaquem que en un regim laminar hem assolit un coeficient de convecció molt elevat. Aquest fet minimitza les dimensions dels equips de transferència de calor que fan servir aquest tipus de fluids. Per això, els metalls líquids s'utilitzen molt a la indústria aeroespacial perquè permet aconseguir equips de menor pes amb les mateixes prestacions tèrmiques.

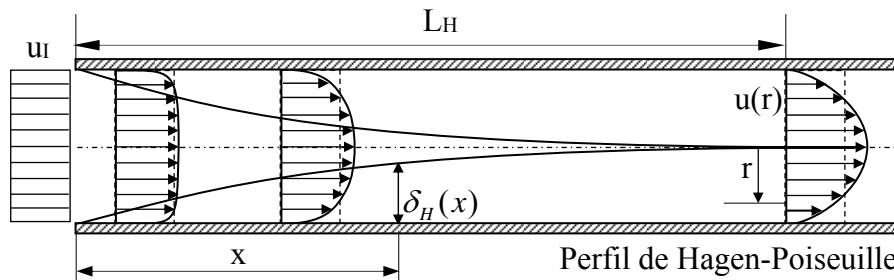
4.4 CONDUCTES (flux intern)

4.4.1 Longitud d'entrada hidrodinàmica en conductes

Quan un fluid s'introdueix a una velocitat uniforme u_i en un conducte, aquest es frenat a la paret (per la condició de no lliscament), i com que el cabal màssic s'ha de mantenir constant, si es redueix la velocitat aprop de la paret, haurà d'augmentar la velocitat al centre del conducte per compensar i poder així mantenir-se el cabal màssic.

Per tant, es redueix la velocitat a la paret i s'accelera el fluid al nucli del conducte.

Aquesta zona o part inicial del conducte, a on es manifesten aquest gradients de velocitat, o sigui a on creix la capa límit, s'anomena zona d'entrada hidrodinàmica. I a la seva longitud l'anomenem longitud d'entrada hidrodinàmica L_H .



En un tub i en regim laminar, podem estimar el seu valor amb l'expressió $L_H = 0,056 Re_D D$
 Exemple: Aigua, $Pr=10$ $Re_D=2000$, $D=20$ mm $L_H/D=112$ diàmetres que son 2,24 m de tub que veiem es un valor prou gran. En el cas de líquids molt viscosos, tipus oli, en els que la viscositat cinemàtica es molt gran i aleshores s'assoleixen Re molt petits ($Re=100$) la longitud d'entrada hidrodinàmica es molt reduïda.

En el cas dels gasos, per exemple aire a 300 K, $u=1,5$ m/s i $D=20$ mm resulta $L_H/D=105,7$ diàmetres que son 2,11 m també dona uns valors considerables.

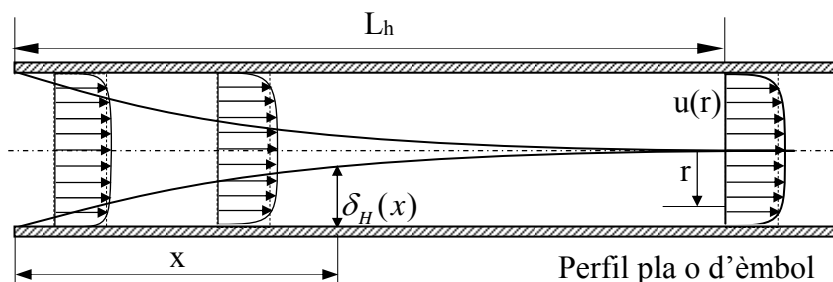
4.4.2 Condicions de flux hidrodinàmicament desenvolupat

Veiem ara la dependència en x del perfil de velocitat:

Si $x \leq L_h \Rightarrow \frac{\partial u(x, r)}{\partial x} \neq 0$ o sigui $u = u(x, r)$ perfil en desenvolupament

Si $x > L_h \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ o sigui $u = u(r)$ el perfil ja no depèn de x (perfil desenvolupat)

Si el règim es laminar $Re_D < 2300$, el perfil desenvolupat es parabòlic, i s'anomena de Hagen-Poiseuille, que es el mostrat a la figura anterior. En aquest cas $u = u(r)$ i el seu valor màxim al centre es el doble del la velocitat promig.

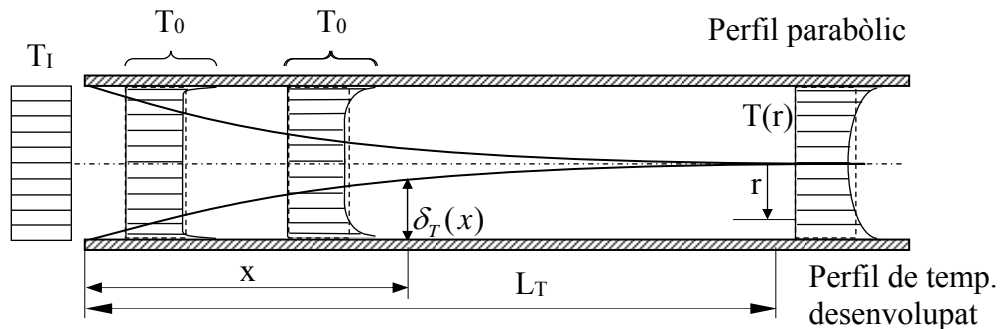


Si el règim es turbulent $Re_D > 10000$, el perfil desenvolupat es el que anomenem d'èmbol o pla. De fet el gradient principal apareix en una estreta capa anomenada subcapa laminar i en una

intermèdia, la capa d'esmortiment. La resta, la part major, és un perfil molt pla, és la zona a on es manifesta plenament la turbulència.

4.4.3 Longitud d'entrada tèrmica en conductes

Si la temperatura de la paret T_0 es diferent a la temperatura inicial T_I (uniforme) del fluid ens trobem amb una zona a on es manifesten els gradients de temperatura que es tradueix amb el creixement de la capa límit tèrmica. Quan el gruix de capa límit tèrmica arriba al centre, aleshores diem que el perfil ja es troba tèrmicament desenvolupat.



I la distància des de l'origen a on es troben les capes límits tèrmiques s'anomena longitud d'entrada tèrmica L_t

4.4.4 Condicions de flux tèrmicament desenvolupat

Si $x \leq L_t \Rightarrow \frac{\partial h_x}{\partial x} \neq 0 \Rightarrow h = h(x)$ perfil no desenvolupat tèrmicament

Si $x > L_t \Rightarrow \frac{\partial h_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow h = ct. \neq f(x)$ Perfil tèrmicament desenvolupat.

Aquesta condició es equivalent a dir que $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T - T_0}{T_b - T_0} \right) = 0$, sent T_0 la temperatura de paret en

contacte amb el fluid, i T_b l'anomenada temperatura mitja entàlpica. (no es igual a la temperatura mitja global d'un tram 0-L, $T_m = (T_I + T_F)/2$)

Es molt senzill i il·lustrador demostrar aquesta equivalència. I ho farem després de definir la temperatura mitja entàlpica.

4.4.5 Temperatura mitja entàlpica T_b en conductes circulars

Si recollim el cabal del tub de la figura anterior en un pot o tassa, i esperem que el fluid recollit arribi a l'equilibri tèrmic, aquesta temperatura d'equilibri serà que anomenem temperatura mitja entàlpica de la corrent T_b . Aquest fluid en equilibri tèrmic tindrà la mateixa entalpia que el conjunt de tota la corrent. Sent $u(r)$ i $T(r)$ els perfils de velocitat i temperatura de la corrent, calculem l'entalpia de tota la corrent, com la suma de l'entalpia de les diferents capes de gruix dr ,

$$\int_0^{r_0=D/2} \underbrace{\rho u(r) 2\pi r dr}_{dm} \vartheta_p T(r) = \dot{m}_{total} \vartheta_p T_b \quad \Rightarrow \quad T_b = \frac{\int_0^{r_0=D/2} \rho u(r) 2\pi r dr T(r)}{\dot{m}_{total}}$$

Aquest concepte es aplicable a tots el règims però es especialment útil en regim laminar, a on els perfils son parabòlics i ben coneguts. En règim turbulent, al ser els perfils molt plans, es parla en cada secció d'una única temperatura $T(x)$ (que coincideix amb T_b) ja que es negligeixen els gradients a la molt fina subcapa laminar i d'escorçament.

$$\text{Regim laminar } Re_D \leq 2300 \quad \left. \frac{q}{A} \right|_x = h_x [T_0(x) - T_b(x)]$$

$$\text{Regim turbulent } Re_D > 10000 \quad \left. \frac{q}{A} \right|_x = h_x [T_0(x) - T(x)]$$

Si escalfem les parets d'un tub, és obvi que la temperatura mitja entàlpica T_b augmentarà amb x , i per tant $T_b = T_b(x)$. Aleshores quan podem dir que el flux està tèrmicament desenvolupat? Sabem que en regim laminar,

$$h_x = \frac{-\lambda_{fluid} \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}}{[T_0(x) - T_b(x)]} = -\lambda_{fluid} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T(x, y)}{T_0(x) - T_b(x)} \right) = -\lambda_{fluid} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T(x, y) - \overbrace{T_b(x)}^{\neq f(y)}}{T_0(x) - T_b(x)} \right) =$$

Observem que $T_0(x) - T_b(x)$ entra a dins de la ∂y perquè son funcions de x ,

$$\frac{dh_x}{dx} = -\lambda_{fluid} \frac{\partial}{\partial y} \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T(x, y) - T_b(x)}{T_0(x) - T_b(x)} \right)}_0 \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_x = ct. = h_\infty \quad (\text{és veu l'equivalència})$$

Si es vol entendre a fons aquest concepte, recomano llegir l'apartat 8.2.3 de l'Incropera. En regim turbulent, tenim el mateix resultat emprant $T(x)$ en lloc de $T_b(x)$

Longituds pràctiques d'entrada hidrodinàmica i tèrmica en tubs

Regim laminar: $L_{H, laminar} = 0,056 Re_D D$

$$\begin{cases} \text{c.c. temp. de paret } T_0 = ct. & \rightarrow L_{H, laminar} = 0,033 Re_D Pr D \\ \text{c.c. flux a la paret } q/A = ct. & \rightarrow L_{H, laminar} = 0,043 Re_D Pr D \end{cases}$$

Regim turbulent: $L_{H, turbulent} = 1,359 \sqrt[4]{Re_D} D$, $L_{H, turbulent} \ll L_{H, laminar}$

En general es pren, $L_{H, turbulent} \approx L_{T, turbulent} = 10 D$

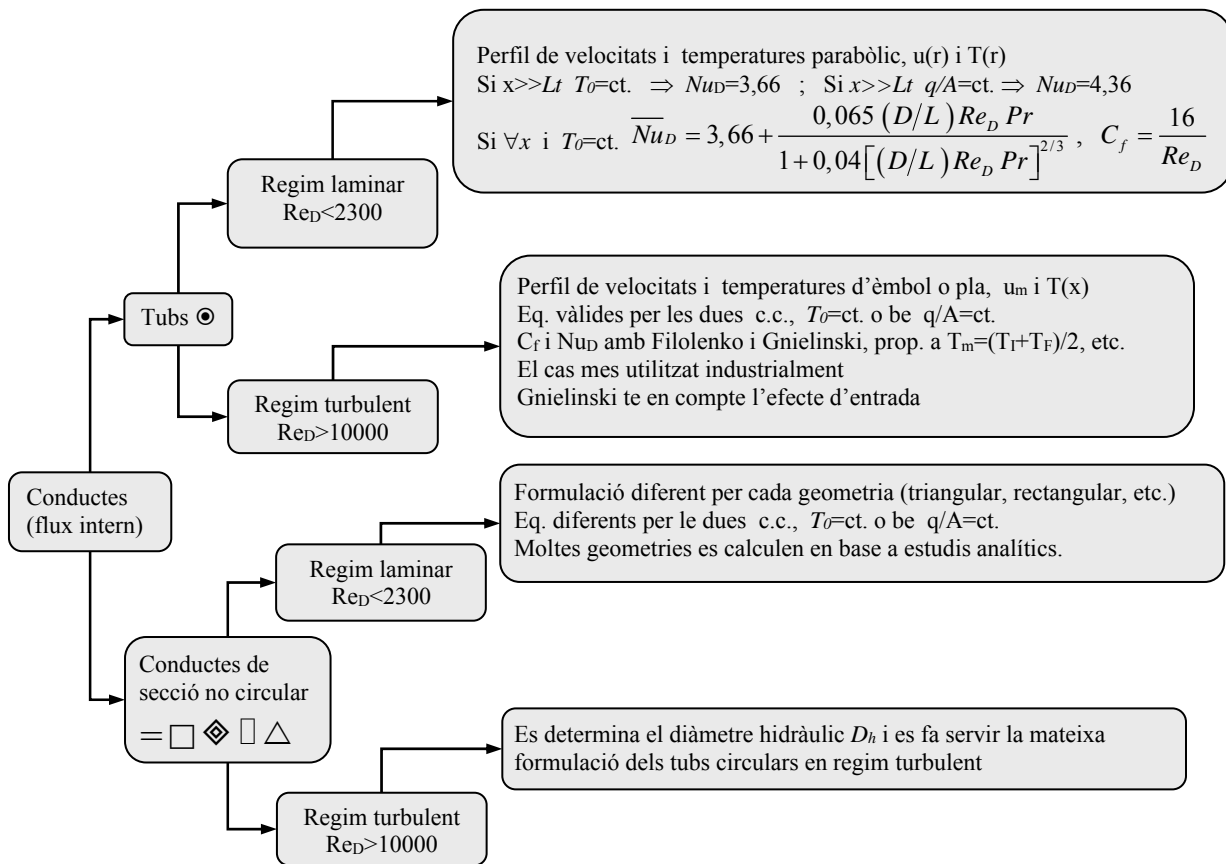
El coeficient de convecció local assoleix el seu valor màxim a l'entrada, i es va reduint des de $x=0$ fins a $x=L_t$ a on ja es manté constant. (excepte per la petita variació que dona el fet de que les propietats depenen de la temperatura)

Per tant, se tenim que calcular transferències de calor en tubs molt curts, de l'ordre de $L=10D$ haurem de fer servir expressions que tinguin en compte l'efecte d'entrada.

4.4.6 Càlcul del coef. de convecció en conductes: metodologia general

- 1) En primer lloc identificarem el tipus de secció i la longitud L del conducte.
- 2) Tipus de boca d'entrada (arrodonida o de canto viu, etc.) i la rugositat de la superfície interna del conducte. En general en transferència de calor es fan servir tubs llisos.
- 3) Emprant el diàmetre hidràulic determinem el nombre de Reynolds i veiem el regim
- 4) Identifiquem les condicions de contorn ($T_0=ct.$ o $q/A=ct.$)
- 5) Avaluem la longitud d'entrada hidrodinàmica i tèrmica i la comparem amb la longitud L .
- 6) Si es tracta d'un conducte curt, seran molt importants els efectes d'entrada
- 7) El diagrama de blocs que s'inclou a continuació, vol facilitar una idea del camí a seguir.

8) Si el regim es laminar i la secció no es circular, i el tub fos molt curt, estem davant d'un problema complex però abordable. Caldrà disposar del text “*Laminar Flow Forced Convection in Ducts*” de Shah R.K. & A.L. London, Academic Press, New York 1978



4.4.7 Coeficient de fricció promig (0-L) per conductes de secció circular

Regim laminar, sent $x_h^+ = \frac{x/D}{Re_D} \Rightarrow C_f Re_D = \frac{3,44}{\sqrt{x_h^+}} + \frac{1,25}{4 x_h^+} + 16 - \frac{3,44}{\sqrt{x_h^+}}$ si $x \rightarrow \infty C_f = \frac{16}{Re_D}$

L'equació anterior ens permet calcular el C_f per tubs curts en regim laminar.

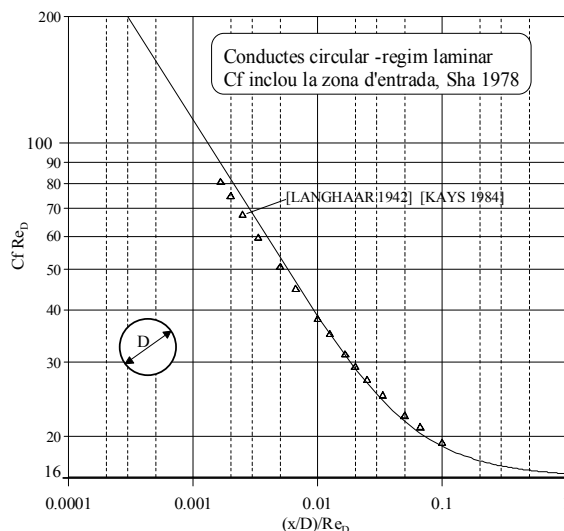
Regim turbulent (i transició), equació de Colebrook (1939)

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = -4,0 \log_{10} \left(\frac{e/D}{3,7} + \frac{1,255}{Re_D \sqrt{C_f}} \right)$$

Es pot aplicar pràcticament a partir de $Re_D > 3000$ o sigui que pràcticament ens serveix pel règim de transició.

A partir d'aquesta equació Moody va realitzar el seu famós gràfic.

I han equacions explícites com la de CHEN que s'aproximen molt a la de Colebrook.



4.4.8 Conductes en regim turbulent. Hipòtesi considerades

Estudiem a continuació el bescanvi de calor entre un fluid que circula per l'interior d'un conducte de secció arbitrària, en règim turbulent i un altre fluid que l'envolta exteriorment.

Hipòtesi considerades:

- 1) Suposem la temperatura $T(x)$ amitjanada a cada secció del conducte.
- 2) Tres condicions de contorn opcionals :
 - a) Fluid que envolta el conducte a temperatura constant (tram 0-L).
 - a.1) Temperatura de paret uniforme. ($R_{xapa} + R_{ext} \ll R_{int}$)
 - b) Flux de potència tèrmic (q/A) constant a la paret $\forall x$.
- 3) Coeficients de convecció h_c interior i exterior constants pel tram 0-L (prenem un valor mig pel tram)
- 4) Propietats constants pel tram 0-L a la temperatura mitja del tram $T_m = (T_I + T_F)/2$.
- 5) Negligim la conducció tèrmica axial (no considerem els metalls líquids $Pr \rightarrow 0$).
- 6) Règim estacionari.

Balanç d'energia d'un diferencial de conducte:

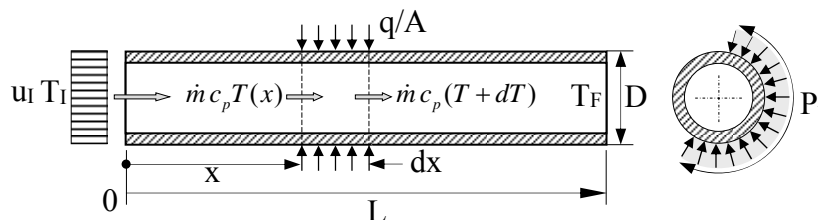
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Potència transferida (fluid calent} \rightarrow \text{fluid fred)} \\ \text{en un diferencial de conducte} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Augment d'entalpia de la} \\ \text{corrent freda per unitat de temps} \end{array} \right\}$$

$$\frac{q}{A} \Big|_x dA = \dot{m} c_p dT$$

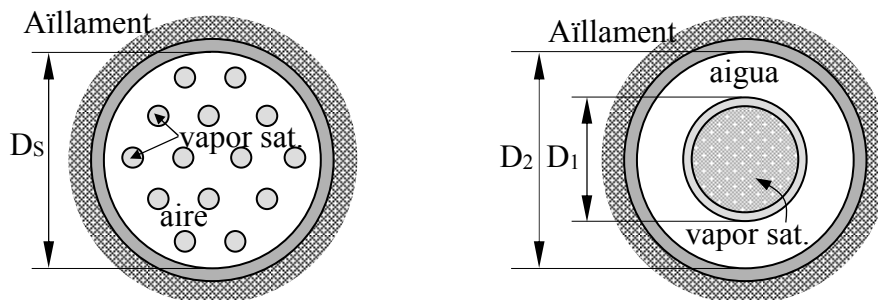
(eq. 1)

4.4.9 Característiques geomètriques

Escalfament o refredament d'un fluid en circular per un conducte de secció qualsevol.



$P_t =$ **Perímetre tèrmic** (perímetre de la secció recta per on té lloc la transferència tèrmica)
 $P_h =$ **Perímetre hidràulic** (perímetre de la secció recta on el fluid frega o mulla al conducte)
 $D_h =$ **Diàmetre hidràulic** $D_h = 4 S / P_h$ (sent S la secció de flux)



Considerem tres casos. 1) Un sol tub: $P_t = \pi D$, $P_h = \pi D$ i $D_h = D$
 2) Un feix de 14 tubs contingut en una carcassa: el vapor saturat que circula per l'interior dels tubs escalfa un cabal d'aire pel costat carcassa. 3) També considerem el cas d'un doble tub.

2) *Carcassa amb n=14 tubs:*

D_s = diàmetre de la carcassa

D = diàmetre exterior d'un tub

$$P_t = n \pi D \quad ; \quad P_h = n \pi D + \pi D_s$$

$$S = \frac{\pi D_s^2}{4} - n \frac{\pi D^2}{4} \quad ; \quad D_h = 4 \frac{S}{P_h}$$

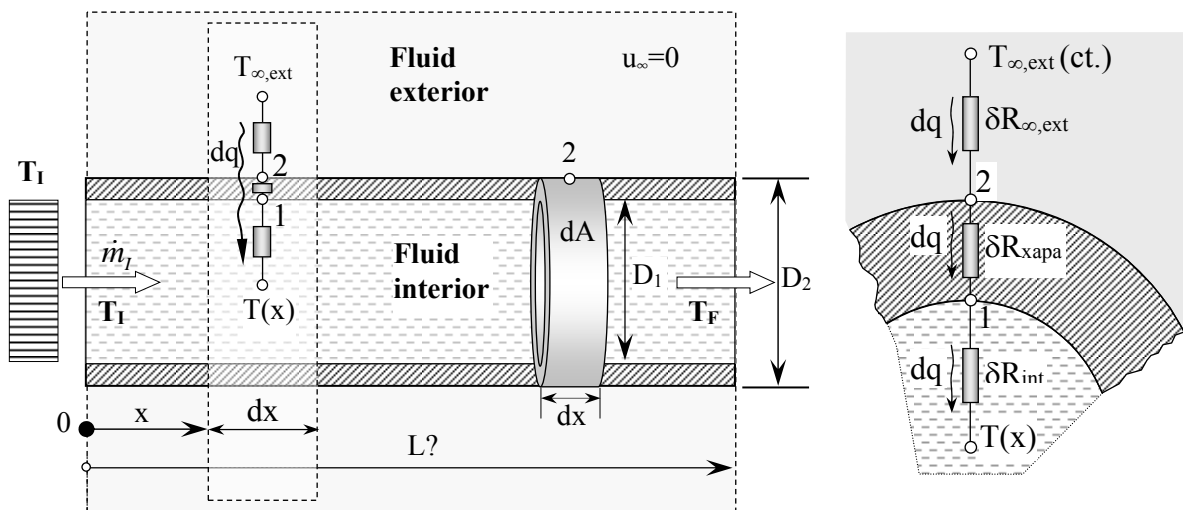
3) *Doble tub:*

$$P_t = \pi D_1 \quad ; \quad P_h = \pi D_2 + \pi D_1$$

$$S = \frac{\pi D_2^2}{4} - \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi}{4} (D_2^2 - D_1^2) \text{ (secció)}$$

$$D_h = 4 \frac{S}{P_h} = 4 \frac{\frac{\pi}{4} (D_2^2 - D_1^2)}{\pi (D_2 + D_1)} = D_2 - D_1$$

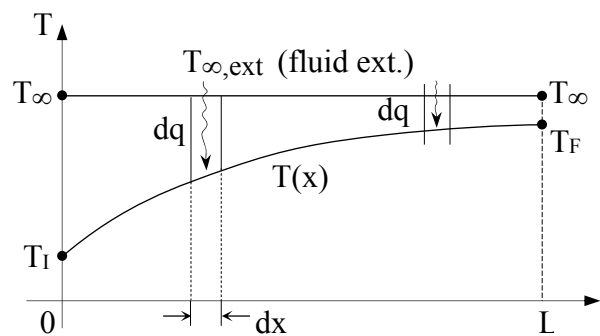
4.4.10 Conduite envoltat d'un fluid a temperatura constant $T_{\infty,ext}$ (o T_{vapor}) (cas a)



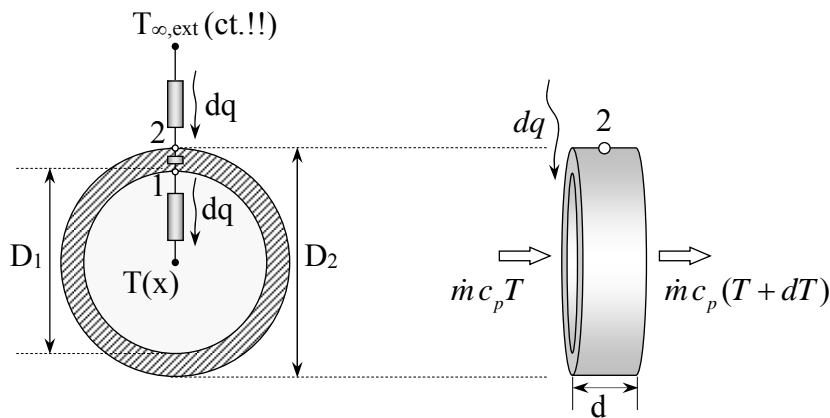
Objectiu: 1) Introduïm pel conducte de la figura (tram 0-L) un cabal màssic \dot{m}_i de fluid a la temperatura d'entrada T_I (pressió P_I). Trobar
 1) La temperatura de sortida T_F en $x=L$
 2) La potència bescanviada q i la pèrdua de càrrega ΔP per el tram 0-L

Hipòtesis:

- 1) Cap resistència és negligible
- 2) h_{c_int} = valor mig tram 0-L (fluid interior)
- 3) h_{c_ext} = valor mig tram 0-L (fluid exterior)
 (un valor per tot el tram 0-L!!)



Veiem com el salt tèrmic es va reduint conforme avancem al llarg del conducte
 D'acord a la hipòtesi 3ª, considerem que tant el coeficient de convecció interior com exterior és un valor constant per tot el tram 0-L. Si el tram és massa gran per poder aplicar aquesta hipòtesi només cal que el subdividim en trams més petits.



Balanç de potència d'un dx de condeute, (sistema obert)

$$dq = \dot{m} c_p dT \quad (\Sigma \text{ entalpies})$$

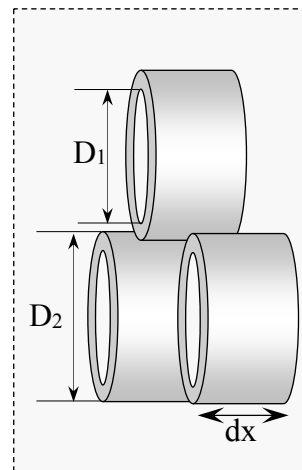
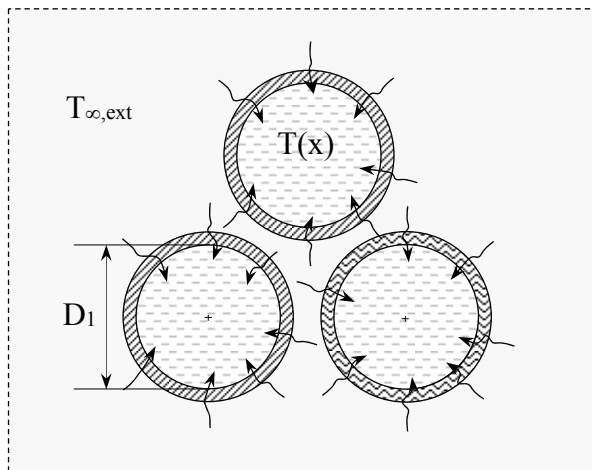
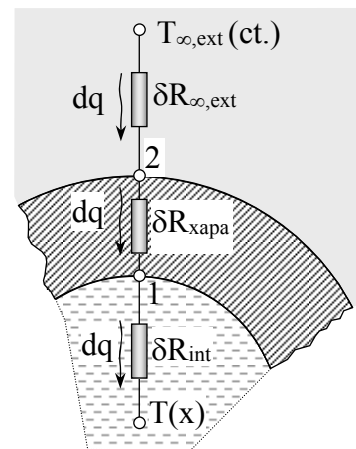
Suposem, per facilitar la lectura, que el fluid exterior es el fluid calent.

La potència transferida pel dx d'un sol tub o condeute seria,

$$dq_{1_tub} = \frac{T_{\infty,ext} - T(x)}{\frac{1}{h_{c,ext} \pi D_2 dx} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2 \pi \lambda_{xapa} dx} + \frac{1}{h_{c,int} \pi D_1 dx}}$$

Al tractar-se d'un diferencial de condeute (dx al denominador), aquestes resistències tèrmiques son molt grans. No obstant, el que importa, es el seu valor relatiu, per saber quina d'elles serà mes decisiva en el mecanisme de transferència de calor.

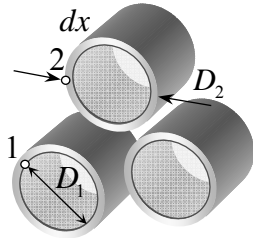
Ara suposem que tenim $n_t=3$ tubs i volem determinar la potència transferida total, òbviament només caldrà multiplicar per 3 !!



$$dq_{total} = 3 dq_{1_tub} = 3 \frac{T_{\infty,ext} - T(x)}{\frac{1}{h_{c,ext} \pi D_2 dx} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2 \pi \lambda_{xapa} dx} + \frac{1}{h_{c,int} \pi D_1 dx}} \quad \text{i si posem el 3 al denominador,}$$

$$dq_{total} = 3 dq_{1_tub} = \frac{T_{\infty,ext} - T(x)}{\frac{1}{h_{c,ext} \underbrace{3\pi D_2 dx}_{dA_2}} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi\lambda_{xapa} dx \cdot 3} + \frac{1}{h_{c_int} \underbrace{3\pi D_1 dx}_{dA_1}}}$$

sent $\begin{cases} dA_1 = 3\pi D_1 dx \\ dA_2 = 3\pi D_2 dx \end{cases}$

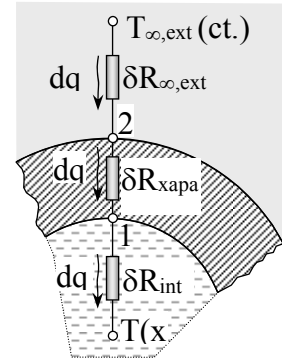


Definim ara el coeficient de transferència global U
 El seu valor numèric ens informarà de si el dispositiu és molt o poc eficient en quan a la capacitat de transferir calor.

Per un dx del feix ($n_t=3$ tubs) podem parlar de U_2 o be de U_1 segons la superfície considerada sigui

l'exterior (2) o la interior (1),

A la següent equació queda clara la definició de U_2 ,



$$dq_{total} = \frac{T_{\infty,ext} - T(x)}{\sum_i \delta R_i} \stackrel{def}{=} U_2 dA_2 [T_{\infty,ext} - T(x)] \Rightarrow U_2 dA_2 = \frac{1}{\sum_i \delta R_i} \Rightarrow U_2 = \frac{1}{dA_2 \sum_i \delta R_i}$$

$$dq_{total} = \frac{T_{\infty,ext} - T(x)}{\sum_i \delta R_i} = \frac{T_{\infty,ext} - T(x)}{\frac{1}{h_{c,ext} dA_2} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi\lambda_{xapa} dx \cdot 3} + \frac{1}{h_{c_int} dA_1}} \stackrel{def}{=} U_2 dA_2 [T_{\infty,ext} - T(x)]$$

Sent $\begin{cases} dA_1 = 3\pi D_1 dx \\ dA_2 = 3\pi D_2 dx \end{cases}$ i per tant, $\frac{dA_2}{dA_1} = \frac{D_2}{D_1}$ i simplificant obtenim $U_2 = \frac{1}{dA_2 \sum_i \delta R_i}$

Aleshores, $U_2 = \frac{1}{\frac{1}{h_{c,ext}} + \frac{D_2 \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\lambda_{xapa}} + \frac{1}{h_{c_int}} \frac{D_2}{D_1}}$

Veiem que U_2 no depèn ni del nombre de conductes ($n_t=3$) ni de la seva longitud (dx)

$$U_2 = \frac{1}{\frac{1}{h_{c,ext}} + \frac{D_2 \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\lambda_{xapa}} + \frac{1}{h_{c_int}} \frac{D_2}{D_1}}$$

Veurem mes endavant (*) que si ho calculem a partir de les resistències totals (fent servir la longitud total L en lloc d'un diferencial dx), el resultat és invariable, o sigui ens dona el mateix valor numèric de U_2 i continua sent òbviament independent de L i n_t . (això és la conseqüència de considerar constants els dos coeficients de convecció

a lo llarg de tot el tram 0-L)

Veiem que $U_2 dA_2$ no és res més que una conductància total [W/K]. Ara podem escriure,

$dq_{total} = U_2 dA_2 [T_{\infty,ext} - T(x)]$ (balanç transversal de potència d'un dx del feix de 3 conductes)
 $dq_{total} = \dot{m}_1 c_p dT(x)$ (balanç longitudinal de potència d'un dx del feix de $n_i=3$ conductes, sent òbviament \dot{m}_1 el cabal total del fluid del costat interior).

Igualant i separant variables obtenim,

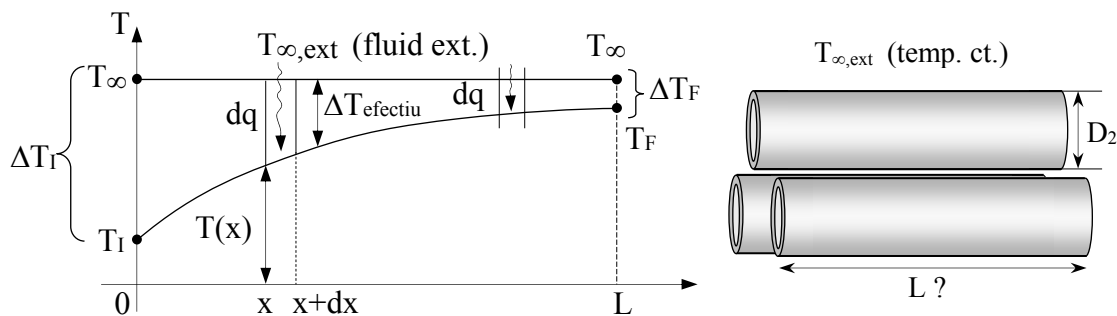
$$\dot{m}_1 c_p dT(x) = U_2 \underbrace{dA_2}_{n_i \pi D_2 dx} [T_{\infty,ext} - T(x)] \Rightarrow \frac{dT(x)}{T_{\infty,ext} - T(x)} = \frac{U_2 \overbrace{n_i \pi D_2}^{Perimetre}}{\dot{m}_1 c_p} dx$$

$$\int_{T_1}^{T(x)} \frac{dT(x)}{T_{\infty,ext} - T(x)} = \int_0^x \frac{U_2 \overbrace{n_i \pi D_2}^{P_{èrmic}}}{\dot{m}_1 c_p} dx \quad \text{obtenim} \quad T(x) = T_{\infty,ext} + (T_1 - T_{\infty,ext}) \times \exp\left(-\frac{U_2 \overbrace{n_i \pi D_2}^{P_{èrmic}}}{\dot{m}_1 c_p} x\right)$$

Aquesta es l'equació que farem servir per determinar el perfil de temperatures del fluid del costat interior. Recordeu que per hipòtesis $h_{c,ext}$ i $h_{c,int}$ son valors únics per tot el tram 0-L, U_2 pren un únic valor per tot el tram 0-L i U_2 inclou totes les resistències tèrmiques!!

4.4.11 MLDT (Mitja Logarítmica de la Diferència de Temperatures)

Determinem ara un salt tèrmic efectiu que anomenarem ΔT_{MLDT} o Mitja Logarítmica de la Diferència de Temperatures. Es fa servir molt pel disseny tèrmic de bescanviadors.



$$\left. \begin{matrix} A_1 = n_i \pi D_1 L \\ A_2 = n_i \pi D_2 L \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1}{D_2}, \quad \text{Definició } \Delta T_{efectiva} \left\{ \begin{matrix} q_{0-L} = \dot{m}_1 c_p (T_F - T_1) \stackrel{def}{=} U_2 A_2 \overbrace{\Delta T_{efectiva}}^? \\ \Rightarrow \Delta T_{efectiva} = \frac{\dot{m}_1 c_p [T(L) - T_1]}{U_2 A_2} \end{matrix} \right.$$

Calculem $T(L)$ emprant la exponencial trobada a l'apartat anterior, substituïm i obtenim,

$$\Delta T_{efectiva} = \Delta T_{MLDT} = \frac{\Delta T_I - \Delta T_F}{\ln\left(\frac{\Delta T_I}{\Delta T_F}\right)} = 51,5 \quad \text{amb} \quad \begin{cases} \Delta T_I = T_{\infty,ext} - T_1 = \\ \Delta T_F = T_{\infty,ext} - T_F \end{cases}$$

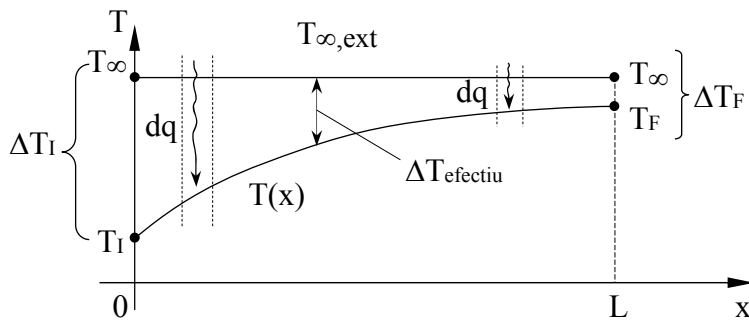
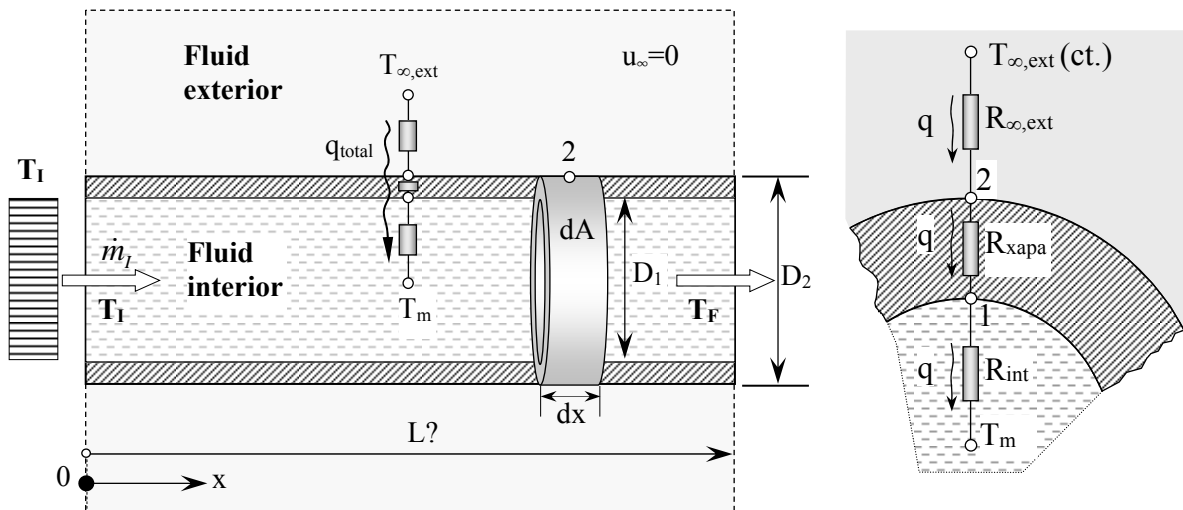
Per tant, per determinar la potència total, $q_{total} = q_{0-L} = U_2 A_2 \Delta T_{MLDT} = \dot{m}_1 c_p [T_F - T_1]$

Comprovació del càlcul de la U_2 pel tram 0-L (*): determinem els coeficients de convecció pel tram 0-L amb les propietats avaluades a la temperatura mitja global del tram, $T_m = \frac{T_I + T_F}{2}$

Calculem les resistències tèrmiques totals de convecció interior, de convecció exterior i la resistència de la xapa o sigui **per tot el tram 0-L** i per tot el feix de n_t tubs.

$$R_{\infty,ext} = \frac{1}{h_{c,ext} A_2} \quad (\text{convecció exterior}) \quad ; \quad R_{xapa} = \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi \lambda_{xapa} L n_t} \quad (\text{conducció xapa})$$

$$R_{int} = \frac{1}{h_{c,int} A_1} \quad (\text{convecció interior}) \quad \text{Veiem al denominador de } R_{xapa} \text{ el nombre de tubs } n_t$$



Amb les resistències totals anteriors determinem el coeficient de transferència global U_2 referit a la superfície total $A_2 = n_t \pi D_2 L$ (tot el tram 0-L i els n_t tubs del feix)

$$U_i A_i = U_1 A_1 = \overset{?}{U_2} A_2 = \frac{1}{\sum_i R_i} = \frac{1}{\frac{1}{h_{c,ext} A_2} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi \lambda_{xapa} L n_t} + \frac{1}{h_{c,int} A_1}} \quad \text{i d'aquesta equació aïllem } U_2$$

$$U_2 = \frac{1}{\frac{1}{h_{c,ext} A_2} + \frac{A_2 \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi \lambda_{xapa} L n_t} + \frac{1}{h_{c,int} A_1}} = \frac{1}{\frac{1}{h_{c,ext}} + \frac{D_2 \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2 \lambda_{xapa}} + \frac{1}{h_{c,int} D_1}}$$

Veiem que obtenim la mateixa expressió per U_2 i que igualment no depèn ni de L ni del nombre de tubs n_t , el que ens permet calcular, si ho desitgem, aquest coeficient U_2 amb les resistències tèrmiques associades només a un tub.

Si en un exercici ens demanessin quina ha de ser la longitud L necessària del feix de tubs (n_t =nombre de tubs) per aconseguir que la temperatura del fluid passi de T_I a un valor final de disseny T_F , calcularíem directament la potència bescanviada com la variació d'entalpies (Δh) al ser el conducte un sistema obert, $q_{total} = \dot{m}_l c_p (T_F - T_I)$ de forma que

$$q_{total} = q_{0-L} = U_2 A_2 \Delta T_{MLDT} = U_2 \underbrace{n_t \pi D_2 L}_{A_2} \Delta T_{MLDT} \Rightarrow L_{nova} = \frac{q_{total}}{U_2 n_t \pi D_2 \Delta T_{MLDT}}$$

Per una posició x i per un perímetre tèrmic $P_{t2} = n_t \pi D_2$, essent,

$\dot{m}_l = \rho_l u_l S_{total}$ amb $S_{total} = n_t \frac{\pi D_1^2}{4}$, la distribució de temperatures del fluid que circula

pel conducte és, $T(x) = T_{\infty,ext} + (T_I - T_{\infty,ext}) \times \exp\left(-\frac{U_2 \overbrace{n_t \pi D_2}^{P_{t2}}}{\dot{m}_l c_p} x\right)$, és opcional referir-ho tot a

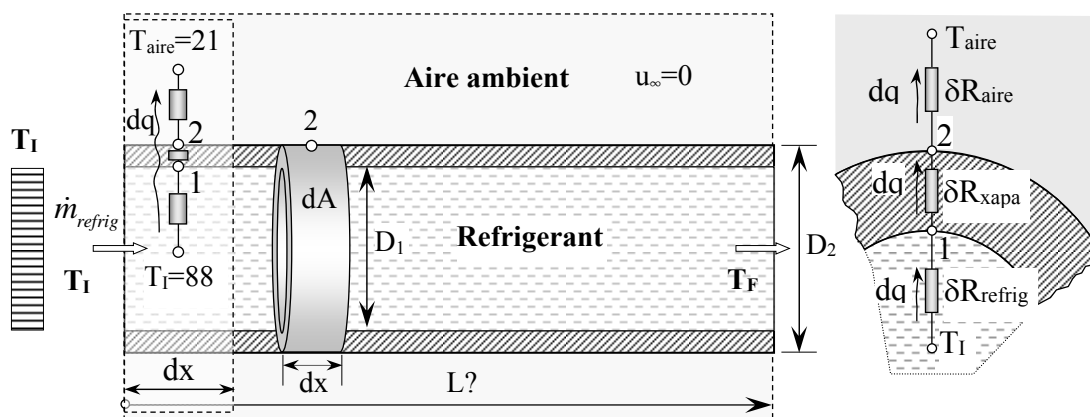
la superfície 1, i aleshores substituiríem el 2 per un 1 a l'equació anterior.

Si el conducte no és de secció circular fem servir el diàmetre hidràulic D_h i la secció de flux S_h

Qüestió 8: El tub de descàrrega del compressor d'un frigorífic domèstic condueix el refrigerant inicialment a 88°C , els diàmetres interior i exterior són respectivament 20 i 24 mm en un ambient a 21°C . La seva conductivitat és $\lambda_c = 390 \text{ W}/(\text{K}\cdot\text{m})$ i els coeficients de transmissió superficial interior i exterior són respectivament 120 i $12 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$.

Calcular

- 1) La temperatura de la superfície exterior a l'entrada del tub (T_2 en $x=0$).
- 2) El coeficient global de transferència de calor referit a la superfície exterior (U_2)
- 3) Si el cabal de refrigerant és $0,08 \text{ kg/s}$ i la seva calor específica és $1080 \text{ J}/(\text{kg K})$, calcular la longitud L necessària per que el refrigerant es refredi fins una temperatura de 60°C



$D_1 = 0,020 \text{ m}$, $D_2 = 0,024 \text{ m}$, $dx = 0,010 \text{ m}$, $T_{aire} = 21^\circ\text{C}$, $T_I = 88^\circ\text{C}$, $T_F = 60^\circ\text{C}$
 $\lambda_c = 390 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, $h_{c_int} = 120 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$, $h_{c_ext} = 12 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$, $\dot{m}_{refrig} = 0,080 \text{ kg/s}$
 $c_p = 1080 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$

$$\delta R_{aire} = \frac{1}{h_{c,ext} \underbrace{\pi D_2 dx}_{dA_2}} = 110,5 \quad ; \quad \delta R_{xapa} = \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi \lambda_c dx} = 0,00744 \quad ; \quad \delta R_{refrig} = \frac{1}{h_{c,int} \underbrace{\pi D_1 dx}_{dA_1}} = 13,3$$

Son les resistències de convecció exterior, de conducció de la xapa i de convecció interior d'un dx just a l'entrada. Si igualem la potència dq calculada entre T_2 i T_{aire} i entre T_1 i T_{aire} ,

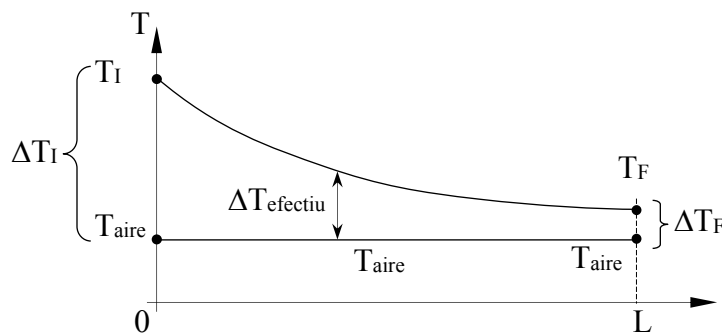
$$dq = \frac{T_{2-x=0} - T_{aire}}{\delta R_{aire}} = \frac{T_1 - T_{aire}}{\delta R_{aire} + \delta R_{xapa} + \delta R_{refrig}} \quad \text{aïllem la } T_2 \text{ en } x=0$$

$$T_{2-x=0} = T_{aire} + \frac{\delta R_{aire}}{\delta R_{aire} + \delta R_{xapa} + \delta R_{refrig}} (T_1 - T_{aire}) = 80,8 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (\text{és simplifica el } dx !!)$$

Sabem que per determinar el coeficient de transferència global U_2 ho podem fer emprant un dx o be amb les resistències totals (emprant la desconeguda L), ja que resulta independent de L .
Ho fem amb les resistències totals.

$$U_2 A_2 = \frac{1}{R_{aire} + R_{xapa} + R_{refrig}} \Rightarrow U_2 = \frac{1}{A_2 [R_{aire} + R_{xapa} + R_{refrig}]}$$

$$U_2 = \frac{1}{\underbrace{\pi D_2 L}_{A_2} \left[\frac{1}{h_{c,ext} \underbrace{\pi D_2 L}_{A_2}} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi \lambda_c L} + \frac{1}{h_{c,int} \underbrace{\pi D_1 L}_{A_1}} \right]} = \frac{1}{\frac{1}{h_{c,ext}} + \frac{D_2 \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\lambda_c} + \frac{1}{h_{c,int}} \frac{D_2}{D_1}} = 10,7$$



Com que coneixem la temperatura inicial (major que la final !) podem determinar la potència.

$$q_{0-L} = \dot{m}_{refrig} c_p (T_1 - T_F) = 2419,2 \text{ W}$$

Al conèixer totes les temperatures, podem determinar la MLDT, mitja logarítmica de la diferència de temperatures.

Amb els salts als extrems $\begin{cases} \Delta T_I = T_1 - T_{aire} = 67 \\ \Delta T_F = T_F - T_{aire} = 39 \end{cases}$ trobem $\Delta T_{MLDT} = \frac{\Delta T_I - \Delta T_F}{\ln\left(\frac{\Delta T_I}{\Delta T_F}\right)} = 51,7$

Ara podem trobar la longitud necessària L d'una forma directa fent servir,

$$q_{total} = q_{0-L} = U_2 A_2 \Delta T_{MLDT} = U_2 \pi D_2 L \Delta T_{MLDT} \Rightarrow L = \frac{q_{total}}{U_2 \pi D_2 \Delta T_{MLDT}} = 57,88 \text{ m}$$

També podem trobar la L fent servir l'equació exponencial del cas a), ja que coneixem la

temperatura d'entrada i sortida, $T_F = 60 = T_{aire} + (T_1 - T_{aire}) \times \exp\left(-\frac{U_2 \pi D_2}{\dot{m}_{refrig} c_p} L\right)$ només cal

aïllar la L fent servir la solve amb l'HP. Òbviament dona el mateix.

Exemple 1:

Suposem unes barres sòlides que generen una determinada potència tèrmica. (efecte joule, combustible nuclear, etc.) Aplicariem la condició de contorn b) al conèixer q/A (apartat 4.4.8). El perímetre tèrmic és clarament diferent que el perímetre hidràulic.

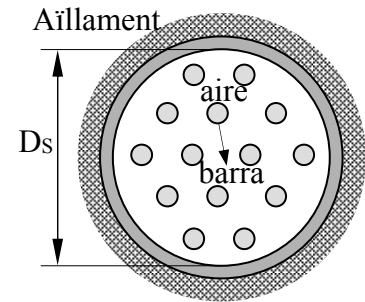
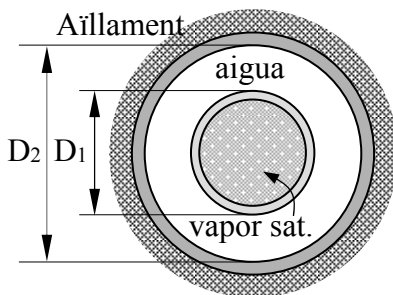


Fig. inferior → Si les circumstàncies ens permeten suposar que la temperatura exterior del conducte intern és pràcticament igual a la temperatura del vapor, estariem en la condició de contorn a.1) que estudiarem a continuació com un cas particular del cas a) En aquest cas el perímetre tèrmic és diferent de l'hidràulic.



Exemple 2: un alt coeficient de convecció pel vapor, una alta conductivitat tèrmica pel conducte interior i un gas circulant per la carcassa o corona (coef. de convecció reduït). Si substituïm a la figura anterior l'aïllament per vapor saturat (encamisant la carcassa) aleshores continuem estant a la condició de contorn a.1) però ara el perímetre tèrmic és igual a

l'hidràulic.

Si a la figura anterior amb aïllament exterior, suposem que el coeficient del vapor no és tant alt, que la conductivitat del tub interior és moderada i que per la carcassa i circula un gas o líquid aleshores estarem en el cas a) sent el perímetre tèrmic diferent a l'hidràulic. En aquest cas el vapor saturat és el fluid que envolta l'aigua o gas (exercici 6.19 dels problemes de classe).

Qüestió 9: Calcular la temperatura de sortida T_F en $^{\circ}C$ d'un cabal d'aigua inicialment a $10^{\circ}C$ que s'escalfa en un tub d'un condensador ($T_{cond}=50^{\circ}C$), si la capacitat calorífica ($\dot{m}c_p$) de l'aigua és de 860 W/K i la resistència tèrmica (ΣR_T) entre ambdós fluids és de $8,4 \times 10^{-4} \text{ K/W}$

Dades: $T_{vapor}=50^{\circ}C$, $T_I=10^{\circ}C$, $\dot{m}c_p = 860 \text{ W/K}$, $\Sigma R_T = 8,4 \cdot 10^{-4} \text{ K/W}$

Substituïm a l'equació d'un conducte amb temperatura de paret constant,

$$UA = \frac{1}{\Sigma R_T} = 1190,48 \text{ W/K} \Rightarrow T_F = T_{vapor} + (T_I - T_{vapor}) \cdot \exp\left(-\frac{UA}{\dot{m}c_p}\right) = 39,98^{\circ}C$$

4.4.12 Temperatura de paret uniforme o constant (cas a.1)

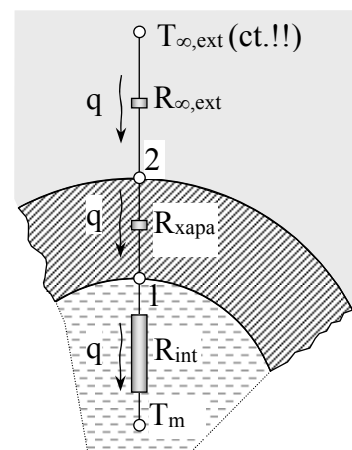
(en el sentit perimetral i longitudinal)

Es tracta d'un cas particular de l'anterior cas a).

En el cas en que el fluid exterior sigui un vapor en canvi de fase (alts coeficients de convecció), i les parets dels tubs siguin metàl·liques amb una alta conductivitat tèrmica (alumini o coure), podem considerar que les resistències de convecció exterior i la de conducció de la xapa son molt inferiors a la resistència de convecció interior.

$R_{\infty,ext}$, $R_{xapa} \ll R_{int}$ en aquest cas, $T_2 \cong T_1 \cong T_{\infty,ext} = T_{vapor}$

$h_{c,int}$ valor mig del coef. de convecció pel tram 0-L (fluid int.)



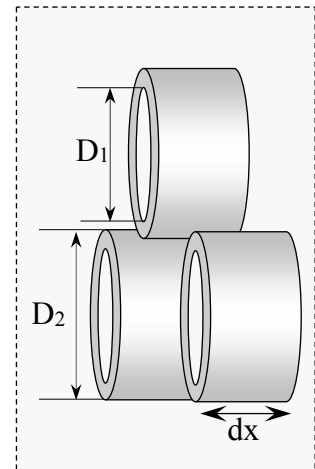
En aquest cas, $\sum R_{total} = \underbrace{R_{\infty,ext}}_0 + \underbrace{R_{xapa}}_0 + R_{int} \cong R_{int}$

$A_1 = n_t \pi D_1 L$; $P_{t1} = n_t \pi D_1$ (referit a la sup. 1, interior)

Calculem el coeficient de transferència global U_1 referit a la superfície interior A_1 , $U_1 = \frac{1}{A_1 \sum R_{total}} = \frac{1}{A_1 R_{int}} = \frac{1}{A_1 \frac{1}{h_{c,int}}} = h_{c,int}$

En aquest cas T_1 seria la temperatura de paret constant en contacte amb el fluid interior. Sent $T_1 \cong T_{vapor}$ Aleshores,

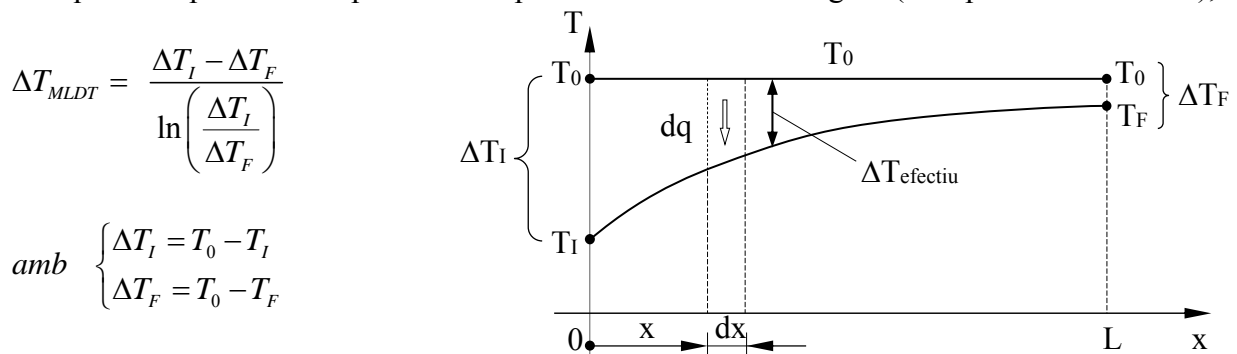
$$T(x) = T_1 + (T_l - T_1) \exp\left(-\frac{\overbrace{U_1}^{h_{c,int}} P_{t1}}{\dot{m}_l c_p} x\right) \quad \text{sent } P_{t1} = n_t \pi D_1$$



Es costum representar per T_0 a aquesta temperatura constant de paret.

Òbviament al tractar-se d'un cas particular, també podem fer servir la ΔT_{MLDT}

En aquest cas particular el perfil de temperatures seria el de la figura (la exponencial anterior),



En aquest cas determinem la potència, $q_{total} = q_{0-L} = \overbrace{U_1}^{h_{c,int}} A_1 \Delta T_{MLDT} = h_{c,int} \underbrace{n_t \pi D_1 L}_{A_1} \Delta T_{MLDT}$

(es fa servir el subíndex 0 en lloc de 1 per referir-se a la temperatura de paret constant interior)
Observem que en aquest cas particular, el coef. U es redueix al coef. de convecció interior.

4.4.13 Flux de potència tèrmic (q/A) constant a la paret $\forall x$ (cas b)

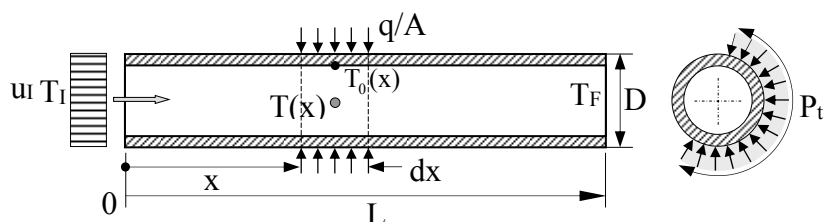
Estudiem l'evolució de la temperatura d'un fluid que circula per un conducte amb flux de potència a la paret constant en el sentit longitudinal i perimetral.

El flux de potència pot estar referit a la superfície exterior o interior. Ambdós valors es relacionen pel cas d'un conducte de secció circular per l'expressió,

$$\frac{q}{A_{int}} \bigg|_{P_{t, int}} dx = \frac{q}{A_{ext}} \bigg|_{P_{t, ext}} dx$$

En general $P_t = \pi D$

Per una secció qualsevol,



$$dq = \frac{q}{A} P_t dx = \dot{m} c_p dT$$

Anomenem $T_0(x)$ a la temperatura de paret a la posició x i en contacte amb el fluid interior.

$$\frac{q}{A} P_t \int_0^x dx = \dot{m} c_p \int_{T_i}^{T(x)} dT \Rightarrow \frac{q}{A} P_t x = \dot{m} c_p [T(x) - T_i]$$

Obtenim el perfil de temperatures del fluid al llarg de la canonada, que amb les hipòtesis de partida resulta lineal,

$$T(x) = T_i + \frac{\frac{q}{A} P_t}{\dot{m} c_p} x$$

T_0 temp. superfície interior.
Per un conducte de secció circular $P_t = \pi D$

Sabem que pel tram 0-L,

$h_c = \text{cte}$ per la 3^a hipòtesis, de forma que podem expressar el flux de potència tèrmic a la paret q/A com un flux de potència convectiu entre la paret i el fluid, En realitat

$$\frac{q}{A} = h_c [T_0(x) - T(x)] \Rightarrow [T_0(x) - T(x)] = \frac{\frac{q}{A}}{h_c} = ct. \Rightarrow T_0(x) = T(x) + \frac{\frac{q}{A}}{h_c}$$

Veiem que el perfil de la temperatura de paret és paral·lel al de la temperatura mitja global del fluid excepte en la zona d'entrada tèrmica (línia de punts) a on la ser molt més gran el coeficient de convecció local el salt tèrmic es va reduint conforme ens apropem a l'origen.

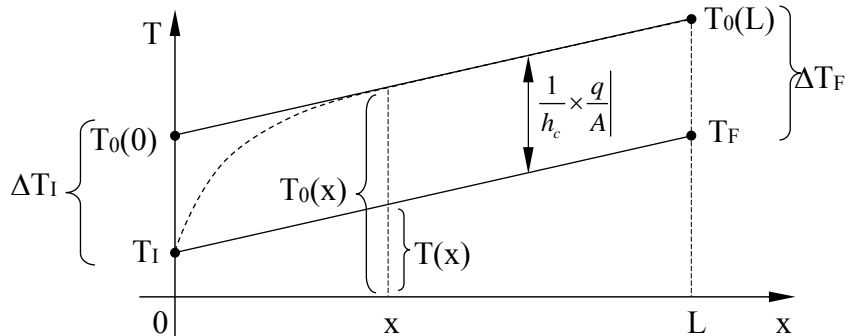
Si substituïm $T(x) = T_i + \frac{\frac{q}{A} P_t}{\dot{m} c_p} x$ obtenim la temperatura de la paret,

$$T_0(x) = T(x) + \frac{\frac{q}{A}}{h_c} = T_i + \frac{\frac{q}{A} P_t}{\dot{m} c_p} x + \frac{\frac{q}{A}}{h_c} = mx + n \rightarrow \left[m = \frac{\frac{q}{A} P_t}{\dot{m} c_p}, n = T_i + \frac{\frac{q}{A}}{h_c} \right]$$

En aquest cas sent el salt tèrmic entre la paret i el fluid constant, com veiem en el gràfic anterior, no podem aplicar directament l'expressió de la mitja logarítmica de la diferència de temperatures ja que ens trobem amb una clara indeterminació del tipus 0/0.

$$\text{En aquest cas } \Delta T_{MLDT} = \frac{\Delta T_i - \Delta T_F}{\ln \left(\frac{\Delta T_i}{\Delta T_F} \right)} = \frac{0}{\ln(1)} = \frac{0}{0} = ? \quad \text{essent} \quad \Delta T_i = \Delta T_F = \frac{\frac{q}{A}}{h_c} = ct.$$

Si apliquem l'Hôpital es resol fàcilment la indeterminació. Si definim $A = \frac{\Delta T_i}{\Delta T_F}$ podem



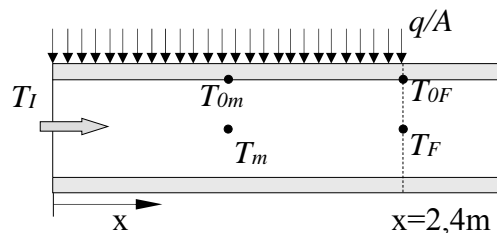
expressar la mitja logarítmica de la forma següent,
$$\Delta T_{MLDT} = \frac{\Delta T_I - \Delta T_F}{\ln \left(\frac{\Delta T_I}{\Delta T_F} \right)} = \Delta T_F \frac{(A-1)}{\ln A}$$

$$\lim_{A \rightarrow 1} \Delta T_{MLDT} = \lim_{A \rightarrow 1} \Delta T_F \frac{(A-1)}{\ln A} = \Delta T_F \lim_{A \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{A}} = \Delta T_F = \frac{q/A}{h_c} = ct.$$

Si partim de la definició de $\Delta T_{efectiva}$ veiem que el límit anterior és obvi i innecessari,

$$\Delta T_{efectiva} = \frac{\int_0^L [T_0(x) - T(x)] dx}{L} = \frac{q}{h_c A} \int_0^L dx = \frac{q}{h_c A} = \Delta T_I = \Delta T_F$$

Qüestió 10: A l'exterior d'una canonada de 24,308 mm de diàmetre interior i 2,4 m de llargària s'ha instal·lat una resistència elèctrica de forma que la potència tèrmica aportada a l'aire és q/A constant = 1148 W/m². Per l'interior s'escalfen 37,724 kg/h d'aire ($c_p = 1004$ J/(kg·K)), inicialment a 293 K. Si el coeficient de convecció local en $x=2,4$ m val 75 W/(m²·K), quant val la temperatura de paret en aquesta posició:



Dades: $D_{int}=24,308 \cdot 10^{-3}$ m , $x=2,4$ m , $\frac{q}{A}|_{0-x} = 1148 \frac{W}{m^2}$, $\dot{m} = \frac{37,724}{3600} \frac{kg}{s}$, $T_{ci}=293$ K

$c_p=1004$ J/(kg·K) , $h_{cx}=75$ W/(m²·K) $A_{0-x} = \pi D_{int} x$ (tram 0-x)

Potència guanyada en el tram 0-x $q_{0-x} = \frac{q}{A}|_{0-x} A_{0-x} = 210,4$ W

Temperatura T_{cF} del fluid al final del tram 0-x,

$$q_{0-x} = \dot{m} c_p (T_{cF} - T_{ci}) \text{ incògnita } T_{cF} \quad , \quad T_{cF} = T_{ci} + \frac{q_{0-x}}{\dot{m} c_p} = 313 \text{ K}$$

Sabem que si la temperatura de paret al final del tram 0-x és T_{0F} i la temperatura de l'aire al final del tram 0-x val $T_{cF} = 313$ K localment s'ha de verificar

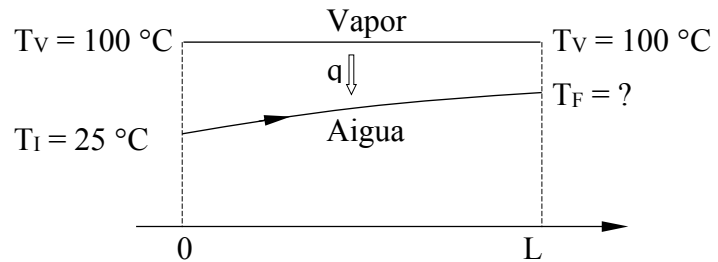
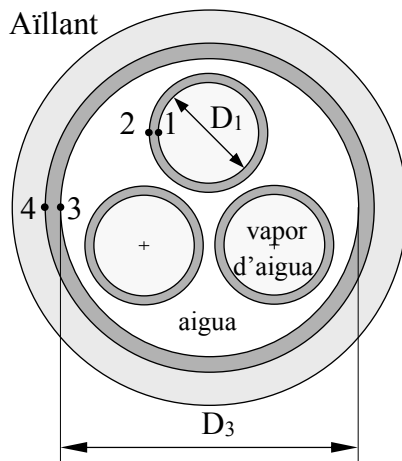
$$\frac{q}{A}|_{0-x} = h_{cx} (T_{0F} - T_{cF}) \text{ i així trobem } T_{0F} = \frac{q}{h_{cx}}|_{0-x} + T_{cF} = 328,31 \text{ K}$$

4.4.14 Algorisme 1: trobar L si la T_{cF} de sortida és coneguda

Exercici d'una envoltent i $n_t = 3$ tubs llisos.

Un condensador consisteix en una envoltent i tres tubs d'inoxidable ANSI 310 de 3/4 in BWG 16 i una envoltent de 2 in BWG 18 ($\phi_{nominal} = \phi_{exterior}$). Pels tubs interiors de 3/4 in circula vapor d'aigua saturat a 100 °C i entre els tubs i la carcassa s'introdueix aigua a 1,7 m/s i 25 °C. La carcassa està perfectament aïllada, de forma que podem suposar negligible la transferència de calor cap a l'ambient. Suposant un valor del coeficient de convecció típic pel vapor d'aigua de 7000 W/(m²·K)

- Calculeu la longitud del bescanviador perquè la temperatura de sortida de l'aigua sigui de 35 °C, i la quantitat de vapor condensat en aquest cas.
- Calculeu la pèrdua de càrrega de l'aigua.
- Calculeu la quantitat de vapor condensat si el cabal d'aigua es redueix un 25 % essent la longitud del bescanviador la calculada a l'apartat a).
- Jutgeu molt breument (màxim 6 línies) si és una bona alternativa emprar un bescanviador d'envolvent i tubs per aquest disseny i si és lògic aïllar la carcassa.



Característiques geomètriques del condensador

$$D_2 = 3/4 \text{ in} = 19,05 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{BWG 16} \Rightarrow e_{12} = 1,651 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$D_1 = D_2 - 2e_{12} = 15,748 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$D_4 = 2 \text{ in} = 50,8 \times 10^{-3} \text{ m} ;$$

$$\text{BWG 18} \Rightarrow e_{34} = 1,2446 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$D_3 = D_4 - 2e_{34} = 48,3108 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Materials: Acer inoxidable ANSI 310

Conductivitat tèrmica

$$\lambda(T) = 11,86 + 2,246 \times 10^{-2} (T-273) \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$$

Propietats de l'aigua (S.I.):

$$c_p = 2820 + 11,82 \times T - 0,03502 \times T^2 + 3,599 \times 10^{-5} T^3$$

$$\lambda = -0,3835 + 0,00525 \times T - 6,265 \times 10^{-6} T^2$$

$$\rho = 741,966 + 1,9613 \times T - 0,00371211 \times T^2$$

$$\log_{10} \mu = -13,73 + \frac{1830}{T} + 0,0197 \times T - 1,47 \times 10^{-5} T^2$$

Metodologia de càlcul:

En primer lloc observem que es tracta d'un fluid, l'aigua, en contacte amb un altre fluid a temperatura constant, el vapor saturat. L'aigua no bescanvia calor amb l'aire exterior en estar la superfície de la carcassa perfectament aïllada. Per tant la resolució correspon al cas a) estudiat a l'apartat de conductes, cas en el què fem servir el coeficient U de transferència global. Per determinar aquest coeficient U ens cal conèixer el coeficient de convecció mig pel tram 0-L considerat i també la conductivitat de la xapa. Per determinar el coeficient de convecció ens cal conèixer la temperatura de paret T₂ com es veurà posteriorment. Per determinar la conductivitat de la xapa ens cal conèixer les temperatures T₁ i T₂.

En no conèixer a priori ambdues temperatures optem per una resolució iterativa que es basa òbviament en estimar uns valors inicials.

1) Dades del problema:

$$T_I = (25 + 273) \text{ K}$$

$$T_F = (35 + 273) \text{ K}$$

$$T_{\text{vapor}} = (100 + 273) \text{ K}$$

$$D_1 = 0,015748 \text{ m}$$

$$D_2 = 0,01905 \text{ m}$$

$$D_3 = 0,0483108 \text{ m}$$

$$h_{\text{vapor}} = 7000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}, \quad u = 1,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad n_t = 3 \text{ tubs} \quad \text{Per iniciar els càlculs prenem } L=5 \text{ m}$$

2) **Càlcul de les característiques geomètriques**

La secció de flux d'aigua és una corona circular. Per poder utilitzar les equacions vàlides per conductes de secció circular haurem d'emprar el diàmetre hidràulic d'aquesta secció.

$$S = \frac{\pi D_3^2}{4} - 3 \times \frac{\pi D_2^2}{4} = \text{Secció del flux d'aigua}$$

$$P_t = 3 \pi D_2 \quad \text{Perímetre tèrmic} \quad \text{Diferenciem entre el perímetre tèrmic i l'hidràulic.}$$

$$P_h = 3 \pi D_2 + \pi D_3 = \text{Perímetre mullat (a fricció)} \quad D_h = 4 \frac{S}{P_h} = \text{Diàmetre hidràulic}$$

3) **Determinem les propietats de l'aigua i la conductivitat de l'inoxidable**

Quan la variació total de temperatures d'un tram de conducte 0-L es pugui considerar moderada, es treballa amb la temperatura mitja global del tram T_m .

$$\text{Temperatura mitja global de l'aigua:} \quad T_m = \frac{T_I + T_F}{2} = \left(\frac{25 + 35}{2} + 273 \right) \text{ K}$$

Propietats de l'aigua (en S.I.) a la temperatura T_m : $c_{p,m}$, λ_m , ρ_m , μ_m , Pr_m

$$\text{Inicialment prenem } T_2 = \frac{T_m + T_{\text{vapor}}}{2} = \left(\frac{30 + 100}{2} + 273 \right) \text{ K} \quad \text{i} \quad T_1 = T_{\text{vapor}}$$

Determinem μ_0 a la temperatura $T_0 = T_2$

$$T_{\text{xapa}} = \frac{T_1 + T_2}{2} \Rightarrow \lambda_{\text{inox}} = 11,86 + 2,246 \times 10^{-2} (T_{\text{xapa}} - 273) \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

4) **Calculem la MLDT, la Mitja Logarítmica de la Diferència de Temperatures:**

$$\Delta T_{\text{MLDT}} = \frac{\Delta T_I - \Delta T_F}{\ln \frac{\Delta T_I}{\Delta T_F}} \quad \text{amb} \quad \Delta T_I = T_{\text{vapor}} - T_I \quad \text{i} \quad \Delta T_F = T_{\text{vapor}} - T_F$$

5) **Calculem el flux i el nombre de Reynolds G , $Re_{Dh,m}$**

$$G = \frac{\dot{m}_{\text{aigua}}}{S} = \frac{\rho_l u_l S}{S} = \rho_l u_l = \rho_m u_m \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \quad \text{Flux màssic del corrent d'aigua.}$$

$$Re_{Dh,m} = \frac{u_m D_h}{\nu_m} = \frac{u_m D_h}{\frac{\mu_m}{\rho_m}} = \frac{\rho_m u_m D_h}{\mu_m} = \frac{G D_h}{\mu_m} \quad \text{i per tant} \quad Re_{Dh,m} = \frac{G D_h}{\mu_m} = \frac{\dot{m}_{\text{aigua}}}{S} \frac{D_h}{\mu_m}$$

$$Re_{Dh,m} < 2300 \quad \text{Règim Laminar}$$

$$2300 < Re_{Dh,m} < 10000 \quad \text{Règim de Transició}$$

$$Re_{Dh,m} > 10000 \quad \text{Règim Turbulent}$$

En funció del regim escollirem l'equació per determinar el coeficient de convecció. En particular farem servir l'equació de Gnielinski.

6) **Calculem la potència que transfereix el vapor a l'aigua**

En aquest exercici, coneixem la temperatura d'entrada i sortida, de forma que amb un balanç d'entalpia (*sistema obert*) trobem directament la potència bescanviada.

$$q = \dot{m}_c c_{p,m} (T_F - T_I) \quad (\text{balanç longitudinal de potència convectiva})$$

7) Calculem els coeficients de fricció $C_{f,m}$

Hem de tenir present, que el tubs emprats en transferència de calor sempre es consideren llisos (coure, alumini, inoxidable, etc) (rugositat relativa $e/D=0$).

Determinem el coeficient de fricció isoterm $C_{f,m}$, com si tot el fluid es trobes a una única

temperatura T_m :

$$C_{f,m} = \frac{1}{(1,58 \ln \text{Re}_{Dh,m} - 3,28)^2} \quad (\text{Filolenko})$$

Farem servir aquest coeficient de fricció per calcular el nº de Nusselt amb l'equació de Gnielinski (punt 9) i la pèrdua de càrrega (punt 15). Aquesta es una equació específica per tubs llisos i pels mateixos règims que la de Gnielinski. De fet és l'equació associada a l'equació de Gnielinski.

Tractant-se d'un procés de transferència de calor, el flux d'aigua òbviament no és isoterm i existeix un gradient de temperatures entre la superfície 2 de la xapa i l'aigua, que afecta al valor real de la viscositat al voltant de la superfície. Per això haurem de fer servir uns coeficients de correcció per tenir en compte la variació de les propietats amb la variació radial de la temperatura.

El factors ϕ^n i ϕ^p contempen aquesta correcció per calcular el Nu i ΔP respectivament.

8) Coeficients de correcció per determinar el Nusselt Nu i la pèrdua de càrrega ΔP

Es tracta d'un coeficient necessari per corregir l'equació de Gnielinski i també la pèrdua de càrrega. L'exponent **n** serveix per la correcció de l'equació de Gnielinski i el **p** per la correcció de la pèrdua de càrrega.

FLUID	ϕ	PROCÉS	p	n
Gasos	$\left(\frac{T_m}{T_0}\right)$	escalfats	0,52	0,47
		refredats	0,38	0,36
Líquids	$\left(\frac{\mu_m}{\mu_0}\right)$	escalfats	-0,33	0,11
		refredats	-0,24	0,25

Per un líquid escalfat escollim $\phi = \left(\frac{\mu_m}{\mu_0}\right)$, $n=0,11$, $p=-0,33$ de la taula adjunta:

$$\phi^n = \left(\frac{\mu_m}{\mu_0}\right)^{0,11} \quad \text{coeficient corrector per determinar el nombre de Nusselt}$$

$$\phi^p = \left(\frac{\mu_m}{\mu_0}\right)^{-0,33} \quad \text{coeficient corrector per determinar la pèrdua de càrrega } \Delta P$$

9) Calculem el nombre de Nusselt $Nu_{c,0-L}$ per determinar el coeficient de convecció $h_{c,0-L}$

Coeficient de convecció $h_{c,\infty}$ d'un perfil de temperatures tèrmicament desenvolupat,

$$Nu_{c,\infty} = \frac{h_{c,\infty} D_h}{\lambda_{m,aigua}} \rightarrow Nu_{c,\infty} = \frac{C_{f,m} (\text{Re}_{Dh,m} - 1000) \text{Pr}_m \phi^n}{2 + 17,96 C_{f,m}^{0,5} (\text{Pr}_m^{2/3} - 1)} \rightarrow h_{c,\infty} = \frac{Nu_{c,\infty} \lambda_{m,aigua}}{D_h}$$

Es el que s'anomena el valor asimptòtic del coeficient de convecció com es veu a la següent figura. El nombre de Nusselt es un número adimensional.

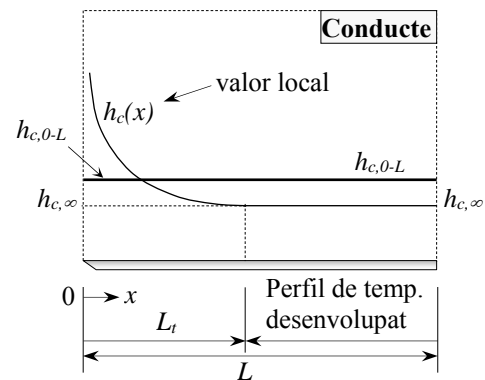
$$Nu_{c,0-L} = \frac{h_{c,0-L} D_h}{\lambda_{m,aigua}} = \frac{C_{f,m} (Re_{D_h,m} - 1000) Pr_m \left[1 + \left(\frac{D_h}{L} \right)^{2/3} \right] \phi^n}{2 + 17,96 C_{f,m}^{0,5} (Pr_m^{2/3} - 1)} \rightarrow h_{c,0-L} = \frac{Nu_{c,0-L} \lambda_{m,aigua}}{D_h}$$

El terme $\left[1 + \left(\frac{D_h}{L} \right)^{2/3} \right]$ es l'anomenat coeficient corrector de l'efecte d'entrada de

Hausen. A l'inici de l'entrada del conducte el coeficient de convecció presenta valors mes grans. A la següent equació veiem la relació entre el valor mig del coeficient de

convecció pel tram 0-L, $h_{c,0-L} = h_{c,\infty} \times \left[1 + \left(\frac{D_h}{L} \right)^{2/3} \right]$ i el valor asimptòtic $h_{c,\infty}$.

L'equació de Gnielinski, com a equació pràctica, ens dona un valor mig del coeficient de convecció en el tram de conducte L. Si el tub fos molt curt (L menor que 10 diàmetres), aquesta zona d'entrada amb coeficients de convecció mes alts tindria un efecte considerable, i en aquest cas el coeficient de Hausen (CH) seria mes gran que la unitat (podria ser 1,04, un 4% d'augment). Si el tub fos molt llarg, que es lo mes habitual ($L \gg 10 D$), aleshores aquest coeficient val pràcticament l'unitat.



Aquesta equació és vàlida només per

$$2300 < Re_{D_h,m} < 5 \times 10^6 \quad i \quad 0,5 < Pr < 2000$$

Observem que inclou el règim de transició i el turbulent. També veiem que inclou els gasos amb un Prandtl típic de 0,7, inclou l'aigua (Pr entre 1 i 12) i tots els olis, amb Pr molt elevats, entre 20 i 1000 en funció estreta de la temperatura.

Per tant compren un gran ventall de fluids industrials.

Quan el perímetre tèrmic no coincideix amb el perímetre hidràulic, com succeeix amb aquest exercici, haurem de corregir el coeficient de convecció emprant l'expressió de

$$\text{Hausen-Düwell} \quad h_c = h_{c,0-L} \left\{ 1 - \left(\frac{0,75}{1 + Pr_m} \right) \times \left(1 - \frac{P_t}{P_h} \right) \right\} \quad \text{Finalment} \quad h_{aigua} = h_c$$

10) Calculem el coeficient de transferència global U_2 entre el vapor i l'aigua referit a la superfície 2

Amb la L suposada calcularem totes les resistències tèrmiques i el coeficient de transferència global U. Aquest U resultarà com sabem independent de la L suposada i del nombre de tubs. Observem que la L suposada ja l'hem necessitat per l'apartat anterior (CH) i per tant la podem fer servir per calcular les resistències tèrmiques,

$$q = U_i A_i \Delta T_{efectiva} = \frac{\Delta T_{efectiva}}{\sum R_i} \Rightarrow U_i = \frac{1}{A_i \sum R_i}$$

$$\text{Conductància} = U_1 A_1 = U_2 A_2 \quad ; \quad A_1 = 3 \pi D_1 L \quad ; \quad A_2 = 3 \pi D_2 L \quad ; \quad h_{aigua} = h_c$$

$$R_{vapor} = \frac{1}{h_{vapor} A_1} \quad R_{xapa} = \frac{\ln \left(\frac{D_2}{D_1} \right)}{3 \times (2\pi \lambda_{inox} L)} \quad R_{aigua} = \frac{1}{h_{aigua} A_2}$$

$$U_2 = \frac{1}{A_2 \sum R_i} = \frac{1}{A_2 (R_{vapor} + R_{xapa} + R_{aigua})} = \frac{1}{A_2 \left(\frac{1}{h_{vapor} A_1} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{3 \times (2\pi \lambda_{inox} L)} + \frac{1}{h_{aigua} A_2} \right)}$$

Multiplicant les tres resistències per A_2 i tenint en compte que $\frac{A_2}{A_1} = \frac{D_2}{D_1}$ obtenim,

$$U_2 = \frac{1}{\frac{D_2}{h_{vapor} D_1} + \frac{D_2 \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2 \lambda_{inox}} + \frac{1}{h_{aigua}}} \quad \text{W/(m}^2 \text{ K)} \quad (\text{independent de L !!})$$

11) **Determinem L_{nova} a partir de** $q = U_2 A_2 \Delta T_{MLDT} = U_2 \underbrace{3 \cdot \pi D_2 L}_{A_2} \Delta T_{MLDT}$

$$q = U_2 \underbrace{3 \cdot \pi D_2 L}_{A_2} \Delta T_{MLDT} \Rightarrow L_{nova} = \frac{q}{U_2 3 \cdot \pi D_2 \Delta T_{MLDT}}$$

12) **Recalculem les noves temperatures T_1 i T_2**

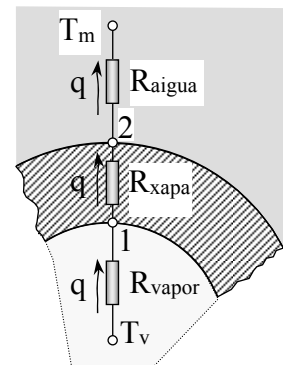
Aprofitem el nou valor de L_{nova} per recalculer les resistències del vapor i de la xapa.

Apliquem ara un balanç transversal de potència en el punt mig del tram 0-L.

$$R_{vapor} = \frac{1}{h_{vapor} 3 \times \pi_1 D_1 L_{nova}} \quad ; \quad q = \frac{T_{vapor} - T_1}{R_{vapor}}$$

$$\Rightarrow T_{1,nova} = T_{vapor} - q R_{vapor} \quad (\text{Rvapor coneguda !!})$$

$$R_{xapa} = \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{3 \times (2\pi \lambda_{inox} L_{nova})} \quad ; \quad q = \frac{T_{vapor} - T_2}{R_{vapor} + R_{xapa}} \Rightarrow T_{2,nova} = T_{vapor} - q (R_{vapor} + R_{xapa})$$



13) **Determinem la nova temperatura mitja de la xapa i recalculem μ_0 .**

$$T_{xapa} = \frac{T_{1,nova} + T_{2,nova}}{2} \Rightarrow \lambda_{inox} = 11,86 + 2,243 \cdot 10^{-2} (T_{xapa} - 273) \quad \text{W/(m.K)}$$

Amb $T_{0,nova} = T_{2,nova}$ determinem una nova μ_0 També assignem $L = L_{nova}$

L'aigua al voltant del punt 2 (proper al vapor) estarà més calenta que la que tenim en el punt central del conducte a T_m . D'aquesta forma la viscositat de l'aigua que com sabem depèn molt de la temperatura, serà molt diferent al voltant de la paret del conducte d'aigua de la que tenim al centre del mateix. La viscositat, en el cas de líquids, serà la propietat que farem servir per tenir en compte aquest gradient de temperatures que hi ha entre la paret i el centre del conducte.

Observem, que així com a mecànica de fluids es treballa amb fluids isoterms, en la nostra disciplina en general això es impossible degut a que l'objectiu de la mateixa és justament la transferència de la calor i per això necessitem els gradients de temperatura.

14) **Comprovem la convergència del procés iteratiu:**

Prenem un error màxim admissible $\varepsilon = 0,001$ (evidentment no cal tanta precisió)

Si $|T_0 - T_{0,nova}| > \varepsilon$ (error màxim admissible)

Assignem $T_0 = T_{0,nova}$ i tornem al punt 8)

15) **Determinem la pèrdua de càrrega**

Tractant-se d'un procés de transferència de calor, el flux d'aigua no és isoterm i existeix un gradient de temperatures entre la superfície 2 de la xapa i l'aigua.

Així doncs, emprem el factor ϕ^p per corregir el coeficient de fricció isoterm $C_{f,m}$ degut a la variació de les propietats entre la paret 2 i el nucli del fluid, com a conseqüència de la variació radial de la temperatura (Filolenko corregit)

Calculem la pèrdua de càrrega,
$$\Delta P = 2 C_{f,m} \phi^p \frac{L}{D_h} \frac{G^2}{\rho_m} \quad (\text{Pa})$$

16) **Imprimim els resultats.**

Apartat d)

Es resol amb un algoritme molt similar, suposant una temperatura final T_F però recalculant les temperatures T_1 i T_2 per trobar la T_{xapa} i la T_0 de la superfície.

Calculem el cabal de condensat:
$$\dot{m}_{cond} = \frac{q}{\Delta h_{lg}} \quad \text{en kg/s}$$

La calor latent de vaporització del vapor d'aigua a 100 °C es $\Delta h_{lg} = 2257 \text{ kJ/kg}$

4.4.15 Resolució amb HP48 (o posteriors) (prob. d'envolvent i tubs)

Dades inicials del problema:

TI	298	Temperatura inicial de l'aigua
TF	308	Temperatura final de l'aigua
Tv	373	Temperatura del vapor d'aigua saturat
D1	0,015748	Diàmetre interior tubs
D2	0,01905	Diàmetre exterior tubs
D3	0,0483108	Diàmetre interior envolvent
hv	7000	Coefficient de convecció del vapor saturat (costat tubs)
uI	1,7	(velocitat d'entrada de l'aigua) (la u no es confon amb la v)
L	5	(estimació inicial per calcular la primera iteració)
nt	3	(nombre de tubs)
n	0,11	(exponent de ϕ per calcular h)
p	-0,33	(exponent de ϕ per calcular ΔP)

Assignem les expressions o cadenes de caràcters a les seves variables respectives:

Respecteu la nomenclatura. Emprem lletres gregues on faci falta.

$\pi/4*(D3^2 - nt*D2^2)$	S	STO	Secció de flux d'aigua
$nt*\pi*D2$	Pt	STO	Perímetre tèrmic
$nt*\pi*D2+\pi*D3$	Ph	STO	Perímetre hidràulic o mullat
$4*S/Ph$	Dh	STO	Diàmetre hidràulic
$(TI+TF)/2$	Tm	STO	Temperatura mitja global del tram 0-L

Propietats de l'aigua (atenció!! les temperatures en K):

$2820+11,82*Tm - 0,03502*Tm^2+0,0003599*Tm^3$	cp	STO
$-0,3835+0,00525*Tm-0,000006265*Tm^2$	λ	STO
$741,966+1,9613*Tm-0,00371211*Tm^2$	ρ	STO
$741,966+1,9613*TI-0,00371211*TI^2$	ρI	STO
$10^{(-13,73+1830/Tm+0,0197*Tm-0,0000147*Tm^2)}$	μ	STO
$10^{(-13,73+1830/T2+0,0197*T2-0,0000147*T2^2)}$	$\mu 0$	STO
$\mu*cp/\lambda$	Pr	STO
$\mu/\mu 0$	ϕ	STO

Assignem manualment uns valors inicials a T1 i T2:

373 ← T1 (prenem inicialment la temperatura del vapor)

338 ← T2 (prenem inicialment la mitja entre Tm i Tv)

Ara podem determinar la temperatura mitja Tx de la xapa :

$(T1+T2)/2$	Tx	STO	Temp. mitjana de la xapa
$11,86+0,02246*(Tx-273)$	λx	STO	Cond. tèrmica inoxidable
$(Tv-TI-(Tv-TF))/LN((Tv-TI)/(Tv-TF))$	MLDT	STO	Mitja logarítmica de la diferència de temp.
$\rho I * u I$	G	STO	Flux , kg/(m ² ·s)
$\rho I * u I * S$	m	STO	Cabal (igual a G×S)
$G * Dh / \mu$	ReD	STO	Nombre de Reynolds
$m * cp * (TF-TI)$	q	STO	Potència tèrmica que guanya l'aigua
$1/(1,58 * LN(ReD)-3,28)^2$	Cf	STO	Coef. de fricció amb propietats constants
$Cf * (ReD-1000) * Pr * (1+(Dh/L)^{(2/3)}) * \phi^n / (2+17,96 * Cf^{,5} * (Pr^{(2/3)}-1))$	NuD	STO	Coef. de convecció
$NuD * \lambda / Dh * (1-0,75/(1+Pr) * (1-Pt/Ph))$	hc	STO	Coef. global de TdC
$1/(D2/(hv * D1)+D2 * LN(D2/D1)/(2 * \lambda x)+1/hc)$	U2	STO	Nova L
$q/(U2 * nt * \pi * D2 * MLDT)$	Lnew	STO	Resistència del vapor
$1/(hv * nt * \pi * D1 * Lnew)$	Rv	STO	Resistència de la xapa
$LN(D2/D1)/(nt * 2 * \pi * \lambda x * Lnew)$	Rx	STO	Nova temperatura T1
$Tv-q * Rv$	T1new	STO	Nova temperatura T2
$Tv-q * (Rv+Rx)$	T2new	STO	Cf corregit
$Cf * \phi^p$	CfΔP	STO	Pèrdua de carga (Pa)
$2 * Cf \Delta P * L * G^2 / (Dh * \rho)$	ΔP	STO	

Primer procediment

Polsem la variable Lnew, fem l'avaluació numèrica de la mateixa, ←

Ara assignem el valor que hem trobat a la variable L. (← L)

Fem el mateix amb la variable T1new i T2new. Avaluem i les assignem a les variables T1 i T2.

Tornem a fer l'avaluació numèrica de Lnew i comprovarem com amb un parell de cops que fem les operacions anteriors el problema ja haurà convergit.

Finalment avaluem la pèrdua de càrrega i la resta de variables que ens interressi.

Segon procediment

Escrivim l'equació a resoldre $T_F = T_v - (T_v - T_1) \cdot \exp(-U_2 \cdot P_t \cdot L / (m \cdot c_p))$ EQ1 STO equació del cas a) aplicable quan un fluid es manté a temperatura constant, en aquest cas el vapor saturat. No l'anomenem EQ per seguretat, ja que aquest és el nom que assigna per defecte l'HP. Si fem servir la SOLVE, i fem servir l'equació EQ1, veurem que podem calcular (fent solve) la variable que vulguem, per exemple la L. Això sí, aquest càlcul és vàlid per un valor fixat de T2.

Aleshores recalcularem la nova T2. En aquest cas no necessitem la Lnew, ja que amb la SOLVE directament es calcula la L. Per això, en aquest cas escrivim les expressions següents en funció de L i no de Lnew com anteriorment.

'1/(h _v *n _t *π*D1*L)'	Rv	STO	Resistència del vapor
'LN(D2/D1)/(n _t *2*π*λ _x *L)'	Rx	STO	Resistència de la xapa
'T _v -q*Rv'	T1new	STO	Nova temperatura T1
'T _v -q*(Rv+Rx)'	T2new	STO	Nova temperatura T2

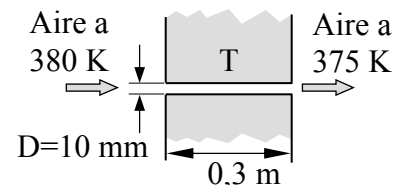
Avaluem T2new i la reassignem a T2. Ara tornem a la SOLVE amb el nou valor de T2 ja reassignat. Tornem a calcular la L. La solució la trobarem amb molt poques iteracions. Una vegada, la T2 o la L es mantinguin idèntiques, podem avaluar totes les variables del problema, així com la pèrdua de carga ΔP (Pa).

Proveu els dos procediments i escolliu el que millor us vagi. Jo personalment m'inclino per el primer procediment.

Qüestió 11: En un bloc metàl·lic de 0,3 m de gruix que es manté a una temperatura uniforme constant, existeix un orifici de 10 mm de diàmetre que el travessa.

Si introduïm pel mateix 0,001 kg/s d'aire sec a 1 atm. i 380 K i calculem h_c amb la fórmula de Gnielinski tot considerant que ϕ^n es ≈ 1 , obtenim una temperatura de sortida de l'aire de 375 K, Determini la temperatura del bloc metàl·lic T_0

Dades: $D=0,010$ m , $L=0,3$ m , $\dot{m}_a = 0,001$ kg/s
 $T_I=380$ K , $T_F=375$ K , $P_F=1,01325 \cdot 10^5$ Pa



$$\left[S = \frac{\pi D^2}{4} \right] \rightarrow G = \frac{\dot{m}_a}{S} \rightarrow T_m = \frac{T_I + T_F}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\text{Prop. a } T_m \text{ S.I.} \right] \rightarrow \text{Re}_{D,m} = \frac{G D}{\mu_m} \rightarrow C_{f,m} = \frac{1}{(1,58 \ln \text{Re}_{D,m} - 3,28)^2} = 0,00932 \rightarrow$$

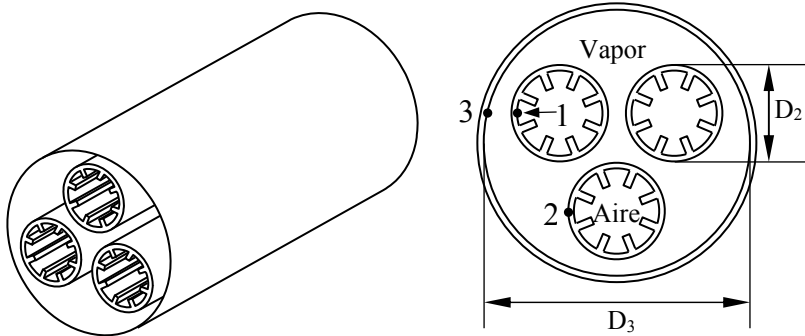
$$\rightarrow \left[h_c = \frac{C_{f,m} (\text{Re}_{D,m} - 1000) \text{Pr}_m \left[1 + (D/L)^{2/3} \right]}{2 + 17,96 C_{f,m}^{0,5} (\text{Pr}_m^{2/3} - 1)} \frac{\lambda_m}{D} = 65,67 \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow T_F = \overset{?}{T_0} + (T_I - \overset{?}{T_0}) \exp \left(\frac{-h_c \overbrace{\pi D L}^A}{\dot{m}_a c_{pm}} \right) \rightarrow T_0 = 369,08 \text{ K}$$

En un examen tipus test facilitaríem alguns resultats intermedis per reduir el temps necessari per resoldre aquesta qüestió. (com per exemple el nombre de Reynolds, etc.)

4.4.16 Algorisme 2: trobar T_{cF} si la longitud L és coneguda

Exercici d'una envoltent i $n_t = 3$ tubs aletejats internament (examen 18/01/2005)



Un condensador consisteix en $n_t=3$ tubs a l'interior d'una envoltent de diàmetre interior de $D_3=55$ mm. Pel costat envoltent o exterior circula un vapor saturat (refrigerant) a temperatura constant de $T_v=50$ °C. Per l'interior dels tubs s'introdueix aire a $T_{ci}=20$ °C, una atmosfera

de pressió i una velocitat de $u_i=20$ m/s (subíndex c= corrent freda que s'escalfa, I = entrada F = sortida).

El coeficient de convecció del vapor saturat és $h_v=1200$ W/(m²K) i per augmentar la transferència tèrmica, cada un dels 3 tubs disposen en la seva cara interior de $n_f=12$ petites aletes rectes longitudinals del mateix material que els tubs ($\lambda_f=\lambda_t$), d'un gruix de 1,4 mm ($2\delta=1,4$ mm no negligible), i la seva alçada o longitud des de la base a l'extrem és de $L_f=3$ mm. La longitud del bescanviador és $L=0,9$ m i el mateix es troba aïllat tèrmicament de l'exterior. El diàmetre interior i exterior dels tubs són respectivament $D_1=20$ i $D_2=22$ mm i la seva conductivitat tèrmica és $\lambda_t=13,40$ W/(m·K).

Propietats de l'aire sec (S.I.): T en K ; P en Pa

$$\rho = 3,484 \frac{P \times 10^{-3}}{T}$$

$$c_p = 1004$$

$$\lambda = (3,807 + 0,074 \cdot T) 10^{-3}$$

$$\mu = \left(2,469 + 0,0536 \cdot T + \frac{P \times 10^{-3}}{8280} \right) 10^{-6}$$

Per simplificar el càlcul de propietats consideri totes les propietats a la pressió inicial.

Per iniciar els càlculs suposar $T_{cF} = 30$ °C i $T_1 = T_v$. Determinar per a la primera iteració:

1. La temperatura final de l'aire T_{cF} al final de la primera iteració.
2. Eficiència de les aletes, η_f (o be e_f) i model considerat per a les mateixes.
3. Coeficient de convecció del costat aire, $h_{c,aire}$
4. Potència tèrmica bescanviada entre ambdós fluids.
5. Mitjana logarítmica de la diferència de temperatures, ΔT_{MLDT} (amb $T_{cF}=30$ °C)
6. Coeficient de transferència global U_2 referit a la superfície 2 i resistència tèrmica costat aire R_f (entre la superfície 1 i l'aire)
7. Factor corrector de l'efecte d'entrada.
8. Pèrdua de càrrega del costat aire, ΔP_{aire} .
9. Recalculer la temperatura de paret, T_1 . Indiqueu la fórmula i el valor a emprar en una segona iteració.
10. Cabal de vapor saturat que condensa si la seva calor latent de vaporització a la pressió de treball és de 106,27 kJ/kg.

Nota: Plantegeu el problema globalment, no el resoleu necessàriament en aquest ordre.

Metodologia de càlcul:

Observem que es tracta d'un fluid, l'aire, en contacte amb un altre fluid a temperatura constant, el vapor saturat. El vapor no bescanvia calor amb l'aire exterior en estar la superfície de la carcassa perfectament aïllada. La resolució correspon a la condició de contorn a) estudiat a l'apartat 4.4.10 de conductes, cas en el que fem servir el coeficient U de transferència global. Per determinar aquest coeficient U ens cal conèixer el coeficient de convecció mig pel tram 0-L considerat.

En aquest exercici desconexem la temperatura final de l'aire i per tant la potència bescanviada entre el vapor i l'aire. En canvi coneixem la longitud del bescanviador.

Haurem de suposar en primer lloc una temperatura inicial de sortida (a l'enunciat ja ens la donen) de l'aire, exclusivament a efectes de determinar unes propietats mitges pel tram 0-L i poder així determinar un coeficient de convecció i el coeficient de transferència global U.

Amb aquesta temperatura de sortida suposada no podem calcular pas la potència ja que aquesta seria tant incerta com ho és la temperatura suposada. Eviteu aquest típic error.

En canvi amb la U ja determinada, podem calcular una nova temperatura de sortida de l'aire fent servir l'equació exponencial que ens dona la temperatura del fluid en funció de x (sent x la distància a la boca d'entrada). D'aquesta forma, trobem una temperatura molt correcta fins i tot a la primera iteració.

És evident que en tot el procés cal tenir en compte el càlcul correcte de les temperatures de paret.

1) Dades del problema: (ek=273)

$$T_{c_1} = (20 + ek) \text{ K} \quad T_v = (50 + ek) \text{ K} \quad h_v = 1200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \quad \Delta h_{lg} = 106270 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$D_1 = 0,020 \text{ m} \quad D_2 = 0,022 \text{ m} \quad u_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad P_1 = 101300 \text{ Pa}$$

$$D_3 = 0,055 \text{ m} \quad n_f = 3 \text{ tubs} \quad L = 0,9 \text{ m} \quad L_f = 0,003 \text{ m}$$

$$n_f = 12 \text{ aletes} \quad \delta = \frac{1,4 \cdot 10^{-3}}{2} \text{ m}$$

2) Càlcul de les característiques geomètriques

La secció de flux d'aigua és una corona circular. Per poder utilitzar les equacions vàlides per conductes de secció circular haurem d'emprar el diàmetre hidràulic d'aquesta secció.

$$S_1 = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} - n_f L_f 2\delta = \text{secció de flux d'aire d'un conducte}$$

$$P_{t1} = \pi \cdot D_1 + n_f 2L_f = \text{perímetre tèrmic d'un conducte}$$

En aquest cas el perímetre tèrmic és igual a l'hidràulic (mullat o a fricció) $P_{h1} = P_{t1}$

$$\text{Diàmetre hidràulic} \quad D_h = 4 \times \frac{S_1}{P_{h1}}$$

3) Característiques geomètriques de les aletes

$$P = 2 \cdot L \quad \text{perímetre d'una aleta} \quad A = L \cdot 2\delta \quad \text{secció recta d'una aleta}$$

$$A_{p1} = (\pi \cdot D_1 - n_f 2\delta) \cdot L \quad \text{superfície primària d'un conducte}$$

$$A_{f1} = n_f (2 \cdot L_f + 2\delta) \cdot L \quad \text{superfície estesa d'un conducte}$$

$$A_2 = n_t \cdot \pi \cdot D_2 \cdot L \quad \text{superfície exterior total dels } n_t \text{ tubs}$$

4) **Funcions de les propietats de l'aire i conductivitat tèrmica del inoxidable (S.I.)**

$$\lambda(T) = (3,807 + 0,074 \cdot T) \times 10^{-3} \quad \mu(T, P_a) = \left(2,469 + 0,0536 \cdot T + \frac{P \times 10^{-3}}{8280} \right) \times 10^{-6}$$

$$\rho(T, P_a) = 3,484 \frac{P_a \times 10^{-3}}{T} \quad Pr(T, P_a) = \frac{\mu(T, P_a) c_p(T)}{\lambda(T)} \quad \text{nombre de Prandtl}$$

$$c_p(T) = 1004 \quad ; \quad \lambda_{inox} = 13,4 \quad \text{inoxidable AISI 316 sent } \lambda_f = \lambda_{inox}$$

Tal com diu l'enunciat per determinar totes les propietats considerarem $P_a = P_1$

5) **Suposem inicialment les temperatures T_{CF} i T_I per determinar propietats:**

Segons l'enunciat $T_{CF} = T_{CI} + 10$ i prenent $T_I = T_v$ ($I = \text{inicial}$ $F = \text{final}$)

6) **Temperatura mitja global del costat tubs** $T_{c_m} = \frac{T_{c_I} + T_{c_F}}{2}$ ($c = \text{indica corrent freda}$)

Quan la variació total de temperatures d'un tram de conducte 0-L es pugui considerar moderada, es treballa amb la temperatura mitja global del tram T_{c_m} .

Determinem les propietats de l'aire (S.I) en funció de T_{c_m} $c_{p,m}$, λ_m , ρ_m , μ_m , Pr_m

7) **Calculem el flux G i el nombre de Reynolds $Re_{Dh,m}$**

Caball total dels n_t conductes $\dot{m}_{\text{aire_total}} = \rho(T_{c_I}, P_I) u_I S_1 n_t$ kg/s (cond. inicials)

$$G = \frac{\dot{m}_{\text{aire_1_conducte}}}{S_{1_conducte}} = \frac{\dot{m}_{\text{aire_total}}}{n_t S_{1_conducte}} = \frac{\rho_I u_I S_1 n_t}{S_1 n_t} = \rho_I u_I = \rho_m u_m = \dots \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}} \quad \text{Flux d'aire}$$

Resulta més clar per tant determinar la G a partir del cabal màssic i la secció d'un sol conducte. Òbviament el nombre de Reynolds es un paràmetre que ens informa del tipus de regim en un conducte.

$$Re_{Dh,m} = \frac{G D_h}{\mu_m} \quad \text{i per tant} \quad Re_{Dh,m} = \frac{G D_h}{\mu_m} = \frac{\dot{m}_{\text{aire_1_conducte}} D_h}{S_{1_conducte} \mu_m}$$

$$\begin{aligned} Re_{Dh,m} < 2300 & \quad \text{Règim Laminar} \\ 2300 < Re_{Dh,m} < 10000 & \quad \text{Règim de Transició} \\ Re_{Dh,m} > 10000 & \quad \text{Règim Turbulent} \end{aligned}$$

L'equació de Gnielinski que inclou l'efecte d'entrada (efecte degut a que el coeficient de convecció es molt més gran en la zona inicial del conducte a on x es menor a la distància de 10 diàmetres) és aplicable per ambdós règims, transició i turbulent.

8) **Coefficient de fricció $C_{f,m}$**

Determinem el coeficient de fricció isotherm $C_{f,m}$, com si tot el fluid es trobes a una única

$$\text{temperatura } T_{c_m} : \quad C_{f,m} = \frac{1}{(1,58 \ln Re_{Dh,m} - 3,28)^2} \quad (\text{Filolenko})$$

Farem servir aquest coeficient per calcular el nº de Nusselt i la pèrdua de càrrega. Tractant-se d'un procés de transferència de calor, òbviament existiran gradients de temperatura transversals (radials), de forma que haurem de fer servir uns coeficients de correcció per tenir en compte la variació de les propietats amb la variació radial de la temperatura. (la viscositat del fluid serà prou diferent a prop de la paret que al centre del conducte)

En transferència de calor es fan servir sempre tubs considerats llisos. Per tant, aquest coeficient de fricció es el que correspon a una rugositat nul·la al diagrama de Moody. Aquesta equació de Filonlenko es específica per tubs llisos.

9) Coeficients de correcció per determinar el Nusselt i la pèrdua de càrrega

El flux d'aire no és isoterm i existeix per tant un gradient de temperatures entre la superfície 1 de la xapa i l'aire. El factor ϕ^n definit a la següent taula contempla aquesta correcció per calcular el nombre de Nusselt.

FLUID	ϕ	PROCÉS	p	n
Gasos	$\left(\frac{T_m}{T_0}\right)$	escalfats	0,52	0,47
		refredats	0,38	0,36

Tractant-se d'un gas que s'escalfa $p=0,52$ i $n=0,47$ i al tractar-se d'un gas el coeficient ϕ és la relació de temperatures absolutes (en K !!) o sigui $\phi = \frac{T_{c_m}}{T_1}$ (sent $T_0=T_1$ la temp. superficial i T_{c_m} la temperatura mitja global del tram 0-L) Per determinar la pèrdua de càrrega farem servir, per els mateixos motius el coeficient corrector ϕ^p

10) Calculem el nombre de Nusselt $Nu_{D_h,m}$ per determinar el coeficient de convecció h_c

A l'algoritme 1, hem fet servir una notació enfocada a que s'entengui be la diferència entre el valor asimptòtic del coeficient de convecció i valor mig per el tram 0-L. A partir d'ara fem servir la notació mes habitual.

$$Nu_{D_h,m} = \frac{h_{c,D_h,m} D_h}{\lambda_{m,aire}} = \frac{C_{f,m} (Re_{D_h,m} - 1000) Pr_m \left[1 + \left(\frac{D_h}{L}\right)^{2/3} \right] \phi^n}{2 + 17,96 C_{f,m}^{0,5} (Pr_m^{2/3} - 1)}$$

$$Nu_{D_h,m} = \frac{h_{c,D_h,m} D_h}{\lambda_{m,aire}} \Rightarrow h_{c,D_h,m} = \frac{Nu_{D_h,m} \lambda_{m,aire}}{D_h}$$

Aquesta equació és vàlida només per $2300 < Re_{D_h,m} < 5 \times 10^6$ i $0,5 < Pr < 2000$ que compren pràcticament totes les situacions industrials. Quan el perímetre tèrmic coincideix amb el perímetre hidràulic, com succeeix amb aquest exercici, el coeficient de Hausen-Düwell resulta ser la unitat.

$$h_c = hc_{D_h, m} \underbrace{\left\{ 1 - \left(\frac{0,75}{1 + Pr_m} \right) \times \left(1 - \frac{P_t}{P_h} \right) \right\}}_1 \quad \text{Finalment } h_{aire} = h_c$$

11) Eficiència de les aletes amb convecció a l'extrem no negligible (cas a)

$$e_f = \frac{q_0}{q_{max}} = \frac{\lambda_f A m (T_1 - T_{c_m}) \left(\frac{\tanh(m L_f) + \frac{h_{aire}}{m \lambda_f}}{1 + \frac{h_{aire}}{m \lambda_f} \tanh(m L_f)} \right)}{h_{aire} (P L_f + A) (T_1 - T_{c_m})} < 1 \quad \text{sent } m = \sqrt{\frac{h_{aire} P}{\lambda_f A}}$$

Es pot fer servir també com mètode simplificat la fórmula corresponent a extrem adiabàtic $\frac{\tanh(mL)}{mL}$ augmentant la longitud de l'aleta en el semigruix δ en el cas d'aletes de secció recta i $D/4$ per aletes de secció circular.

12) Resistències tèrmiques

$$A_2 = n_t \cdot \pi \cdot D_2 \cdot L \quad (\text{superfície exterior total dels } n_t \text{ tubs})$$

$$R_{vapor} = \frac{1}{h_v \underbrace{(n_t \cdot \pi \cdot D_2 \cdot L)}_{A_2}} \quad R_{xapa} = \frac{\ln \left(\frac{D_2}{D_1} \right)}{n_t \times (2\pi \lambda_{inox} L)} \quad R_{aire} = \frac{1}{h_{aire} \underbrace{n_t (A_{p1} + e_f A_{f1})}_{A_{aire}}}$$

Observem que les resistències R_{vapor} i R_{xapa} son constants en tot el procés iteratiu.

13) Coeficient de transferència global U_2 entre el vapor i l'aire referit a la superfície 2

$$q = U_i A_i \Delta T_{efectiva} = \frac{\Delta T_{efectiva}}{\sum R_i} \Rightarrow U_i = \frac{1}{A_i \sum R_i} \quad \text{sent } U_1 A_1 = U_2 A_2$$

$$U_2 = \frac{1}{A_2 \sum R_i} = \frac{1}{A_2 (R_{vapor} + R_{xapa} + R_{aire})} \quad \text{W/(m}^2 \text{ K) observeu que no depèn de } n_t \text{ ni de } L!$$

14) Recalculem la temperatura final T_{cF} $T_{cF_nova} = T_v + (T_{cI} - T_v) \cdot \exp\left(\frac{-U_2 A_2}{\dot{m}_{aire} c_{p,m}}\right)$

15) Calculem la MLDT, la Mitja Logarítmica de la Diferència de Temperatures:

$$\Delta T_{MLDT} = \frac{\Delta T_I - \Delta T_F}{\ln \frac{\Delta T_I}{\Delta T_F}} \quad \text{amb } \Delta T_I = T_{vapor} - T_{cI} \quad \text{i} \quad \Delta T_F = T_{vapor} - T_{cF_nova}$$

16) Calculem la potència que transfereix el vapor a l'aire

$$q = U_2 A_2 \Delta T_{MLDT} \quad (\text{balanç longitudinal de potència convectiva})$$

17) Recalculem la temperatura de paret T_1

$$q = \frac{T_v - T_{1_nova}}{R_{vapor} + R_{xapa}} \Rightarrow T_{1_nova} = T_v - q \times (R_{vapor} + R_{xapa})$$

Fem servir aquestes resistències ja que les mateixes no varien en el procés iteratiu !!

18) Comprovem la convergència del procés iteratiu:

Prenem un error màxim admissible $\varepsilon = 0,001$ (evidentment no cal tanta precisió)
 Comparem T_{CF_nova} i T_{1_nova} amb els valors suposats al punt 5) i si l'error supera l'error màxim admissible assignem aquestes com les noves temperatures i tornem al punt 6)

19) Determinem la pèrdua de càrrega

Tractant-se d'un procés de transferència de calor, el flux d'aire no és isoterm i existeix un gradient de temperatures entre la superfície 1 de la xapa i l'aire.

Així doncs, emprem el factor ϕ^p per corregir el coeficient de fricció isoterm $C_{f,m}$ degut a la variació de les propietats entre la paret i el nucli del fluid, com a conseqüència de la variació radial de la temperatura (Filolenko corregit)

$$\text{Calculem la pèrdua de càrrega, } \Delta P = 2 C_{f,m} \phi^p \frac{L}{D_h} \frac{G^2}{\rho_m} \quad (\text{Pa})$$

20) Cabal de condensat

$$\text{Calculem el cabal de condensat: } \dot{m}_{cond} = \frac{q}{\Delta h_{lg}} \quad \text{en kg/s}$$

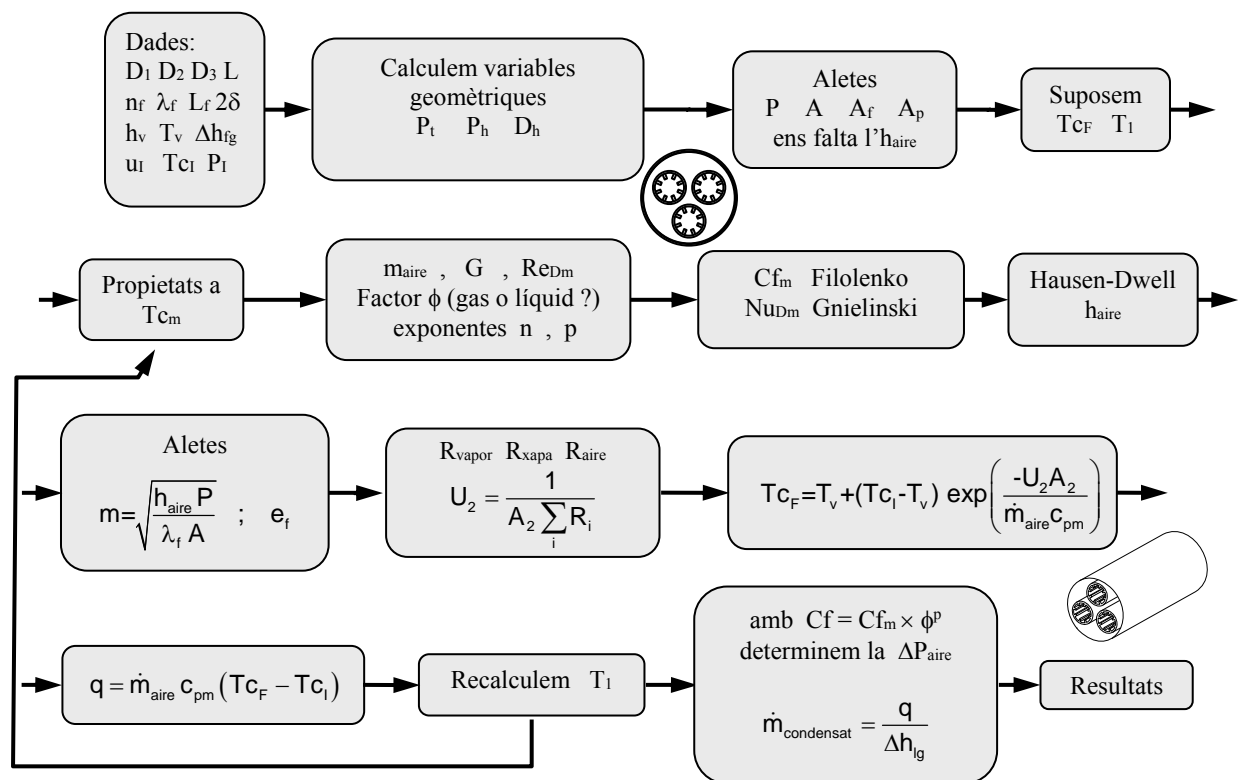
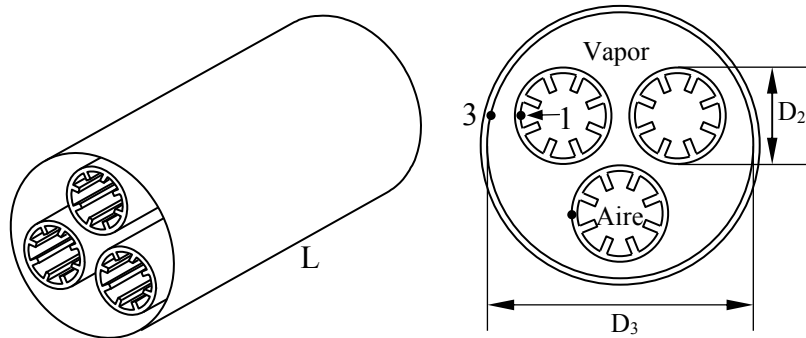
Calor latent de vaporització del refrigerant a la pressió de treball és $\Delta h_{lg} = 106,27 \text{ kJ/kg}$

Resultats:

Qüestió	Resposta (1a. iteració)
1	$T_{c_F} = 43,92 \text{ } ^\circ\text{C}$
2	$e_f = 0,954$
3	$h_c = 101,73 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$
4	$q = 457,63 \text{ W (amb } T_{c_F} \text{ nova)}$
5	$\Delta T_{MLDT} = 14,98 \text{ } ^\circ\text{C (} T_{c_F} \text{ nova)}$

Qüestió	Resposta (1a. iteració)
6	$U_2 = 163,68 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$
7	$1 + \left(\frac{D_h}{L}\right)^{2/3} = 1,042$
8	$\Delta P = 880,62 \text{ Pa}$
9	$T_1 = 47,76 \text{ } ^\circ\text{C}$
10	$\dot{m}_{cond} = 15,50 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$

Algorisme 2: trobar T_{cF} si la longitud L és coneguda (versió amb diagrama de blocs)



Qüestió 12: La potència tèrmica per escalfar un fluid val $q=1200$ W i les pèrdues de càrrega són de 1000 mm c.a. amb un cabal de 0,1 l/s. El diàmetre interior de la canonada és de 20 mm i el fluid té una densitat de 1200 kg/m³. Calculeu la relació entre potència tèrmica q i la potència mecànica \dot{W}_{mec} per impulsar el mateix.

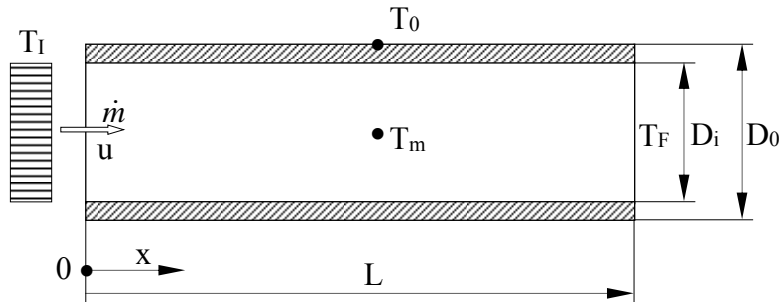
Dades: $q=1200$ W , $h_{equiv}=1000$ mm c.a. , $g=9,8$ m/s² , $\rho=1200$ kg/m³ , $D_{int}=0,02$ mm
 $\dot{V} = 0,1 \times 10^{-3}$ m³/s (cabal)

Sabem que $\Delta P = \rho_{aigua} g \frac{h_{equiv}}{1000} = 9810$ Pa ; $\dot{W}_{mec} = \Delta P \times \dot{V} = 0,98$ W $\ll q = 1200$ W

Per tant, $\frac{q}{\dot{W}_{mec}} = 1223,24$

4.4.17 Problemes tipus de convecció

1) Canonada amb temperatura de paret constant (tub)



Variables:

$T_0, D_i, D_o, L, \dot{m} = \rho u_l \left(\frac{\pi D_i^2}{4} \right)$, propietats del fluid

Equacions:

$$q_{0-L} = \dot{m} c_{p,0-L} (T_F - T_I) \tag{1}$$

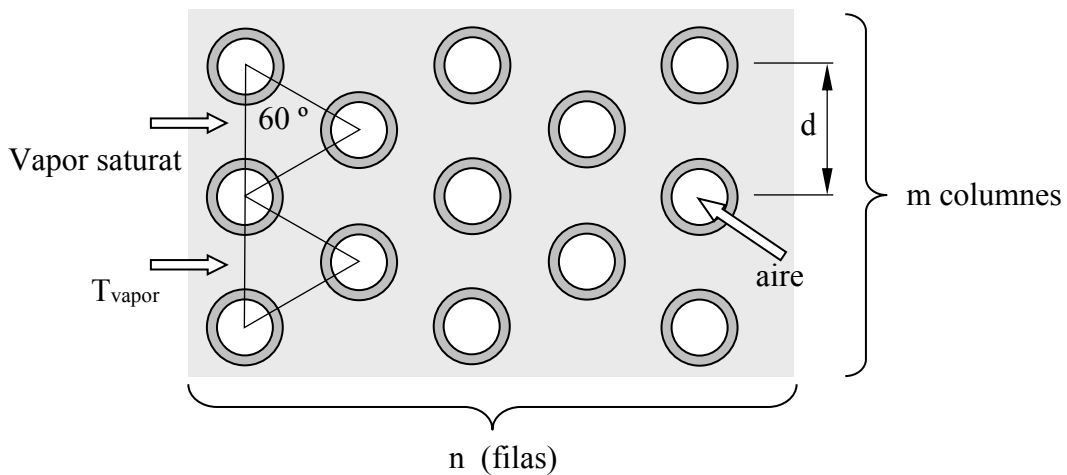
$$T(x) = T_0 + (T_I - T_0) \exp\left(-\frac{h_{c,0-L} \pi D_i}{\dot{m} c_{p,m}} x\right) \tag{2}$$

Propietats a $T_m = \frac{T_I + T_F}{2}$

Qüestions opcionals:

- 1.a) Se'ns demana T_F . Si no coneixem T_F com calculem les propietats ?
- 1.b) Quina L ens cal per assolir una T_F determinada. Trobar L i q_{0-L} ?
- 1.c) Quin \dot{m} ens cal, perquè el tram 0-L bescanvi una potència q (W). Haurem de trobar \dot{m} i T_F
- 1.d) Si augmentem \dot{m} , com afecta a T_F i a q (W). (considerar l'equació simplificada de Dittus-Boelter $Nu_D = 0,023 Re^{0,8} Pr^n$, $n=0,4$ quan el fluid s'escalfa i $0,33$ quan es refreda)

2) Feix de tubs amb vapor saturat a flux creuat. (variant innocent)



Variables:

D_{int}, D_{ext} (tub), \dot{m} (aire), T_{vapor} , T_I (aire), fluid = aire, $n = n^\circ$ de tubs, L

Incògnites: T_F (aire) , q

Tractant-se de vapor saturat, el coeficient de convecció exterior el podem considerar molt gran. Si es tracta de conductes metàl·lics aleshores podem considerar que la temperatura superficial dels tubs la podem considerar uniforme i igual a la del vapor a tota la longitud del tub. O sigui, és el cas amb temperatura de paret constant.

Per tant podem determinar la potència que guanya l'aire d'un sol tub i multiplicar simplement pel nombre total de tubs. Una altra vegada faríem servir la coneguda exponencial.

$$T_F = T_{vapor} + (T_I - T_{vapor}) \exp\left(\frac{-h_{c_aire} A_{total}}{\dot{m}_{1_tub} c_p}\right) \quad A_{total_1_tub} = \pi D_{int} L$$

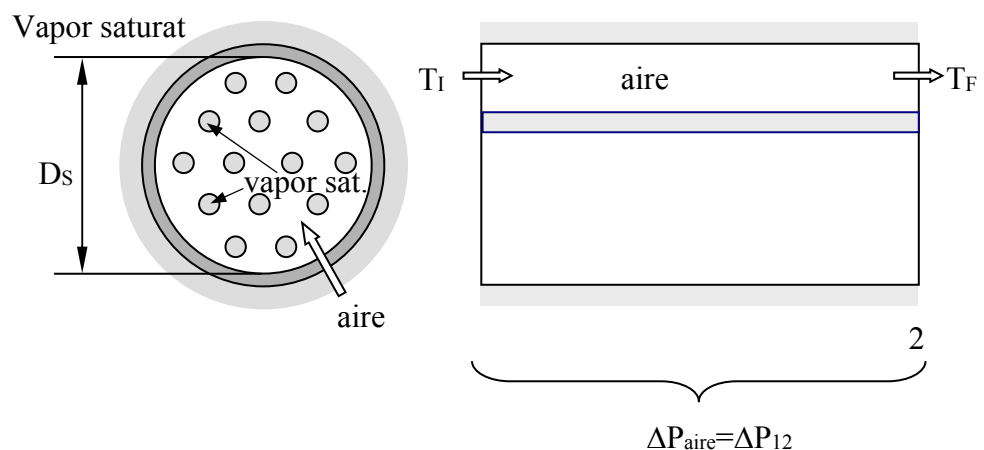
Amb la temperatura final, podem calcular la potència bescanviada per un tub mitjançant el balanç entàlpic i finalment multiplicar pel nombre total de tubs.

Per determinar la pèrdua de càrrega també evidentment fem servir només un tub (ja que estan en paral·lel).

3) Trobar el cabal \dot{m} i T_F a partir de ΔP

Variables:

ΔP_{1-2} , n_{tubs} , D_{tubs} , D_S (envolvent) , L , propietats de l'aire, T_I (aire)



Trobar:

\dot{m} (aire) , T_F , q ?

Quan ens donen la pèrdua de càrrega en mm c.a. significa mil·límetres de columna d'aigua i no d'aire, malgrat que el fluid en circulació sigui l'aire.

Aleshores, per exemple si ens diuen que tenim 200 mm c.a. o sigui $h_{equiv} = 0,200$ m podem calcular la pèrdua de càrrega amb la fórmula $\Delta P = \rho_{aigua} g h_{equivalent}$ (en Pa)

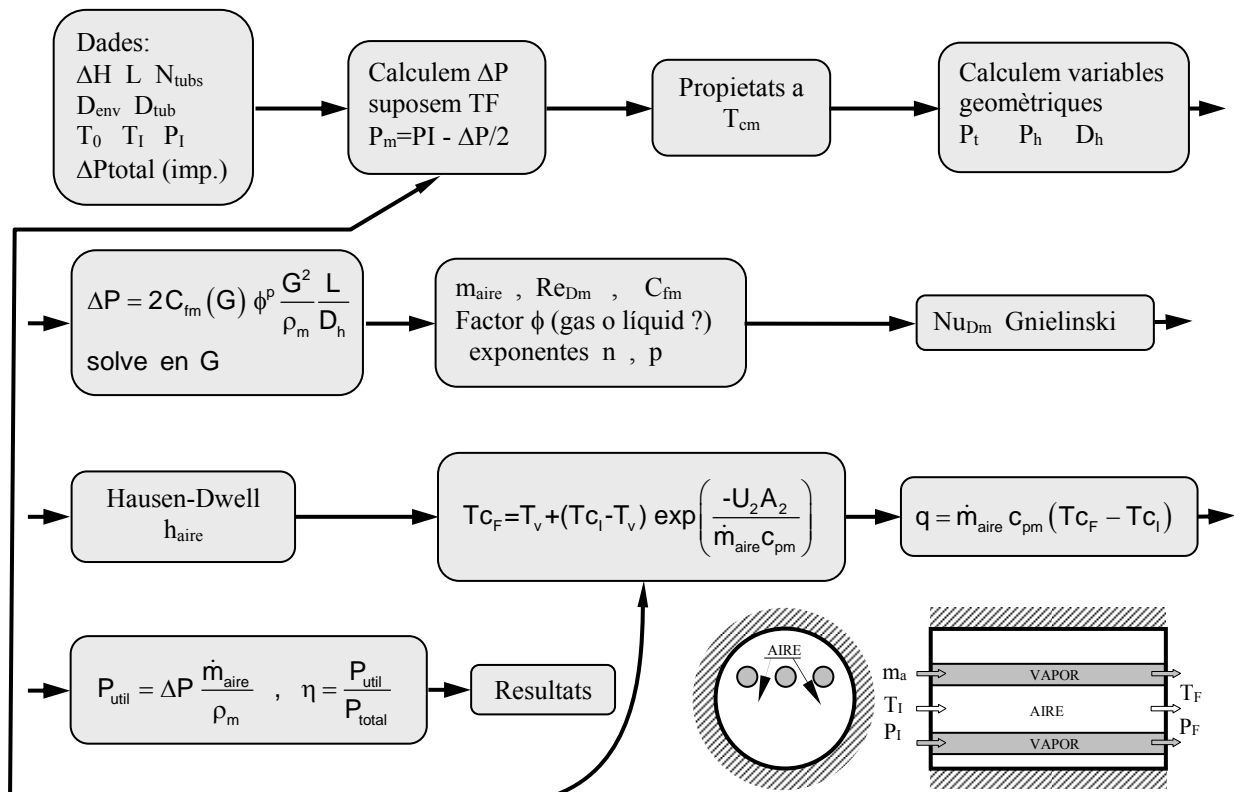
Ja que sabem la ΔP , podem determinar la G de la següent equació,

$$\Delta P = \rho_{aigua} g h_{equivalent} = 2 C_{f,m} \phi^p \frac{L}{D_h} \frac{G^2}{\rho_m} \quad \text{ja que el coeficient de fricció és funció del}$$

nombre de Reynolds i aquest és funció del flux G . El procés és iteratiu ja que tampoc coneixem la temperatura final i per tant les propietats. De moment en suposem una i posteriorment quan ja hem determinat la G ja coneixem el flux , ja que $\dot{m}_{aire} = G \times S$ i podem determinar la temperatura final amb la famosa exponencial,

$T_F = T_{vapor} + (T_I - T_{vapor}) \times \exp\left(-\frac{U_0 n_{tubs} \pi D_{tub} L}{\dot{m}_{aire} c_p}\right)$ si és molt diferent de la temperatura suposada tornem a determinar les propietats, la G i el flux.

Algorisme 3: (versió amb diagrama de blocs)



Qüestió 13: Escalfem un gas fent-lo circular per l'interior d'un tub de diàmetre interior 20 mm. La temperatura de la superfície interior es manté a 360 K. La temperatura mitja T_m del gas és de 320 K i la seva densitat de $1,1 \text{ kg/m}^3$. El coeficient de fricció val 0,004 i la pèrdua de carga per unitat de longitud, $\Delta P/L = 547 \text{ Pa/m}$. ¿Quant val el flux màssic G de gas en $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$? Dades:

$\Delta P/L = 547 \text{ Pa/m}$, $D = 0,020 \text{ m}$, $L = 0,3 \text{ m}$, $\dot{m}_a = 0,001 \text{ kg/s}$, $T_0 = 360 \text{ K}$, $T_m = 320 \text{ K}$, $\rho_m = 1,1 \text{ kg/m}^3$, $C_{f,m} = 0,004$

$$\text{Al tractar-se d'un gas, } \phi^p = \left(\frac{T_m}{T_0}\right)^{p=0,52} \rightarrow \Delta P = 2 C_{f,m} \phi^p \frac{L}{D} \frac{G^2}{\rho_m} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\Delta P}{L} = 2 C_{f,m} \left(\frac{T_m}{T_0}\right)^{0,52} \frac{1}{D} \frac{G^2}{\rho_m} \rightarrow G = \sqrt{\frac{\Delta P}{L} \frac{\rho_m D}{2 C_{f,m}} \left(\frac{T_0}{T_m}\right)^{0,52}} = 40 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$$

4) Canonada envoltada d'un fluid a $T_\infty = ct$.

Variables:

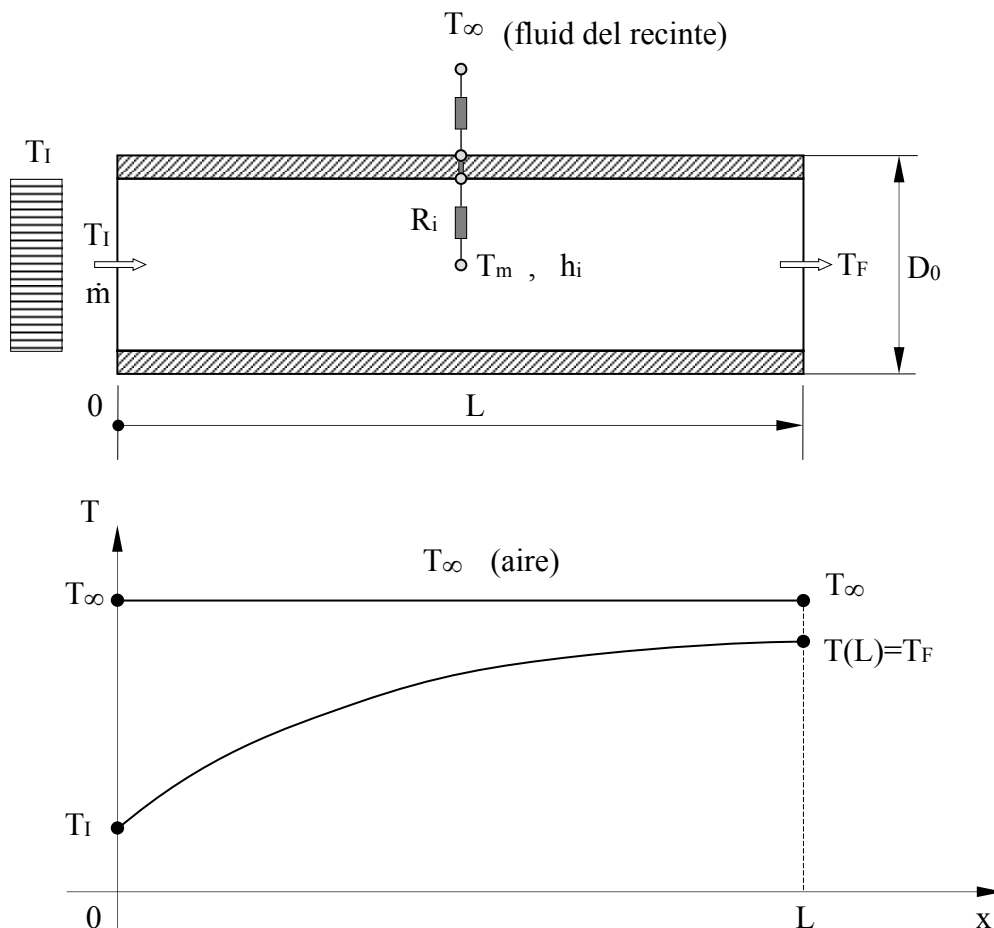
D_i , D_0 , L , \dot{m} , T_I , T_∞ , propietats del fluid costat tub

Trobar: : T_F , q , ΔP

Cal suposar una T_F només pel càlcul de les propietats. A continuació, calculem el Reynolds i el coeficient de convecció. Emprem la famosa exponencial per determinar la nova temperatura de sortida. Amb aquesta nova temperatura de sortida podem determinar la potència, o bé mitjançant el balanç entàlpic o bé mitjançant la MLDT (millor amb la MLDT però considerant la nova T_F), etc.

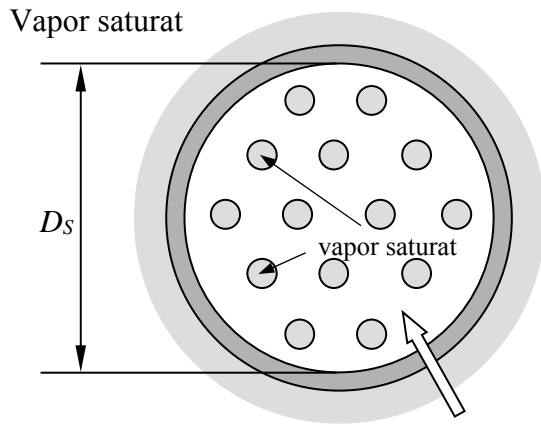
Un error típic és suposar una temperatura de sortida, i aleshores determinar la potència emprant la MLDT, ja que aquesta potència és tant incerta com ho és la temperatura que heu escollit per començar. En aquest cas us trobaríeu amb problemes de convergència.

Una vegada convergeix el procés, determineu la potència i la pèrdua de càrrega.



5) Envoltent amb un feix de tubs longitudinal

Variables:



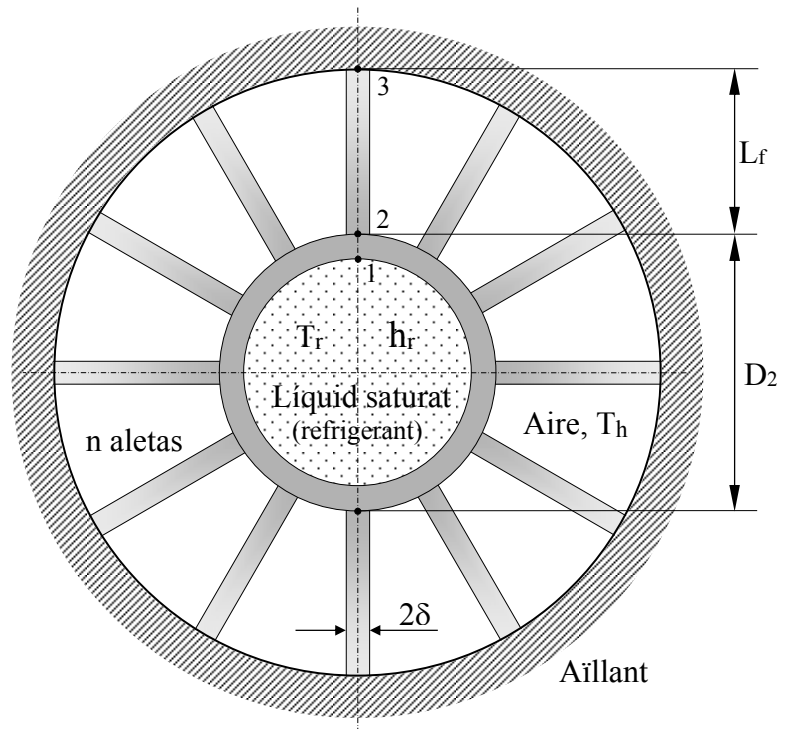
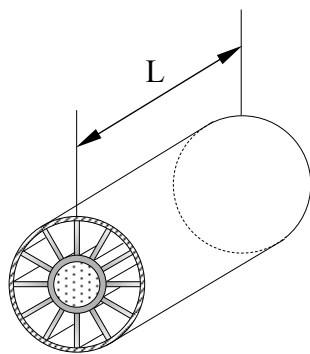
D_s (envolvent) , $D_{tubs} = D_t$
 Prop. de l'aire
 $n = n^\circ$ de tubs, T_i , \dot{m}_{aire}

- a) Donat L trobar T_F
- b) Donat T_F trobar L (més fàcil)

6) Doble tub aletejat pel costat envolvent

Dades:

n (n° aletes), λ (aletes i tubs), L_f , δ ,
 D_2 , e_{12}
 u_i (m/s), P_i (Pa), T_{h1} , T_{hF} (aire)
 $h_{c,r}$ (coef. de convecció), T_r , P_r (Pa), h_{fg} (refrigerant saturat)



Trobar: : L (m), $h_{c,aire}$, U_1 , P_{MEC} (impulsió de l'aire), q_{0-L} (W), $\dot{m}_{condensat}$ (kg/h)

4.5 EXERCICIS RESOLTS

Exercici 1: condeute rectangular envoltat d'una manta elèctrica

Per un condeute d'alumini de gran longitud, de secció rectangular de 200×50 mm, introduïm aire sec a 1200 mbar, 10 m/s i 20 °C. El condeute està envoltat per una manta elèctrica que subministra a l'interior del mateix un flux de potència tèrmic de 2 kW/m².

Determinar en estat estacionari:

- a) Temperatura de la cara interior de la paret a x=7 m de l'entrada.
- b) Temperatura global i pressió de l'aire en aquest punt.
- c) Ompli la taula de resultats que s'adjunta pel tram 0-7 m (S.I.)
- d) Algorítme necessari per resoldre els apartats anteriors.

G	q	Re _D	C _f	Nu _D	h ₀₋₇	Pr	T _m	T ₀	P _m

Propietats de l'aire sec (S.I.): $\rho = 3,484 \times 10^{-3} \frac{P}{T}$, $c_p = 1004$, (P en Pa, T en K)

$$\mu = \left(2,469 + 0,0536 \times T + \frac{P}{8280 \times 1000} \right) 10^{-6}, \quad \lambda = (3,807 + 0,074 \times T) 10^{-3}$$

Observacions:

La fórmula de Gnielinski és una fórmula per propietats constants i règim de velocitats i temperatures totalment desenvolupat.

En règim turbulent el perfil de velocitats i temperatures es pot considerar desenvolupat per una distancia $L > 10 D$ o sigui que l'efecte d'entrada és molt poc important, excepte per a tubs extremadament curts. Observeu que ja no depèn ni del Pr ni del Re com succeeix en règim laminar.

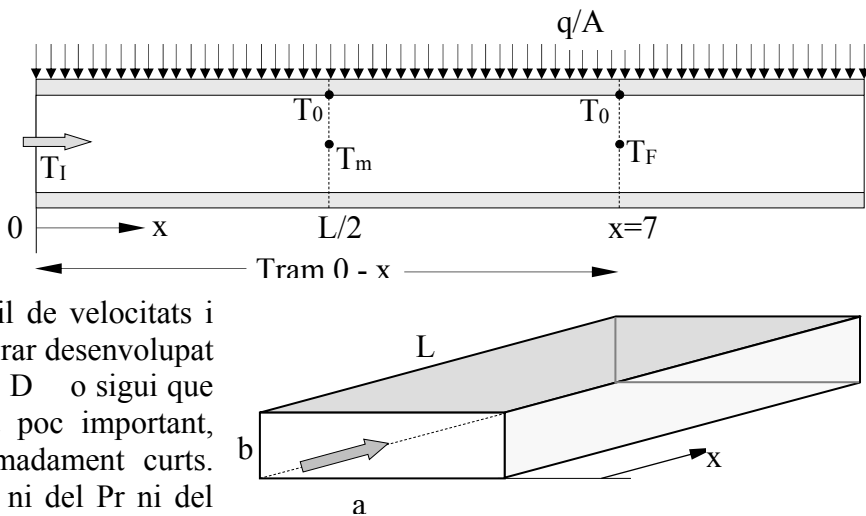
Recordeu l'evolució del coef. de convecció al llarg d'un condeute. Aquest valor va decreixent des del seu valor màxim a l'entrada fins a un valor que anomenem $h_{D\infty}$. El mateix succeeix si grafiquem el nombre de Nusselt.

La fórmula de Gnielinski bàsica (sense coef. correctors) ens dona el valor de $Nu_{D\infty}$ o sigui el valor asimptòtic al que tendeix el Nu_D quan ens allunyem de la zona d'entrada.

$$Nu_{D_h,\infty} = \frac{C_{f,m} (Re_{D_h,m} - 1000) Pr_m}{2 + 17,96 C_{f,m}^{0,5} (Pr_m^{2/3} - 1)} \quad (Gnielinski)$$

$$Nu_{D_h,\infty} = \frac{hc_{D_h,\infty} D_h}{\lambda_{m,aigua}} \Rightarrow hc_{D_h,\infty} = \frac{Nu_{D_h,\infty} \lambda_{m,aigua}}{D_h}$$

Observeu que a la fórmula anterior no hi ha cap coeficient de correcció, ni el claudàtor que té en compte l'efecte d'entrada ni tampoc el coeficient ϕ^n que té en compta la variació radial de les temperatures tractant-se d'un procés d'escalfament o refredament d'un fluid.



L'equació anterior ens permet calcular un coeficient de convecció que podem anomenar local per la secció $x=7$ m si considerem totes les propietats avaluades a la temperatura mitja de la secció $x=7$.

El problema és que a la secció $x=7$ m la temperatura no és constant. Sabem que perquè tingui lloc la transferència de calor ens cal justament un gradient radial de temperatures. Per això haurem de corregir amb el coeficient ϕ^n . Essent ϕ una relació de viscositats en el cas de líquids i una relació de temperatures absolutes en el cas de gasos.

Una vegada coneixem el coeficient de convecció local en $x=7$ m i com que coneixem el flux de potència tèrmic q/A podem determinar iterativament la temperatura de paret.

Si el que volem ara és determinar tots els paràmetres pel tram 0-7 m el procediment és el que ja coneixeu. Determinem totes les propietats a la temperatura mitja global del tram.

Aleshores haurem de trobar un coeficient de convecció únic per tot el tram o sigui un valor amitjanat que tingui en compte l'efecte d'entrada. És aleshores quan haurem d'emprar el coeficient corrector de Hausen que s'inclou en un claudàtor.

$$Nu_{D_h,0-L} = \frac{C_{f,m} (Re_{D_h,m} - 1000) Pr_m \left[1 + \left(\frac{D_h}{L} \right)^{2/3} \right] \phi^n}{2 + 17,96 C_{f,m}^{0,5} (Pr_m^{2/3} - 1)} \quad (\text{Gnielinski})$$

$$Nu_{D_h,0-L} = \frac{hc_{D_h,0-L} D_h}{\lambda_{m,aigua}} \quad \Rightarrow \quad hc_{D_h,0-L} = \frac{Nu_{D_h,0-L} \lambda_{m,aigua}}{D_h}$$

En aquest cas també haurem d'iterar per trobar la temperatura de paret.

Resultats: a) $T_0=120,7$ °C $T_F=69$ °C Pressió $P_F=119872$ Pa (aprox.)

b) $G=14,26$ $q=7000$ $Re_D=58489,8$ $C_f=5,056 \cdot 10^{-3}$ $Nu_D=117,1$ $hc=39,98$ $Pr=0,72$
 $T_m=44,59$ °C $T_0=94,62$ °C Pressió $P_m=119936,6$ Pa

Solució:

1) **Dades del problema:** ($ek=273$)

$$u_l = 10 \frac{m}{s} \quad a = 0,200 \text{ m} \quad b = 0,050 \text{ m} \quad L = 7 \text{ m}$$

$$\left. \frac{q}{A} \right|_{v_x} = 2000 \frac{W}{m^2} \quad T_l = 20 + ek \text{ (K)} \quad P_l = 120000 \text{ Pa}$$

2) **Càlcul de les característiques geomètriques**

Per poder utilitzar les equacions vàlides per conductes de secció circular haurem d'emprar el diàmetre hidràulic d'aquesta secció.

$$S = ab = 0,01 \text{ m}^2 \text{ secció de flux d'aire del conducte}$$

$$P_t = P_h = 2(a+b) = 0,5 \text{ m} \text{ perímetre tèrmic del conducte}$$

En aquest cas el perímetre tèrmic és igual a l'hidràulic (mullat o a fricció) $P_h=P_t$

$$\text{Diàmetre hidràulic} \quad D_h = 4 \times \frac{S}{P_h} = 0,08 \text{ m}$$

3) **Propietats de l'aire (S.I.)** (P en Pa i T en K)

$$\mu(T, P) = \left(2,469 + 0,0536 \times T + \frac{P}{8280 \times 1000} \right) 10^{-6} \quad \rho(T, P) = 3,484 \times 10^{-3} \frac{P}{T}$$

$$\lambda(T) = (3,807 + 0,074 \times T) 10^{-3} \quad c_p = 1004$$

$$Pr(T, P) = \frac{\mu(T, P) c_p}{\lambda(T)} \quad \text{nombre de Prandtl}$$

4) Calculem el flux G i el nombre de Reynolds $Re_{Dh,m}$

Cabal $\dot{m}_{aire} = \rho(T_1, P_1) \cdot u_1 S = 0,1426 \text{ kg/s}$ (condicions inicials)

$$G = \frac{\dot{m}_{aire}}{S} = \frac{\rho_1 u_1 S}{S} = \rho_1 u_1 = \rho_m u_m = 14,26 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} \quad \text{Flux de l'aire}$$

5) Calculem la potència cedida a l'aire en el tram 0-L

$$q = \frac{q}{A} \times 2(a+b)L = 7000 \text{ W} \quad (\text{potència tèrmica que rep l'aire en el tram 0-L})$$

6) Temperatura final de l'aire en el tram 0-L (és un valor mig per tota la secció)

$$q = \dot{m}_{aire} c_p (T_F - T_I) \Rightarrow T_F = \frac{q}{\dot{m}_{aire} c_p} + T_I = 342,04 \text{ K} = 68,89 \text{ }^\circ\text{C}$$

7) Propietats en $x=L=7 \text{ m}$ a la temperatura de la secció final de l'aire

(es un valor mig per tota la secció)

Verifiquem que $\frac{L}{D_h} = 87,5 > 10$ i el flux d'aire sabem que està hidrodinàmica i

tèrmicament desenvolupat (règim turbulent). Per conèixer el coeficient de convecció local en $x=L$ haurem de determinar el Nu_∞ asimptòtic de l'equació de Gnielinski que prescindeix del coeficient corrector de Hausen (efecte d'entrada) al no voler determinar un valor mig del coeficient de convecció per el tram 0-L.

Per tant determinem les propietats de l'aire (S.I) a la temperatura $T_m = T_F$

$c_{p,m}$, λ_m , ρ_m , μ_m i Pr_m

8) Determinem el nombre de Reynolds a la secció final de l'aire (propietats a $T_m=T_F$)

$$Re_{D_h,m} = \frac{G D_h}{\mu_m} = 54808,5 \quad \text{que correspon a règim turbulent}$$

Si $Re_{D_h,m} < 2300 \Rightarrow$ Règim Laminar

Si $2300 < Re_{D_h,m} < 10^4 \Rightarrow$ Règim de Transició

Si $Re_{D_h,m} > 10^4 \Rightarrow$ Règim Turbulent

9) Suposem una temperatura de paret en $x=L$ (propietats a $T_m=T_F$)

Per iniciar els càlculs suposem que la paret està uns $40 \text{ }^\circ\text{C}$, més calenta que l'aire.

O sigui $T_0 = T_{07} = T_F + 40 = 382,04 \text{ K}$ en $x=L$ Determinem $\phi = \frac{T_m}{T_0}$ (no oblideu que T_F

aquí fa el paper de la temperatura mitja global de la secció (no del tram 0-L)

10) Calculem el coeficient de fricció $C_{f,m}$ (propietats a $T_m=T_F$)

FLUID	ϕ	PROCÉS	p	n
Gasos	$\left(\frac{T_m}{T_0}\right)$	escalfats	0,52	0,47
		refredats	0,38	0,36

Tractant-se d'un gas que s'escalfa $p=0,52$ i $n=0,47$ i el coeficient ϕ és la relació de temperatures absolutes (en K !!) o sigui $\phi = \frac{T_m}{T_0}$

$$C_{f,m} = \frac{1}{(1,58 \ln Re_{Dh,m} - 3,28)^2} = 5,131 \times 10^{-3} \quad \text{Filolenko}$$

11) Calculem el nombre de Nusselt $Nu_{Dh,m}$ sense la correcció de Hausen (per determinar el coeficient de convecció asimptòtic h_c per la secció $x=L$)

$$Nu_{Dh,m_\infty} = \frac{C_{f,m} (Re_{Dh,m} - 1000) Pr_m \phi^n}{2 + 17,96 C_{f,m}^{0,5} (Pr_m^{2/3} - 1)} = 107,82 \quad \text{Gnielinski}$$

$$Nu_{Dh,m_\infty} = \frac{hc_{Dh,m_\infty} D_h}{\lambda_{m,aire}} \Rightarrow hc_{Dh,m_\infty} = \frac{Nu_{Dh,m_\infty} \lambda_{m,aire}}{D_h} = 39,2$$

Aquesta equació és vàlida només per $2300 < Re < 5 \times 10^6$ i $0,5 < Pr < 2000$ que compren pràcticament totes les situacions industrials.

Quan el perímetre tèrmic coincideix amb el perímetre hidràulic, com succeeix amb aquest exercici, el coeficient de Hausen-Düwell resulta ser la unitat.

$$h_c = hc_{Dh,m} \underbrace{\left\{ 1 - \left(\frac{0,75}{1 + Pr_m} \right) \times \left(1 - \frac{P_t}{P_h} \right) \right\}}_1 \quad \text{Finalment } h_{aire} = h_c = 39,2 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

12) Recalculem la temperatura de paret en $x=L$ (propietats a $T_m=T_F$)

$$2000 = \frac{q}{A} \Big|_{x=7} = hc_{Dh,m_\infty} (T_{0_nova} - T_F) \Rightarrow T_{0_nova} = \frac{q}{hc_{Dh,m_\infty} A} \Big|_{x=7} + T_F = 393 \text{ K} = 119,85^\circ\text{C}$$

Com que és prou diferent al valor suposat haurem de tornar al punt 8) per iterar amb una nova temperatura de paret T_{07} .

13) Determinem la temperatura mitja global del tram 0-L $T_m = \frac{T_I + T_F}{2}$

Tractant-se d'un procés de transferència de calor, el flux d'aire no és isoterm i existeix un gradient de temperatures entre la superfície de la xapa i l'aire. El factor ϕ^p contempla aquesta correcció per calcular la pèrdua de carga ΔP del tram 0-L.

$$\mu_m = \mu(T_m, P_I) \quad \rho_m = \rho(T_m, P_I) \quad Re_{Dh,m} = \frac{G D_h}{\mu_m} = 58489,77$$

$$C_{f,m} = \frac{1}{(1,58 \ln \operatorname{Re}_{D_{h,m}} - 3,28)^2} = 5,0564 \times 10^{-3} \quad \text{Filolenko}$$

Pràcticament resulten els mateixos valors que per a la secció $x = 7 \text{ m}$

14) Determinem la pèrdua de càrrega

Emprem ara el factor corrector, ϕ^p tal com s'explica a l'algoritme 2

$$\text{Calculem la pèrdua de càrrega,} \quad \Delta P = 2 C_{f,m} \phi^p \frac{L}{D_h} \frac{G^2}{\rho_m} = 129,08 \quad (\text{Pa})$$

$\Delta P \ll P_t = 120000 \text{ Pa}$ lògic tractant-se d'un gas.

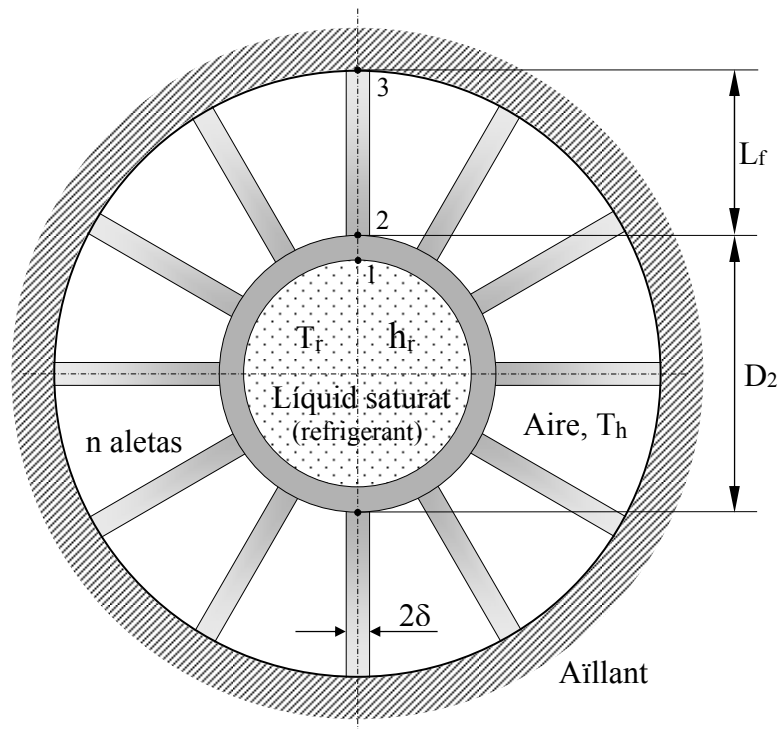
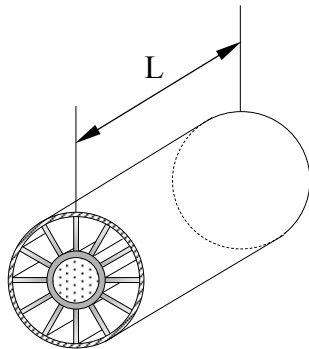
Ara podríem recalculer-ho tot considerant la pressió $P_m = P_t - \frac{\Delta P}{2}$ però tal com s'ha vist no surt a compte ja que els resultats seran pràcticament els mateixos.

Exercici 2: examen final 12/06/2003

Emprem pel costat tubs el refrigerant R134a, líquid saturat a 10 °C i 4,15 bar per refredar un cabal d'aire sec que introduïm pel costat envoltant a 40 m/s, a 300 °C i 101,325 kPa. Per reduir les dimensions d'aquest bescanviador disposem pel costat aire de 12 aletes longitudinals de 30 mm d'alçada i 2 mm de gruix.

Estimem un coeficient de convecció pel líquid saturat de 2500 W/(m²·K). La carcassa és d'un material aïllant de bona qualitat de forma que podem negligir les pèrdues amb l'ambient.

Volem determinar la longitud necessària d'aquest bescanviador, perquè la temperatura de l'aire a la sortida sigui de T_{hF} = 50 °C.



Propietats de l'aire sec (S.I.):

T en K ; P en kPa (1 atm=101,325 kPa)

$$\rho = 3,484 \frac{P}{T} \quad c_p = 1009$$

$$\lambda = (3,807 + 0,074 \cdot T) 10^{-3}$$

$$\mu = \left(2,469 + 0,0536 \cdot T + \frac{P}{8280} \right) 10^{-6}$$

Dades:

$n=12$, $D_2 = 25,4$ mm , $e_{12} = 2$ mm (gruix tub) , $L_f = 30$ mm (alçada aleta) , $\delta = 1$ mm, $T_{h1} = 300$ °C (temp. aire calent a l'entrada) , $\lambda = 160$ W/(m·K) (aletes i tubs) , $T_{hF} = 50$ °C $h_{fg} = 190,54$ kJ/kg (calor latent de vaporització del R134a a 10 °C) , $T_r = T_{refrigerant} = 10$ °C Negligim la resistència de contacte entre les aletes i el tub.

Per iniciar la primera iteració faci servir: $L = 10$ m i $T_2 = T_r$

Qualificació: cal explicar amb detall la metodologia i fórmules emprades (50 %) i realitzar els càlculs numèrics de la primera iteració (50 %)

Determinar:

- Longitud del bescanviador en m?
- Coeficient de convecció del costat aire ?
- Coeficient de transferència global referit a la superfície interior del tub (A_1) ?
- Potència mecànica consumida per l'equip d'impulsió de l'aire?
- Potència tèrmica transferida en tot el bescanviador ?
- La quantitat de refrigerant vaporitzat en kg/h ?

Solució examen final 12/06/2003**1) Dades del problema:**

$eK=273,15$	$T_r=10+eK$	$T_{hl}=300+eK$	$T_{hf}=50+eK$	$u_f=40$ m/s
$\lambda_r=160$ W/(m·K)	$e_{l2}=2 \cdot 10^{-3}$ m	$\delta=1 \cdot 10^{-3}$ m	$L_f=30 \cdot 10^{-3}$ m	$P_f=101325$ kPa
$n_{aletes}=12$ aletes	$h_r=2500$ W/(m ² ·K)	$h_{fg}=190540$	$D_2=25,4 \cdot 10^{-3}$ m	

Dades per iniciar els primers càlculs $L=10$ m i $T_2=T_r$

2) Determinem el diàmetre hidràulic

$$D_1 = D_2 - 2e_{l2} \qquad D_3 = D_2 + 2L_f$$

$$P_t = \pi D_2 - n_{aletes} 2\delta + 2n_{aletes} L_f \qquad P_h = \pi (D_2 + D_3) - 2(n_{aletes} 2\delta) + 2n_{aletes} L_f$$

$$S_{aire} = \frac{\pi}{4} (D_3^2 - D_2^2) - n_{aletes} L_f 2\delta \qquad D_h = 4 \frac{S_{aire}}{P_h} = 0,0177 \text{ m}$$

3) Propietats de l'aire sec (P en kPa i T en K)

$$\lambda(T) = (3,807 + 0,074 \cdot T) \times 10^{-3} \qquad \mu(T, P) = \left(2,469 + 0,0536 \cdot T + \frac{P}{8280} \right) \times 10^{-6}$$

$$\rho(T, P) = 3,484 \frac{P}{T} \qquad Pr(T, P) = \frac{\mu(T, P) c_p(T)}{\lambda(T)} \text{ nombre de Prandtl}$$

$$c_p(T) = 1009 \quad ;$$

4) Propietats de l'aire a la temperatura mitja global (costat envoltent) $T_{hm} = \frac{T_{hl} + T_{hf}}{2}$

(h=indica corrent calenta, hot en anglès)

Quan la variació total de temperatures d'un tram de conducte 0-L es pugui considerar moderada, es treballa amb la temperatura mitja global del tram T_{hm} .

Determinem les propietats de l'aire (S.I) en funció de T_{hm} $c_{p,m}$, λ_m , ρ_m , μ_m , Pr_m

$$\lambda_m = \lambda(T_{hm}) \quad \rho_m = \rho(T_{hm}, P_1) \quad \mu_m = \mu(T_{hm}, P_1) \quad c_{pm} = c_p \quad Pr_m = Pr(T_{hm}, P_1)$$

5) Calculem la MLDT, la Mitja Logarítmica de la Diferència de Temperatures:

$$\Delta T_{MLDT} = \frac{\Delta T_I - \Delta T_F}{\ln \frac{\Delta T_I}{\Delta T_F}} = 126,2 \quad \text{amb} \quad \begin{cases} \Delta T_I = T_{hl} - T_r = 300 - 10 = 290 \\ \Delta T_F = T_{hf} - T_r = 50 - 10 = 40 \end{cases}$$

6) Calculem el flux G i el nombre de Reynolds $Re_{Dh,m}$

Densitat de l'aire a les condicions d'entrada $\rho_1 = \rho(T_{hl}, P_1)$

Cabal total d'aire $m_{aire} = \rho_1 u_1 S_{aire} = 0,111 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ (cond. inicials)

$$G = \frac{\dot{m}_{\text{aire}}}{S_{\text{aire}}} = \frac{\overbrace{\rho_l u_l S_{\text{aire}}}^{\dot{m}_{\text{aire, total}}}}{S_{\text{aire}}} = \rho_l u_l = \rho_m u_m = \dots \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}} \quad \text{Flux màssic d'aire}$$

$$Re_{D_h, m} = \frac{G D_h}{\mu_m} = 16408,5 > 10000 \quad \text{i per tant és turbulent.}$$

$$\text{També pot resultar pràctica l'expressió, } Re_{D_h, m} = \frac{G D_h}{\mu_m} = \frac{\dot{m}_{\text{aire}}}{S_{\text{aire}}} \frac{D_h}{\mu_m}$$

$$\text{Si } Re_{D_h, m} < 2300 \Rightarrow \boxed{\text{Règim Laminar}}$$

$$\text{Si } 2300 < Re_{D_h, m} < 10^4 \Rightarrow \boxed{\text{Règim de Transició}}$$

$$\text{Si } Re_{D_h, m} > 10^4 \Rightarrow \boxed{\text{Règim Turbulent}}$$

L'equació de Gnielinski que inclou l'efecte d'entrada (efecte degut a que el coeficient de convecció es molt més gran en la zona inicial del conducte a on x es menor a la distància de 10 diàmetres) és aplicable per ambdós règims, transició i turbulent. Aquesta es una de les avantatges d'aquesta formulació. També es la que més s'ajusta als resultats experimentals.

7) Calculem la potència que transfereix l'aire al refrigerant:

$$q_{\text{total}} = \dot{m}_{\text{aire}} c_{pm} (T_{hl} - T_{hf}) = 27974,2 \text{ W} \quad (\text{balanç longitudinal de potència convectiva})$$

8) Calculem els coeficients de fricció:

Determinem el coeficient de fricció aplicant Filolenko:

Tractant-se d'un gas que es refreda $p=0,38$, $n=0,36$

$$C_{f, m} = \frac{1}{(1,58 \ln Re_{D_h, m} - 3,28)^2} = 6,881 \times 10^{-3} \quad (\text{Filolenko}) \quad (\text{per calcular el nombre de Nusselt})$$

$$Coef_{HD} = \left\{ 1 - \left(\frac{0,75}{1 + Pr_m} \right) \times \left(1 - \frac{Pr_t}{Pr_h} \right) \right\} = 0,896 \quad \text{Coeficient de Hausen-Düwell}$$

9) Nombre de Nusselt costat aire a partir de Gnielinski (prenem $L=10$)

$$h_{c, \text{aire}} = \frac{C_{f, m} (Re_{D_h, m} - 1000) Pr_m \left[1 + \left(\frac{D_h}{L} \right)^{2/3} \right] \phi^n}{2 + 17,96 C_{f, m}^{0,5} (Pr_m^{2/3} - 1)} \times \frac{\lambda_{m, \text{aire}}}{D_h} \times Coef_{HD} = 100,7 \quad (\text{Gnielinski})$$

Aquesta equació és vàlida només per $2300 < Re_{D_h, m} < 5 \times 10^6$ i $0,5 < Pr < 2000$ que compren pràcticament totes les situacions industrials.

Quan el perímetre tèrmic **NO** coincideix amb el perímetre hidràulic, com succeeix amb aquest exercici, cal multiplicar per el coeficient de Hausen-Düwell.

10) Eficiència de les aletes

$$P = 2L \quad A = L 2\delta \quad m = \sqrt{\frac{h_{c,aire} P}{\lambda_t A}} = 25,086$$

$$e_f = \eta_f = \frac{\tanh(m L_f)}{m L_f} = 0,846 \quad A_f = \underbrace{(n_{aletes} 2 L_f)}_{A_{f_1m}} L \quad A_0 = \underbrace{(\pi D_2 - n_{aletes} 2\delta)}_{A_{0_1m}} L$$

11) Resistències tèrmiques

$A_1 = \pi D_1 L$ (superfície interior del conducte per on circula el refrigerant)

$$R_{aire} = \frac{1}{h_{c,aire} (A_{0_1m} + e_f A_{f_1m}) L} \quad R_{xapa} = \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi \lambda_t L} \quad R_{refrigerant} = \frac{1}{h_r \underbrace{\pi D_1 L}_{A_1}}$$

Queda clar que $A_f = \overbrace{A_{f_1m}}^{1\text{ metre}} L$ i $A_0 = \overbrace{A_{0_1m}}^{1\text{ metre}} L$

Observem que les resistències $R_{refrigerant}$ i R_{xapa} són constants en tot el procés iteratiu.

12) Coeficient de transferència global U_1 entre el refrigerant i l'aire referit a la sup. 1

$$q_{total} = U_1 A_1 \Delta T_{efectiva} = \frac{\Delta T_{efectiva}}{\sum R_i} \Rightarrow U_1 = \frac{1}{A_1 \sum R_i} \quad \text{sent} \quad U_1 A_1 = U_2 A_2$$

$$U_1 = \frac{1}{A_1 \sum R_i} = \frac{1}{A_1 (R_{aire} + R_{xapa} + R_{refrigerant})} \quad \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \quad \text{observeu que és simplifica la L !}$$

$$U_1 = \frac{1}{A_1 \sum R_i} = \frac{1}{\pi D_1 L \left(\frac{1}{h_{c,aire} (A_{0_1m} + e_f A_{f_1m}) L} + \frac{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi \lambda_t L} + \frac{1}{h_r \underbrace{\pi D_1 L}_{A_1}} \right)}$$

$$U_1 = \frac{1}{\frac{\pi D_1}{h_{c,aire} (A_{0_1m} + e_f A_{f_1m})} + \frac{D_1 \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\lambda_t} + \frac{1}{h_r}} = 706,4 \quad \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

13) Determinem la longitud del bescanviador:

$$q_{total} = U_1 \overbrace{\pi D_1 L}^{A_1} \Delta T_{MLDT} \Rightarrow L_{nova} = \frac{q_{total}}{U_1 \pi D_1 \Delta T_{MLDT}} = 4,67 \text{ m}$$

Assignem a partir d'ara $L = L_{nova}$

14) Recalculem la temperatura de paret T_2

$$q_{total} = \frac{T_{2,nova} - T_r}{R_{xapa} + R_{refrigerant}} \Rightarrow T_{2,nova} = T_r + q_{total} (R_{xapa} + R_{refrigerant}) = 319,8 \text{ K} \quad T_2 = T_{2,nova}$$

$$q_{total} = \frac{T_1 - T_r}{R_{refrigerant}} \Rightarrow T_1 = T_r + q_{total} \times R_{refrigerant} = 318,8 \text{ K}$$

15) Determinem la pèrdua de càrrega

Tractant-se d'un procés de transferència de calor, el flux d'aire no és isoterm i existeix un gradient de temperatures entre l'aire i la superfície 2 de la xapa.

Així doncs, emprem el factor ϕ^p per corregir el coeficient de fricció isoterm $C_{f,m}$ degut a la variació de les propietats entre la paret 2 i el nucli de l'aire, com a conseqüència de la variació radial de la temperatura (Filolenko corregit)

En el nostre cas, tenim un gas refredant-se i segons la taula adjunta,

FLUID	ϕ	PROCÉS	p	n
Gasos	$\left(\frac{T_m}{T_0}\right)$	escalfats	0,52	0,47
		refredats	0,38	0,36

Tractant-se d'un gas que es refreda $p=0,38$ i $n=0,36$ i al tractar-se d'un gas el coeficient

ϕ és la relació de temperatures absolutes (en K !!) o sigui $\phi = \frac{T_{hm}}{T_2}$ (sent $T_0=T_2$ la

temp. superficial i T_{hm} la temperatura mitja global del tram 0-L) Per tant, per determinar la pèrdua de càrrega haurem de fer servir el coeficient corrector ϕ^p

$$\text{Pèrdua de càrrega, } \Delta P = 2 C_{f,m} \phi^p \frac{L}{D_h} \frac{G^2}{\rho_m} = 2 C_{f,m} \left(\frac{T_{hm}}{T_2}\right)^{0,38} \frac{L}{D_h} \frac{G^2}{\rho_m} = 3188 \text{ Pa}$$

16) Potència mecànica per accionar l'equip d'impulsió d'aire

$$P_M = \Delta P \times \text{cabal volumètric} \rightarrow P_M = \Delta P \times \frac{\dot{m}_{aire}}{\rho_m} = 448,8 \text{ W}$$

$$17) \text{ Quantitat de refrigerant vaporitzat} \rightarrow \dot{m}_v = \frac{q_{total}}{h_{fg}} 3600 = 528,5 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$$

18) Resultats primera iteració:

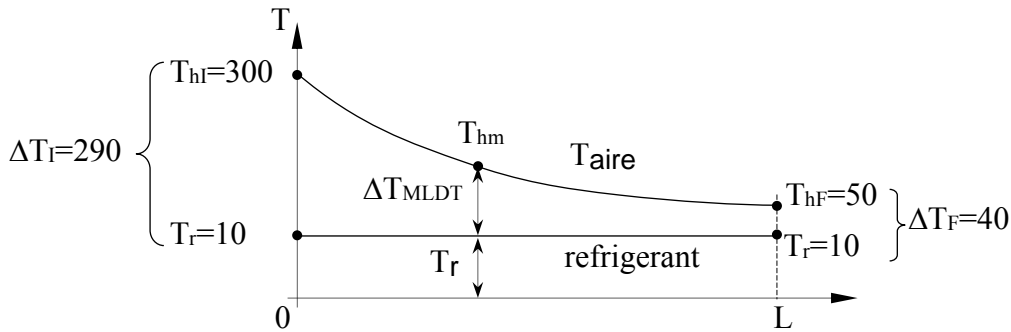
$$\text{Temperatures, } T_{hm} = 175 \text{ }^\circ\text{C} \quad , \quad T_2 = 46,65 \text{ }^\circ\text{C} \quad , \quad T_1 = 445,65 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\text{Longitud, } L = 4,67 \text{ m} \quad , \quad h_{c,aire} = 100,7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$$q_{total} = q_{0-L} = U_1 \overbrace{\pi D_1 L}^{A_1} \Delta T_{MLDT} = 27974,2 \text{ W} \quad , \quad q_{2 \rightarrow \text{refrigerant}} = \frac{T_2 - T_r}{R_{xapa} + R_{refrigerant}} = 27974,2 \text{ W}$$

$$q_{m \rightarrow 2} = \frac{T_{hm} - T_2}{R_{aire}} = \frac{T_{hm} - T_2}{\frac{1}{h_{c,aire} (A_0 + e_f A_f)}} = h_{c,aire} (A_0 + e_f A_f) (T_{hm} - T_2) = 40099,4 \text{ W}$$

Com es veu aquest valor es molt diferent dels valors anteriors $q_{0-L} = q_{2 \rightarrow refrigerant} = 27974,2 \text{ W}$



Observem que si prenem $T_{hm} = T_r + \Delta T_{MLDT} = 10 + 126,2 = 136,2 \text{ }^\circ\text{C}$ molt diferent al valor emprat $T_{hm} = \frac{T_{hl} + T_{hF}}{2} = \frac{300 + 50}{2} = 175 \text{ }^\circ\text{C}$ com temperatura mitja global del tram 0-L, aleshores si que la fórmula anterior ens dona una resultat que quadra perfectament.

$$q_{m \rightarrow 2} = h_{c,aire} (A_0 + e_f A_f) \left(\overbrace{T_{hm}^{136,2}} - T_2 \right) = 27974,2 \text{ W}$$

Us preguntareu perquè no es fa servir aquest criteri a l'hora de escollir una temperatura mitja global per el tram 0-L. La resposta seria que potser si que valdria la pena en el cas de gasos, però seria innecessària en el cas de líquids que suporten molt menors salts tèrmics. Determinem ara la potència dissipada per la superfície primària i estesa.

Sigui $A = L_{nova} 2\delta$ (L_{nova} es la longitud de conducte calculada a la primera iteració)

$$\left. \begin{aligned} q_f &= n_{aletes} \lambda_t A m (T_{hm} - T_2) \tanh(m L_f) \quad (sup. estesa) \\ q_0 &= h_{c,aire} A_0 (T_{hm} - T_2) \quad (superf. primària) \end{aligned} \right\} q_f + q_0 = 27974,2 \text{ W}$$

Troblem la temperatura a l'extrem de les aletes, $T(x) = T_{hm} + \frac{(T_2 - T_{hm})}{\cosh(m L_f)} \cosh[m(L_f - x)]$

Extrem aïllat, $T(L_f) = 340,318$, $T_2 = 46,68$, $T_{hm} = 136,199$ en $^\circ\text{C}$

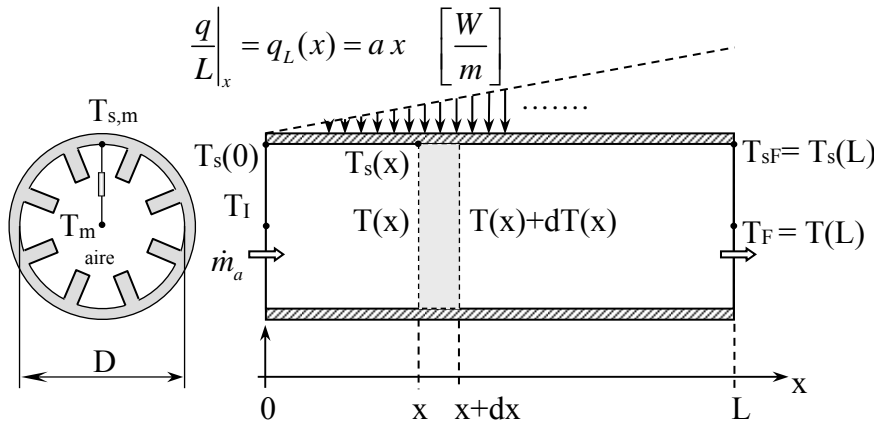
Exercici 3: examen final 10/01/2007

Volem estudiar com es comporta la temperatura superficial de la canonada aletejada de la

figura quan li apliquem perimetralment un potència tèrmica $\frac{q}{L}|_x = a x \left(\frac{W}{m} \right)$ sent x la

distància a l'entrada i $a=ct$.

Per una canonada d'acer inoxidable AISI 316 de diàmetre interior D, de longitud L que disposa de $n_f=8$ aletes longitudinals del mateix material d'un gruix $t=2\delta$ i alçada L_f introduïm aire a un m/s , a la temperatura T_i i a la pressió atmosfèrica. La conductivitat tèrmica del acer inoxidable és $\lambda_f \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$



Per determinar el coeficient de convecció del tram 0-L considerem la temperatura superficial mitja global $T_{s,m} = 46,61$ °C (a les condicions de la temperatura mitja global T_m)

Dades: $\frac{q}{L_x} = q_L(x) = a x \left(\frac{W}{m} \right)$; $a=100 \text{ W/m}^2$; $P_i=101325 \text{ Pa}$; $u_i=10 \text{ m/s}$

$D=18 \text{ mm}$; $L=1 \text{ m}$ Temp. superficial $T_{s,m}=46,61$ °C , $T_i=25$ °C

Aletes $n_f=8$; $L_f=3 \text{ mm}$; $t=2\delta=1,4 \text{ mm}$; $\lambda_f=13,4 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$

Propietats de l'aire sec (S.I.)

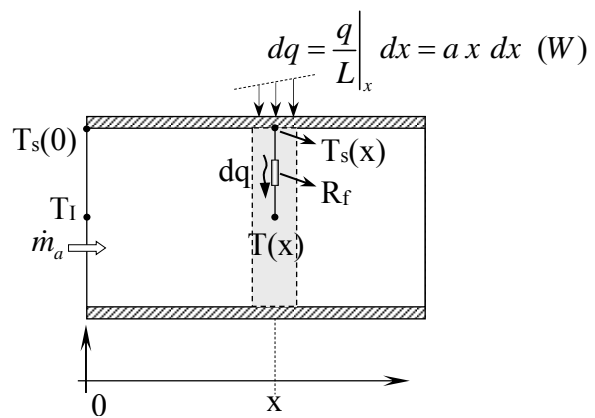
$$\mu = \left(2,469 + 0,0536 \times T + \frac{P}{8280 \times 1000} \right) 10^{-6} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}} \right] ; \quad \rho = 3,484 \times 10^{-3} \frac{P}{T} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

$$\lambda = (3,807 + 0,074 \times T) 10^{-3} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right] ; \quad c_p = 1004 \quad (P \text{ en Pa} ; T \text{ en K})$$

Hipòtesis : 1) Regim estacionari 2) Flux incompressible 3) Propietats avaluades a la temperatura mitja global del tram 0-L 4) Flux totalment desenvolupat, el que ens permet considerar $h(x)=h=ct.$ per tot el tram 0-L

Determinar: (només la 1ª iteració)

- 1) Potència total transferida q en tot el tram 0-L i la temperatura de l'aire a la sortida T_F (°C)
- 2) Expressió algebraica de la temperatura de l'aire en un funció de x (facci un balanç de potència tèrmica en un diferencial de canonada)
- 3) Coeficient de convecció del costat aire, h_i per el tram 0-L (sent $T_{s,m}=46,61$ °C)
- 4) Eficiència de les aletes $e_f=\eta_f$ tot considerant no negligible la convecció per l'extrem
- 5) La resistència R_f de convecció de l'aire del tram 0-L i la temperatura de paret nova $T_{s,m,nova}$ per iniciar la segona iteració.
- 6) Expressió algebraica de la temperatura superficial $T_s(x)$ (°C), el valor de la temperatura superficial a la entrada $T_s(0)$ (°C) i la sortida $T_s(L)$ (°C) de la canonada.
(facci un balanç transversal en un dx de canonada d'acord a la figura adjunta)
- 7) Dibuixi les funcions $T_s(x)$ i $T(x)$ en un gràfic i en un altre gràfic el salt tèrmic $T_s(x)-T(x)$. Comenti si es lògic el seu valor a l'origen.
- 8) Expressió algebraica (tot lletres) de la diferencia efectiva de temperatures i el seu valor



numèric (pensi amb l'equació que la defineix). Es pot aplicar la mitja logarítmica de temperatures en aquest cas ? Perquè ?

9) La pèrdua de càrrega ΔP del tram 0-L i totes les variables intermèdies indicades al full de resultats.

Solució:

1. Potència total transferida q en tot el tram 0-L i la temperatura de l'aire a la sortida T_F (°C)

Variable	Valor	Unitats (S.I.)
q (tram 0-L)	50	W
\dot{m}_{aire}	$2,615 \times 10^{-3}$	kg/s

Variable	Valor	Unitats (S.I.)
T_F	44,04	°C

2. L'expressió algebraica (tot lletres) de la temperatura de l'aire en un funció de x (faci un balanç de potència tèrmica en un diferencial de canonada)

Balanç de potència tèrmica en un dx: $\dot{m}_a c_p T + q_L(x) dx = \dot{m}_a c_p (T + dT)$

Temperatura de l'aire en funció de x: $T(x) = T_i + \frac{\int_0^x q_L(x) dx}{\dot{m}_a c_p} = T_i + \frac{a x^2}{2 \dot{m}_a c_p}$ (°C)

3. Coeficient de convecció del costat aire, h_i per el tram 0-L (sent $T_{s_m} = 46,61$ °C)

Variable	Valor	Unitats (S.I.)
S_h	$2,209 \times 10^{-4}$	m ²
P_h	0,1045	m
P_t	0,1045	m
D_h	0,00845	m
G	11,840	kg/(m ² ·s)
Re	5273,7	
Pr	0,717	

Variable	Valor	Unitats (S.I.)
p	0,52	
n	0,47	
ϕ	0,962	
C_f	$9,497 \times 10^{-3}$	
Nu	18,016	
Hausen-Duwel	1	
$h_{c_{aire}}$	56,658	W/(m ² ·K)

4. Eficiència de les aletes $e_f = \eta_f$ tot considerant no negligible la convecció per l'extrem

Variable	Valor	Unitats (S.I.)
perímetre P	2	m
Secció A	$1,4 \times 10^{-3}$	m ²
<i>Sup. primària i estesa per 1m de canonada</i>		
A_{p_1}	0,045349	m ²
A_{f_1}	0,0592	m ²

Variable	Valor	Unitats (S.I.)
m	77,7195	
$e_f = \eta_f$	0,973	
<i>Sup. primària i estesa per L m de canonada</i>		
A_p	$0,045349 \times L$	m ²
A_f	$0,0592 \times L$	m ²

5. La resistència R_f de convecció de l'aire del tram 0-L i la temperatura de paret nova per iniciar la segona iteració.

Variable	Valor	Unitats (S.I.)
R_f (tram 0-L)	0,1714	K/W

Variable	Valor	Unitats (S.I.)
T_{sm}	43,09	°C

6. Expressió algebraica (tot lletres) de la temperatura superficial $T_s(x)$ (°C), el valor de la temperatura superficial a la entrada $T_s(0)$ (°C) i la sortida $T_s(L)$ (°C) de la canonada. (2ª figura de l'enunciat)

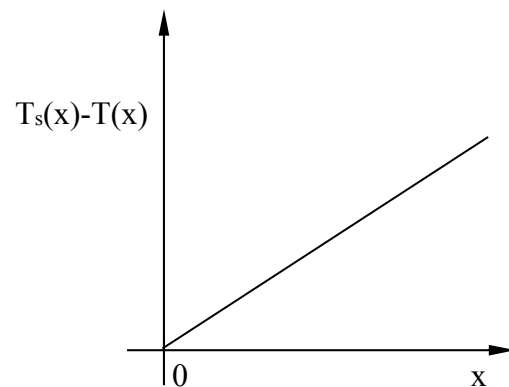
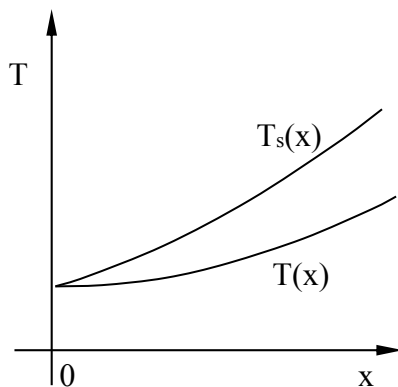
Balanç transversal de potència tèrmica en un dx:

$$q_L(x) dx = h \underbrace{(A_{p1} + e_f A_{f1})}_{dA} dx [T_s(x) - T(x)]$$

Temperatura de paret en funció de x: $T_s(x) = T_i + \frac{a x^2}{2 \dot{m}_a c_p} + \frac{a x}{h (A_{p1} + e_f A_{f1})}$ (°C)

$T_s(0) = 25$ (°C) $T_s(L) = 61,2$ (°C)

7. Dibuixi les funcions $T_s(x)$ i $T(x)$ en un gràfic i en un altre gràfic el salt tèrmic $T_s(x) - T(x)$. Comenti si es lògic el seu valor a l'origen.



Comentari: ...a l'origen... $q_L(0) = 0$... i per tant si no cal transferir potència el salt tèrmic és nul.

8. Expressió algebraica (tot lletres) de la diferència efectiva de temperatures i el seu valor numèric. Pensi amb l'equació que la defineix. Es pot aplicar la mitja logarítmica de temperatures en aquest cas ?

Expressió algebraica de la $\Delta T_{efectiva} = \frac{q}{h(A_{p1} + e_f A_{f1})L} = 8,57$

Es pot aplicar la MLDT ? . No es pot aplicar la MLDT.....Perquè ?

9. Pèrdua de càrrega ΔP del tram 0-L

Variable	Valor	Unitats (S.I.)
ΔP	269,2	Pa

5 RADIACIÓ: MEDIS NO PARTICIPANTS

5.1 NATURALES DE LA RADIACIÓ TÈRMICA

Definim la radiació tèrmica com l'energia transferida per ones electromagnètiques (o fotons) originades en un sistema a causa de la seva pròpia temperatura.

Quan un cos absorbeix o emet radiació tèrmica, les seves molècules modifiquen el nivell de vibració i/o de rotació, i es pot també donar el cas que alguns electrons saltin entre els diferents nivells energètics. Conseqüentment, la radiació tèrmica depèn de la substància i de la temperatura del sistema.

5.1.1 Models emprats

Actualment no es coneix en profunditat el mecanisme d'emissió d'un cos real, i tampoc el mecanisme de propagació a través d'un medi qualsevol. A vegades interessa modelitzar la radiació com a ones electromagnètiques que es propaguen d'acord amb les lleis de Maxwell, el que ens permet realitzar, per exemple, un estudi analític de les propietats reflectores dels materials. Altres cops considerem la radiació electromagnètica com un raig de paquets de fotons d'energia $E=h\nu$ ($h=6,625 \times 10^{-34}$ J·s, ν =freqüència), basats en el concepte dels quanta de Planck proposat al 1900. Aquest model quàntic permet calcular la quantitat d'energia emesa per un cos a causa de la seva temperatura.

La freqüència d'una ona electromagnètica només depèn de la potència de la font radiant que l'origina, sent independent de la substància del medi que travessa. Aquesta freqüència no canvia quan l'ona travessa diferents medis. Això resulta obvi, ja que al contrari si una ona (ν_1) augmentes per exemple la seva freqüència a (ν_2) al canviar de medi, això representaria una producció permanent d'energia $\Delta E = E_2 - E_1 = h(\nu_2 - \nu_1) > 0$ a la interfase. Experimentalment no s'observa cap variació de temperatura a la interfase $\Delta E = 0$. Això ens fa veure que s'acompleix el principi de conservació de l'energia i conseqüentment de la freqüència $\nu_1 = \nu_2$. Si una ona es reflexa en una interfase, per els mateixos motius anteriors també es conserva la freqüència.

5.1.2 Espectre electromagnètic

Anomenem índex de refracció n a la relació, entre la velocitat de propagació d'una ona electromagnètica al buit c_0 i la velocitat c de la mateixa ona en un medi diferent. $n = \frac{c_0}{c}$ ($n=1$ per l'aire i el buit i es de l'ordre de 1,5 per l'aigua i el vidre, $c_0=300000$ km/s.)

Qualsevol ona electromagnètica queda totalment caracteritzada per la seva freqüència ν i la seva velocitat c en un medi, sent la seva longitud d'ona $\lambda = \frac{c}{\nu}$. Una ona canvia de velocitat al

canviar a un medi amb diferent índex de refracció $c = \frac{c_0}{n}$

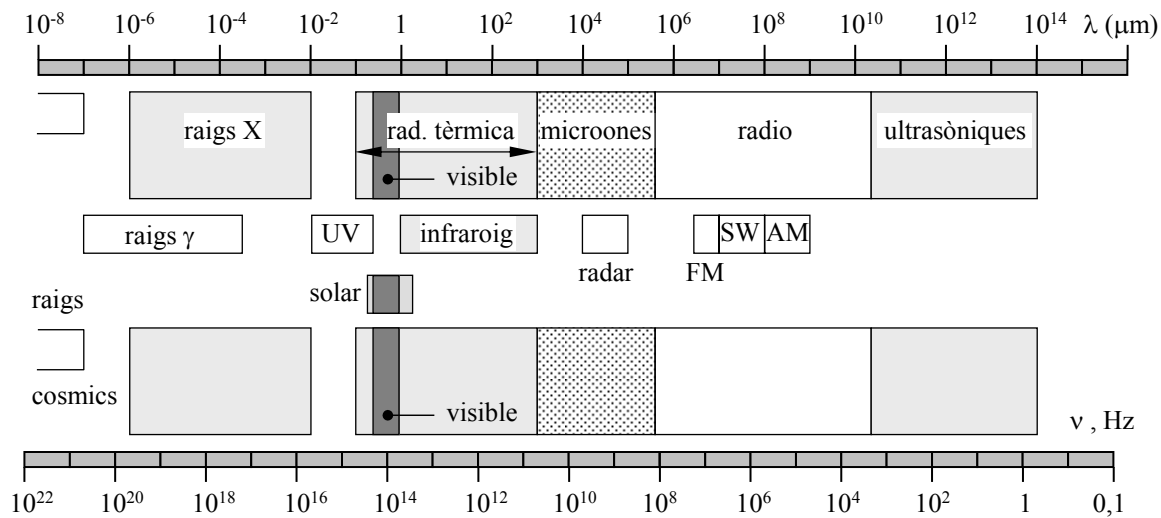
Si una ona travessa els medis 1 i 2 amb índex de refracció n_1 i n_2 , les longituds d'ona en els medis respectius seran, (si no es el buit n_1 i $n_2 > 1$ i aleshores c_1 i $c_2 < c_0$)

$$c_1 = \frac{c_0}{n_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{c_1}{\nu} \quad (\text{en el medi 1}) \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{c_0}{n_2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{c_2}{\nu} \quad (\text{en el medi 2})$$

Es conserva la freqüència i aleshores no es conserva ni la longitud d'ona ni la velocitat.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \text{i} \quad c_1 \neq c_2$$

L'espectre teòric de radiació electromagnètica s'estén des de longituds d'ona zero fins a l'infinit. S'estableixen grups d'ones electromagnètiques amb nom propi en funció de l'origen de formació i de l'ordre de longitud d'ona que les caracteritza.



5.1.3 Espectre pràctic de radiació tèrmica

Considerarem radiació tèrmica la banda des de $\lambda=0,1 \mu\text{m}$ fins a $\lambda=1000 \mu\text{m}$ que inclou l'ultraviolat ($0,1 \div 0,38 \mu\text{m}$), el visible ($0,38 \div 0,76 \mu\text{m}$) i l'infraroig ($0,76 \div 1000 \mu\text{m}$).

Ultraviolat

UV buit	0,10-0,20 μm
UVC	0,20-0,29 μm
UVB	0,29-0,32 μm
UVA	0,32-0,40 μm

Llum visible

Violeta	0,40-0,44 μm
Blau	0,44-0,49 μm
Verd	0,49-0,54 μm
Groc	0,54-0,60 μm
Taronja	0,60-0,63 μm
Vermell	0,63-0,76 μm

Infraroig

Proper	0,76-1,50 μm
Mitja	1,50-5,60 μm
Llunya	5,60-1000 μm

L'ultraviolat es situa a la part inferior de l'espectre de radiació tèrmica.

Aquesta radiació es produïda per canvis en els nivells d'energia atòmica que tenen lloc per els desplaçaments dels electrons de les capes externes.

L'ozó O_3 de l'estratosfera absorbeix i destrueix completament l'UV i l'UVC (que mata els microorganismes) que provenen de la radiació solar. L'ozó O_3 i l'atmosfera absorbeixen gran quantitat del UVB i UVA de forma que a la superfície terrestre arriba només un 2 o 3 % d'aquestes radiacions. La destrucció parcial de la capa d'ozó als dos pols degut a l'acció dels CFCs (fluoroclorometans) existents en els aerosols i certs refrigerants donarà com a conseqüència immediata un augment de la radiació ultraviolada incident a la superfície terrestre, amb el conseqüent augment dels càncers de pell.

L'infraroig s'associa amb radiació produïda per la vibració de la retícula molecular i de les molècules que la componen. Es una radiació benigne sempre que no s'alteri el metabolisme de l'organisme viu per un excés de temperatura.

5.2 DEFINICIONS BÀSIQUES

5.2.1 Propietats monocromàtiques, totals i hemisfèriques

La radiació que correspon a una única freqüència o longitud d'ona rep el nom de radiació monocromàtica i les seves propietats, monocromàtiques o espectrals. Aquestes propietats radiants del sistema depenen molt estretament de la freqüència, de manera que si integrem aquests valors espectrals a tot el rang de freqüències, de zero a l'infinit, obtenim les corresponents propietats i magnituds radiants totals.

5.2.2 Llei de LAMBERT. Evidència experimental

Una petita superfície a una temperatura T emet radiació tèrmica en totes les direccions del semiespai.

S'observa que un detector de radiació tèrmica rep un senyal més feble a mesura que l'angle θ augmenta.

El seu valor és,

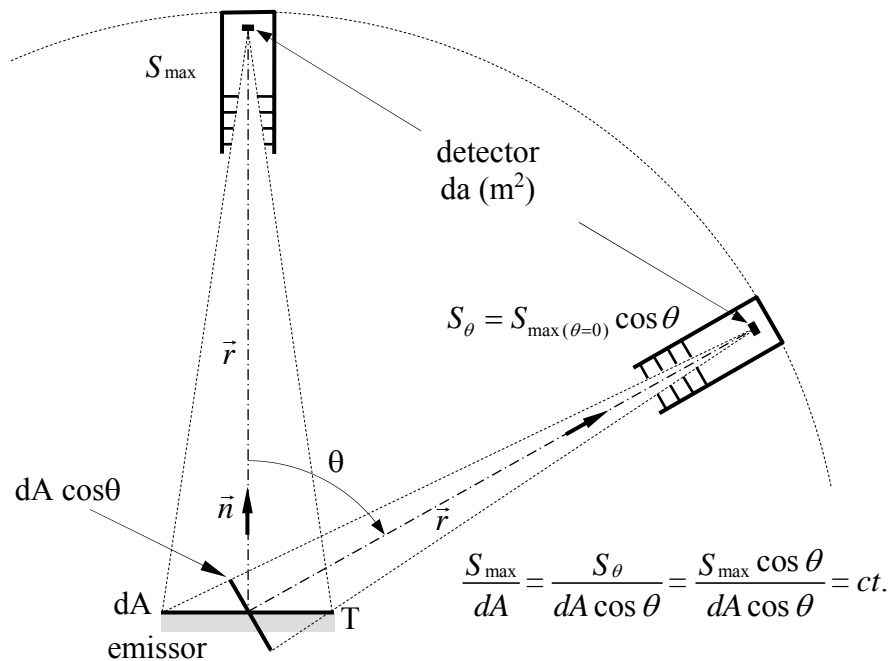
$$S_\theta = S_{\max(\theta=0)} \cos \theta,$$

i es coneix com la llei de LAMBERT.

Aquesta llei ens porta a definir la intensitat de radiació d'un emissor en termes de l'àrea vista pel detector (l'àrea projectada).

Podem afirmar que la relació entre la senyal

mesurada pel detector i l'àrea vista per l'emissor es manté constant.



Qüestió 1: determinem com es redueix en funció de la distància la irradiació G (W/m^2) que rebem del sol si aquest el podem considerar com un cos negre.

Dades: temperatura del sol $T_s=5790$ K, radi solar $R_s=6,96 \cdot 10^8$ m, distàncies r_1 i $r_2=d_{\text{sol-terra}}=1,49 \cdot 10^{11}$ m

La potència emesa per el sol per m^2 de superfície és igual al poder emissiu del cos negre, $E_s = \sigma T_s^4$ W/m^2 Aquesta

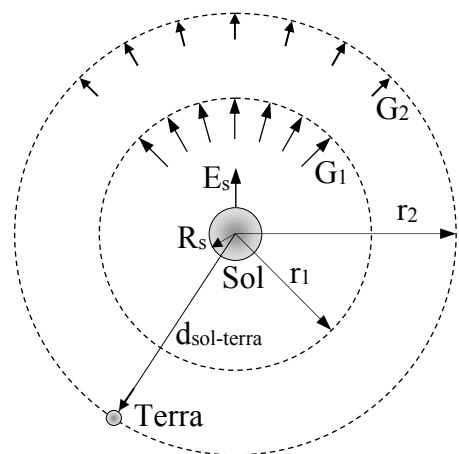
potència emesa per el sol és, $q_s = A_{\text{sol}} E_s = 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4$ W

Es un valor increïblement gran $q_s = 3,879 \times 10^{26}$ W

Aquesta potència que es desplaça a la velocitat de la llum es repartirà per tota la superfície esfèrica de radi r_1 .

La irradiació a la distància r_1 val $G_1 = \frac{q_s}{4\pi r_1^2}$ W/m^2 , i en r_2 val $G_2 = \frac{q_s}{4\pi r_2^2}$ W/m^2

Òbviamment $G_2 < G_1$ En particular a l'exterior de l'atmosfera terrestre el valor de la irradiació



val $G_{Terra} = \frac{q_s}{4\pi d_{sol-terra}^2} = 1390,4 \text{ m}^2$ que es el que s'ha mesurat experimentalment.

En realitat és a partir d'aquest valor mesurat a l'exterior de la terra que es troba la temperatura efectiva del sol com a cos negre de $T_s=5790 \text{ K}$. Simplement invertint els càlculs anteriors.

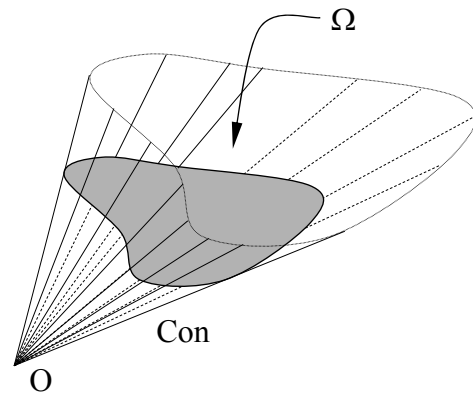
Per la conservació de l'energia sabem que $q_s = G_1 4\pi r_1^2 = G_2 4\pi r_2^2$ i per tant $\frac{G_1}{G_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$

Així ens queda clar que la irradiació es redueix conforme ens allunyem del sol de forma inversament proporcional a la distància al quadrat.

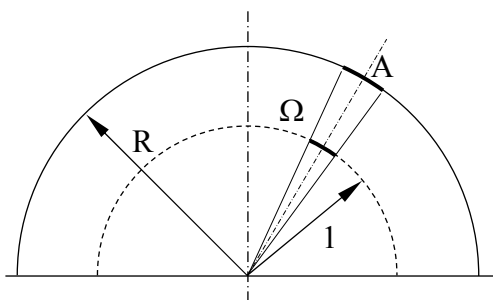
Concepte d'angle sòlid

Recordem, angle al pla era la part del pla compresa entre dos semirectes que tenen el mateix origen. Angle sòlid, que representem per la lletra grega Ω , es la generalització a l'espai del concepte d'angle al pla.

L'angle sòlid de vèrtex O amb el que veiem un objecte des de un origen O, es correspon a la zona de l'espai limitada per una superfície cònica definida per un conjunt de semirectes que parteixen del mateix origen O, i que envolten tangencialment al nostre objecte. De fet es una mesura aparent de la mida de com veiem l'objecte des de el punt O. Si l'objecte esta molt lluny, l'obertura del con i per tant l'angle sòlid seran petits.



La unitat d'angle sòlid en el SI es l'estereoradià, que representem per "sr". Quan la superfície interceptada pel con abans citat sobre una esfera de radi unitat, es igual a 1 m² direm que tenim un angle sòlid d'un estereoradià.



Per determinar l'angle sòlid amb el que veiem un objecte des de un punt O, es projecte l'objecte (radialment) sobre una esfera de radi conegut R, centrada a l'origen O.

$$\Omega = \left\{ \text{àrea interceptada per l'esfera de radi unitat} \right\}$$

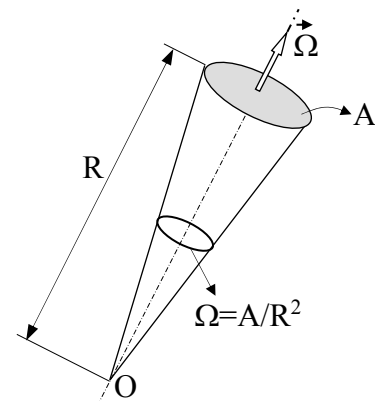
$$\text{Observem que } \frac{4\pi R^2}{4\pi 1^2} = \frac{A}{\Omega} \Rightarrow \frac{\Omega}{1^2} = \frac{A}{R^2} = \Omega$$

Per tant, si A es el valor de la superfície projectada del objecte sobre la superfície esfèrica de radi R, l'angle sòlid amb el que veiem l'objecte des de O es per definició, $\Omega = A/R^2$ (sr)

L'angle sòlid que correspon a mig espai (mitja esfera), o sigui quan el con es va obrint fins a coincidir amb un pla, el determinem a partir de la definició, $\Omega = \frac{2\pi R^2}{R^2} = 2\pi \text{ sr}$

Aleshores l'angle sòlid que correspon a tot l'espai seria igual a $4\pi \text{ sr}$.

En aquest curs, quan parlem de propietats hemisfèriques ens referim a propietats integrades en tot el semiespai, o sigui en

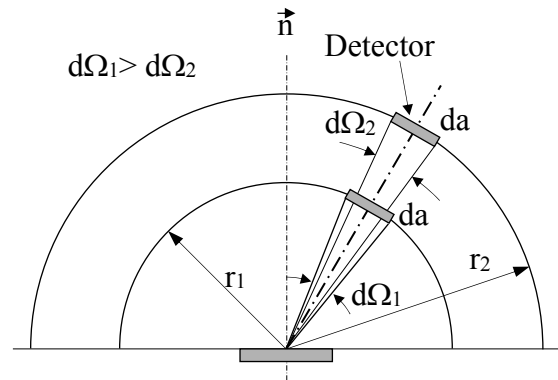


mitja esfera o el que es el mateix, en un angle sòlid de 2π sr

Si mantenim $\theta = \text{const}$ i allunyem el detector de l'emissor dA , s'observa experimentalment una disminució del senyal rebut, de manera que el senyal varia en relació inversa als quadrats de les distàncies, d'acord als resultats de la qüestió anterior. Això resulta evident, ja que en augmentar la distància, la radiació emesa per l'emissor ha de cobrir una esfera de radi més gran.

Aleshores, $S_2 \times 4\pi r_2^2 = S_1 \times 4\pi r_1^2$

Interessa definir la intensitat de radiació en funció de les característiques de l'emissor i no en funció de la seva mida o de la seva posició respecte del detector. La relació anterior ens porta a definir la radiació emesa per unitat d'angle sòlid en la direcció considerada. La figura anterior ens il·lustra aquest fet. sent $da = \text{àrea del detector}$



$$d\Omega_1 = \frac{da}{r_1^2} ; d\Omega_2 = \frac{da}{r_2^2} ; d\Omega_1 > d\Omega_2 \text{ aleshores, } \frac{S_2}{S_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{\frac{da}{r_2^2}}{\frac{da}{r_1^2}} = \frac{d\Omega_2}{d\Omega_1} \Rightarrow \frac{S_1}{d\Omega_1} = \frac{S_2}{d\Omega_2}$$

i el senyal del detector és, doncs, proporcional a l'angle sòlid amb què l'emissor el veu.

5.2.3 Intensitat de radiació

Definim la *intensitat espectral de radiació emesa* com la potència radiant emesa pel dA (punt \vec{r}) per unitat d'un petit interval de longituds d'ona $d\lambda$ al voltant de la longitud d'ona λ , per unitat de l'àrea dA projectada normalment a la direcció $\vec{\Omega}$ (θ, ϕ) i per unitat d'angle sòlid $d\Omega$ al voltant de la direcció $\vec{\Omega}$,

\vec{n} = vector unitari \perp a la superfície

$dA \cos\theta$ = àrea projectada pel dA en la direcció \perp a $\vec{\Omega}$ (θ, ϕ)

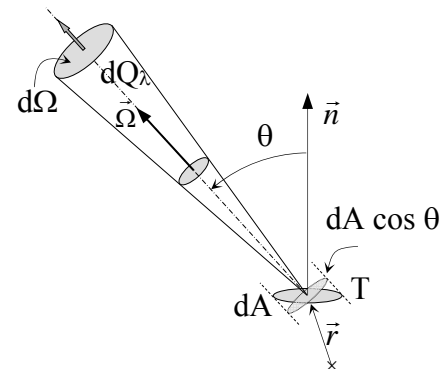
$$I_\lambda(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \frac{\frac{dQ_\lambda}{dt}}{dA \cos\theta d\Omega d\lambda} = \frac{dq_\lambda}{dA \cos\theta d\Omega d\lambda} \Big|_{\lim dA, d\Omega, d\lambda, dt \rightarrow 0}$$

dQ_λ = energia radiant emesa pel dA a l'interval de longituds d'ona $\lambda \pm d\lambda/2$ que es propaga a través de l'angle sòlid $d\Omega$ de direcció $\vec{\Omega}$ en un diferencial de temps dt ;

Hem definit el concepte de intensitat de radiació, considerant l'energia dQ_λ emesa per la superfície. Però també podríem haver considerat només la radiació reflectida per la superfície.

Aleshores, dQ_λ seria un diferencial de potència radiant reflectida que passaria per el $d\Omega$ i resultaria així una intensitat de radiació reflectida. Considerem l'estat estacionari i, per tant, $I_\lambda = I_\lambda(\vec{r}, \vec{\Omega})$. Si per a un emissor la intensitat de radiació és independent de la direcció i només depèn de la posició, $I_\lambda = I_\lambda(\vec{r})$, la radiació s'anomena difusa en aquest punt.

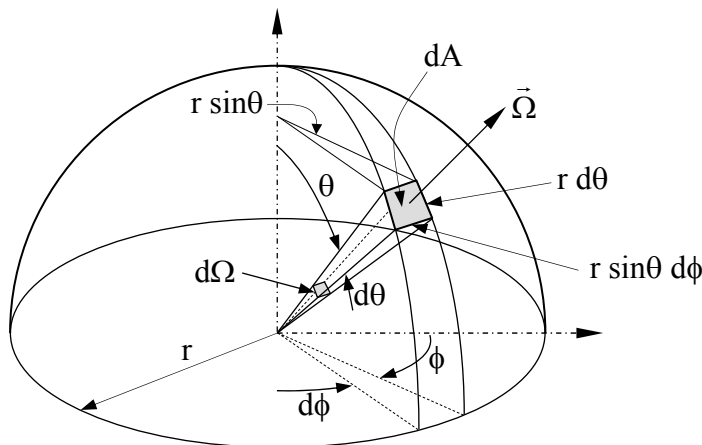
Si el rang de longituds d'ona és λ de 0 a ∞ , obtenim una potència radiant total. Quan l'angle sòlid considerat és tot el semiespai ($\Omega = 2\pi$, ϕ varia de 0 a 2π , i θ de 0 a $\pi/2$), la potència rep el nom d'hemisfèrica.



Determinem ara la intensitat total (λ de 0 a ∞) a partir de la intensitat espectral,

$$I(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \lambda) d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{dQ_{\lambda}}{dA \cos \theta d\Omega} = \frac{\int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} dQ_{\lambda}}{dA \cos \theta d\Omega} = \frac{dQ}{dA \cos \theta d\Omega} \left(\frac{W}{m^2 sr} \right)$$

$dQ = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} dQ_{\lambda}$ representa un diferencial d'energia radiant de totes les longituds d'ona, que passa en un dt per l'angle sòlid $d\Omega$ i $dq = dQ/dt$ un diferencial de potència radiant.



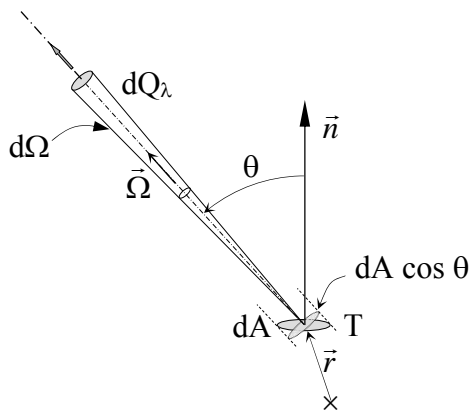
Angle sòlid diferencial

En coordenades esfèriques,
 $dA = r \sin \theta d\phi r d\theta$ i
 recordant la definició d'angle sòlid,
 $d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{r \sin \theta d\phi r d\theta}{r^2}$
 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$

i ara ja podem calcular una integral que ens resultarà molt útil,

$$\int_{\Omega=0}^{2\pi} \cos \theta d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \overbrace{\sin \theta d\theta d\phi}^{d\Omega} = \pi$$

A la següent figura s'ha procurat fer més petita la representació de l'angle sòlid diferencial que a les figures anteriors. El motiu es per il·lustrar el que tots ja sabem, si es un valor diferencial ha de ser tant petit com ens pugem imaginar. En realitat, quan $d\Omega \rightarrow 0$ l'angle sòlid es confon amb una línia, o sigui amb un raig de radiació de direcció $\vec{\Omega}$.



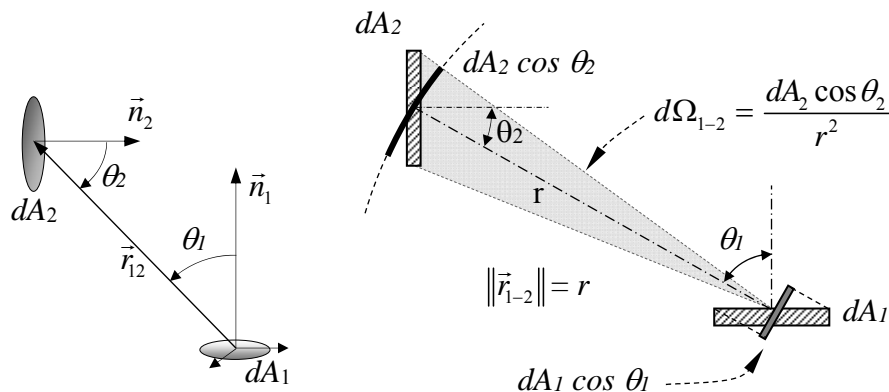
Qüestió 2: la superfície plana $dA=10^{-3} m^2$ a la temperatura T emet radiació tèrmica cap tot el semiespai.

Amb un muntatge experimental de molta precisió, en un $dt=0,1$ s mesurem la quantitat d'energia radiant $dQ_{\lambda}=0,00015$ J (radiació tèrmica emesa pel dA a l'interval $\left[\lambda - \frac{d\lambda}{2}, \lambda + \frac{d\lambda}{2} \right]$ sent $\lambda=10 \mu m$ i $d\lambda=0,02 \mu m$) que passa a través de l'angle sòlid $d\Omega=0,01$ sr centrat al voltant de la direcció $\vec{\Omega}$ ($\theta=40^\circ, \phi$)

1) Amb aquestes dades, determinar la intensitat espectral de radiació emesa per la superfície dA en la direcció $\vec{\Omega}$ ($\theta=40^\circ, \phi$ arbitrari):

$$I_\lambda(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \frac{dQ_\lambda}{dA \cos \theta d\Omega d\lambda dt} \cong \frac{\overbrace{0,00015}^{dQ_\lambda}}{\underbrace{10^{-3}}_{dA} \cos\left(\frac{40}{180}\pi\right) \underbrace{0,01}_{d\Omega} \times \underbrace{0,02}_{d\lambda} \times \underbrace{0,1}_{dt}} = 9790,6 \frac{W}{m^2 \cdot sr \cdot \mu m}$$

Qüestió 3: Les dues superfícies diferencials mostrades a la figura bescanvien potència radiant. La superfície $dA_1=10^{-3} m^2$ es difusa. La irradiació dG_2 que la superfície $dA_2=4dA_1$ rep degut a l'emissió de la superfície dA_1 es de $0,6 W/m^2$. ¿Determini l'expressió algebraica i el valor de la intensitat de radiació de la superfície dA_1 en la direcció normal a la mateixa en $W/(m^2 sr)$ si la distància entre els centres de les dues superfícies és $r_{12}=1,2 m$? ($\theta_1=30^\circ$ i $\theta_2=60^\circ$)



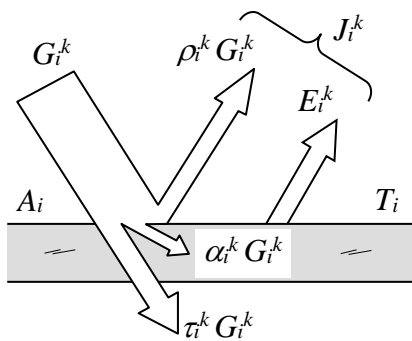
$$dG_2 = 0,6 \frac{W}{m^2} ; r_{12}=1,2 ; dA_1 = 10^{-3} m^2 ; dA_2 = 4 \cdot dA_1 ; \theta_1 = 30^\circ ; \theta_2 = 60^\circ ;$$

$$\rightarrow \text{rad } \theta_1 = \frac{30}{180} \pi \text{ rad} ; \theta_2 = \frac{60}{180} \pi \text{ rad} ; dG_2 = \frac{dq_{12}}{dA_2} \Rightarrow dq_{12} = dG_2 dA_2 = 2,4 \cdot 10^{-3} W$$

$$d\Omega_{12} = \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r_{12}^2} = 1,389 \times 10^{-3} sr \quad I_1 = \frac{dq_{12}}{dA_1 \cos \theta_1 d\Omega_{12}} = 1995,32 \frac{W}{m^2 \cdot sr} = I_\perp \text{ (normal)}$$

5.2.4 Radiositat, Irradiació i Poder Emissiu (espectrals i totals)

Sigui la banda k la corresponen a un interval de longituds d'ona $[\lambda_1, \lambda_2]$



La irradiació espectral G_i^k de la superfície "i" corresponent a la banda k representa tot el flux de potència radiant en aquesta banda k que incideix sobre la superfície A_i . Son tots els W/m^2 que rep la superfície "i" de tot el semiespai però només de radiacions de longituds d'ona que estan dins l'interval de la banda k, o sigui compreses entre λ_1 i λ_2 .

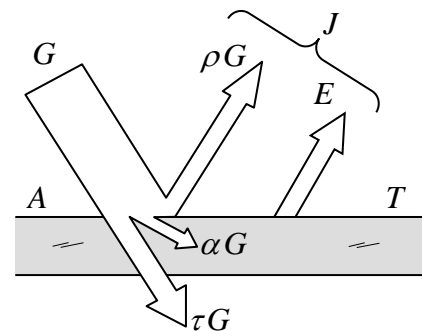
El poder emissiu espectral E_i^k de la superfície "i" corresponent a la banda k (radiació tèrmica de $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$), representa tot el flux de potència radiant en aquesta banda k que emet la superfície A_i degut a la seva temperatura. Son els W/m^2 emesos a tot el semiespai, en la banda k i la seva magnitud depèn estretament de la temperatura de la superfície emissora.

La radiositat espectral J_i^k de la superfície “i” corresponent a la banda k , representa tot el flux de potència radiant en aquesta banda k (radiació tèrmica de $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$) que abandona la superfície A_i cap a tot el semiespai. O sigui es una propietat hemisfèrica que inclou la radiació reflectida i emesa en la citada banda k .

La potència radiant a la banda k que abandona la superfície “i” consta d’una part reflectida $\rho_i^k G_i^k$ sent ρ_i^k la reflectància de la superfície “i” a la banda k , i d’una part emesa E_i^k , de manera que $J_i^k = \rho_i^k G_i^k + E_i^k$ es la radiositat espectral de la superfície “i” o potència radiant emergent. En qualsevol banda, sempre es compleix la relació, $\alpha_i^k + \rho_i^k + \tau_i^k = 1$ que no es mes que una variant del principi de conservació de l’energia, i també, $\alpha_i^k = \varepsilon_i^k$ (llei de Kirchhoff),

Si eliminem el superíndex k , que fa referència a la banda, tindriem les G, J, E totals. Aquestes magnituds inclourien les radiacions tèrmiques per tot l’espectre ($0 < \lambda < \infty$).

Si A es la superfície en m^2 , $G \cdot A$ serà la potència total i hemisfèrica en W incidents sobre la superfície A procedent en general de totes les superfícies del recinte. $J \cdot A$ es la potència en W total i hemisfèrica emergent, o també es diu potència que abandona la superfície A (inclou la emesa i la reflectida)

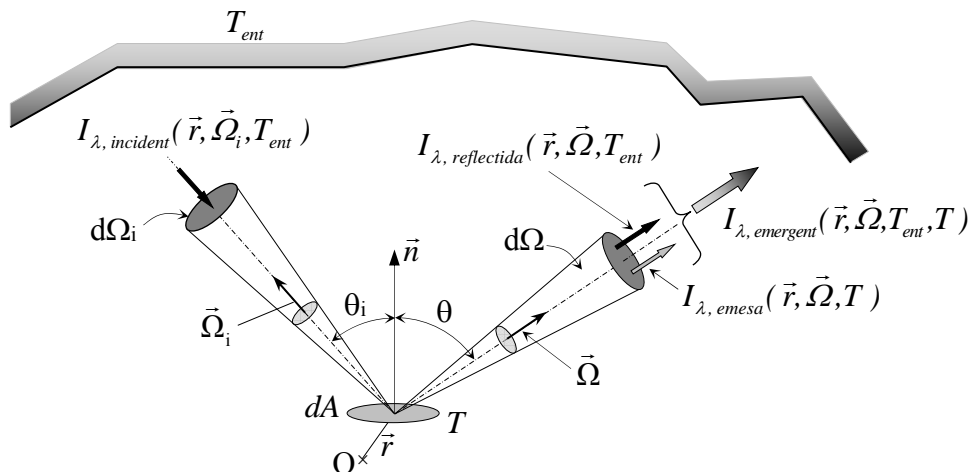


La diferència entre $G \cdot A$ i $J \cdot A$ serà la potència radiant que guanya la superfície A com a resultat del balanç de potències radiant entre la totalitat de superfícies del recinte. (balanç a l’interior del recinte) Per conveni direm que

$q = (G - J) A$ o be, $\frac{q}{A} = G - J$ és la potència que guanya la superfície A . Si $G > J$, q/A serà

positiu, i la superfície A guanya potència radiant degut al bescanvi de potència amb totes les superfícies del recinte. Això faria que la superfície s’escalfés, i com que sempre considerem el regim estacionari, significa que externament s’haurà d’eliminar aquesta potència per mantenir el regim estacionari.

5.2.5 Intensitat de radiació incident, reflectida, emesa i emergent.



Veiem a la figura com segons l'origen, focus o tipus de potència radiant tindrem diferents conceptes de intensitat de radiació.

$I_{\lambda,incident}(\vec{r}, \vec{\Omega}_i, T_{ent})$ és la intensitat de radiació incident (*espectral, i direccional, o sigui no difusa*) que es òbviament funció de la temperatura de l'entorn T_{ent} , i de la direcció $\vec{\Omega}_i$

El subíndex “i” fa referència al fet de que la radiació incident sobre la superfície A prové de l'entorn. Part d'aquesta radiació es reflexa sobre la superfície i es distribueix a tot el semiespai d'acord a una intensitat de radiació reflectida que representem per $I_{\lambda,reflectida}(\vec{r}, \vec{\Omega}, T_{ent})$

La superfície A emet radiació tèrmica en funció de la seva temperatura T i aquesta es distribueix a tot el semiespai d'acord a una intensitat de radiació $I_{\lambda,emesa}(\vec{r}, \vec{\Omega}, T)$

Finalment es compleix, $I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega}, T_{ent}, T)_{emergent} = I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega}, T_{ent})_{reflectida} + I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega}, T)_{emesa}$

5.2.6 Radiositat, J

Volem ara trobar l'expressió de la radiositat a partir del concepte de intensitat de radiació emergent definit a l'apartat anterior. (*per raons pràctiques no mostrem a partir d'ara la òbvia dependència de la temperatura*). Així doncs, la intensitat de radiació espectral o monocromàtica que abandona un element de superfície opac a una temperatura T , és,

$$I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega})_{emergent} = I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega})_{emesa} + I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega})_{reflectida}$$

De la definició general de intensitat de radiació,

$$I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega})_{emergent} = \frac{dq_{\lambda-emergent}}{dA \cos \theta d\Omega d\lambda} \Rightarrow \left. \frac{dq_{\lambda}}{dA} \right|_{emergent} = I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega})_{emergent} \cos \theta d\Omega d\lambda$$

$$\text{Anomenem radiositat } J(\vec{r}) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Omega=0}^{2\pi} \left. \frac{dq_{\lambda}}{dA} \right|_{emergent} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Omega=0}^{2\pi} I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega})_{emergent} \cos \theta d\Omega d\lambda$$

integrem a tot l'espectre ($\lambda 0 \div \infty$) i a tot el semiespai (mitja esfera, $\Omega=2\pi$, $\phi 0 \div 2\pi$, i $\theta 0 \div \pi/2$)

Si la intensitat de radiació emergent és independent de la direcció $\vec{\Omega}$ (θ, ϕ),

$I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega})_{emergent} = I_{\lambda}(\vec{r})_{emergent}$, direm que la superfície és difusa tant per a la radiació emesa com per la reflectida. En aquest cas la radiositat total i hemisfèrica serà

$$J(\vec{r}) = \underbrace{\int_{\lambda=0}^{\infty} I_{\lambda}(\vec{r})_{emergent} d\lambda}_{I(\vec{r})_{emergent}} \underbrace{\int_{\Omega=0}^{2\pi} \cos \theta d\Omega}_{\pi} = \pi I(\vec{r})_{emergent} \quad (\text{sent la intensitat emergent total i difusa,})$$

$I(\vec{r})_{emergent} = I(\vec{r})_{emesa} + I(\vec{r})_{reflectida}$ que consta per tant de dues components)

Així doncs, anomenem radiositat $J(\vec{r})$ al flux de potència radiant que abandona un element de superfície (W/m^2). Es tracta, per tant, d'una característica total i hemisfèrica de l'element de superfície. $J dA$ representa la potència radiant (W) que abandona l'element de superfície dA , que inclou la potència radiant reflectida i emesa, tal com s'ha vist anteriorment.

5.2.7 Irradiació, G

Objectiu: volem trobar l'expressió de la irradiació a partir del concepte de intensitat de radiació incident. Anomenem $I_{\lambda, incident}(\vec{r}, \vec{\Omega}_i, T_{ent})$ a la intensitat de radiació incident a una superfície, procedent d'un entorn a una temperatura T_{ent} (veure figura anterior)

De la definició general de intensitat de radiació incident,

$$I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega}_i)_{incident} = \frac{dq_{\lambda, incident}}{dA \cos \theta_i d\Omega_i d\lambda} \Rightarrow \left. \frac{dq_{\lambda}}{dA} \right|_{incident} = I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega}_i)_{incident} \cos \theta_i d\Omega_i d\lambda$$

Anomenem irradiació total i hemisfèrica G ,

$$G(\vec{r}, T_{ent}) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Omega_i=0}^{2\pi} \left. \frac{dq_{\lambda}}{dA} \right|_{incident} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \left[\int_{\Omega_i=0}^{2\pi} I_{\lambda, incident}(\vec{r}, \vec{\Omega}_i, T_{ent}) \cos \theta_i d\Omega_i \right] d\lambda$$

Anomenem irradiació total i hemisfèrica a **tota** la radiació tèrmica incident en un element de superfície i procedent de tot el semiespai per unitat de temps i per unitat de superfície irradiada. Així doncs, es tracta d'un flux de potència de radiació tèrmica incident (W/m^2).

$G dA$ representa tota la potència radiant (W) incident en un element de superfície dA procedent de tot el semiespai i que compren tot l'espectre.

Si considerem només les longituds d'ona a la banda λ i $\lambda+d\lambda$ de les radiacions incidents obtenim la irradiació espectral G_{λ} .

No entrem en més detalls ja que en general resulta inabordable arribar a conèixer analíticament la intensitat de radiació incident quan l'entorn es complex i no presenta simetries.

5.2.8 Poder emissiu total i hemisfèric, E(T,sistema)

Anomenem poder emissiu total i hemisfèric E a **tota** la radiació tèrmica emesa per un element de superfície cap a un semiespai per unitat de temps i per unitat de superfície (en W/m^2).

Es tracta doncs d'un flux de potència radiant emès per la superfície, que depèn de la temperatura d'aquesta (W/m^2). El poder emissiu espectral E^{λ} , és el poder emissiu considerant la radiació entre les longituds d'ona λ i $\lambda+d\lambda$.

De la definició general de intensitat de radiació emesa, $I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega})_{emesa} = \frac{dq_{\lambda, emesa}}{dA \cos \theta d\Omega d\lambda}$

I per tant, $\left. \frac{dq}{dA} \right|_{emesa} = I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega})_{emesa} \cos \theta d\Omega d\lambda$

D'acord amb la definició de $E(\vec{r})$ i equacions anteriors resulta,

$$E(\vec{r}) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \left. \frac{dq}{dA} \right|_{emesa} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \left[\int_{\Omega=0}^{2\pi} I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega})_{emesa} \cos \theta d\Omega \right] d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\infty} E_{\lambda}(\vec{r}) d\lambda$$

Si la intensitat emesa és independent de la direcció $\vec{\Omega}$ (θ, ϕ), és a dir, $I_{\lambda}(\vec{r}, \vec{\Omega}) = I_{\lambda}(\vec{r})$ aleshores diem que la superfície emet de manera difusa i la podem treure de la integral que depèn dels angles. Trobem primer el poder emissiu espectral difús (no depèn de θ, ϕ),

$$E_{\lambda}(\vec{r}) = \int_{\Omega=0}^{2\pi} I_{\lambda}(\vec{r})_{emesa} \cos \theta d\Omega = I_{\lambda}(\vec{r})_{emesa} \underbrace{\int_{\Omega=0}^{2\pi} \cos \theta d\Omega}_{\pi} = \pi I_{\lambda}(\vec{r})_{emesa} \quad (E_{\lambda} \text{ en funció de } I_{\lambda})$$

I ara trobem el poder emissiu total integrant respecte a λ ,

$$E(\vec{r}) = \int_{\lambda=0}^{\infty} E_{\lambda}(\vec{r}) d\lambda = \pi \underbrace{\int_{\lambda=0}^{\infty} I_{\lambda}(\vec{r})_{emesa} d\lambda}_{I(\vec{r})_{emesa}} = \pi I(\vec{r})_{emesa} \quad ; \quad E_{\lambda}(\vec{r}) = \pi I_{\lambda}(\vec{r})_{emesa} \quad ; \quad E(\vec{r}) = \pi I(\vec{r})_{emesa}$$

Normalment a la natura els cossos emeten de forma difusa.

5.3 COS NEGRE

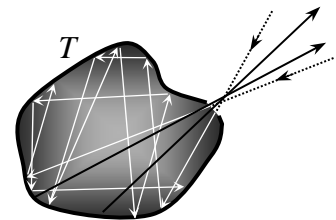
5.3.1 Definició del cos negre

Un cos negre és aquell cos que absorbeix tota l'energia radiant que incideix sobre ell des de qualsevol direcció i per a totes les freqüències, sense reflectir-la, ni transmetre-la, ni dispersar-la. El concepte de cos negre és una idealització emprada per a comparar l'emissió i l'absorció de radiació dels cossos reals.

La radiació emesa per un cos negre a una certa temperatura és la radiació màxima possible que qualsevol cos a la mateixa temperatura pot emetre. Així doncs, direm que es tracta d'un emissor i un absorbidor perfecte.

L'ull humà només pot discernir el comportament d'un cos negre en l'estret interval 0,4-0,7 μm (espectre visible), per la qual cosa no haurem d'associar el concepte de cos negre a l'aparença negra que un cos presenti.

La secció virtual que representa el petit forat de la cavitat isotèrmica de la figura es el que més s'assembla al comportament ideal d'un cos negre. Tota radiació incident exterior es totalment absorbida pel petit forat (a causa de les innumerables reflexions internes) i de la petita secció virtual (*sense matèria*) sortiran radiacions provinents d'una font a T (K) (*les parets de la cavitat*) La potència radiant emesa per una superfície negra a una temperatura T es major que la de qualsevol altre superfície real a la mateixa temperatura T (*emissor perfecte*)



5.3.2 Llei de distribució de Planck

A les acaballes del segle XIX i davant l'evidència experimental dels resultats de Lummer i Pringsheim, es pretenia obtenir un model de la matèria per calcular la potència radiant emesa per un cos en funció de la seva temperatura.

L'any 1900 Planck va proposar el seu model del sòlid emissor perfecte. Consistia en idealitzar la matèria suposant un conjunt d'oscil·ladors harmònics perfectes capaços d'emetre (i absorbir) l'energia radiant en tota la gamma de freqüències. Obtingué analíticament la intensitat de radiació espectral d'un cos negre:

$$I_{b_{\nu}}(\nu, T) = \frac{2 h \nu^3}{c_0^2 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]} \quad \text{Sabem que la freqüència i la longitud d'ona varien inversament. Diferenciant obtenim la relació entre la intensitat de}$$

longitud d'ona varien inversament. Diferenciant obtenim la relació entre la intensitat de

radiació espectral d'un cos negre referida a la freqüència i la mateixa intensitat referida a la longitud d'ona.

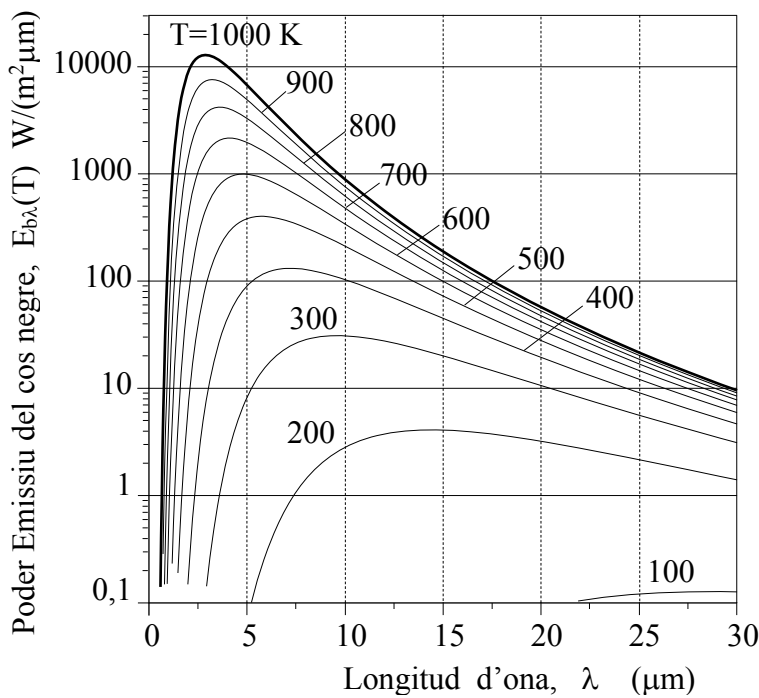
$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \quad ; \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \quad ; \quad d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{\nu^2}{c} \quad ; \quad I_{b_\lambda} d\lambda = -I_{b_\nu} d\nu \Rightarrow I_{b_\lambda} = I_{b_\nu} \frac{\nu^2}{c}$$

Així doncs, obtenim l'expressió de la intensitat de radiació espectral del cos negre referida a la

$$\text{longitud d'ona, } I_{b_\lambda} = I_{b_\lambda}(\lambda, T) = \frac{2h c_0^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{h c_0}{\lambda k T}\right) - 1 \right]} \quad \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m} \cdot \text{sr})$$

- $h = 6,6256 \times 10^{-34}$ J.s constant universal de PLANCK
- $k = 1,38054 \times 10^{-23}$ J/K constant universal de BOLTZMANN
- $c_0 = 2,9979 \times 10^8$ m/s velocitat de la llum al buit
- T en K (*temperatura absoluta*) , λ en μm (*longitud d'ona*) , ν en Hz (*freqüència*)

5.3.3 Poder emissiu espectral del cos negre



La intensitat espectral del cos negre obtinguda amb el model de Planck és,

$$I_{b_\lambda}(\lambda, T) = \frac{2h c_0^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{h c_0}{\lambda k T}\right) - 1 \right]}$$

Com que $I_{b_\lambda}(\lambda, T)$ no depèn de la direcció (emissor difús), aleshores el poder emissiu espectral és: $E_{b_\lambda} = \pi I_{b_\lambda}$ i per tant,

$$E_{b_\lambda}(\lambda, T) = \frac{2\pi h c_0^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{h c_0}{\lambda k T}\right) - 1 \right]}$$

Agrupem les constants,

$$c_1 = 2\pi h c_0^2 = 3,743 \times 10^8 \text{ W}\mu\text{m}^4/\text{m}^2 \quad , \quad c_2 = \frac{h c_0}{k} = 1,4387 \times 10^4 \mu\text{m K}$$

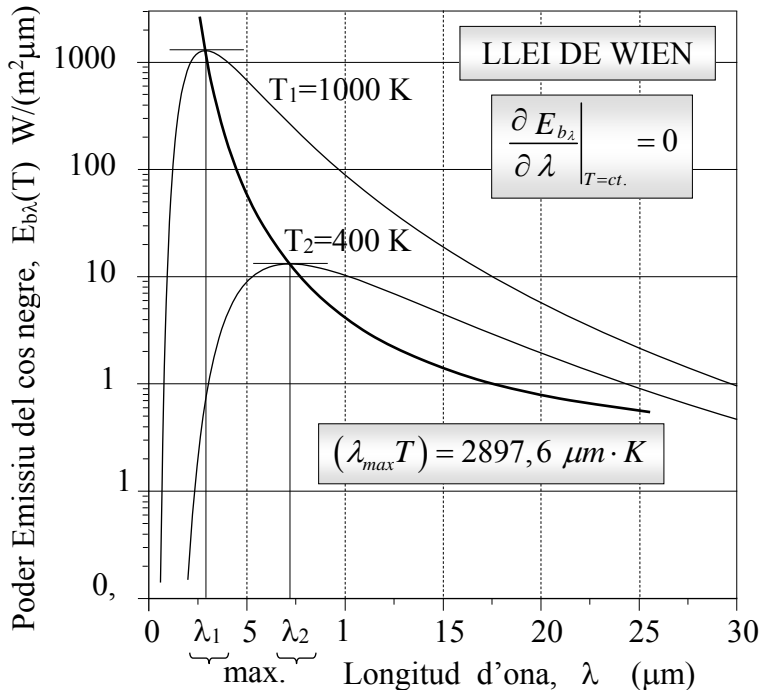
En queda, $E_{b_\lambda}(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]}$ T en K , λ en μm i $E_{b_\lambda}(\lambda, T)$ en $\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}}$

Per a un dielèctric diferent del buit, l'índex de refracció relatiu és $n=c/c_0$ i

aleshores $E_{b\lambda}(\lambda, T)|_{dielèctric} = n^2 E_{b\lambda}(\lambda, T)|_{buit}$

5.3.4 Llei de desplaçament de Wien

La funció de distribució de Planck presenta un màxim per a cada temperatura.



Determinem la seva posició

calculant, $\left. \frac{\partial E_{b\lambda}}{\partial \lambda} \right|_{T=ct.} = 0$

trobem,

$(\lambda_{max} T) = 2897,6 \mu m \cdot K$,

que anomenem llei de desplaçament de WIEN.

Per a un dielèctric amb índex de refracció n resulta:

$(n \lambda_{max} T) = 2897,6 \mu m \cdot K$

En disminuir la temperatura, la λ_{max} augmenta i el màxim s'allunya de l'origen.

Qüestió 4: Trobar la longitud d'ona que correspon a la màxima potència radiant de dos fonts de radiació tèrmica. Una font radiant a alta temperatura com la radiació que rebem del sol suposant aquest com un cos negre a $T_s=5790$ K i l'altre font a baixa temperatura com la radiació que rebem d'una paret qualsevol a $t_p=16,6$ °C.

$\lambda_{max_rad.\ solar} = \frac{2897,6 \mu m \cdot K}{5790 K} = 0,5 \mu m$

$\lambda_{max_rad.\ paret} = \frac{2897,6 \mu m \cdot K}{(273,15 + 16,6) K} = 10 \mu m$

Si mirem l'espectre de radiació electromagnètica veurem que 0,5 μm corresponen al visible i en canvi les 10 μm de la paret corresponen al infraroig llunyà. Els humans no podem veure l'infraroig llunyà (5,60-1000 μm). Com es que veiem la paret de la nostra habitació? La pregunta es massa innocent. Nosaltres només veiem la llum reflectida. A la nit, la paret segueix emeten les 10 μm i en canvi nosaltres a les fosques no veiem pas res.

5.3.5 Llei d'Stefan-Boltzmann

Poder emissiu total $E_b(T)$ d'un cos negre a la temperatura T , és tota la potència radiant que abandona aquest cos per unitat de superfície (inclou totes les longituds d'ona).

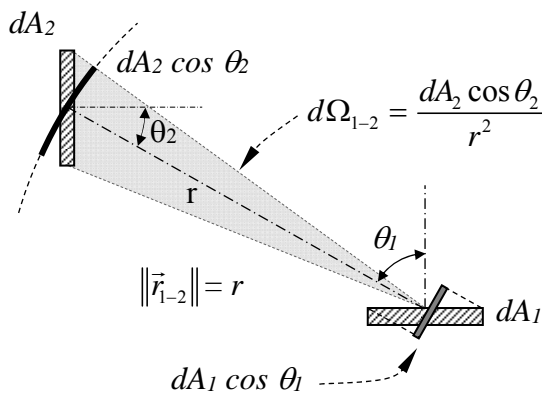
Determinem $E_b(T)$ integrant el poder emissiu espectral del cos negre per totes les longituds d'ona, os sigui de $\lambda=0$ a $\lambda=\infty$ (tot l'espectre). Fent el canvi $\lambda T = x$

Sent $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ ct. de STEFAN - BOLTZMANN

$$E_b(T) = \int_{\lambda=0}^{\infty} E_{b\lambda}(\lambda, T) d\lambda = T^4 \int_{x=0}^{\infty} \frac{c_1}{x^5 \left[\exp\left(\frac{c_2}{x}\right) - 1 \right]} dx = \sigma T^4 \frac{W}{m^2}$$

Per a un medi dielèctric d'índex de refracció n , resulta $E_b = n^2 \sigma T^4$ (W/m²)

Qüestió 5: El poder emissiu hemisfèric i total d'una superfície negra diferencial dA_1 (de 2×10^{-3} m²) és 50000 W/m². Una altra superfície diferencial $dA_2 = 2dA_1$ es troba a $r = 0,9$ m en la direcció $\theta_1 = 45^\circ$ respecte a la normal de dA_1 . La normal a la superfície dA_2 forma un angle $\theta_2 = 45^\circ$ amb la recta que uneix les dues superfícies. Determinar la **irradiació** dG_2 que rep la superfície dA_2 degut a l'emissió directa de la superfície dA_1



Solució: $r=0,9$

$$dA_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 ; \theta_1 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$E_{b1} = 50000 \text{ W/m}^2 ; dA_2 = 2 dA_1 ; \theta_2 = \theta_1$$

$$I_{b1} = \frac{E_{b1}}{\pi} = 15915,49 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{sr)}$$

$$d\Omega_{12} = \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r^2} = 3,49 \times 10^{-3} \text{ sr}$$

$$dq_{12} = I_{b1} dA_1 \cos \theta_1 d\Omega_{12} = 0,078595 \text{ W}$$

$$\text{i la irradiació val, } dG_2 = \frac{dq_{12}}{dA_2} = 19,649 \text{ W/m}^2$$

Qüestió 6: La intensitat de radiació emesa, espectral i direccional d'una superfície és,

$$I(\lambda, \theta, T) = \frac{I_{b\lambda}(\lambda, T)_{\text{cos negre}}}{1 + \theta} \quad (\theta \text{ en rad, } T \text{ en K, } \lambda \text{ } \mu\text{m}) \text{ Determinar el poder emissiu total i}$$

hemisfèric d'aquesta superfície a 500 K i d'una superfície negra a la mateixa temperatura.

Solució:

Recordem que per una superfície negra (*difusa*) la intensitat total la trobem a partir de la intensitat espectral que coneixem a partir del model de cos negre de Planck,

$$I_b(T) = \int_{\lambda=0}^{\infty} I_{b\lambda}(\lambda, T) d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{2h c_0^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc_0}{\lambda kT}\right) - 1 \right]} d\lambda = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

I de la definició de intensitat de radiació,

$$I_{b\lambda}(\lambda, T) = \frac{dq_\lambda}{dA \cos \theta d\Omega d\lambda} \rightarrow \frac{dq_\lambda}{dA} = \overbrace{I_{b\lambda}(\lambda, T) d\lambda}^{\text{funció } \lambda, T} \overbrace{\cos \theta d\Omega}^{\text{funció } \theta, \phi} \text{ W/m}^2$$

En el cas d'un cos negre, si integrem per tot l'espectre i a tot el semiespai obtenim el poder emissiu total del cos negre $E_b(T)$ en W/m²,

$$E_b(T) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Omega=0}^{2\pi} \frac{dq_\lambda}{dA} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \overbrace{I_{b\lambda}(\lambda, T) d\lambda}^{I_b(T)} \int_{\Omega=0}^{2\pi} \overbrace{\cos \theta d\Omega}^{\pi} = I_b(T) \pi = \frac{\sigma T^4}{\pi} \pi = \sigma T^4 = E_b(T)$$

En el cas de la superfície de l'enunciat (*espectral no difusa al dependre de λ i θ*),

$$I(\lambda, \theta, T) = \frac{dq_\lambda}{dA \cos \theta d\Omega d\lambda} \rightarrow \frac{dq_\lambda}{dA} = \overbrace{I_{b\lambda}(\lambda, T)}^{\text{funció } \lambda, T} \overbrace{\frac{\cos \theta}{1 + \theta}}^{\text{funció } \theta, \phi} d\lambda d\Omega \quad \text{W/m}^2$$

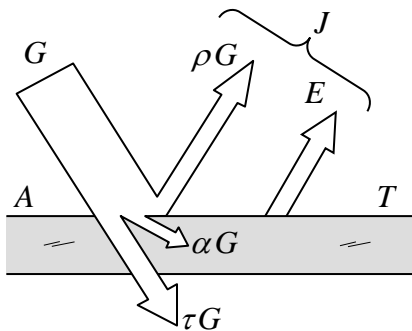
Integrant a tot l'espectre i a tot el semiespai obtenim el poder emissiu total i hemisfèric $E(T)$,

$$E(T) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Omega=0}^{2\pi} \frac{dq_\lambda}{dA} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \overbrace{I_{b\lambda}(\lambda, T)}^{I_b(T)} \overbrace{d\lambda}^{1,83} \int_{\Omega=0}^{2\pi} \frac{\cos \theta}{1 + \theta} d\Omega = 1,83 I_b(T) = 1,83 \frac{E_b(T)}{\pi} = \frac{1,83 \sigma T^4}{\pi}$$

Obtenim la 2^a integral, $\int_{\Omega=0}^{2\pi} \frac{\cos \theta}{1 + \theta} d\Omega = \int_{\Omega=0}^{2\pi} \frac{\cos \theta}{1 + \theta} \overbrace{\sin \theta d\theta d\phi}^{d\Omega} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{\cos \theta}{1 + \theta} \sin \theta d\theta}_{0,29124} \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = 1,83$

$$E(500) = 2064,16 \text{ W/m}^2$$

Qüestió 7: Si coneixem d'una superfície opaca el valor del flux de potència radiant $q/A=1000 \text{ W/m}^2$, l'absorbància $\alpha=0,8$ i el seu poder emissiu $E=800 \text{ W/m}^2$, determinar l'expressió i el valor numèric de la irradiació G i radiositat J (*propietats totals i hemisfèriques*)



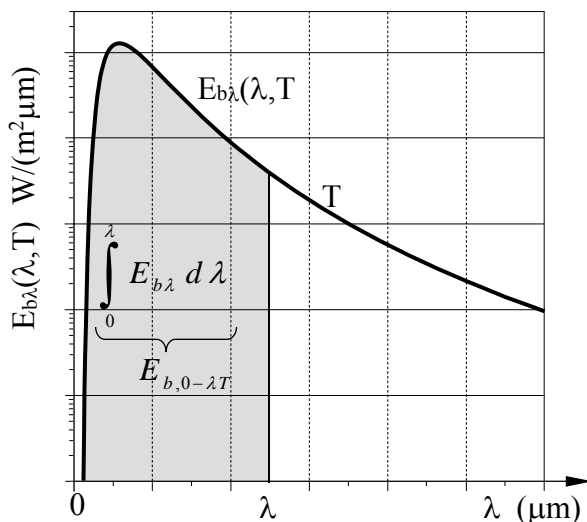
$$\alpha = 0,8 \quad ; \quad \frac{q}{A} = G - J = 1000 \text{ W/m}^2 \quad ; \quad E = 800 \text{ W/m}^2$$

$$\left. \begin{aligned} J &= \rho G + E \\ \frac{q}{A} &= G - J \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{q}{A} = G - (\rho G + E)$$

$$\Rightarrow \frac{q}{A} = G(1 - \rho) - E \Rightarrow \frac{q}{A} = G\alpha - E$$

I per tant, $G = \frac{\frac{q}{A} + E}{\alpha} = 2250 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \Rightarrow J = (1 - \alpha)G + E = 1250 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

5.3.6 Funcions de radiació

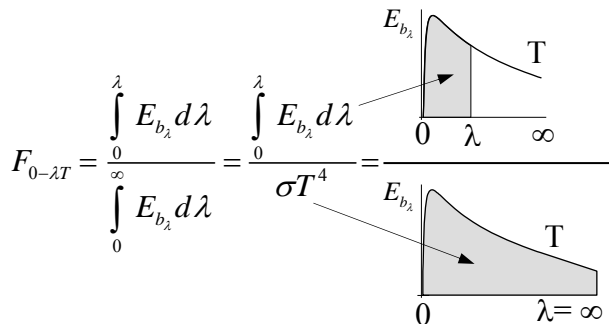


L'ús de la funció de distribució de Planck és indispensable per a la solució de molts problemes pràctics. Designem $E_{b\ 0-\lambda T}$ la potència radiant emesa per un cos negre a la temperatura T en el interval de longituds d'ona $0-\lambda$ que es representa per la zona ombrejada de la figura.

Definim la funció de radiació $F_{0-\lambda T}$, com la fracció de tota la potència radiant emesa per un cos negre a la temperatura T en el interval de longituds d'ona $0-\lambda$.

$$E_{b,0-\lambda T} = \int_0^{\lambda} E_{b\lambda}(\lambda, T) d\lambda \quad (\text{zona ombrejada})$$

El següent quocient gràfic ens il·lustra aquest concepte.



Podem trobar $F_{0-\lambda T}$ en taules.

També resulta útil emprar els quinze primers termes de la sèrie següent que obtenim al desenvolupar en sèrie de potències el subintegrant del poder emissiu espectral del cos negre de Planck (aconsegüim una precisió molt acceptable).

$$\begin{aligned} \text{sent } z &= c_2/\lambda T \\ c_2 &= 1,43879 \times 10^{-2} \\ \lambda &\text{ en m i } T \text{ en K.} \end{aligned}$$

$$F_{0-\lambda T} = \frac{15}{\pi^4} \sum_{n=1}^{n=15} \left[\frac{\exp(-nz)}{n} \left(z^3 + \frac{3z^2}{n} + \frac{6z}{n^2} + \frac{6}{n^3} \right) \right]$$

Per a un interval $\lambda_1-\lambda_2$,

$$\Delta F_i^k = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda} d\lambda}{\sigma T_i^4} = F_{0-\lambda_2 T_i} - F_{0-\lambda_1 T_i} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda} d\lambda}{\sigma T_i^4}$$

ΔF_i^k representa la funció de radiació corresponent a la superfície “i” (temperatura T_i) per la banda “k” ($\lambda_1-\lambda_2$)

Qüestió 8: Sabem que la radiositat d’una superfície reradiant és 6000 W/m^2 . Sent aquesta una superfície opaca amb una emissivitat $\varepsilon=0,8$ determinar el seu poder emissiu espectral a la

banda de 5 a $15 \mu\text{m}$. (*superfície reradiant* $\Rightarrow \frac{q}{A} = G - J = 0 \Rightarrow G = J$)

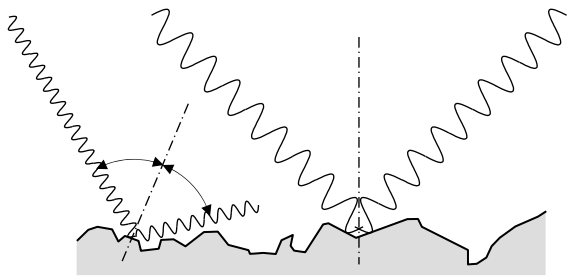
$$\varepsilon = 0,8 \ ; \ J = 6000 \text{ W/m}^2 \ ; \ \lambda_1 = 5 \mu\text{m} \ , \ \lambda_2 = 15 \mu\text{m} \ ; \ \frac{q}{A} = G - J = 0 \Rightarrow G = J$$

$$\left. \begin{aligned} J &= \rho G + E \\ G &= J \\ E &= \varepsilon \sigma T^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow J = \rho J + \varepsilon \sigma T^4 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} J(1-\rho) &= \varepsilon \sigma T^4 \\ \alpha + \rho &= 1 \\ \alpha &= \varepsilon \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{J}{\sigma}} = 570,35 \text{ K}$$

$$\Delta E = \varepsilon \sigma T^4 \Delta F(\lambda_1, \lambda_2, T) = 3056,61 \text{ W/m}^2 \quad \Delta F(\lambda_1, \lambda_2, T) = \text{funció de radiació de la banda}$$

5.4 PROPIETATS RADIANTS

5.4.1 Tipus de superfície

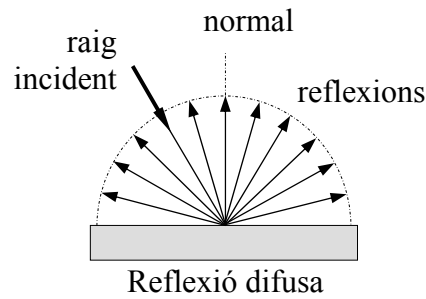
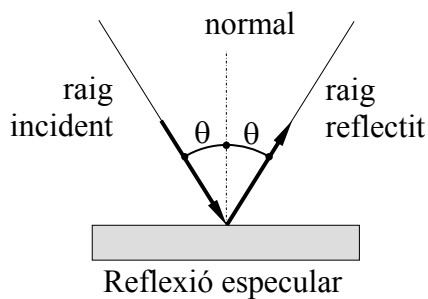


Anomenem a una superfície òpticament llisa quan les seves irregularitats són molt més petites que la longitud d'ona de la radiació incident.

Direm que una superfície és incontaminada si no conté impureses, de forma que el seu índex de refracció resulta uniforme.

Una reflexió és especular si els raigs incident i reflectit estan en un mateix pla i els angles d'incidència i de reflexió, respecte a la normal

del pla, són iguals. La reflexió de la radiació tèrmica sobre una superfície òpticament llisa i incontaminada és especular. Anomenem superfície perfecta a aquest tipus de superfície.



Les superfícies reals són rugoses (irregularitat d'ordre superior a λ) i contaminades, per la qual cosa dispersen la radiació (superfície mat).

Quan la radiació que incideix sobre una superfície es reflecteix distribuïnt-se de manera uniforme en totes les direccions, la reflexió s'anomena difusa.

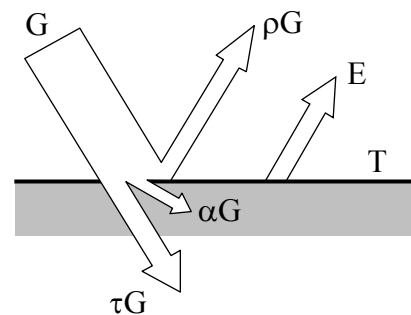
Cap superfície real és totalment especular ni difusa. Un mirall ordinari és prou especular per a la llum visible però no ho és necessàriament per a tot l'espectre de la radiació tèrmica.

Normalment una superfície rugosa presenta un comportament més difús a la radiació tèrmica que una superfície polida.

5.4.2 Reflectància - reflectivitat

Definim la reflectància ρ (reflectància hemisfèrica) com la fracció reflectida de tota la potència radiant (semiespai) incident sobre la superfície real d'un sòlid. D'acord amb la National Bureau of Standards dels EUA emprarem el terme reflectància en referir-nos a les superfícies reals i reflectivitat per a les superfícies perfectes.

Es comprova experimentalment que la reflectància ρ depèn de la naturalesa i de la puresa de la superfície, de la seva temperatura, de la freqüència de la radiació incident, del seu estat, etc.



5.4.3 Absorbància - absortivitat

Definim l'absorbància α (Absorbància hemisfèrica) com la fracció absorbida de tota la potència radiant incident (semiespai) sobre la superfície real d'un medi material. En referir-nos a una superfície perfecta emprarem el terme absortivitat.

5.4.4 Transmittància - transmissivitat

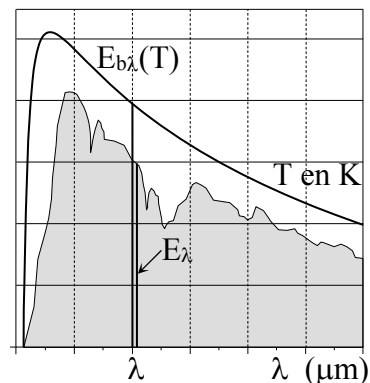
Definim la transmittància τ per a un sistema, com la fracció transmesa de tota la potència radiant incident sobre la superfície real del mateix. El terme transmissivitat el reservarem per referir-nos a superfícies perfectes.

En general, el flux de potència radiant G que incideix sobre la superfície d'un medi material es distribueix en tres parts, l'absorbida αG , la reflectida ρG i la transmesa τG , per la qual cosa haurà de complir-se $\alpha + \rho + \tau = 1$ Per a un sistema opac $\tau = 0 \Rightarrow \alpha + \rho = 1$

5.4.5 Emitància – emissivitat espectral

Un cos real a una temperatura T emet mes o menys radiació en funció de quin sigui el sistema o medi material emissor.

Sent $E_\lambda(T, sistema)$ el poder emissiu espectral del cos real i $E_{b\lambda}(T)$ el poder emissiu espectral del cos negra a la mateixa temperatura. En establir el model del cos negre, dèiem que era un absorbidor i emissor perfecte, de forma que sempre és compleix $\forall \lambda$ que $E_\lambda(T, sistema) < E_{b\lambda}(T)$



Definim l'emissivitat espectral ϵ_λ com,

$$\epsilon_\lambda(T, sistema) = \frac{E_\lambda(T, sistema)}{E_{b\lambda}(T)} < 1 \quad \text{que es el quocient entre les dues ordenades que es mostren}$$

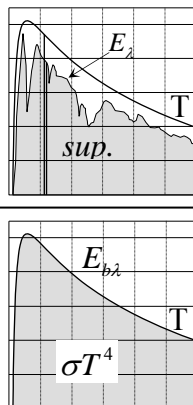
a la figura. És obvi que en general ϵ_λ és funció de λ i per tant no és constant. A vegades es comprova experimentalment que ϵ_λ es manté prou constant en certs trams o bandes de l'espectre. Això ens portarà a definir més endavant el concepte de superfície gris.

Per simplificar a partir d'ara escrivim $E_\lambda(T)$ en lloc de $E_\lambda(T, sistema)$

Veiem ara la relació entre emissivitat total i l'espectral.

Emissivitat total i hemisfèrica

$$\epsilon(T) = \frac{\int_{\lambda=0}^{\infty} E_\lambda(T) d\lambda \quad (sup. real)}{\int_{\lambda=0}^{\infty} E_{b\lambda}(T) d\lambda \quad (sup. negra)} = \frac{E(T)}{E_b(T) = \sigma T^4}$$



L'àrea ombrejada del numerador, representa tota la potència radiant emesa per la superfície real a la temperatura T en tot el semiespai i per tot l'espectre (W/m^2)

El denominador representa el mateix, per un cos negre a la mateixa temperatura T . I el valor numèric del quocient és l'emissivitat total (tot l'espectre) i hemisfèrica (tot el

semiespai) de la superfície real a la temperatura T.

Queda palesa la dependència de l'emitància amb la temperatura absoluta del sistema, el que també s'evidencia experimentalment.

5.4.6 Lleis de Kirchhoff

El primer teorema estableix que per a un sistema "i" situat en una cavitat isotèrmica i en equilibri tèrmic amb aquesta, l'absorbància i l'emitància total són iguals, és a dir, $\epsilon_i(T) = \alpha_i(T)$. El segon teorema estableix que per a un sistema situat en una cavitat isotèrmica, l'absorbància i l'emitància espectral direccional per a una freqüència determinada (ν) són iguals,

$$\alpha_\nu(T, \text{sistema}, \vec{\Omega}) = \epsilon_\nu(T, \text{sistema}, \vec{\Omega}) \quad \text{amb} \quad \begin{cases} \nu = \frac{c}{\lambda} \\ \vec{\Omega} = \text{direccio considerada} \end{cases}$$

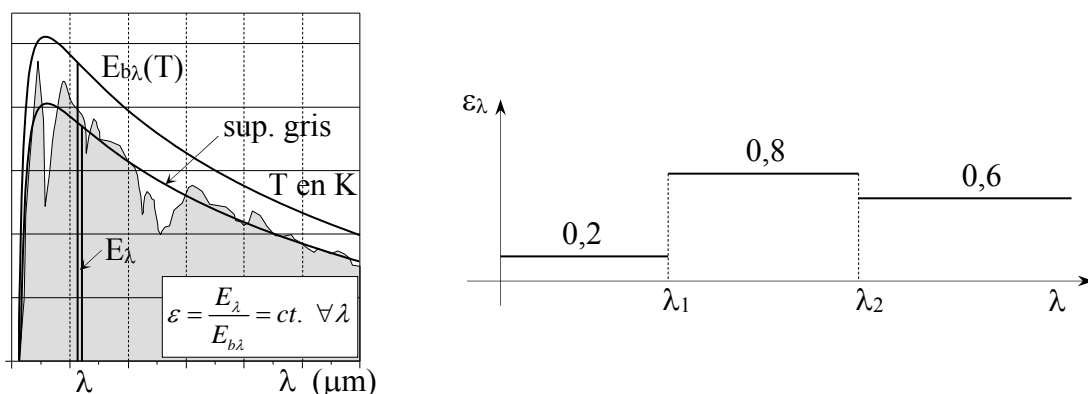
Per a superfícies amb reflexió i emissió difusa resulta, $\alpha_\nu(T) = \epsilon_\nu(T)$.

És un fet experimental que aquestes relacions també es verifiquen encara que el cos no es trobi en equilibri tèrmic amb el seu entorn, ni a l'interior d'una cavitat isoterma, malgrat que hauria d'existir l'equilibri tèrmic local.

5.4.7 Superfície gris

Direm que una superfície és gris quan la seva emitància espectral ϵ_λ sigui independent de la longitud d'ona, és a dir, una constant. $\forall \lambda \quad \epsilon(T, \text{sistema}) = \frac{E_\lambda(T, \text{sistema})}{E_{b\lambda}(T)} = ct. (T, \text{sistema})$

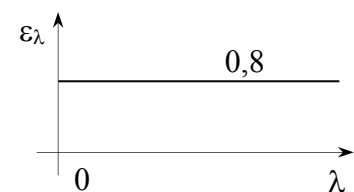
En realitat, no existeixen superfícies grises, però és una idealització pràctica que permet, amb alguns materials, abordar el problema amb més senzillesa numèrica i amb una acceptable aproximació en els resultats. Un cos gris per bandes és el mateix concepte aplicat a un tram de l'espectre o banda, és a dir, emitàncies constants a cada tram o banda, com és veu en la gràfica en esgraó de la següent figura.



Sempre que les superfícies reflecteixen i emeten difusament, també es compleix que $\epsilon(T) = \alpha(T)$ a cada banda.

La superfície real de la figura anterior la podem simular aproximadament a una única superfície gris amb una emissivitat

constant igual a 0,8 $\forall \lambda$ o sigui $\epsilon = \frac{E_\lambda}{E_{b\lambda}} = 0,8 \quad \forall \lambda$



5.5 FACTORS DE VISIÓ ENTRE SUPERFÍCIES DIFUSES

5.5.1 Factor de visió. Definició

Definim el factor de visió difús F_{i-j} , com la fracció de la potència radiant que abandona difusament la superfície “i” que incideix directament (sense reflexió) a la superfície “j”.

Utilitzem la notació següent, $F_{i-j} = F_{A_i-A_j}$

Veiem a la figura com la superfície A_1 emet difusament 100 W de potència radiant.

D’aquest 100 W 15 W incideixen directament sobre la superfície A_2 i per tant d’acord a la

definició anterior $F_{12} = \frac{15}{100} = 0,15$ i

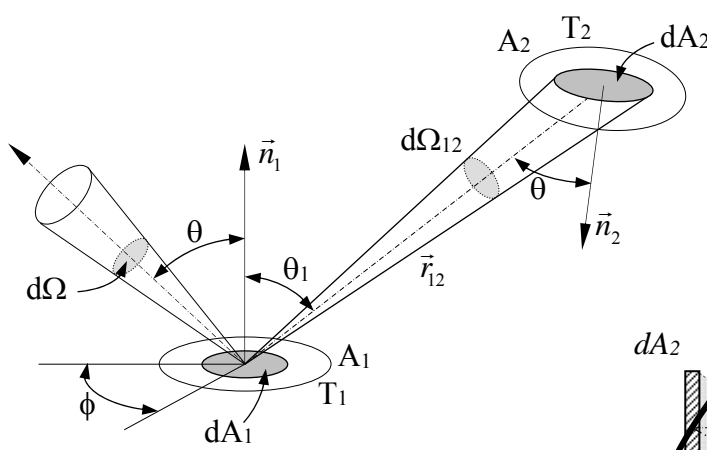
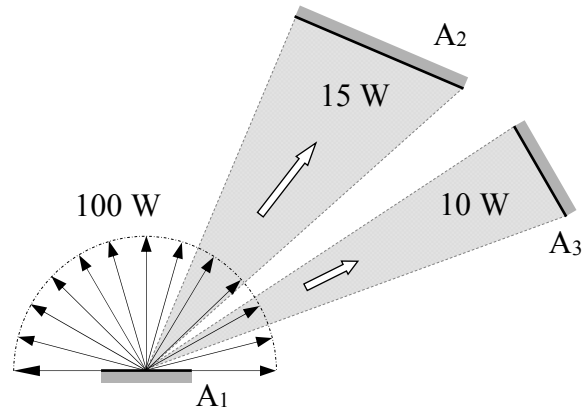
$$F_{13} = \frac{10}{100} = 0,10$$

Amb aquesta figura es veu també clar el concepte additiu del factor de visió.

Si ens preguntem com determinar $F_{1-(2+3)}$? o sigui, quina fracció de la potència radiant que abandona A_1 incideix directament sobre A_2+A_3 és obvi que serà $F_{1-(2+3)} = 25/100 = 0,25$ de

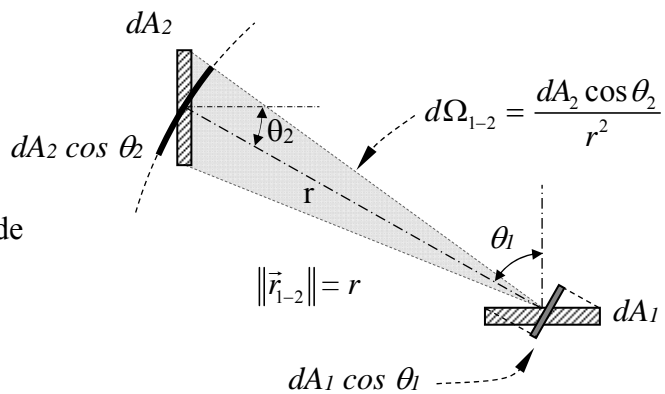
forma que es certa la igualtat $F_{1-(2+3)} = F_{12} + F_{13}$ (*distributivitat per la dreta*) **Hipòtesis:**

- a) Considerem superfícies difuses tant per l’emissió com per la reflexió ($I = ct$) (temperatures uniformes).
- b) Les superfícies i, j considerades es troben a les temperatures T_1, T_2 respectivament.
- c) I_1 és la intensitat de radiació (espectral o total) de la superfície dA_1 .



$$\|\vec{r}_{1-2}\| = r ; d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

Ara hem de determinar, $d\Omega_{12}$ = angle sòlid amb que dA_1 veu dA_2



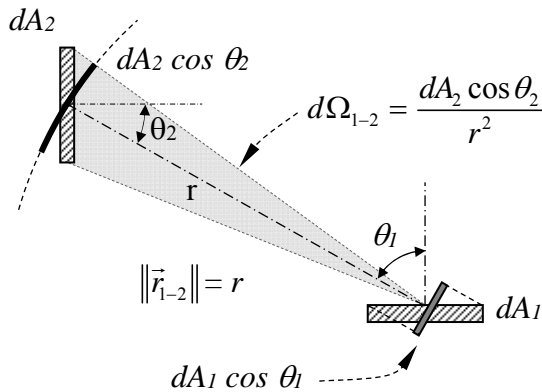
1) Primer projectem dA_2 sobre l’esfera de radi r i obtenim $dA_2 \cos \theta_2$

2) Apliquem la definició d’angle sòlid,

$$d\Omega_{1-2} = \frac{\text{Superfície projectada}}{r^2}$$

3) Obtenim $d\Omega_{1-2} = \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r^2}$

Qüestió 9: El poder emissiu hemisfèric i total de les superfícies negres diferencials dA_1 (10^{-3} m^2) i dA_2 ($4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$) son respectivament 70000 i 1000 W/m^2 . La distància que les separa és $r = 0,8 \text{ m}$ i la recta que les uneix forma un angle $\theta_1 = 30^\circ$ amb la normal a dA_1 i un angle $\theta_2 = 15^\circ$ amb la normal a dA_2 . Si q_{ij} es la potència emesa per dA_i i interceptada per dA_j . Determini el valor de $q_{12}-q_{21}$ (intercanvi net de potència entre les sup. dA_1 i dA_2) Trobar també les temperatures T_1 i T_2



$r=0,8$

$dA_1 = 10^{-3} \text{ m}^2$, $\theta_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$, $E_{b1} = 70000 \text{ W/m}^2$

$dA_2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, $\theta_2 = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$, $E_{b2} = 1000 \text{ W/m}^2$

Solució:

$I_{b1} = \frac{E_{b1}}{\pi} = 22281,7 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{sr})$

$I_{b2} = \frac{E_{b2}}{\pi} = 318,3 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{sr})$

$d\Omega_{12} = \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r^2} = 6,037 \times 10^{-3} \text{ sr} \Rightarrow dq_{12} = I_{b1} dA_1 \cos \theta_1 d\Omega_{12} = 0,116 \text{ W}$

$d\Omega_{21} = \frac{dA_1 \cos \theta_1}{r^2} = 1,353 \times 10^{-3} \text{ sr} \Rightarrow dq_{21} = I_{b2} dA_2 \cos \theta_2 d\Omega_{21} = 1,664 \times 10^{-3} \text{ W}$

Per tant, $dq_{12} - dq_{21} = 0,115 \text{ W}$

Procediment alternatiu:

$dF_{12} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{\pi r^2} = 1,664 \times 10^{-3} \Rightarrow dq_{12} = E_{b1} dA_1 dF_{12} = 0,116 \text{ W}$

$dF_{21} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1}{\pi r^2} = 4,14 \times 10^{-4} \Rightarrow dq_{21} = E_{b2} dA_2 dF_{21} = 1,664 \times 10^{-3} \text{ W}$

Si substituïm les expressió algebraiques de $E_b = \pi I_b$ i de dF òbviament obtenim les expressions del primer procediment.

Les temperatures son, $T_1 = \sqrt[4]{\frac{E_{b1}}{\sigma}} = 1054,1 \text{ K}$; $T_2 = \sqrt[4]{\frac{E_{b2}}{\sigma}} = 364,4 \text{ K}$

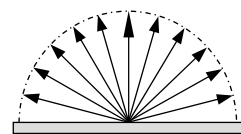
5.5.2 Factor de visió entre dues superfícies diferencials difuses

$dq_{dA_1-dA_2}$ = potència radiant que abandona dA_1 i incideix directament a dA_2

$q_{dA_1-\text{semispai}}$ = potència radiant que abandona dA_1 cap a tot el semiespai

A partir de la definició de la intensitat, $I_1 = \frac{dq_{dA_1-dA_2}}{dA_1 \cos \theta_1 d\Omega_{12}}$

$dq_{dA_1-dA_2} = I_1 dA_1 \cos \theta_1 d\Omega_{12} = I_1 dA_1 \cos \theta_1 \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r^2}$



i per tant
$$dq_{dA_1-dA_2} = I_1 \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{r^2}$$

A la figura, veiem l'angle sòlid diferencial que correspon a les coordenades esfèriques (θ, ϕ)

La potència radiant emesa per el dA_1 i que es transfereix a través de l'angle sòlid $d\Omega$ val,
$$dq_{dA_1-d\Omega} = I_1 dA_1 \cos \theta d\Omega$$
 (funció de θ, ϕ)

Hem de recordar que l'angle sòlid diferencial en coordenades esfèriques tenia la següent expressió $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, i si integrem a tot el semiespai, θ varia de 0 a $\pi/2$ i ϕ de 0 a 2π ,

$$q_{dA_1-\text{semispai}} = \int_{\Omega=0}^{2\pi} dq_{dA_1-d\Omega} = \int_{\Omega=0}^{2\pi} I_1 dA_1 \cos \theta d\Omega = I_1 dA_1 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \overbrace{\sin \theta d\theta d\phi}^{d\Omega} = \pi I_1 dA_1$$

Si dividim les dues expressions anteriors obtenim:

$$dF_{dA_1-dA_2} = \frac{dq_{dA_1-dA_2}}{q_{dA_1-\text{semispai}}} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{\pi r^2}$$

Escrivim dF en tractar-se de superfícies diferencials.

5.5.3 Reciprocitat simple

A l'apartat anterior hem trobat,
$$dF_{dA_1-dA_2} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{\pi r^2}$$

anàlogament,
$$dF_{dA_2-dA_1} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1}{\pi r^2}$$

si dividim membre a membre resulta,
$$\frac{dF_{dA_1-dA_2}}{dF_{dA_2-dA_1}} = \frac{dA_2}{dA_1}$$

$$dA_1 dF_{dA_1-dA_2} = dA_2 dF_{dA_2-dA_1} \quad \text{reciprocitat simple}$$

5.5.4 Factor de visió d'una superfície finita i una diferencial, ambdues difuses.

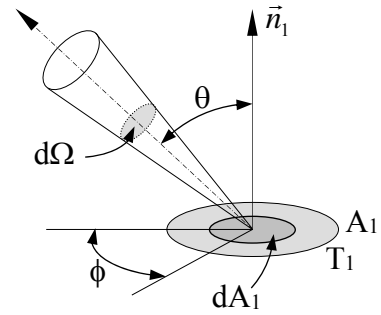
Hem trobat per dues superfícies diferencial que,
$$dF_{dA_1-dA_2} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{\pi r^2}$$

a) Calculem ara $F_{dA_1-A_2}$ el factor de visió de dA_1 (diferencial) a una superfície finita A_2

$\int_{A_2} dq_{dA_1-dA_2}$ = Potència radiant que abandona dA_1 i incideix a A_2 .

$$F_{dA_1-A_2} = \frac{\int_{A_2} dq_{dA_1-dA_2}}{q_{dA_1-\text{semispai}}} = \frac{\int_{A_2} \frac{I_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{r^2}}{\pi I_1 dA_1} = \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{\pi r^2} = \int_{A_2} dF_{dA_1-dA_2}$$

Observem l'evident propietat additiva dels factors de visió quan l'àrea irradiada se subdivideix en petites subàrees.



b) Càlcul de $dF_{A_2-dA_1}$:

$dq_{dA_1-dA_2}$ = Potència radiant que abandona A_2 i incideix directament a dA_1

$$dq_{A_2-dA_1} = \int_{A_2} dq_{dA_2-dA_1} = \int_{A_2} \frac{I_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1}{r^2} dA_2$$

$$q_{A_2-semispai} = \int_{A_2} \pi I_2 dA_2 = \pi I_2 \int_{A_2} dA_2 = \pi I_2 A_2$$

$$dF_{A_2-dA_1} = \frac{q_{A_2-dA_1}}{q_{A_2-semispai}} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1}{\pi r^2} dA_2 = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} dF_{dA_2-dA_1} dA_2$$

Aquesta igualtat ens indica que quan la superfície emissora se subdivideix, els factors de visió de cada subàrea s'han d'amitjanar respecte de l'àrea. Si traiem dA_1 fora de la integral anterior,

$$dF_{A_2-dA_1} = \frac{dA_1}{A_2} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_2 = \frac{dA_1}{A_2} F_{dA_1-A_2}$$

Es verifica també la relació de reciprocitat simple $A_2 dF_{A_2-dA_1} = dA_1 F_{dA_1-A_2}$.

5.5.5 Factor de visió entre dues superfícies finites difuses

$q_{A_1-semispai}$ = potència radiant que abandona A_1 cap a tot el semiespai.

$q_{A_1-A_2}$ = potència radiant que abandona A_1 i incideix directament sobre A_2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{A_1-A_2} = \iint_{A_1 A_2} \frac{I_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{r^2} \\ q_{A_1-semispai} = \pi I_1 A_1 \end{array} \right.$$

$$(1) \quad F_{12} = F_{A_1-A_2} = \frac{q_{A_1-A_2}}{q_{A_1-semispai}} = \frac{1}{A_1} \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2}$$

$$\text{Simètricament} \quad (2) \quad F_{21} = \frac{1}{A_2} \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2}$$

$$\text{Dividim (1) i (2):} \quad \frac{F_{12}}{F_{21}} = \frac{A_2}{A_1} \quad \Rightarrow \quad A_1 F_{12} = A_2 F_{21} = \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2}$$

5.5.6 Àlgebra de factors de visió. Flux geomètric W_{ij}

L'avaluació dels factors de visió es facilita notablement emprant unes poques propietats del que s'anomena àlgebra de factors de visió. Considerem un recinte format per N_s superfícies o zones, cadascuna de superfície A_i $i=1,2,\dots,N_s$, tal com s'il·lustra a la figura.

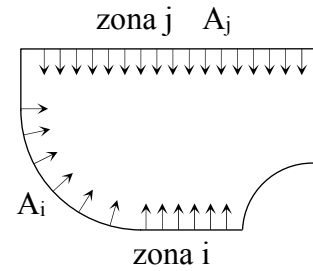
Suposem cada zona del recinte difusa per a l'emissió i la reflexió, essent la seva temperatura uniforme. Cada zona pot ser plana, còncava o convexa. Els factors de visió entre les superfícies A_i i A_j verifiquen les relacions següents:

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \text{ reciprocitat simple}$$

$$\sum_{j=1}^{N_s} F_{ij} = 1 \quad \text{relació de suma}$$

$$F_{ii} = 0 \quad \text{si } A_i \text{ és plana o convexa}$$

$$F_{ii} \neq 0 \quad \text{si } A_i \text{ és còncava}$$



Definim el **flux geomètric** com, $W_{ij} = A_i F_{ij}$ Per reciprocitat simple $W_{ij} = W_{ji}$ (simetria)

$$\sum_{j=1}^{N_s} W_{ij} = \sum_{j=1}^{N_s} A_i F_{ij} = A_i \underbrace{\sum_{j=1}^{N_s} F_{ij}}_1 = A_i \quad (\text{per un recinte tancat } \sum_{j=1}^{N_s} F_{ij} = 1)$$

1) Distributivitat per la dreta: $W_{i \rightarrow \sum j} = \sum W_{i \rightarrow j}$?

De la definició de factor de visió, $F_{A_1 \rightarrow (A_2+A_3)} = F_{A_1 \rightarrow A_2} + F_{A_1 \rightarrow A_3}$ (veure la fig. de l'apartat 5.5.1)

Multiplicant la igualtat anterior per A_1 obtenim,

$$\underbrace{A_1 F_{A_1 \rightarrow (A_2+A_3)}}_{W_{1 \rightarrow (2+3)}} = \underbrace{A_1 F_{A_1 \rightarrow A_2}}_{W_{1 \rightarrow 2}} + \underbrace{A_1 F_{A_1 \rightarrow A_3}}_{W_{1 \rightarrow 3}} \Rightarrow W_{1 \rightarrow (2+3)} = W_{1 \rightarrow 2} + W_{1 \rightarrow 3}$$

Es compleix, $W_{1 \rightarrow \sum j} = \sum W_{i \rightarrow j}$, propietat distributiva per la dreta quan fem servir W_{ij}

2) Distributivitat per l'esquerra: $W_{\sum i \rightarrow j} = \sum W_{i \rightarrow j}$?

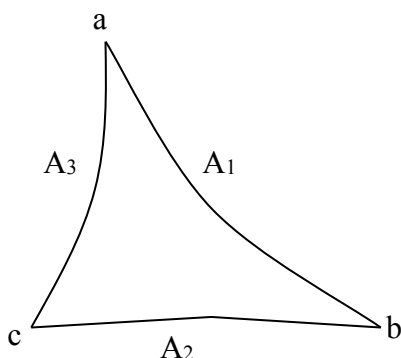
Per reciprocitat simple es compleix, $W_{1 \rightarrow (2+3)} = A_1 F_{A_1 \rightarrow (A_2+A_3)} = (A_2 + A_3) F_{(A_2+A_3) \rightarrow A_1} = W_{(2+3) \rightarrow 1}$

$$\text{Per tant, } \underbrace{W_{1 \rightarrow (2+3)}}_{W_{(2+3) \rightarrow 1}} = \underbrace{W_{1 \rightarrow 2}}_{W_{2 \rightarrow 1}} + \underbrace{W_{1 \rightarrow 3}}_{W_{3 \rightarrow 1}} \Rightarrow W_{(2+3) \rightarrow 1} = W_{2 \rightarrow 1} + W_{3 \rightarrow 1} \Rightarrow W_{\sum i \rightarrow j} = \sum W_{i \rightarrow j}$$

Combinant les dues propietats distributives a) i b) resulta: $W_{\sum i \rightarrow \sum j} = \sum W_{i \rightarrow j}$

5.5.7 Mètode dels fils creuats

Aquest mètode ideat per Hoyte Clark Hottel (1903) és molt útil per determinar factors de visió en recintes de gran profunditat (infinita) i secció recta constant.



A la figura adjunta és mostra la secció recta constant d'un recinte triangular de longitud infinita amb totes les superfícies convexes. Suposant que coneixem el valor de les superfícies A_1, A_2 i A_3 volem trobar els factors de visió F_{ij} (sent $i, j=1, 2, 3$)

Com que les tres superfícies formen un recinte tancat de tres superfícies (no surt res per les boques o és negligible),

$$\underbrace{F_{11}}_0 + F_{12} + F_{13} = 1 \Rightarrow A_1 F_{12} + A_1 F_{13} = A_1$$

$$F_{21} + \underbrace{F_{22}}_0 + F_{23} = 1 \quad \Rightarrow \quad A_2 F_{21} + A_2 F_{23} = A_2$$

$$F_{31} + F_{32} + \underbrace{F_{33}}_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad A_3 F_{31} + A_3 F_{32} = A_3$$

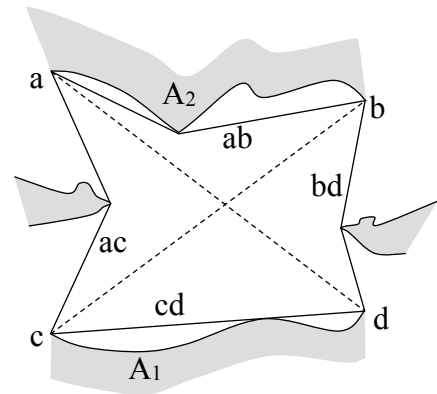
Tenim 3 equacions amb 6 incògnites. Si sumem les dues primeres equacions i restem la tercera tot tenint en compte la propietat de reciprocitat simple (ens queden 3 incògnites) obtenim,

$$F_{12} = \frac{A_1 + A_2 - A_3}{2 A_1}, \text{ de forma similar } F_{23} = \frac{A_2 + A_3 - A_1}{2 A_2}, \text{ etc.}$$

Aquesta expressió ens diu que el factor de visió entre la superfície 1 (emissor) i la superfície 2 (receptor) d'un triangle arbitrari amb costats convexos és igual a l'àrea de la superfície emissora més l'àrea de la superfície receptora menys l'àrea de la tercera superfície i tot dividit pel doble de la superfície emissora.

Emprant ara la fórmula anterior volem trobar el factor de visió F_{12} de la següent figura. Cal observar que ara les superfícies A_1 i A_2 no queden restringides a superfícies còncaues o convexes.

Anomenem ab i cd a les superfícies que obtenim tensant un fil per damunt de les citades superfícies (fils ab i cd). Si algun objecte interposat fa que les superfícies A_1 i A_2 no es vegin completament, tensem també els fils ac i bd esquivant els citats objectes tal com veiem a la figura. Ara considerant el recinte abcd determinem,



$$F_{ab-bd} = \frac{A_{ab} + A_{bd} - A_{ad}}{2 A_{ab}}$$

I emprant el recinte abc trobem, $F_{ab-ac} = \frac{A_{ab} + A_{ac} - A_{bc}}{2 A_{ab}}$

En el recinte abcd, $F_{ab-ac} + \underbrace{F_{ab-cd}}_? + F_{ab-bd} = 1$

$$F_{ab-cd} = 1 - F_{ab-ac} - F_{ab-bd} = 1 - \frac{A_{ab} + A_{ac} - A_{bc}}{2 A_{ab}} - \frac{A_{ab} + A_{bd} - A_{ad}}{2 A_{ab}} = \frac{(A_{ad} + A_{bc}) - (A_{ac} + A_{bd})}{2 A_{ab}}$$

Veient la figura observem que tota la radiació que abandona A_{ab} que incideix sobre A_{cd} també incidirà sobre la superfície A_1 . A la vegada tota la radiació que abandona A_{ab} cap a A_1 ha de passar forçosament per A_{cd} . Així doncs $F_{ab-cd} = F_{ab-1}$

Fent servir la reciprocitat simple i repetint els arguments per les superfícies A_{ab} i A_2 arribem a,

$$F_{ab-cd} = F_{ab-1} = \frac{A_1}{A_{ab}} F_{1-ab} = \frac{A_1}{A_{ab}} F_{1-2}, \text{ o sigui } F_{ab-cd} = \frac{A_1}{A_{ab}} F_{1-2} = \frac{(A_{ad} + A_{bc}) - (A_{ac} + A_{bd})}{2 A_{ab}}$$

i finalment $F_{1-2} = \frac{(A_{bc} + A_{ad}) - (A_{ac} + A_{bd})}{2 A_1} = \frac{\text{(suma diagonals)} - \text{(suma costats)}}{2 \times (\text{àrea sup. emissora})}$

Qüestió 10: factors de visió de recintes de 3 superfícies (de gran longitud L)

Els recintes de tres superfícies que es mostren a continuació tenen una profunditat L molt gran (en el sentit perpendicular al paper). Determinar la matriu dels factors de visió d'aquest 3 recintes,

Primer recinte: $F_{i-i} = 0$ per $i = 1, 2, 3$ sup. planes o convexes

Al suposar $L \gg r$ la fracció de la radiació que abandona les superfícies 1, 2 i 3 i s'escapa per els extrems es negligible. Per això els podem considerar recintes de 3 superfícies.

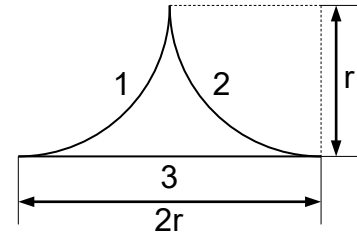
Per simetria, la radiació que abandoni la superfície 3, es repartirà a parts iguals entre la superfície 1 i la 2, i per tant, $F_{31} = F_{32} = 0,5$

$$A_1 = \frac{\pi}{2} rL = A_2 \quad ; \quad A_3 = 2rL \quad ; \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{4}{\pi} = \frac{A_2}{A_1}$$

Per reciprocitat simple, $A_1 F_{13} = A_3 \underbrace{F_{31}}_{0,5} \Rightarrow F_{13} = \frac{A_3}{A_1} F_{31} = \frac{2}{\pi} = F_{23}$ (també per simetria)

Sabem que $\underbrace{F_{11}}_0 + F_{12} + \underbrace{F_{13}}_{\frac{2}{\pi}} = 1 \Rightarrow F_{12} = 1 - \frac{2}{\pi} = F_{21}$

Matriu de factors de visió resultant,
$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \frac{2}{\pi} & \frac{2}{\pi} \\ 1 - \frac{2}{\pi} & 0 & \frac{2}{\pi} \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$



Segon recinte, (superfícies planes o convexes)

$$A_1 = \frac{\pi}{2} rL \quad ; \quad A_2 = r\sqrt{2} L \quad ; \quad A_3 = 2rL$$

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{4}{\pi} \quad ; \quad F_{i-i} = 0 \text{ per } i = 1, 2, 3$$

Aplicant el mètode dels fils creuats (ap. 5.5.7) trobem F_{23}

$$F_{23} = \frac{A_3 + A_2 - A_1}{2A_2} = \frac{2rL + r\sqrt{2}L - \frac{\pi}{2}rL}{2(r\sqrt{2}L)} = \frac{4 + 2\sqrt{2} - \pi}{4\sqrt{2}} = 0,652 \quad , \quad F_{21} = 1 - F_{23} = 0,348$$

reciprocitat simple $F_{32} = \frac{A_2 F_{23}}{A_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} 0,652 = 0,461 \quad , \quad F_{31} = 1 - F_{32} = 0,539$

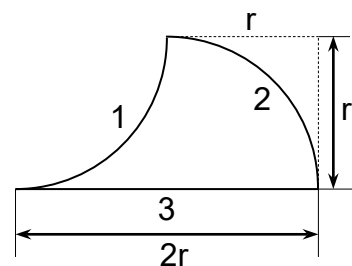
Per reciprocitat simple $F_{13} = \frac{A_3 F_{31}}{A_1} = \frac{4}{\pi} 0,539 = 0,686 \quad , \quad F_{12} = 1 - F_{13} = 0,314$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0,314 & 0,686 \\ 0,348 & 0 & 0,652 \\ 0,539 & 0,461 & 0 \end{bmatrix} \text{ matriu dels factors de visió}$$

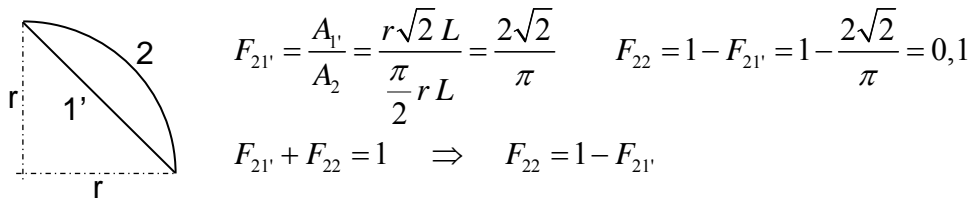
Tercer recinte: (inclou la superfície 2 còncava)

$$A_1 = \frac{\pi}{2} rL = A_2 \quad ; \quad A_3 = 2rL \quad ; \quad \frac{A_3}{A_2} = \frac{4}{\pi}$$

Amb el següent recinte auxiliar calculem F_{22}



Al ser $F_{1'2} = 1$ per reciprocitat simple, $A_1 \underbrace{F_{1'2}}_1 = A_2 F_{21'}$.



$$F_{21'} = \frac{A_{1'}}{A_2} = \frac{r\sqrt{2}L}{\frac{\pi}{2}rL} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \quad F_{22} = 1 - F_{21'} = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0,1$$

$$F_{21'} + F_{22} = 1 \Rightarrow F_{22} = 1 - F_{21'}$$

En el segon recinte (no l'auxiliar) $F_{22} = 0$ i al ser ara la superfície 2 còncaua $F_{22} = 0,1$ Al modificar-se F_{22} i sent $F_{21} + F_{22} + F_{23} = 1$ òbviament es modifiquen F_{21} i F_{23}

En canvi el F_{32} i el F_{12} continuen sent iguals que els obtinguts en el recinte 2 i per tant al canviar el valor la superfície A_2 per reciprocitat simple trobem els nous F_{23} i F_{21}

Nou F_{23} , $F_{23} = \frac{A_3 F_{32}}{A_2} = \frac{4}{\pi} 0,461 = 0,587$

Nou F_{21} , $F_{21} = \frac{A_1 F_{12}}{A_2} = 1 \times 0,314 = 0,314$ $F_{23} = 1 - F_{21} - F_{22} = 0,587$

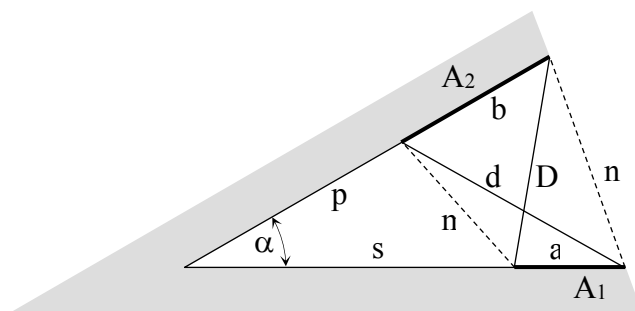
Matriu de factors de visió resultant, $F = \begin{bmatrix} 0 & 0,314 & 0,686 \\ 0,314 & 0,1 & 0,587 \\ 0,539 & 0,461 & 0 \end{bmatrix}$

Cal observar que el segon recinte, és un recinte auxiliar que cal tenir en compte per resoldre el tercer recinte.

Qüestió 11: determinar el factor de visió F_{12} de la configuració de llibre

Dades: suposem que coneixem a, b, s, p i l'angle α de la figura adjunta (recinte de longitud infinita en la direcció perpendicular al paper).

Determinem d, D, m, i n en funció de les dades emprant el teorema del cosinus.



En el triangle msp,
 $m^2 = s^2 + p^2 - 2sp \cos \alpha$

En el triangle n(s+a)(p+b),
 $n^2 = (s+a)^2 + (p+b)^2 - 2(s+a)(p+b) \cos \alpha$

En el triangle d(s+a)p,
 $d^2 = (s+a)^2 + p^2 - 2(s+a)p \cos \alpha$

En el triangle Ds(p+b), $D^2 = s^2 + (p+b)^2 - 2s(p+b) \cos \alpha$

Per tant, $F_{1-2} = \frac{(d+D) - (m+n)}{2a} = f(a,b,s,p,\alpha)$

Si $s=p=0$ aleshores $m=0$, $d=a$, $D=b$ i $n = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$ i el factor de visió resulta,

$$F_{1-2} = \frac{a+b - \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}{2a} = f(a,b,\alpha)$$

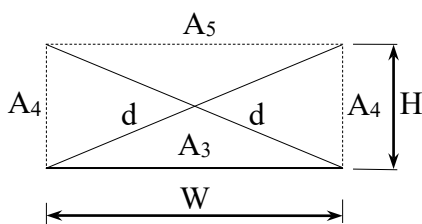
Qüestió 12: (ex. 13.112 de l’Incropera, parcial 04-05-q1) determinar els factors de visió difusos del recinte de longitud infinita format per les 4 superfícies indicades a la figura

Dades: $D_1 = 0,2 \text{ m}$; $D_2 = W = 1 \text{ m}$; $H = 2 \text{ m}$

Les superfícies 1 i 3 són planes o convexes i per tant $F_{11}=F_{33}=0$. Observem que la superfície A_4 és plana i en canvi $F_{44} \neq 0$! Trobem F_{34} aplicant el mètode dels fils creuats al rectangle format per la superfície A_3 , A_4 i la superfície virtual A_5 que tanca el rectangle.

$$F_{35} = \frac{(d+d)-(H+H)}{2W} \quad \text{sent } d = \sqrt{H^2 + W^2}$$

I per tant, $F_{34} = 1 - F_{35}$



Fàcilment hem trobat F_{34} amb el mètode dels fils creuats.

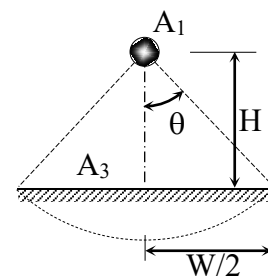
La radiació que abandona la superfície cilíndrica A_1 es distribueix uniformement en funció de l’angle de forma

que $F_{12} = \frac{\pi}{2\pi} = 0,5$ ja que A_1 veu a A_2 amb un angle de π radians (180°).

Calculem amb el mateix criteri F_{13} observant amb quin angle veu

A_1 a A_3 . Calculem la tangent $\text{tg}\theta = (W/2)/H$

I per tant $\theta = \arctg((W/2)/H)$ sent $F_{13} = \frac{2\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{\pi}$

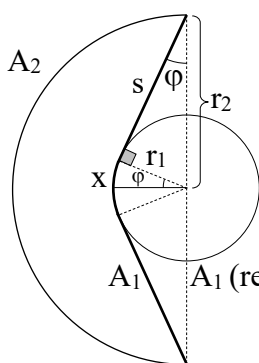


Si coneixem F_{12} i F_{13} ja podem trobar F_{14}

$$F_{14} = 1 - \underbrace{F_{11}}_0 - F_{12} - F_{13}$$

Ens falta trobar amb certa dificultat F_{22} . Cal que imaginem un recinte de dues superfícies que ens ajudi a determinar aquest factor de visió.

Recordem que el factor de visió és un resultat geomètric i per aquest motiu totalment independent del recinte amb que el trobem.



En particular hauríem de tancar la superfície 2 amb una superfície convexa ja que això ens facilitarà les coses com veurem a continuació.

Si pensem amb el recinte de la figura veiem que la línia més gruixuda és la nostra superfície auxiliar A_1 que tanca a la superfície A_2 formant un recinte com era el nostre objectiu. A més a més la superfície A_1 és convexa i per tant $F_{11}=0$ i $F_{12}=1$.

Per reciprocitat simple ja podem determinar F_{21} .

$$A_1 \underbrace{F_{12}}_1 = A_2 F_{21} \quad \Rightarrow \quad F_{21} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$F_{21} + F_{22} = 1 \quad \Rightarrow \quad F_{22} = 1 - F_{21} = 1 - \frac{A_1}{A_2} \quad \text{sent } A_2 = \pi D_2 L$$

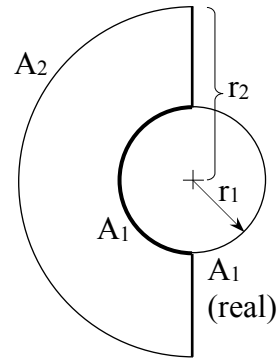
Per tant només ens cal trobar aquesta nova superfície A_1 . És qüestió de determinar “s” i “x” ja que $A_1 = 2(s+x)L$. En realitat com que es tracta d’una superfície ens falta multiplicar per la profunditat L que a l’enunciat se’ns diu que és un valor molt gran (infinit). Però com que

només tindrem en compte quocients de superfícies, aquesta dimensió es simplificarà i no la considerem. Sigui $s = r_2 \cos(\varphi)$

$$r_1 = \frac{D_1}{2}, \quad r_2 = \frac{D_2}{2}, \quad x = r_1 \varphi, \quad \sin(\varphi) = \frac{r_1}{r_2}, \quad \cos(\varphi) = \sqrt{1 - \sin^2(\varphi)} = \sqrt{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$$

¿Si en lloc del recinte anterior haguéssim pensat amb un recinte com el d'aquesta figura, podem també determinar F_{22} ?

La resposta és que no. Ja que en aquest cas la superfície 1 no és convexa i per tant $F_{11} > 0$ o sigui part de la radiació que abandona la superfície auxiliar A_1 incideix de forma directa sobre A_1 .



Adjuntem en una taula el procés complert per determinar tots els factors de visió. Representem per

RS = reciprocitat simple ; F_{13} trobat a partir de la definició (✖)

F_{34} trobat amb la fórmula de fils creuats (✖)

F_{22} trobat amb un recinte auxiliar (✖)

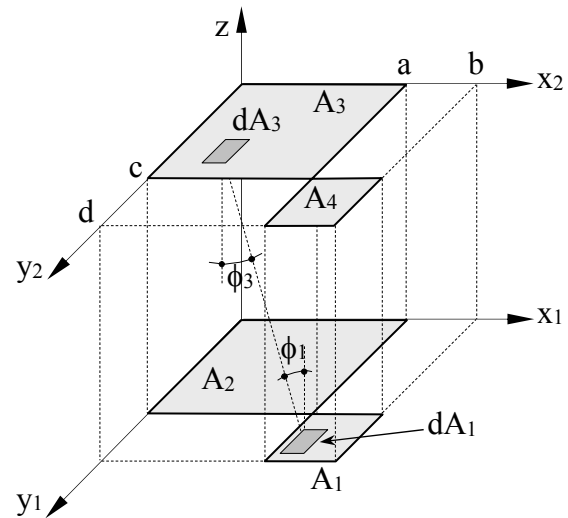
Σ indica que la suma de la fila és igual a 1 (recinte tancat)

i	A_i (m ²)	F_{i-1}	F_{i-2}	F_{i-3}	F_{i-4}
1	0,6283 (=π D ₁)	0	0,50	0,0780 (✖)	0,4220 (Σ)
2	1,5708 (=π D ₂ /2)	0,2000 (RS)	0,3506 (✖)	0,1191 (RS)	0,3303 (Σ)
3	1 (=W)	0,0490 (RS)	0,1871 (Σ)	0	0,7639 (✖)
4	4 (=2H)	0,0663 (RS)	0,1297 (RS)	0,1910 (RS)	0,6130 (Σ)

Veiem a la taula anterior que una vegada trobats els 3 factors de visió més crítics la resta es determina amb molta facilitat. Resultats numèrics,

5.5.8 Reciprocitat especial

En molts problemes d'àlgebra de factors de visió ens caldrà fer servir a més a més l'anomenada reciprocitat especial. Aquesta relació de reciprocitat especial que haurem de demostrar és $A_1 F_{13} = A_2 F_{24}$ d'acord a la figura que adjuntem a continuació. Sabem que,



$$A_1 F_{13} = \iint_{A_1 A_3} \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_3}{\pi r^2} dA_1 dA_3 \quad \text{essent}$$

$$dA_1 = dx_1 dy_1, \quad dA_3 = dx_2 dy_2$$

$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + z^2}$ es la distància entre $(x_1, y_1, 0)$ i (x_2, y_2, z)

$\cos \phi_1 = \frac{z}{r} = \cos \phi_3$ ja que $\phi_1 = \phi_3$ Aleshores la integral resulta:

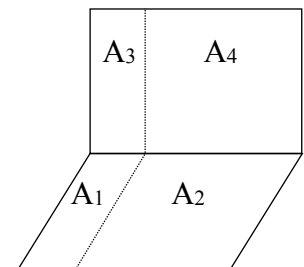
$$A_1 F_{13} = \frac{z^2}{\pi} \int_0^c \int_0^a \int_c^d \int_a^b \frac{1}{\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + z^2}\right)^4} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \quad (z \text{ es constant})$$

Similarment, $A_2 F_{24} = \iint_{A_2 A_4} \frac{\cos \phi_2 \cos \phi_4}{\pi r^2} dA_2 dA_4$ essent $dA_2 = dx_1 dy_1$, $dA_4 = dx_2 dy_2$

I per tant $A_2 F_{24} = \frac{z^2}{\pi} \int_0^c \int_0^a \int_c^d \int_a^b \frac{1}{\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + z^2}\right)^4} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$

En determinar $A_2 F_{24}$ resulta una integral simètrica a l'anterior en x_1, x_2 i y_1, y_2 i els límits d'integració són simètrics en aquelles variables de manera que obtenim l'anomenada relació de reciprocitat especial, $A_1 F_{13} = A_2 F_{24}$

La reciprocitat especial també és aplicable a totes aquelles configuracions de superfícies planes en què els límits d'integració en les quatre dimensions són intercanviables com per exemple en la configuració de llibre que es mostra a la següent figura.



Suposem que coneixem les àrees de cada superfície, així com els valors tabulats dels factors de visió de la configuració de llibre F_{13}, F_{24} i $F_{(1+2)-(3+4)}$. Amb aquestes dades volem determinar F_{14} .

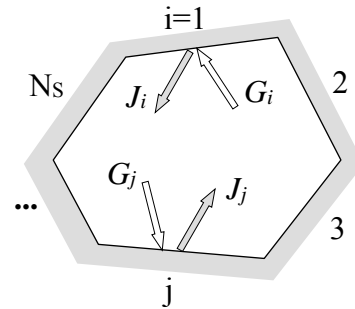
Es compleix $W_{(1+2)-(3+4)} = W_{13} + W_{14} + W_{23} + W_{24}$ i recordant que $W_{ij} = A_i F_{ij}$ i també per reciprocitat especial $W_{14} = W_{23}$, aleshores obtenim, $2 W_{14} = W_{(1+2)-(3+4)} - W_{13} - W_{24}$

$$W_{14} = (W_{(1+2)-(3+4)} - W_{13} - W_{24})/2 \quad A_1 F_{14} = W_{14} \Rightarrow F_{14} = W_{14}/A_1 \text{ .v.d.}$$

5.6 BESCANVI RADIANT PER BANDES EN RECINTES DE N_s SUPERFÍCIES

5.6.1 Recinte. Hipòtesis

L'anàlisi de l'intercanvi radiant entre superfícies d'un recinte és complexa quan les superfícies no són negres, ja que en aquest cas la radiació que abandona una superfície es reflecteix en una i altra superfície innumerables vegades amb una absorció parcial d'energia a cada reflexió. Conseqüentment, una anàlisi correcta ha d'incloure els efectes d'aquestes reflexions múltiples. Per simplificar l'anàlisi subdividim el recinte en N_s zones o superfícies.



Suposem que les zones compleixen les següents condicions:

- 1) Les propietats radiants de cada zona (α, ρ) són uniformes en cada banda i independents de la direcció i la freqüència.
- 2) Les superfícies són difuses per a la reflexió com per a l'emissió.
- 3) El flux de potència radiant és uniforme a la superfície de cada zona.
- 4) La irradiació és uniforme sobre la superfície de cada zona.
- 5) Les superfícies són opaques, per la qual cosa $\tau = 0$ i $\alpha + \rho = 1$.
- 6) D'una superfície coneixem la seva temperatura o bé el flux de potència radiant.
- 7) El recinte és ple d'un gas no participant. En general, el buit o l'aire en gruixos petits.
- 8) Règim estacionari.

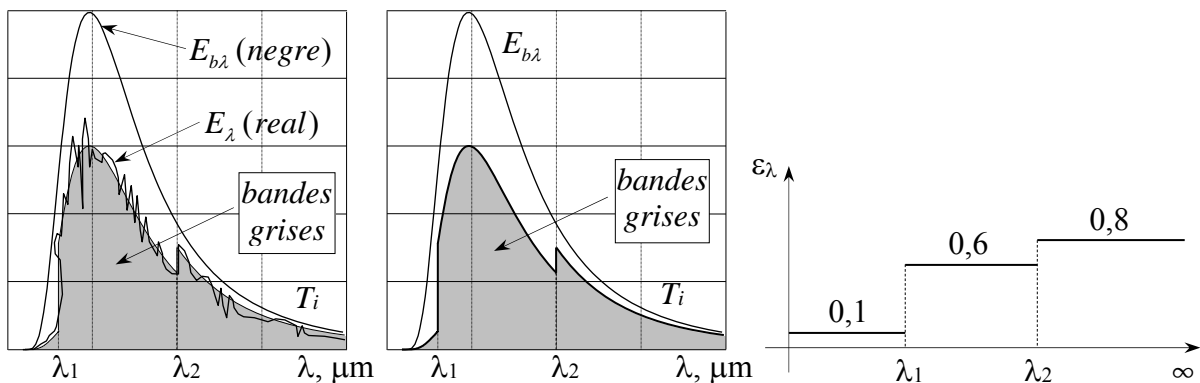
5.6.2 Poder emissiu espectral (veure ap. 5.2.4)

La radiositat espectral J_i^k de la superfície i corresponent a la banda k , representa tot el flux de potència radiant que a la banda k abandona la superfície A_i .

La irradiació espectral G_i^k de la superfície i corresponent a la banda k representa tot el flux de potència radiant a la banda k que incideix sobre la superfície A_i .

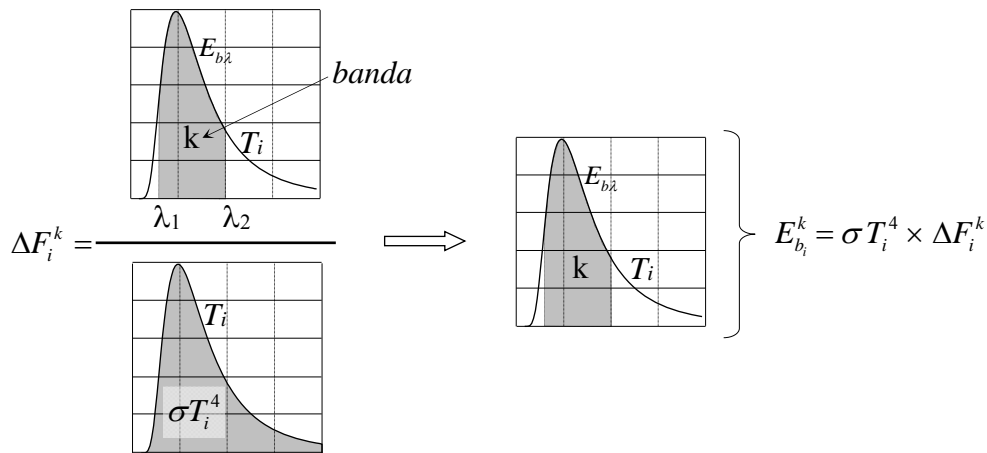
El poder emissiu espectral E_i^k de la superfície A_i representa tot el flux de potència radiant emes per la superfície A_i a la banda k ($\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$)

Superfície gris a bandes



A la primer a figura veiem la línia irregular que representa el poder emissiu espectral d'una superfície real. A la segona figura es proposa una aproximació per bandes, que consisteix en multiplicar $E_{b\lambda}$ per $\epsilon_i^1 = 0,1$ entre $[0, \lambda_1]$, per per $\epsilon_i^2 = 0,6$ entre $[\lambda_1, \lambda_2]$, per per $\epsilon_i^3 = 0,8$ entre $[\lambda_2, \infty]$. Així obtenim l'aproximació de bandes grises que veiem a la segona figura.

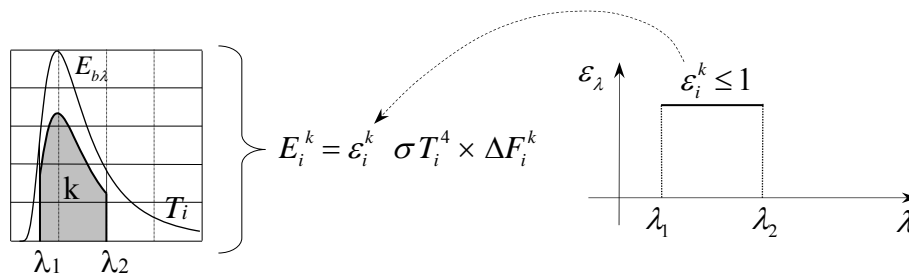
A la següent figura veiem com de la definició de funció de radiació, determinem el poder emissiu espectral $E_{b_i}^k$ a la banda k d'una superfície negra a la temperatura T_i ,



ΔF_i^k = funció de radiació a la banda k de la superfície A_i a la temperatura T_i .

El flux de potència radiant J_i^k que abandona la superfície A_i a la banda k consta d'una part reflectida $\rho_i^k G_i^k$ i d'una altra emesa E_i^k que anomenem poder emissiu espectral de la banda k

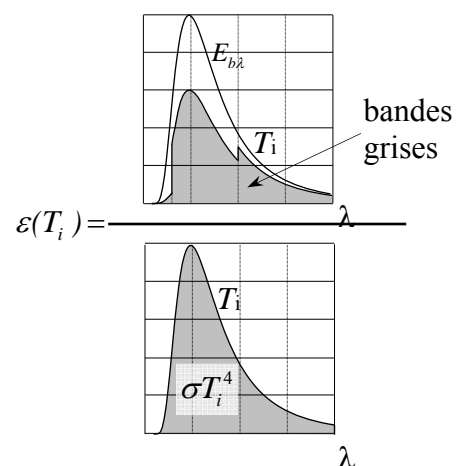
Obtenim E_i^k multiplicant per ε_i^k el poder emissiu espectral E_i^k



Així doncs, el poder emissiu espectral d'una banda el trobem amb l'equació $E_i^k = \varepsilon_i^k \sigma T_i^4 \Delta F_i^k$

La següent fórmula ens permet determinar l'emitància total hemisfèrica d'una superfície aproximada per bandes grises,

$$\varepsilon(T_i) = \frac{\int_{\lambda=0}^{\lambda_1} \varepsilon_\lambda E_{b\lambda} d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon_\lambda E_{b\lambda} d\lambda + \int_{\lambda_2}^{\infty} \varepsilon_\lambda E_{b\lambda} d\lambda}{\sigma T_i^4}$$



Es molt important saber, que aquesta propietat no te cap interès per determinar el bescanvi de potència radiant entre les superfícies d'un recinte. És mes, fer-la servir seria un error considerable. El lector hauria de trobar un exemple que justifiqui l'afirmació anterior i comentar-ho amb el professor.

5.6.3 La irradiació G_i^k en funció de les radiositats J_i^k

Suposem un recinte de 3 superfícies com el de la figura.

Volem veurà de moment la relació funcional entre les irradiacions i les radiositats totals.

Així ens quedaran 3 incògnites (J_1, J_2, J_3) en lloc de les 6 inicials ($J_1, J_2, J_3, G_1, G_2, G_3$).

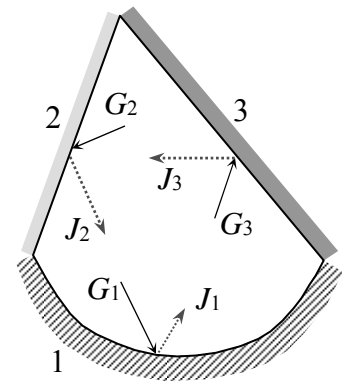
$J_2 A_2$ = potència radiant que abandona la superfície A_2 (W)

$J_2 A_2 F_{21}$ = potència radiant que incideix en A_1 procedent de A_2 (W)

$J_3 A_3 F_{31}$ = potència radiant que incideix en A_1 procedent de A_3 (W)

$J_1 A_1 F_{11}$ = potència radiant que incideix en A_1 procedent de A_1 (W)

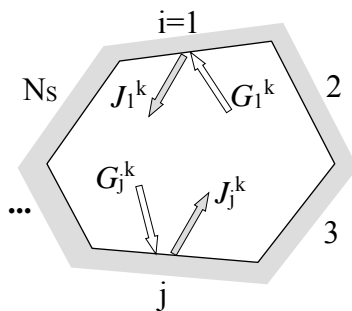
Sumant els 3 termes anteriors tindrem la potència total incident a la superfície A_1 procedent de tot el recinte,



$$\text{R.S. } \frac{J_1 A_1 F_{11} + J_2 \underbrace{A_2 F_{21}} + J_3 \underbrace{A_3 F_{31}}}{J_1 \cancel{A_1} F_{11} + J_2 \underbrace{\cancel{A_1} F_{12}} + J_3 \underbrace{\cancel{A_1} F_{13}} = G_1 \cancel{A_1}}$$

Per tant, arribem a $G_1 = F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3 = \sum_{j=1}^3 F_{1j} J_j$

que expressa la irradiació G_1 en funció de les radiositats tal com perseguíem.



Espectralment arribem òbviament a la mateixa expressió.

Troblem G_1^k la irradiació a la banda k de la superfície 1 en funció de les radiositats espectrals.

$J_2^k A_2$ = potència radiant que abandona A_2 a la banda k (W)

$J_2^k A_2 F_{21}$ = pot. radiant que incideix en A_1 procedent de A_2 (W)

(a la banda k)

$G_1^k A_1$ = potència radiant que incideix en A_1 procedent de tot el recinte (W) i a la banda k

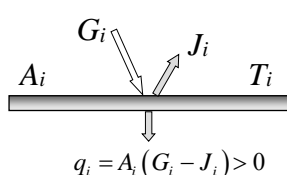
Lògicament $G_1^k A_1 = \sum_{j=1}^{N_s=3} J_j^k A_j F_{j1}$ i per recíprocitat simple $A_j F_{j1} = A_1 F_{1j}$ i substituint a

l'expressió anterior obtenim la irradiació espectral,

$$G_1^k = \frac{\sum_{j=1}^{N_s=3} J_j^k A_j F_{j1}}{A_1} = \frac{\sum_{j=1}^{N_s=3} J_j^k \cancel{A_1} F_{1j}}{\cancel{A_1}} = \sum_{j=1}^3 F_{1j} J_j^k$$

5.6.4 Conveni de signes

Per conveni establim que el flux de potència radiant a la superfície “i” és igual a la irradiació



menys la radiositat de la mateixa, $\frac{q_i}{A_i} = G_i - J_i$ (W/m²)

En règim estacionari si la superfície A_i guanya potència radiant degut al bescanvi de potència amb totes les superfícies interiors del

recinte (*balanç pel costat interior al recinte*) (o sigui si $G > J \Rightarrow q/A > 0$), aquesta s'escalfaria i per tant, si la volem mantenir a temperatura T_i constant haurem de eliminar externament aquesta potència. El que sorprèn una mica, si no es té clar el criteri de signes, és que quan ens cal eliminar potència externament, resulta que $q/A > 0$

$$G_i > J_i \quad \Rightarrow \quad q_i > 0 \quad \text{cal eliminar potència externament}$$

$$G_i = J_i \quad \Rightarrow \quad q_i = 0 \quad \text{superfície aïllada externament o bé simplement } q_i = 0$$

$$G_i < J_i \quad \Rightarrow \quad q_i < 0 \quad \text{cal aportar potència externament}$$

5.6.5 Tipus de superfícies. Equacions

a) Superfície amb temperatura coneguda

Si N_s és el nombre de superfícies o zones del recinte, l'expressió de la radiositat espectral de la superfície "i" resulta,

$$\text{Substituint} \quad \begin{cases} G_i^k = \sum_{j=1}^{N_s} F_{i-j} J_j^k \\ E_i^k = \varepsilon_i^k \sigma T_i^4 \Delta F_i^k \end{cases} \quad \text{a l'equació} \quad J_i^k = \rho_i^k G_i^k + E_i^k = \rho_i^k \sum_{j=1}^{N_s} F_{i-j} J_j^k + \varepsilon_i^k \sigma T_i^4 \Delta F_i^k$$

$$J_i^k = \rho_i^k F_{i-i} J_i^k + \rho_i^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_s} F_{i-j} J_j^k + \varepsilon_i^k \sigma T_i^4 \Delta F_i^k \quad \Rightarrow$$

$$(1 - \rho_i^k F_{i-i}) J_i^k - \rho_i^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_s} F_{i-j} J_j^k = \varepsilon_i^k \sigma T_i^4 \Delta F_i^k \quad \text{(Eq. 1)}$$

b) Superfície i amb flux de potència conegut $\left. \frac{q}{A} \right|_i$

$$q_i = \sum_{k=1}^{N_B} A_i (G_i^k - J_i^k) = \sum_{k=1}^{N_B} A_i \left(\sum_{j=1}^{N_s} F_{i-j} J_j^k - J_i^k \right)$$

N_s = nombre de superfícies o zones

N_B = nombre de bandes

Qüestió 13: La radiositat espectral d'una superfície perfectament **aïllada** i al buit val per la primera banda (0-6 μm) $J^1 = 3400 \text{ W/m}^2$. Sent aquesta una superfície opaca amb una absorbància espectral $\alpha^1 = 0,5$ determinar el seu poder emissiu espectral i hemisfèric en aquesta banda E^1 ,

Solució: quan ens diuen que una superfície d'un recinte està aïllada (i al buit) significa que el balanç total de potència radiant que inclou totes les bandes serà igual a 0 i per tant

$$\left. \frac{q}{A} \right|_{i_total} = G_{i_total} - J_{i_total} = 0 \quad \Rightarrow \quad G_{i_total} = \sum_k G_i^k = \sum_k J_i^k = J_{i_total}$$

Això no significa pas que G_i^k hagi de ser igual a J_i^k , és més, en general es complirà just lo contrari, que $G_i^k \neq J_i^k$ (ocasionalment també podria ser igual)

Cal tenir present per tant, que si una superfície està perfectament aïllada, considerar que el balanç de potència en una banda també es 0 és un error important.

Viem-ho en un exemple numèric ($N_{bandes}=3$) Observeu el balanç a cada banda.

$$\frac{q}{A}\Big|_{total} = G_{total} - J_{total} = \underbrace{(G^1 + G^2 + G^3)}_{G_{total}} - \underbrace{(J^1 + J^2 + J^3)}_{J_{total}} = \underbrace{(G^1 - J^1)}_{+100} + \underbrace{(G^2 - J^2)}_{-90} + \underbrace{(G^3 - J^3)}_{-10} = 0$$

Observem que el balanç global es nul però no el balanç a cada banda.

Tornant al problema, de l'equació $\frac{q}{A}\Big|_{banda1} = G^1 - \underbrace{J^1}_{3400} \neq 0$ veiem que no podem determinar G^1 i per tant, de l'equació $J^1 = \rho^1 \underbrace{G^1}_{?} + \underbrace{E^1}_{?} \Rightarrow E^1 = \underbrace{J^1}_{3400} - \rho^1 \underbrace{G^1}_{0,5?} = ?$ no podem doncs determinar el poder emissiu espectral i hemisfèric en aquesta banda E^1

5.6.6 Mètodes de resolució

a) Coneixem la temperatura de totes les superfícies del recinte .

En resoldre un recinte amb N_S superfícies o zones i N_B bandes, resulten N_B sistemes independents d'equacions amb N_S radiositats incògnites cadascun.

Per plantejar els sistemes esmentats la metodologia que cal seguir és la següent,

Trobar:

- 1) - La matriu dels factors de visió.
- Totes les funcions de radiació.
- Els poders emissius espectrals de cada superfície o zona.
- 2) Plantejar l'equació (1) per a cada superfície i a cada banda.
- 3) Resoldre el sistema d'equacions corresponents a cada banda, determinant les radiositats espectrals respectives.
- 4) Trobar les irradiacions espectrals $G_i^k = \sum_{j=1}^{N_S} F_{ij} J_j^k$
- 5) Calcular $q_i = \sum_{k=1}^{N_B} A_i (G_i^k - J_i^k) = \sum_{k=1}^{N_B} A_i \left(\sum_{j=1}^{N_S} F_{ij} J_j^k - J_i^k \right)$ i comprovar que $\sum_{i=1}^{N_S} q_i = 0$

b) Coneixem el q/A d'una superfície i la temperatura de la resta

No podem calcular les funcions de radiació de la superfície amb flux de potència conegut, perquè desconexem la seva temperatura. Això ens condueix a un procediment de resolució iteratiu que consisteix en suposar una temperatura inicial de la superfície.

Suposem que la superfície A_i , amb flux de potència conegut, es troba a una temperatura inicial T_i . En aquestes condicions totes les temperatures són conegudes, per la qual cosa podem aplicar el procediment de resolució exposat a l'apartat a) anterior.

Recalculem $q_i = \sum_{k=1}^{N_B} A_i (G_i^k - J_i^k)$ i si $q_i \neq q_i \text{ conegut}$ prenem un valor nou de T_i , i seguim el

procés iteratiu. Per exemple, si $q_i < q_i \text{ conegut}$ disminuïm la temperatura T_i . Per a més d'una superfície amb el flux de potència radiant conegut, com plantejaríeu el procés iteratiu corresponent?

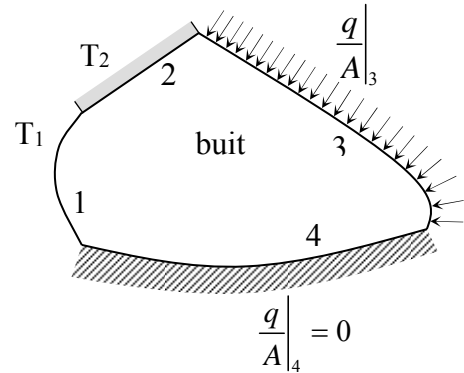
5.6.7 Resolució matricial de recintes amb totes les superfícies grises (cas general)

Dades: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ $T_1, T_2, \frac{q}{A_3}, \frac{q}{A_4}$ A_1, A_2, A_3, A_4

Incògnites: J_1, J_2, J_3 i J_4

Determinem la matriu de factors de visió,

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix}$$



Sistema d'equacions:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \rho_1 G_1 + E_1 \\ J_2 &= \rho_2 G_2 + E_2 \\ G_3 - J_3 &= \frac{q}{A_3} \\ G_4 - J_4 &= \frac{q}{A_4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} J_1 - \rho_1 (F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3 + F_{14} J_4) &= \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \\ J_2 - \rho_2 (F_{21} J_1 + F_{22} J_2 + F_{23} J_3 + F_{24} J_4) &= \varepsilon_2 \sigma T_2^4 \\ J_3 - (F_{31} J_1 + F_{32} J_2 + F_{33} J_3 + F_{34} J_4) &= -\frac{q}{A_3} \\ J_4 - (F_{41} J_1 + F_{42} J_2 + F_{43} J_3 + F_{44} J_4) &= -\frac{q}{A_4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Veiem que el fet de ser 4 una superfície aïllada només es un cas particular d'una superfície amb el q/A prefixat.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & -\rho_1 F_{13} & -\rho_1 F_{14} \\ -\rho_2 F_{21} & 1 - \rho_2 F_{22} & -\rho_2 F_{23} & -\rho_2 F_{24} \\ -F_{31} & -F_{32} & 1 - F_{33} & -F_{34} \\ -F_{41} & -F_{42} & -F_{43} & 1 - F_{44} \end{bmatrix}}_M \times \underbrace{\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{bmatrix}}_J = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \\ \varepsilon_2 \sigma T_2^4 \\ -\frac{q}{A_3} \\ -\frac{q}{A_4} \end{bmatrix}}_B \Rightarrow J = M^{-1} B$$

Passos per obtenir les matrius M i B:

1) Escrivim en una matriu 4×4 les emissivitats i les reflectivitats de totes les superfícies de temperatura coneguda i assignem un 0 a les emissivitats de les superfícies que tenen la q/A prefixada (es fa així per qüestions de la resolució matricial)

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \rho_i = 1 - \varepsilon_i \quad ; \quad \rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) Considerem ara les matrius, $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $diag(\rho) = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

diag(ρ) es una matriu nul·la de 4×4 amb els elements de la matriu [ρ] a la diagonal.

3) Anomenem $M = I_4 - diag(\rho) \times F = \begin{bmatrix} 1 - \rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & -\rho_1 F_{13} & -\rho_1 F_{14} \\ -\rho_2 F_{21} & 1 - \rho_2 F_{22} & -\rho_2 F_{23} & -\rho_2 F_{24} \\ -F_{31} & -F_{32} & 1 - F_{33} & -F_{34} \\ -F_{41} & -F_{42} & -F_{43} & 1 - F_{44} \end{bmatrix}$

4) Determinem ara la matriu de termes independents: a) Considerem els poders emissius $E_i = \epsilon_i \sigma T_i^4$ per les superfícies de temperatura coneguda b) Considerem $-\frac{q}{A_i}$ o sigui el flux

$B = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \sigma T_1^4 \\ \epsilon_2 \sigma T_2^4 \\ -\frac{q}{A_3} \\ -\frac{q}{A_4} \end{bmatrix}$ de potència tèrmica canviat de signe per les sup. amb flux de potència fixat.

5) Calclem ara totes les radiositats a partir de l'expressió matricial $J = M^{-1} \times B$

I totes les irradiacions, $G = F \times J$ i les potències $\frac{q}{A_i} = G_i - J_i$ per $i=1,2,3,4$

6) Una vegada coneixem les G i J de les superfícies 3 i 4 ja podem trobar les temperatures corresponents. $J_3 = \rho_3 G_3 + \epsilon_3 \sigma T_3^4 \Rightarrow T_3 = \sqrt[4]{\frac{J_3 - \rho_3 G_3}{\epsilon_3 \sigma}}$ etc.

5.6.8 Resolució matricial de recintes amb propietats espectrals (per bandes)

Cas general

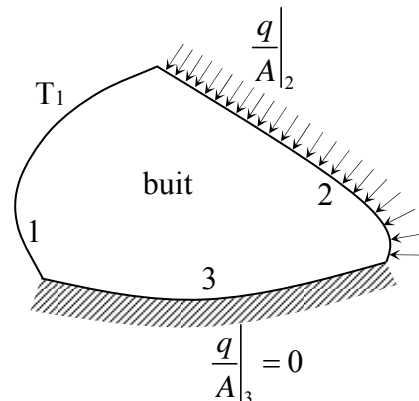
Dades: Suposem 2 bandes, $k=1,2$; 1ª) banda $0-\lambda_1$ ($k=1$) ; 2ª) banda $\lambda_1-\infty$ ($k=2$)
 ρ_i^k , superfície "i" banda "k" ; $\alpha_i^k + \rho_i^k = 1$ superfície opaques ; $\alpha_i^k = \epsilon_i^k$ llei de Kirchoff

$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho_1^1 & \rho_1^2 \\ \rho_2^1 & \rho_2^2 \\ \rho_3^1 & \rho_3^2 \end{bmatrix}$ reflectàncies espectrals

Superfícies: A_1, A_2, A_3
 T_1 temperatura coneguda

Flux de potència coneguts: $\frac{q}{A_2}, \frac{q}{A_3}$

Incògnites: J_1, J_2 i J_3 (no coneixem ni T_2 , ni T_3)



1) Suposarem T_2 i T_3 de forma que a partir d'ara coneixem totes les temperatures.

2) Determinem la matriu de factors de visió,
$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}$$

3) Sistema d'equacions corresponents a la **banda k** ($k=1,2$)

$$\left. \begin{matrix} J_1^k = \rho_1^k G_1^k + E_1^k \\ J_2^k = \rho_2^k G_2^k + E_2^k \\ J_3^k = \rho_3^k G_3^k + E_3^k \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} J_1^k - \rho_1^k \underbrace{(F_{11} J_1^k + F_{12} J_2^k + F_{13} J_3^k)}_{G_1^k} = \underbrace{\varepsilon_1^k \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}_{E_1^k} \\ J_2^k - \rho_2^k \underbrace{(F_{21} J_1^k + F_{22} J_2^k + F_{23} J_3^k)}_{G_2^k} = \underbrace{\varepsilon_2^k \sigma T_2^4 \Delta F_2^k}_{E_2^k} \\ J_3^k - \rho_3^k \underbrace{(F_{31} J_1^k + F_{32} J_2^k + F_{33} J_3^k)}_{G_3^k} = \underbrace{\varepsilon_3^k \sigma T_3^4 \Delta F_3^k}_{E_3^k} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

El fet de ser la superfície 3 una superfície aïllada no es mes que un cas particular d'una superfície amb el q/A prefixat. Observem que aquest sistema, ordenant les incògnites, el podem escriure,

$$\begin{matrix} (1 - \rho_1^k F_{11}) J_1^k & -\rho_1^k F_{12} J_2^k & -\rho_1^k F_{13} J_3^k & = \varepsilon_1^k \sigma T_1^4 \Delta F_1^k \\ -\rho_2^k F_{21} J_1^k & (1 - \rho_2^k F_{22}) J_2^k & -\rho_2^k F_{23} J_3^k & = \varepsilon_2^k \sigma T_2^4 \Delta F_2^k \\ -\rho_3^k F_{31} J_1^k & -\rho_3^k F_{32} J_2^k & (1 - \rho_3^k F_{33}) J_3^k & = \varepsilon_3^k \sigma T_3^4 \Delta F_3^k \end{matrix} \quad \text{i matricialment,}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (1 - \rho_1^k F_{11}) & -\rho_1^k F_{12} & -\rho_1^k F_{13} \\ -\rho_2^k F_{21} & (1 - \rho_2^k F_{22}) & -\rho_2^k F_{23} \\ -\rho_3^k F_{31} & -\rho_3^k F_{32} & (1 - \rho_3^k F_{33}) \end{bmatrix}}_A \times \underbrace{\begin{bmatrix} J_1^k \\ J_2^k \\ J_3^k \end{bmatrix}}_J = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1^k \sigma T_1^4 \Delta F_1^k \\ \varepsilon_2^k \sigma T_2^4 \Delta F_2^k \\ \varepsilon_3^k \sigma T_3^4 \Delta F_3^k \end{bmatrix}}_E \Rightarrow J = A^{-1} E$$

Per tant, veiem que es tracta de saber construir la matriu a A a partir de les emissivitats espectrals i de la matriu dels factors de visió. Segurament, només observant-la una mica, ja sabríeu com construir aquesta matriu a partir de les dades.

Indicarem a continuació com fer-ho d'una forma matricial.

Observem en primer lloc, que la dimensió de la matriu A es la mateixa que el nombre de superfícies. En aquest exemple 3×3 .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_3} - \underbrace{\begin{bmatrix} \rho_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3^k \end{bmatrix}}_{RO} \times \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}}_F = \underbrace{\begin{bmatrix} (1 - \rho_1^k F_{11}) & -\rho_1^k F_{12} & -\rho_1^k F_{13} \\ -\rho_2^k F_{21} & (1 - \rho_2^k F_{22}) & -\rho_2^k F_{23} \\ -\rho_3^k F_{31} & -\rho_3^k F_{32} & (1 - \rho_3^k F_{33}) \end{bmatrix}}_A$$

Es molt senzill veure que $A = I_3 - RO \times F$ (trobarem una matriu A específica per cada banda)

4) Trobades ja les radiositats de cada banda, trobem ara les irradiacions espectrals,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} G_1^1 & G_1^2 \\ G_2^1 & G_2^2 \\ G_3^1 & G_3^2 \end{bmatrix}}_G = \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}}_F \times \underbrace{\begin{bmatrix} J_1^1 & J_1^2 \\ J_2^1 & J_2^2 \\ J_3^1 & J_3^2 \end{bmatrix}}_J \Rightarrow G = F \times J$$

Trobem ara els valors totals,

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1^1 \\ J_2^1 \\ J_3^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_1^2 \\ J_2^2 \\ J_3^2 \end{bmatrix} \quad i \quad \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^1 \\ G_2^1 \\ G_3^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1^2 \\ G_2^2 \\ G_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{q}{A_1} \\ \frac{q}{A_2} \\ \frac{q}{A_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} \quad i \quad \text{ara podem comprovar si el valor de } \frac{q}{A_2} \quad i \quad \frac{q}{A_3} \text{ s'aproximen als}$$

valors fixats a les dades del problema. El més probable es que tinguem que retocar les temperatures suposades T_2 i T_3 fins assolir els valors fixats.

Resum:

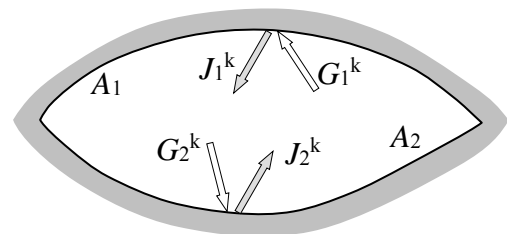
- 1) Determinem la matriu F de factors de visió i les funcions de radiació de totes les bandes
- 2) Trobem les matrius E dels poders emissius de la primera E^{11} i la segona E^{12} banda.
- 3) Determinem per cada banda la matriu A a partir de les matrius I_3 , $RO = \text{diag}(\rho_i^k)$
- 4) Trobem les matrius A per la 1^a i 2^a bandes, sent $A = I_3 - RO \times F$
- 5) Trobem les radiositats de cada banda amb $J = A^{-1}E$
- 6) Determinem les irradiacions amb $G = F \times J$ i $\begin{bmatrix} q \\ A \end{bmatrix} = [G] - [J]$

5.7 BESCANVI RADIANT ESPECTRAL EN RECINTES DE 2 SUPERFÍCIES

Les superfícies 1 i 2 del recinte de la figura es troben en règim estacionari a les temperatures T_1 i T_2 respectivament. Determineu la potència radiant neta bescanviada entre les superfícies 1 i 2.

En aplicar la formulació general exposada a l'apartat anterior a un recinte de dues superfícies obtenim unes fórmules molt simplificades que ens permeten resoldre d'una forma més directa alguns balanços de potència radiant molt freqüents a l'enginyeria.

Substituïm les irradiacions espectrals i els poders emissiu espectrals de la banda k ,



$$\left. \begin{aligned}
 G_1^k &= F_{11} J_1^k + F_{12} J_2^k & E_1^k &= \varepsilon_1^k \sigma T_1^4 \Delta F_1^k \\
 J_1^k &= \rho_1^k G_1^k + E_1^k \\
 J_2^k &= \rho_2^k G_2^k + E_2^k \\
 G_2^k &= F_{21} J_1^k + F_{22} J_2^k & E_2^k &= \varepsilon_2^k \sigma T_2^4 \Delta F_2^k
 \end{aligned} \right\} \text{Banda } k \quad \text{¿ } J_1^k, J_2^k \text{ ?}$$

$$\left. \begin{aligned}
 J_1^k &= \rho_1^k (F_{11} J_1^k + F_{12} J_2^k) + \varepsilon_1^k \sigma T_1^4 \Delta F_1^k \\
 J_2^k &= \rho_2^k (F_{21} J_1^k + F_{22} J_2^k) + \varepsilon_2^k \sigma T_2^4 \Delta F_2^k
 \end{aligned} \right\} \text{¿ } J_1^k, J_2^k \text{ ?}$$

Resulta un sistema de 2 equacions amb dues incògnites, les radiositats J_1^k i J_2^k .

5.7.1 Sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned}
 (1 - \rho_1^k F_{11}) J_1^k - \rho_1^k F_{12} J_2^k &= \varepsilon_1^k \sigma T_1^4 \Delta F_1^k \\
 -\rho_2^k F_{21} J_1^k + (1 - \rho_2^k F_{22}) J_2^k &= \varepsilon_2^k \sigma T_2^4 \Delta F_2^k
 \end{aligned} \right\} \text{2 equacions amb 2 incògnites ¿ } J_1^k, J_2^k \text{ ?}$$

Resolem el sistema anterior pel mètode de Cramer i obtenim les radiositats J_1^k i J_2^k .

$$J_1^k = \frac{\begin{vmatrix} \overbrace{\varepsilon_1^k \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}^{E_1^k} & -\rho_1^k F_{12} \\ \varepsilon_2^k \sigma T_2^4 \Delta F_2^k & 1 - \rho_2^k F_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \rho_1^k F_{11} & -\rho_1^k F_{12} \\ -\rho_2^k F_{21} & 1 - \rho_2^k F_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\overbrace{\varepsilon_1^k \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}^{E_1^k} (1 - \rho_2^k F_{22}) + \overbrace{\varepsilon_2^k \sigma T_2^4 \Delta F_2^k}^{E_2^k} \rho_1^k F_{12}}{(1 - \rho_1^k F_{11})(1 - \rho_2^k F_{22}) - \rho_1^k \rho_2^k F_{12} F_{21}}$$

$$J_2^k = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \rho_1^k F_{11} & E_1^k \\ -\rho_2^k F_{21} & E_2^k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \rho_1^k F_{11} & -\rho_1^k F_{12} \\ -\rho_2^k F_{21} & 1 - \rho_2^k F_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\overbrace{\varepsilon_2^k \sigma T_2^4 \Delta F_2^k}^{E_2^k} (1 - \rho_1^k F_{11}) + \overbrace{\varepsilon_1^k \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}^{E_1^k} \rho_2^k F_{21}}{(1 - \rho_1^k F_{11})(1 - \rho_2^k F_{22}) - \rho_1^k \rho_2^k F_{12} F_{21}}$$

Conegudes les radiositats a cada banda d'ambdues superfícies ens queda resolt el problema ja que de forma directa podem trobar les irradiacions espectrals. Amb $G=F \times J$ (*matricialment*)

a) Balanç de potència radiant a la superfície 1:

Substituïm $G_1^k = F_{11} J_1^k + F_{12} J_2^k$ a $q_1 = \sum_{k=1}^{N_B} A_1 (G_1^k - J_1^k)$

$$q_1 = \sum_{k=1}^{N_B} A_1 (G_1^k - J_1^k) = \sum_{k=1}^{N_B} A_1 (F_{11} J_1^k + F_{12} J_2^k - J_1^k) = \sum_{k=1}^{N_B} A_1 [(F_{11} - 1) J_1^k + F_{12} J_2^k]$$

I com que $F_{11} - 1 = -F_{12}$ obtenim $q_1 = \sum_{k=1}^{N_B} A_1 F_{12} (J_2^k - J_1^k)$

b) Balanç de potència radiant a la superfície 2:

$$q_2 = \sum_{k=1}^{N_B} A_2 (G_2^k - J_2^k) = \sum_{k=0}^{N_B} A_2 F_{21} (J_1^k - J_2^k) = -\sum_{k=1}^{N_B} A_1 F_{12} (J_2^k - J_1^k) = -q_1$$

Resultat evident tractant-se d'un recinte amb tant sols dues superfícies.

5.7.2 Solució general

Substituint les expressions de J_1^k i J_2^k que hem trobat anteriorment, arribem a la fórmula general següent:

$$q_1 = \sum_{k=1}^{N_B} A_1 F_{12} (J_2^k - J_1^k) = \sum_{k=1}^{N_B} \frac{\sigma T_2^4 \Delta F_2^k - \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}{\frac{1 - \epsilon_1^k}{A_1 \epsilon_1^k} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \epsilon_2^k}{A_2 \epsilon_2^k}} = A_1 (G_1 - J_1)$$

(ΔF_i^k és la funció de radiació de la superfície **i** a la banda **k**)

En general $F_{11} \neq 0$ i $F_{22} \neq 0$ si les superfícies es veuen a sí mateixes (sup. còncaues)

$$F_{11} + F_{12} = 1 \quad \Rightarrow \quad F_{11} = 1 - F_{12} \quad ; \quad A_2 F_{21} = A_1 F_{12} \quad \Rightarrow \quad F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12}$$

$$F_{21} + F_{22} = 1 \quad \Rightarrow \quad F_{22} = 1 - F_{21} = 1 - \frac{A_1}{A_2} F_{12} \quad \text{Substituïm aquest factors de visió.}$$

Amb paciència s'arriba finalment a una equació general molt simplificada i de molta utilitat.

Equació general per un recinte de 2 superfícies amb k bandes

$$q_1 = \sum_{k=1}^{N_B} \frac{\sigma T_2^4 \Delta F_2^k - \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}{\frac{1}{A_1} \left(\frac{1}{\epsilon_1^k} - 1 \right) + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2^k} - 1 \right)} = A_1 (G_1 - J_1) = -q_2$$

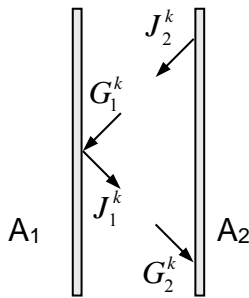
$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1 (G_1 - J_1) \\ q_2 &= A_2 (G_2 - J_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{reg. estac. } q_1 + q_2 = 0$$

Si les dues superfícies les podem modelitzar com superfícies grises aleshores, $\Delta F_1^k = \Delta F_2^k = 1$ resultant la fórmula general,

$$q_1 = \frac{\sigma T_2^4 - \sigma T_1^4}{\frac{1 - \epsilon_1}{A_1 \epsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \epsilon_2}{A_2 \epsilon_2}} = A_1 (G_1 - J_1) = -q_2$$

Als apartats següents apliquem l'equació general a alguns casos d'ús freqüent.

5.7.3 Plans paral·lels i infinits



En aquest cas, tractant-se de plans infinits la radiació que s'escapa pels extrems és nul·la. A la pràctica, aplicarem aquest model quan estimem que la potència que s'escapi pels extrems sigui negligible. Aleshores, $F_{11} = F_{22} = 0$; $F_{12} = F_{21} = 1$; $A_1 = A_2$

Per aquesta geometria l'expressió de les G en funció de les J és,

$$\left. \begin{aligned} G_1^k &= F_{11} J_1^k + F_{12} J_2^k = 0 J_1^k + 1 J_2^k \\ G_2^k &= F_{21} J_1^k + F_{22} J_2^k = 1 J_1^k + 0 J_2^k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} G_1^k = J_2^k \\ G_2^k = J_1^k \end{cases}$$

Substituint $F_{12}=1$ a l'equació general i essent N_B el nombre de bandes, obtenim,

$$q_1 = \sum_{k=1}^{N_B} \frac{\sigma T_2^4 \Delta F_2^k - \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}{\frac{1}{A_1} \left(\frac{1}{\epsilon_1^k} - 1 \right) + \frac{1}{A_1 \underbrace{F_{12}}_1} + \frac{1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2^k} - 1 \right)} = A_1 \sum_{k=1}^{N_B} \frac{\sigma T_2^4 \Delta F_2^k - \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}{\frac{1}{\epsilon_1^k} - 1 + \frac{1}{\underbrace{F_{12}}_1} + \frac{1}{\epsilon_2^k} - 1}$$

Resultant l'equació per dos plans paral·lels i infinits,

$$q_1 = A_1 \sum_{k=1}^{N_B} \frac{\sigma T_2^4 \Delta F_2^k - \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}{\frac{1}{\epsilon_1^k} + \frac{1}{\epsilon_2^k} - 1} = -q_2$$

5.7.4 Superfície convexa rodejada d'una altra còncava

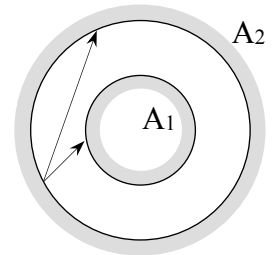
Aquest cas és aplicable a: dos cilindres concèntrics de longitud infinita i al cas de dues esferes concèntriques.

Sent la superfície A_1 convexa resulta $F_{11}=0$ (no es veu a ella mateixa).

A_2 envolta completament la superfície A_1 , de forma que $F_{12} = 1$

Essent els cilindres de longitud infinita les superfícies 1 i 2 determinen un recinte (*tancat*) de 2 superfícies sent per tant $F_{21} + F_{22} = 1 \Rightarrow F_{22} = 1 - F_{21}$

Per reciprocitat simple, $A_2 F_{21} = A_1 F_{12} \Rightarrow F_{21} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow F_{22} = 1 - \frac{A_1}{A_2}$



Substituint $F_{12} = 1$ en l'equació general resulta,

$$q_1 = \sum_{k=1}^{N_B} \frac{\sigma T_2^4 \Delta F_2^k - \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}{\frac{1}{A_1} \left(\frac{1}{\epsilon_1^k} - 1 \right) + \frac{1}{A_1 \underbrace{F_{12}}_1} + \frac{1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2^k} - 1 \right)} = \sum_{k=1}^{N_B} \frac{\sigma T_2^4 \Delta F_2^k - \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}{\frac{1}{A_1 \epsilon_1^k} + \frac{1}{A_2 \epsilon_2^k} - \frac{1}{A_2}} = -q_2$$

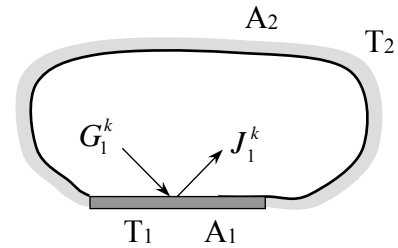
Aquesta és una equació clarament no simètrica. El subíndex 1 correspon sempre al cilindre interior. Per aquesta geometria l'expressió de les G en funció de les J és,

$$\left. \begin{aligned} G_1^k &= F_{11} J_1^k + F_{12} J_2^k = 0 J_1^k + 1 J_2^k = J_2^k \\ G_2^k &= F_{21} J_1^k + F_{22} J_2^k = \frac{A_1}{A_2} J_1^k + \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right) J_2^k \end{aligned} \right\}$$

5.7.5 Superfície A₁ convexa amb A₂ còncava sent A₂/A₁ finit (del mateix ordre)

En ser la superfície A₁ convexa resulta F₁₁ = 0 (no es veu a ella mateixa). La superfície A₂ envolta completament la A₁ per la qual cosa F₁₂ = 1. Per reciprocitat simple,

$$A_2 F_{21} = A_1 F_{12} \Rightarrow F_{21} = \frac{A_1}{A_2} \text{ ja que suposem } A_2 \approx A_1$$



Substituint F₁₂ = 1 a l'equació general obtenim,

$$q_1 = \sum_{k=1}^{N_B} \frac{\sigma T_2^4 \Delta F_2^k - \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}{\frac{1}{A_1} \left(\frac{1}{\epsilon_1^k} - 1 \right) + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2^k} - 1 \right)} = \sum_{k=1}^{N_B} \frac{\sigma T_2^4 \Delta F_2^k - \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}{\frac{1}{A_1 \epsilon_1^k} + \frac{1}{A_2 \epsilon_2^k} - \frac{1}{A_2}} = -q_2$$

Obtenim la mateixa equació anterior per dos cilindres infinits i concèntrics.

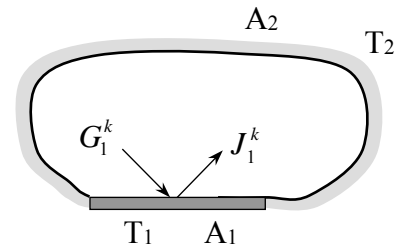
Igualment el subíndex 1 correspon sempre a la superfície convexa A₁, resultant aquesta també una equació no simètrica.

Evidentment l'expressió de les G en funció de les J també és la mateixa que a l'apartat anterior.

5.7.6 Superfície A₁ convexa molt més petita que la superfície A₂ còncava (A₁ << A₂)

En ser la superfície A₁ convexa resulta F₁₁ = 0 (no es veu a ella mateixa). La superfície A₂ envolta completament la A₁ per la qual cosa F₁₂ = 1. Per reciprocitat simple,

$$A_2 F_{21} = A_1 F_{12} \Rightarrow F_{21} = \frac{A_1}{A_2} \rightarrow 0 \text{ ja que suposem } A_2 \gg A_1$$



Substituint F₁₂ = 1 i $\frac{A_1}{A_2} \rightarrow 0$ a l'equació general obtenim,

$$q_1 = \sum_{k=1}^{N_B} \frac{\sigma T_2^4 \Delta F_2^k - \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}{\frac{1}{A_1} \left(\frac{1}{\epsilon_1^k} - 1 \right) + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2^k} - 1 \right)} = A_1 \sum_{k=1}^{N_B} \frac{\sigma T_2^4 \Delta F_2^k - \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}{\left(\frac{1}{\epsilon_1^k} - 1 \right) + \frac{1}{F_{12}} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2^k} - 1 \right)}$$

$$q_1 = A_1 \sum_{k=1}^{N_B} \frac{\sigma T_2^4 \Delta F_2^k - \sigma T_1^4 \Delta F_1^k}{\frac{1}{\epsilon_1^k} - 1 + 1} = A_1 \sum_{k=1}^{N_B} \epsilon_1^k (\sigma T_2^4 \Delta F_2^k - \sigma T_1^4 \Delta F_1^k)$$

sent $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ la constant d'Stefan Boltzmann

El subíndex 1 correspon sempre a la superfície convexa A₁, resultant aquesta també una equació no simètrica. Si la superfície 1 és pot modelitzar com una superfície gris, aleshores ΔF₁^k = ΔF₂^k = 1 Obtenim la coneguda equació de Stefan-Boltzmann q₁ = A₁ ε₁ (σT₂⁴ - σT₁⁴) introduïda a l'apartat 1.5.5

5.7.7 Balanç de potències: convecció i radiació conjuntes

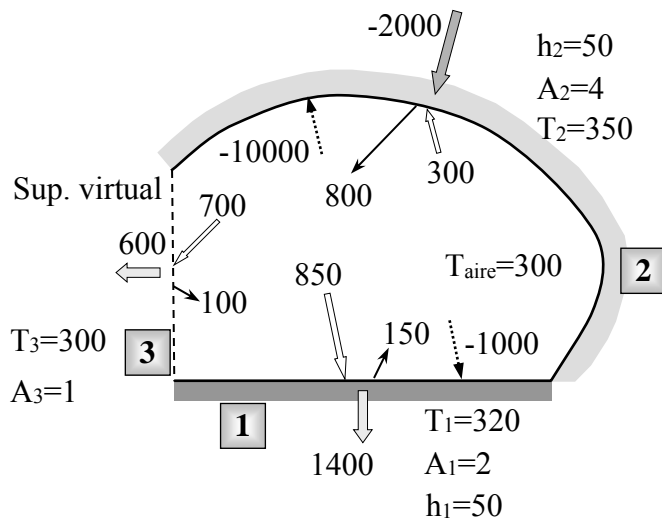
Per el recinte de la figura que es troba en regim estacionari hi circula un flux d'aire en convecció forçada.

En la figura s'indiquen totes les potències tant de radiació com de convecció que intervenen.

Quan la superfície guanya potència prenem el criteri de considerar positiva a aquesta potència.

Així veiem que la sup. 1 perd potència per convecció ja que $T_1 > T_{aire}$ i per això $q_{conv} = -1000 < 0$

A la taula adjunta veiem totes les potències que intervenen i els corresponents balanços.



sup. i	A_i (m ²)	G	J	$q_{rad_i} = A(G-J)$	$q_{conv_i} = hA_i(T_{aire} - T_i)$	$q_{rad_i} + q_{conv_i}$
1	2	850	150	1400	-1000	400
2	4	300	800	-2000	-10000	-12000
3	1	700	100	600	0	600
			Σ	0	-11000 W	-11000 W

Per exemple el balanç de potència de convecció a la superfície 1 és,

$$q_{conv_2} = \overbrace{h_2}^{50} \overbrace{A_2}^4 (T_{aire} - T_1) = -10000 \quad \text{Observeu també que el balanç total a les 3 superfícies és,}$$

$$q_{rad_1} + q_{conv_1} = 400 \text{ W} \quad , \quad q_{rad_2} + q_{conv_2} = -12000 \text{ W} \quad , \quad q_{rad_3} + q_{conv_3} = 600 \text{ W}$$

1) Veiem que la suma de potències de radiació sumen 0. Si penseu en el concepte de factor de visió, que reparteix la potència radiant entre totes les superfícies del recinte, entendreu que el resultat es obvi.

2) En canvi la suma de potències de convecció no sumen 0. Com ho interpretem ?

El coeficient de convecció val 50, o sigui tenim aire en convecció forçada que avança a lo llarg del conducte o recinte. L'aire entra al conducte a 300 K, però veiem que les parets del recinte escalfen l'aire i li cedeixen 11000 W. De forma que si ens donessin el cabal d'aire com una dada mes, podríem determinar l'escalfament del mateix en un tram de conducte.

$$q_{conv_total} = \sum_i q_{conv_i} = 11000 \text{ W} = \dot{m}_{aire} c_p (T_{aire_Final} - T_{aire_Inicial})$$

Per això el tram no pot ser massa gran, ja que en els balanços suposem una temperatura única de l'aire, que en realitat es la temperatura mitja del tram.

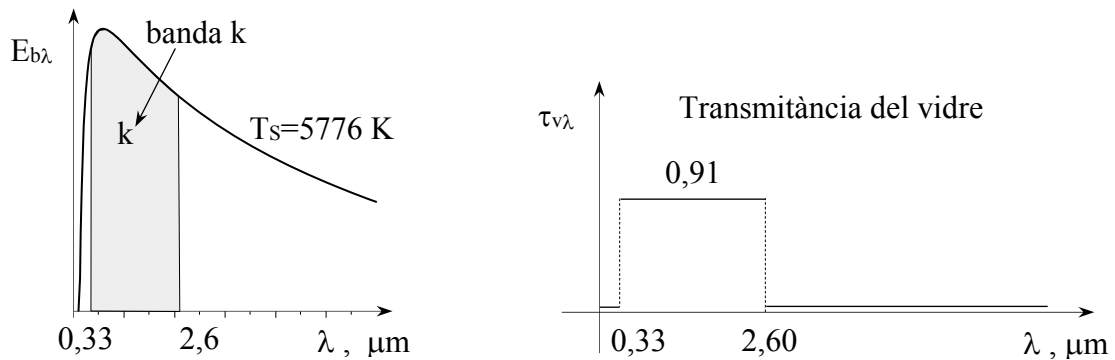
3) Veiem que la suma $\sum_{i=1}^3 (q_{rad_i} + q_{conv_i}) \neq 0$ evident !! Si la sup. 1 fos aïllada aleshores

$$q_{rad_1} + q_{conv_1} \text{ seria } 0.$$

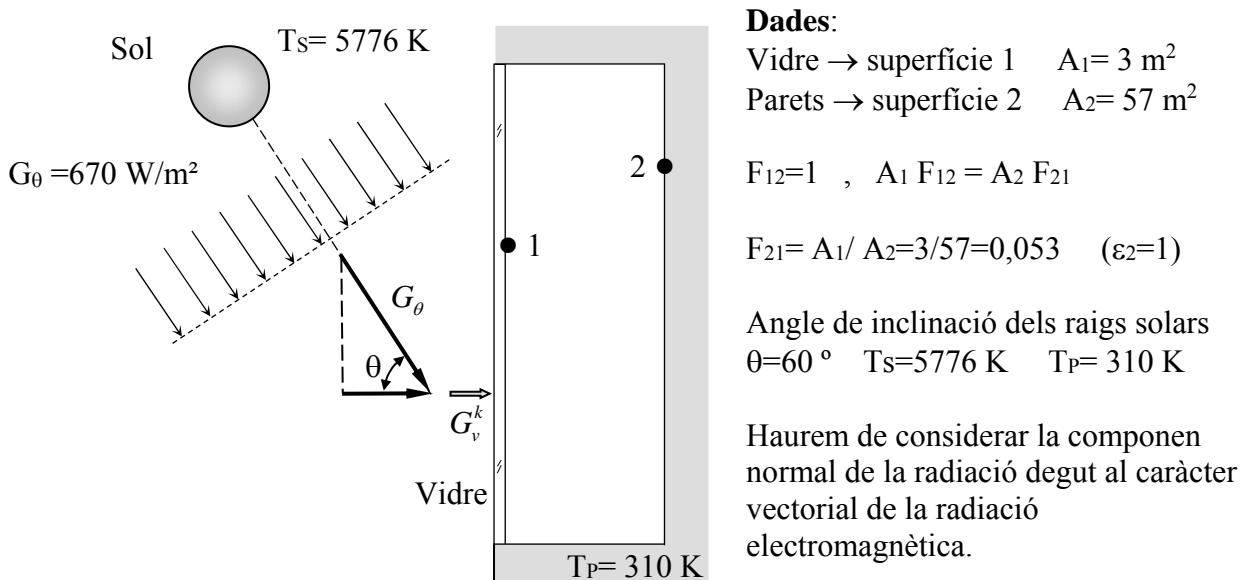
5.8 EFECTE HIVERNACLE

Sabem que a l'exterior de l'atmosfera de la terra la anomenada constant solar mesurada via satèl·lit (irradiació solar incident) val 1366 W/m^2 . Un 31 % (albedo terrestre) d'aquesta radiació directa es reflexa a la mateixa atmosfera i al terra (núvols, deserts, etc). Un 20 % es absorbidada per l'atmosfera. Per tant ens arriba a la superfície terrestre només un 49 %.

O sigui aproximadament $G_0 = 0,49 \times 1366 \approx 670 \text{ W/m}^2$



Proposem un exercici. Calcular d'acord a les condicions mostrades a la figura adjunta la potència de radiació solar que entra per la finestra de vidre al recinte i també la potència de radiació emergent de les parets que s'escapa per la finestra. Per simplificar l'anàlisi suposem que les parets es comporten com un cos negre ($\epsilon_2=1$).



Com que la radiació solar prové d'una font a una temperatura equivalent de 5776 K (alta temperatura) sabem d'acord a la llei de Wien que aquesta radiació solar estarà formada per ones de reduïda longitud d'ona (entre 0,15 i 4 μm) estan el màxim a 0,475 μm

Com que el vidre només deixa passar les ones corresponents a la banda k (entre 0,33 i 2,6 μm) calcularem la funció de radiació d'aquesta banda k per la radiació solar:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Banda } k \quad 0,33 \div 2,60 \text{ } \mu\text{m} \\ T_s = 5776 \text{ K} \end{array} \right\} \Delta F_{sol}^k = 0,916$$

$$\text{Irradiació solar corresponent a la banda } k \quad G_{\theta}^k = G_{\theta} \Delta F_{sol}^k = 670 \times 0,916 = 613,92 \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\text{Component normal de la irradiació solar,} \quad G_{\perp}^k = G_{\theta}^k \cos \theta = 613,92 \times 0,5 = 306,86 \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\text{Potència de radiació solar que travessa el vidre} = G_{\perp}^k \times \overbrace{A_1}^3 \times \overbrace{\tau_{vidre}^k}^{0,91} = 837,73 \text{ W}$$

Veiem que entren al recinte 837,73 W de radiació solar directa.

Ara calculem la radiació de les parets cap al vidre d'una forma similar.

Les parets a 310 K (baixa temperatura) radien ones de longitud d'ona mes llarga. Ara tenim el màxim a 9,347 μm . Com que el vidre es opac ($\tau=0$) fora de la banda k (0,33 \div 2,6 μm) calcularem la funció de radiació d'aquesta banda k per la radiació que prové de la paret ($T_p=310$ K):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Banda } k \quad 0,33 \div 2,60 \text{ } \mu\text{m} \\ T_p = 310 \text{ K} \end{array} \right\} \Delta F_{paret}^k = 0,00001839$$

$$\text{Flux de potència radiant emes per la paret a la banda } k = \overbrace{\varepsilon_p^k}^1 \sigma T_p^4 \Delta F_{paret}^k = 0,00963 \quad \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

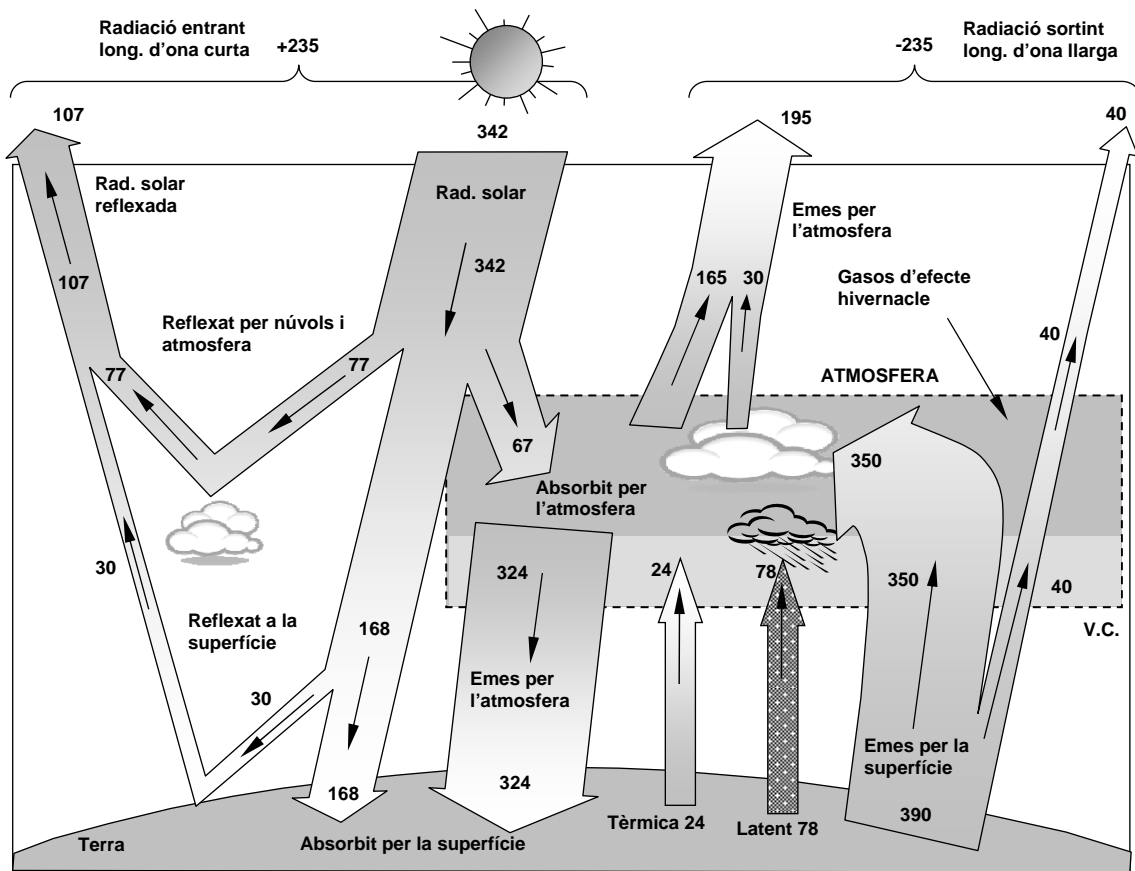
$$\text{Potència radiant emesa per tota la paret a la banda } k = \overbrace{(\varepsilon_p^k \sigma T_p^4 \Delta F_{paret}^k)}^{0,00963} \times A_2 = 0,549 \text{ W}$$

$$\text{Fracció que incideix directament sobre el vidre} = \overbrace{(\varepsilon_p^k \sigma T_p^4 \Delta F_{paret}^k A_2)}^{0,549} \times \overbrace{F_{21}^k}^{0,053} = 0,029 \text{ W}$$

$$\text{Fracció que travessa el vidre} = \overbrace{(\varepsilon_p^k \sigma T_p^4 \Delta F_{paret}^k A_2 F_{21}^k)}^{0,029} \times \overbrace{\tau_{vidre}^k}^{0,91} = 0,026 \text{ W}$$

Com veieu el vidre es transparent a la radiació solar i opac a la radiació de les parets. Per tant entren 837,73 W i només en surten 0,026 W. Per tant el recinte s'anirà escalfant. Aquest es el que anomenem efecte hivernacle, el fet de que el vidre actui de forma selectiva tot representant una trampa per la radiació solar. Deixa entrar la radiació solar però no sortir la radiació de l'interior del recinte. En realitat, en els recintes puja la temperatura de les parets, i com a conseqüència també la de l'aire interior i augmenten les pèrdues per convecció. Per tant cal considerar la convecció per determinar les condicions d'equilibri.

Balanços d'energia a l'atmosfera del planeta Terra (W/m^2)



Representació detallada dels fluxos de potència entre l'espai, l'atmosfera de la Terra, i el terra, publicada per la NASA, The Earth Observer. Nov – Dec 2006. Vol. 18, Issue 6. pag. 38, basat en les mesures del programa SORCE en el 2006.

En aquest esquema, potser una mica més clar que l'original, es veu clarament la protecció tèrmica que representa per nosaltres el disposar al nostre planeta d'aquesta atmosfera.

Podem observar que la radiació neta que absorbeix la terra son $342 - 107 = 235 \text{ W/m}^2$ de superfície esfèrica. Si la terra no tingués atmosfera la potència a evacuar aleshores serien 342 W/m^2 . Però la terra té una massa ignia interna a una temperatura entre 2200 i $4400 \text{ }^\circ\text{C}$ que afecta a la temperatura superficial d'equilibri.

A la nostra escala de temps, la Terra es troba aproximadament en equilibri tèrmic i per tant, perd $195 + 40 = 235 \text{ W/m}^2$. La presència de l'atmosfera, representa un aïllament tèrmic molt especial, que es tradueix, en que la temperatura superficial ha de ser major ($33 \text{ }^\circ\text{C}$ superior), i aquesta s'aproxima als $15,38 \text{ }^\circ\text{C}$ (un valor mig per tot el planeta determinat pel Institut Goddard d'Estudis Espacials, de la NASA).

Si augmentem els gasos (especialment CO_2), que absorbeixen molta de la radiació emesa per la terra (gasos d'efecte hivernacle) es pot pensar, que això comportarà un reescalfament del planeta, ja que el CO_2 no deixarà escapar molta de la potència radiant emesa per la terra.

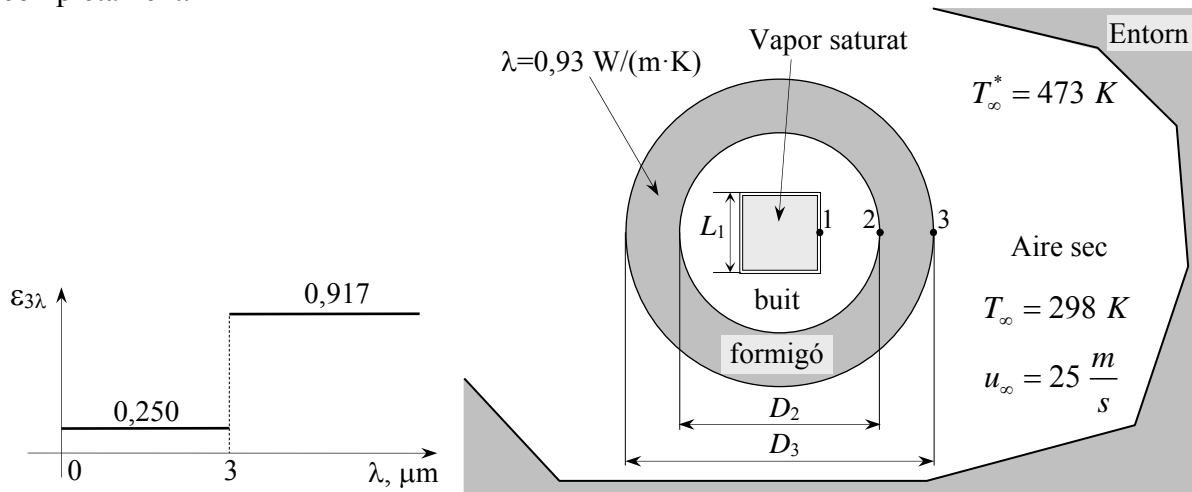
Però en canvi sabem, que el planeta continuarà en equilibri tèrmic, i per tant, seguirà perdent els 235 W/m^2 (de sup. esfèrica). El que es modificaria seria per tant la temperatura superficial del planeta, que pujaria per sobre dels actuals $15,38 \text{ }^\circ\text{C}$, per poder així precisament mantenir-se l'equilibri tèrmic. Si anéssim reduint progressivament la nostra atmosfera, la temperatura superficial s'aniria reduint fins arribar als $-20 \text{ }^\circ\text{C}$.

5.9 EXERCICIS RESOLTS

Exercici 1: condeute metàl·lic de secció quadrada

Per l'interior d'un condeute metàl·lic molt llarg de secció quadrada de 75 mm de costat circula vapor saturat a 322 K. Una paret cilíndrica de formigó de 63,5 mm de gruix l'envolta concèntricament sent la seva conductivitat tèrmica $\lambda = 0,93 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$.

Aquesta paret s'interposa entre el condeute metàl·lic i un corrent d'aire que circula longitudinalment a 25 m/s sent la seva temperatura $T_\infty = 298 \text{ K}$. Un entorn radiant a $T_\infty^* = 473 \text{ K}$ de superfície molt més gran que la paret cilíndrica considerada les envolta completament.



Dades:

$L_1 = 75 \text{ mm}$, $D_2 = 191 \text{ mm}$, $D_3 = 318 \text{ mm}$, $T_{\text{VAPOR}} = 322 \text{ K}$, $T_\infty = 298 \text{ K}$, $u_\infty = 25 \text{ m/s}$
 $\epsilon_1 = 0,1$, $\epsilon_2 = 1$, $\epsilon_{\text{ENTORN}} = 1$ En la figura se facilita la emissivitat espectral de la superfície 3.
 Per l'aire utilitzi la següent fórmula simplificada de Jürges (S.I.),

$$h_c = 7,120 u_{20}^{0,775} + 5,129 \exp(-0,6 u_{20}) \quad \text{essent} \quad u_{20} = \frac{293 u_\infty}{T_\infty}$$

Trobar:

- 1) Un sistema d'equacions amb coeficients numèrics amb T_2 , T_3 i la potència neta bescanviada pel vapor saturat com úniques incògnites.
- 2) La solució del sistema anterior. Determinar la potència intercanviada per radiació amb l'entorn i la potència de convecció.
- 3) El factor de visió F_{21} , les radiositats i irradiacions de les superfícies 1 i 2.
- 4) El vapor circulant es condensa o es reescalfa?. Explicar com influeixen les emissivitats del condeute metàl·lic i la superfície 3 en el resultat anterior.
- 5) Potència radiant que abandona la superfície 1 i potència radiant que incideix a la superfície 2. Raoni i justifiqui el perquè de la igualtat o diferència dels valors anteriors.

Solució:

Mecanismes de transferència tèrmica:

$\infty, \infty^* \leftrightarrow 3$ convecció + radiació (balanç espectral)

$3 \leftrightarrow 2$ conducció geometria cilíndrica

$2 \leftrightarrow 1$ radiació (recinte de 2 superfícies grises)

Determinem les superfícies de transferència tèrmica de longitud L

$$A_1 = 4 L_1 \cdot L = 4 \times 75 \times 10^{-3} L = 0,3 L \quad m^2$$

$$A_3 = \pi D_3 L = \pi \times 0,318 L = L \quad m^2$$

$$A_2 = \pi D_2 L = \pi \times 0,191 L = 0,6 L \quad m^2$$

Balanç radiant a la superfície 3 ($\infty, \infty^* \leftrightarrow 3$)

Radiació espectral ($\infty^* \leftrightarrow 3$) : suposem una $T_3 = 322$ K entre 298 K i 473 K

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_3^1 &= 0,000213 \\ \Delta F_3^2 &= 1 - \Delta F_3^1 = 0,999787 \approx 1 \end{aligned} \right\} \text{ Així doncs negligim la 1a.) banda}$$

$$q_3 = A_3 \sum_{k=1}^{N_b=2} \varepsilon_3^k \left(\sigma T_{\infty^*}^4 \Delta F_{\infty^*}^k - \sigma T_3^4 \Delta F_3^k \right) \quad \text{sent} \quad \varepsilon_3^1 = 0,25 \quad \text{i} \quad \varepsilon_3^2 = 0,917$$

$$\text{Funcions de radiació de l'entorn a } T_{\infty^*} = 473 \text{ K} \left\{ \begin{aligned} \Delta F_{\infty^*}^1 &= 0,008621 \approx 0 \\ \Delta F_{\infty^*}^2 &= 1 - \Delta F_{\infty^*}^1 = 0,991379 \approx 1 \end{aligned} \right\}$$

Així doncs negligim la primera banda

$$q_3 = A_3 \left[\varepsilon_3^k \left(\sigma T_{\infty^*}^4 \Delta F_{\infty^*}^1 - \sigma T_3^4 \Delta F_3^1 \right) \right] + A_3 \left[\varepsilon_3^k \left(\sigma T_{\infty^*}^4 \Delta F_{\infty^*}^2 - \sigma T_3^4 \Delta F_3^2 \right) \right]$$

$$\left. \begin{aligned} E_{\infty^*}^1 &= \Delta F_{\infty^*}^1 \varepsilon_{\infty^*}^1 \sigma T_{\infty^*}^4 \cong 0 \quad \varepsilon_{\infty^*}^1 \sigma T_{\infty^*}^4 = 0 \\ E_3^1 &= \Delta F_3^1 \varepsilon_3^1 \sigma T_3^4 \cong 0 \quad \varepsilon_3^1 \sigma T_3^4 = 0 \end{aligned} \right\} \text{ Negligim la primera banda}$$

$$\left. \begin{aligned} E_{\infty^*}^2 &= \Delta F_{\infty^*}^2 \varepsilon_{\infty^*}^2 \sigma T_{\infty^*}^4 = \sigma T_{\infty^*}^4 \\ E_3^2 &= \Delta F_3^2 \varepsilon_3^2 \sigma T_3^4 = \varepsilon_3^2 \sigma T_3^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow q_3 = A_3 \varepsilon_3^2 \left(\sigma T_{\infty^*}^4 \underbrace{\Delta F_{\infty^*}^2}_1 - \sigma T_3^4 \underbrace{\Delta F_3^2}_1 \right) = A_3 \varepsilon_3^2 \sigma (T_{\infty^*}^4 - T_3^4)$$

$$q_3 = q_{\text{RADIACIÓ}} = L \cdot 0,917 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (473^4 - T_3^4)$$

Convecció superfície 3 ($\infty \leftrightarrow 3$) : Equació simplificada de JÜRGES per l'aire (SI).

$$u_{20} = \frac{293 \cdot u_{\infty}}{T_{\infty}} = \frac{293 \cdot 25}{298} = 24,58 \frac{m}{s} \Rightarrow h_c = 7,12 \cdot v_{20}^{0,775} + 5,129 \exp(-0,6 \cdot v_{20}) = 85,15 \frac{W}{m^2 K}$$

$$q_{\text{CONVECCIÓ}} = h A_3 (T_{\infty} - T_3) = 85,15 \cdot L \cdot (298 - T_3) \quad W$$

Finalment el balanç per radiació i per convecció a la superfície 3 per metre lineal resulta,

$$\boxed{\frac{q}{L} = \frac{q}{L}_{\text{RADIACIÓ}} + \frac{q}{L}_{\text{CONVECCIÓ}} = 0,917 \sigma (473^4 - T_3^4) + 85,15 \cdot (298 - T_3)} \quad \text{(eq. 1)}$$

Conducció a la paret (geometria cilíndrica):

Criteri de signes: la potència guanyada pel conducte és positiva.

$$q = \frac{T_3 - T_2}{\frac{\ln\left(\frac{D_3}{D_2}\right)}{2\pi \lambda_{\text{FORMIGÓ}} L}} \Rightarrow \frac{q}{L} = \frac{T_3 - T_2}{\frac{\ln\left(\frac{D_3}{D_2}\right)}{2\pi \lambda_{\text{FORMIGÓ}}}} = \frac{T_3 - T_2}{\frac{\ln\left(\frac{318}{191}\right)}{2\pi \cdot 0,93}} \quad \text{(eq. 2)}$$

Radiació entre superfícies grises (2 ↔ 1)

Una superfície convexa envoltada d'una còncava. (\cong 2 cilindres concèntrics)

$$\text{Substituïm } \left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 = 0,1 \\ \varepsilon_2 = 1 \\ A_1 = 0,3L \end{array} \right\} \quad q_1 = A_1(G_1 - J_1) = \frac{A_1 \sigma (T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} = A_1 \varepsilon_1 \sigma (T_2^4 - T_1^4) = -q_2$$

Si $T_2 > T_1 \Rightarrow q_1 > 0$ i per tant $G_1 > J_1$, i el signe (q_1) = signe (q)

$$q_1 = 0,3L \varepsilon_1 \sigma (T_2^4 - T_1^4) \quad \text{i resulta obvi que,} \quad \frac{q}{L} = \frac{q_1}{L} = 0,3 \varepsilon_1 \sigma (T_2^4 - T_1^4)$$

$$\text{Substituïm els valors numèrics,} \quad \boxed{\frac{q}{L} = 0,3 \cdot 0,1 \sigma (T_2^4 - 322^4)} \quad (\text{eq. 3})$$

Si q/L representa la potència guanyada per metre de conducte, resulta:

$$\text{Sistema} \quad \frac{q}{L} = 0,917 \cdot \sigma (473^4 - T_3^4) + 85,15 \cdot (298 - T_3) \quad (\text{eq. 1})$$

$$\frac{q}{L} = \frac{T_3 - T_2}{\frac{\ln\left(\frac{318}{191}\right)}{2\pi \cdot 0,93}} \quad (\text{eq. 2}) \quad ; \quad \frac{q}{L} = 0,3 \cdot 0,1 \cdot \sigma (T_2^4 - 322^4) \quad (\text{eq. 3})$$

Solució numèrica: Igualem l'eq. (1) i l'eq. (2) i aïllem la temperatura $T_2 = f(T_3)$

$$\text{Obtenim, } T_2 = T_3 + \frac{\ln\left(\frac{318}{191}\right)}{2\pi \cdot 0,93} \cdot [0,917 \sigma (473^4 - T_3^4) + 85,15 \cdot (298 - T_3)]$$

Ara igualem l'eq. (2) i l'eq. (3) i substituïm l'expressió de T_2 en funció de T_3 , de forma que ens queda una única equació en funció de T_3

$$\frac{T_3 - T_2}{\frac{\ln\left(\frac{318}{191}\right)}{2\pi \cdot 0,93}} = 0,3 \cdot 0,1 \cdot \sigma (T_2^4 - 322^4) \quad ; \quad T_2 = f(T_3)$$

$$\text{Solució del sistema anterior } T_2 = T_3 = 322 \text{ K} = T_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{q}{L} \right|_{CONV} \approx -2043,6 \text{ W} \\ \left. \frac{q}{L} \right|_{RAD} \approx 2043,6 \text{ W} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{q}{L}_{TOTAL} \approx 0$$

$$3) \quad \left. \begin{array}{l} A_1 = 0,3L \quad m^2 \\ A_2 = 0,6L \quad m^2 \\ F_{12} = 1 \end{array} \right\} \quad F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad F_{22} = 1 - F_{21} = 0,5$$

$$A_2 F_{21} = A_1 F_{12} \quad (\text{reciprocitat simple}) \quad ; \quad F_{11} = 0 \quad (\text{sup. } A_1 \text{ convexa})$$

Irradiacions i radiositats de les superfícies 1 i 2 ($T_1 = T_2 = 322 \text{ K}$, $\varepsilon_1 = 0,1$ $\varepsilon_2 = 1$)

$$J_2 = \rho_2 G_2 + \varepsilon_2 \sigma T_2^4 = \sigma 322^4 = 609,55 \frac{W}{m^2}$$

$$q_2 = A_2(G_2 - J_2) \approx 0 \Rightarrow G_2 = J_2 = 609,55 \frac{W}{m^2}$$

$$G_1 = F_{11}J_1 + F_{12}J_2 = J_2 = 609,55 \frac{W}{m^2}$$

$$q_1 = A_1(G_1 - J_1) \approx 0 \Rightarrow J_1 = G_1 = 609,55 \frac{W}{m^2}$$

- 4) El vapor no s'escalfa ni condensa, ja que la potència tèrmica radiant a les parets del conducte metàl·lic és $q_1 = 0 \text{ W}$ com hem vist anteriorment.

No és fàcil analitzar aquesta dependència. Cal resoldre el sistema anterior, tot variant les emissivitats de les superfícies 1 i 3.

Si $\epsilon_3^2 < 0,917$ $|q_{\text{rad}}| < |q_{\text{conv}}| \Rightarrow$ la T_3 es redueix i el vapor condensa.

El valor de ϵ_1 no afecta els resultats del problema.

En realitat les 2 emissivitats tenen poca influència en la potència guanyada pel conducte, i el valor de ϵ_3^2 afecta a la temperatura final de la superfície 3.

- 5) $A_1J_1 =$ potència radiant que abandona la superfície 1 = 182,86 W \approx 183

$A_1G_1 = A_1J_1 =$ potència radiant incident a la superfície 1 = 182,86 W \approx 183

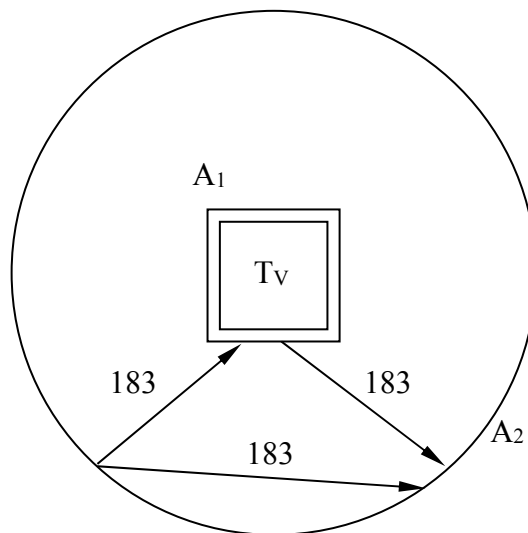
$A_2G_2 =$ potència radiant incident a la superfície 2 = 365,73 W/m \approx 366

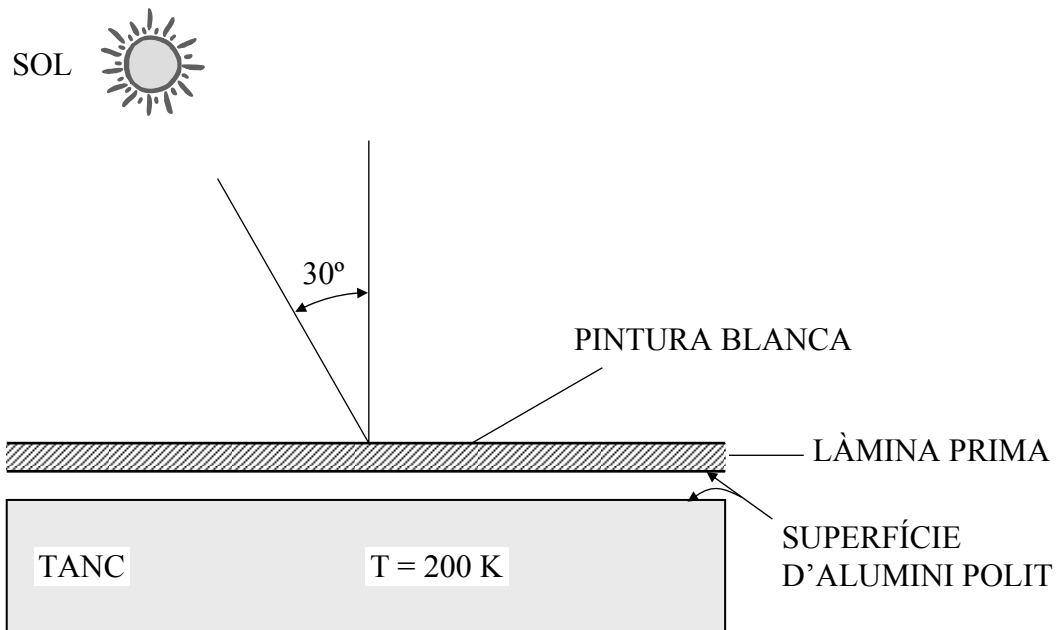
$A_2G_2 \neq A_1J_1$ són diferents a causa de que la superfície 2 radia sobre si mateixa

$A_2G_2 = A_2(F_{22}J_2 + F_{21}J_1) = A_2F_{22}J_2 + A_2F_{21}J_1 = A_2F_{22}J_2 + A_1F_{12}J_1$

$A_2F_{22}J_2 =$ fracció de la potència radiant que abandona A_2 i incideix sobre A_2 .

Així doncs $A_2G_2 - A_1J_1 = A_2F_{22}J_2 = 183 \text{ W}$ c.v.d.



Exercici 2: examen d'avaluació continua 27/05/94 (para-sol d'un tanc)

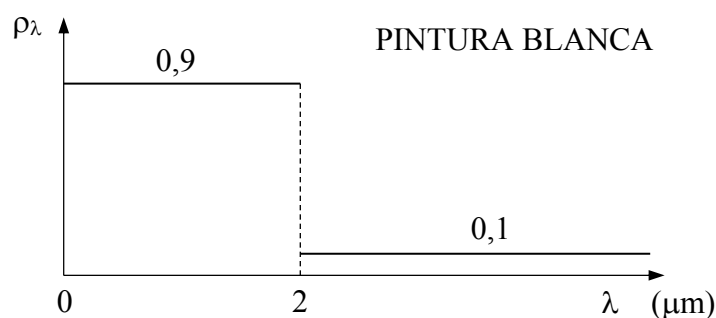
Un tanc de grans dimensions d'una nau interestel·lar es protegeix de la radiació solar mitjançant una làmina prima d'alumini polit (para-sol). Pel costat del sol pintem la xapa de pintura blanca amb la reflectància espectral de la figura.

- La radiació solar és de 1400 W/m^2 i incideix amb 30° respecte a la normal.
- La nau es troba fora de l'atmosfera terrestre (buit absolut)
- La temperatura efectiva del sol és de 5700 K . Temperatura del firmament 0 K
- El tanc es manté a 200 K i l'emissivitat de l'alumini polit és de $\varepsilon=0,095$

Considerant la geometria com la de plans paral·lels de longitud infinita, trobar:

La temperatura de la làmina prima d'alumini

- 1) La temperatura de la làmina prima d'alumini.
- 2) El flux de potència radiant neta i la radiositat a la superfície superior del tanc.
- 3) Irradiació del tanc. Augmentarà aquesta a l'apropa la làmina al tanc tot mantenint les

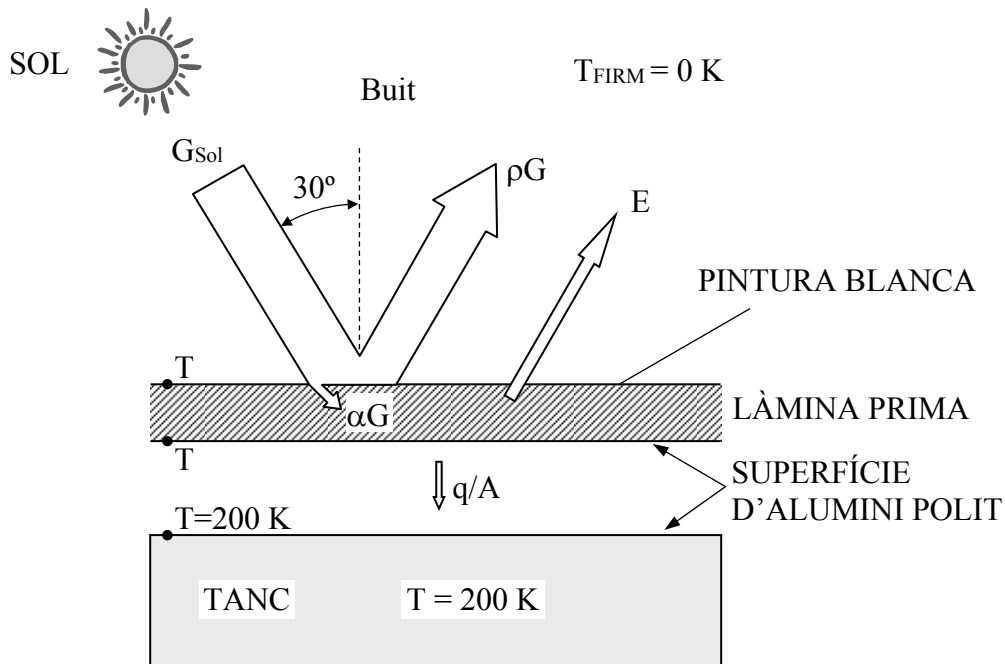


hipòtesis considerades ? Perquè ?

Solució:

Sent la làmina molt prima, l'equilibri tèrmic s'assoleix immediatament i podem suposar que les dues cares es troben pràcticament a la mateixa temperatura de $T \text{ [K]}$ que haurem de trobar.

Una xapa d'alumini com tots els metalls és opaca a la radiació, o sigui la transmitància $\tau = 0$.



La radiació solar és una radiació direccional i no difusa i per tant cal tenir en compte el seu caràcter vectorial, de forma que cal projectar-la respecte de la normal del pla incident. Tots intentem que la radiació solar incideixi tangencialment sobre nosaltres si volem disminuir els seus efectes tèrmics.

A la figura les fletxes ens mostren totes les potències radiants que entren en joc.

La potència radiant solar que absorbeix $(\sum \alpha^k G_\theta^k)$ la làmina prima d'alumini per la cara recoberta amb pintura blanca, la dissipa radiant una part cap al firmament (poder emissiu E_{PB}) i la resta cap al tanc $\frac{q}{A}|_{plans \parallel}$.

En primer lloc calculem la potència absorbida per la làmina d'alumini tot considerant l'emissivitat espectral de la pintura blanca.

$$\sum \alpha^k G_\theta^k = \alpha^1 G_\theta^1 + \alpha^2 G_\theta^2 = (1 - \rho^1)(G_{sol} \cos \theta \Delta F_{T_{sol}}^{0-2}) + (1 - \rho^2)(G_{sol} \cos \theta \Delta F_{T_{sol}}^{2-\infty})$$

$$\rho^1 = 0,9 \quad , \quad \rho^2 = 0,1 \quad , \quad G_{sol} = 1400 \quad , \quad \theta = 30^\circ \quad \Delta F_{T_{sol}}^{0-2} = 0,93758 \quad , \quad \Delta F_{T_{sol}}^{2-\infty} = 0,06242$$

$$\sum \alpha^k G_\theta^k = \alpha^1 G_\theta^1 + \alpha^2 G_\theta^2 = 0,1 \times 1136,75 + 0,9 \times 75,68 = 181,787 \quad \frac{W}{m^2}$$

Poder emissiu de la làmina d'alumini pintada de blanc cap al firmament, (PB=pintura blanca)

$$E_{PB} = E_{PB}^1 + E_{PB}^2 = \varepsilon_{PB}^1 \sigma T^4 \Delta F_T^{0-2} + \varepsilon_{PB}^2 \sigma T^4 \Delta F_T^{2-\infty} = \sigma T^4 (\varepsilon_{PB}^1 \Delta F_T^{0-2} + \varepsilon_{PB}^2 \Delta F_T^{2-\infty})$$

En el balanç net de potència entre la làmina d'alumini a T [K] i la superfície del tanc a 200 K fem servir la fórmula de dos plans paral·lels de longitud infinita per superfícies grises d'emissivitats iguals a $\varepsilon=0,095$ corresponent a l'alumini polit.

$$\frac{q}{A} = \sigma \frac{T^4 - T_{tanc}^4}{\frac{1}{\epsilon_{Al}} + \frac{1}{\epsilon_{Al}} - 1}$$

Sabem que si $T > T_{tanc}=200$ K aleshores q/A serà positiu i representarà

el flux de potència radiant que la làmina d'alumini cedeix al tanc.

El balanç de potències resulta,

$$\underbrace{\sum \alpha^k G_\theta^k}_{181,787} = \sigma T^4 (\epsilon_{PB}^1 \Delta F_T^{0-2} + \epsilon_{PB}^2 \Delta F_T^{2-\infty}) + \sigma \frac{T^4 - T_{tanc}^4}{\frac{1}{\epsilon_{Al}} + \frac{1}{\epsilon_{Al}} - 1} \quad (\text{incògnita } T)$$

Si no coneixem T com podem calcular les funcions de radiació que depenen de T i que necessitem per resoldre l'equació ?

A priori no coneixem T, però podem suposar fins i tot un valor alt com ara 700 K i veiem que les funcions de radiació a les dues bandes resulten, $\Delta F_{700}^{0-2} = 0,0078$, $\Delta F_{700}^{2-\infty} = 0,9922$ de forma que podem suposar $\Delta F_T^{0-2} = 0$, $\Delta F_T^{2-\infty} = 1$ Aleshores l'equació es simplifica i queda,

$$1) \quad \underbrace{\sum \alpha^k G_\theta^k}_{181,787} = \epsilon_{PB}^2 \sigma T^4 + \sigma \frac{T^4 - T_{tanc}^4}{\frac{2}{\epsilon_{Al}} - 1} \Rightarrow T = 242,52 \text{ K}$$

$$2) \quad \left. \frac{q}{A} \right|_{tanc} = \sigma \frac{T^4 - T_{tanc}^4}{\frac{2}{\epsilon_{Al}} - 1} = 5,257 \frac{W}{m^2} \quad (\text{flux de potència que rep el tanc})$$

La irradiació sobre la superfície de la làmina d'alumini pintada de blanc, es

$G_{sol} \cos \theta = 1212,4 \text{ W/m}^2$ D'aquesta radiació, hi ha una part absorbida $\sum \alpha^k G_\theta^k = 181,79$ i com que $\tau=0$ (sup. opaca) la resta és reflectida, $G_{sol} \cos \theta - \sum \alpha^k G_\theta^k = 1030,64$.

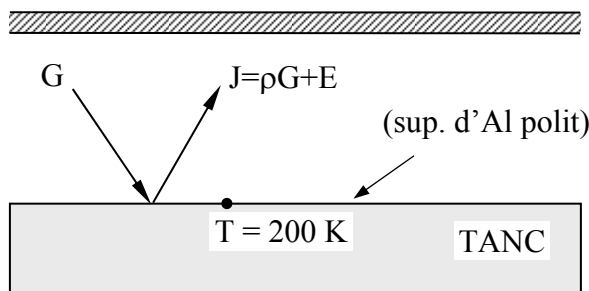
La potència emesa és $E_{PB} = \underbrace{\epsilon_{PB}^1 \sigma T^4 \Delta F_T^{0-2}}_{E_{PB}^1} + \underbrace{\epsilon_{PB}^2 \sigma T^4 \Delta F_T^{2-\infty}}_{E_{PB}^2} = 176,53 \text{ W/m}^2$

La suma de la potència reflectida i l'emesa és justament el que anomenem radiositat,

$$J = \underbrace{G_{sol} \cos \theta}_{\rho G = 1030,64} - \underbrace{\sum \alpha^k G_\theta^k}_{181,79} + \underbrace{\epsilon_{PB}^1 \sigma T^4 \Delta F_T^{0-2} + \epsilon_{PB}^2 \sigma T^4 \Delta F_T^{2-\infty}}_{E_{PB} = 176,53} = 1207,17 \frac{W}{m^2}$$

Veiem que de la irradiació incident $G_{sol} \cos \theta = J + \left. \frac{q}{A} \right|_{tanc}$ (evident !)

3) Irradiació del tanc: (superfícies grises) $E = \epsilon_{Al} \sigma T_{tanc}^4$ $\alpha = \epsilon$ (Kirchoff)



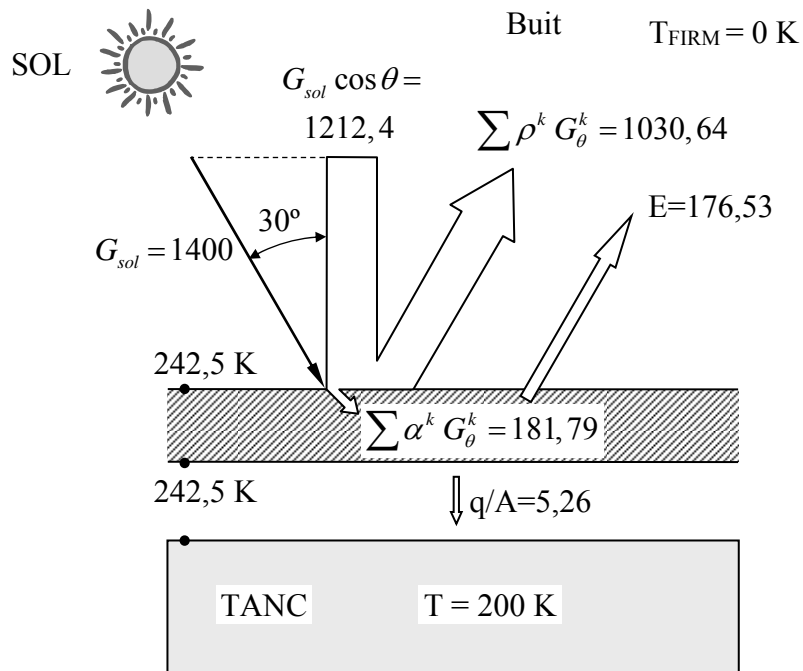
$$\frac{q}{A} = G - J = G - (\rho G + E)$$

$$\frac{q}{A} = G - (\rho G + E) = G \underbrace{(1 - \rho)}_{\alpha} + E$$

$$\frac{q}{A} = \alpha G - E \Rightarrow G = \frac{\left. \frac{q}{A} \right| + E}{\alpha}$$

Resulta, $G=146,06 \text{ W/m}^2$

Visualitzem a continuació els resultats de forma gràfica.



Exercici 3: examen final 20/01/2004

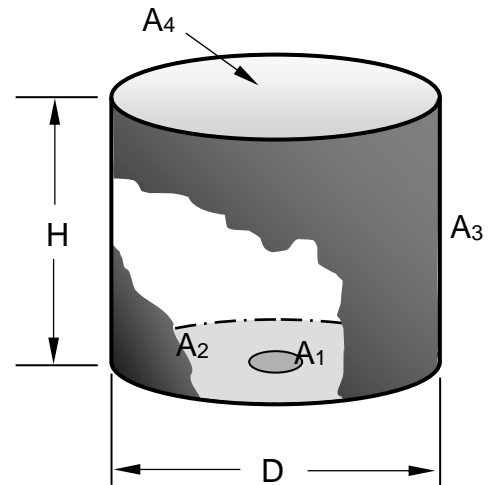
Consideri les quatre superfícies del recinte de la figura. La superfície 1 és molt més petita que la resta ($A_1 \ll A_4$)

1) Si $H=1$ m i $D=3$ m calculi el factor de visió difús F_{14} a partir de la definició, sabent que les superfícies 1 i 4 són negres. $\int \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sin^2 \theta}{2}$; $F_{14} = \dots\dots\dots$

Per a la resta de l'exercici consideri unes noves dimensions (H i D), sent $A_1=0,05$ m², $A_3=18,84956$ m², $A_4=7,06858$ m²

2) Completi la taula adjunta de factors de visió.
(Observi que $F_{3-4} = F_{3-(1+2)} = F_{3-1} + F_{3-2}$)

F_{ij}	1	2	3	4
1	0			0,36
2	0			
3				
4			0,71358	0



A continuació realitzi un balanç espectral de potència radiant a les quatre superfícies del recinte de la figura. Negligir una banda quan totes les funcions de radiació corresponents siguin inferiors a 10^{-2} . Les temperatures i emissivitats espectrals de les 4 superfícies considerant dues bandes (banda 1 de 0 a 70 μm) són les que s'adjunten a la taula següent.

Determini:

3) La funció de radiació de la superfície 2 a la banda 2.

$\Delta F_2^{70\mu m-\infty} = \dots\dots\dots$

Sup. i	T_i (K)	ϵ_i^1	ϵ_i^2
1	1200	1	1
2	500	0,1	0,8
3	700	0,9	0,2
4	500	1	1

4) El poder emissiu de la superfície 1 a la banda 1

$E_1^{0-70\mu m} = \dots\dots\dots$

5) Omplir la taula adjunta amb les irradiacions G , radiositats J i potències radiants de cada superfície. (valors totals)

Sup. i	G_i	J_i	q_i (W)
1			
2			
3			
4			

6) Potència radiant que la superfície A_3 rep directament de la superfície A_1 = $\dots\dots\dots$ W

7) Potència tèrmica total aportada a les superfícies del recinte escalfades externament = $\dots\dots\dots$ W

8) Potència radiant absorbida per la superfície A_3 = $\dots\dots\dots$ W

Solució:

1) Calculem F_{14} i considerem A_1 com una superfície diferencial dA_1 ,

$H=1$ m $D=3$ m $T_1=1200$ K $A_1 \ll A_4$ $\sigma=5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m²·K⁴)
 Assignem un valor arbitrari a dA_1 ja que l'hauréem de simplificar. Prenem $dA_1=0,001$ m² = A_1

$$\theta_1 = \text{atan}\left(\frac{D}{2H}\right) \quad I_b(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad \text{Pensant amb potències,}$$

$$F_{14} = \frac{q_{dA_1-con}}{q_{dA_1-semispai}} = \frac{\int_0^{\Omega=con} I_b(T_1) dA_1 \cos \theta d\Omega}{\int_0^{\Omega=2\pi} I_b(T_1) dA_1 \cos \theta d\Omega} = \frac{I_b(T_1) dA_1 \int_0^{\theta_1} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} 1 d\phi}{\pi I_b(T_1) dA_1} = 0,69231$$

2) Trobar la taula de factors de visió (Dades: $F_{14}=0,36$ $F_{43}=0,71358$)

No negligim els factors de visió amb la superfície 1

$$A = \begin{bmatrix} 0,05 \\ 7,01858 \\ 18,84956 \\ 7,06858 \end{bmatrix}, \quad \frac{A_1}{A_4} = 7,07356 \times 10^{-3}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 70 \\ \infty \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1200 \\ 500 \\ 700 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$F_{41} = \frac{A_1 F_{14}}{A_4}, \quad F_{13} = 1 - F_{14} \quad \Rightarrow \quad F_{31} = \frac{A_1 F_{13}}{A_3}$$

$$F_{42} = 1 - (F_{41} + F_{43}) \quad \Rightarrow \quad F_{24} = \frac{A_4 F_{42}}{A_2}, \quad F_{34} = \frac{A_4 F_{43}}{A_3}$$

$$F_{32} = F_{34} - F_{31} \quad \Rightarrow \quad F_{33} = 1 - (F_{31} + F_{32} + F_{34}), \quad F_{23} = \frac{A_3 F_{32}}{A_2}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,64 & 0,36 \\ 0 & 0 & 0,7141 & 0,2859 \\ 1,6977 \times 10^{-3} & 0,2659 & 0,4648 & 0,2676 \\ 2,5465 \times 10^{-3} & 0,2839 & 0,7136 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Funció de radiació (λ en micres i T en Kelvins)

$$F_{rad}(\lambda, T) = \left\| \begin{array}{l} z \leftarrow \frac{14387,9}{\lambda T} \\ \frac{15}{\pi^4} \sum_{n=1}^{15} \left[\frac{e^{-nz}}{n} \left(z^3 + \frac{3z^2}{n} + \frac{6z}{n^2} + \frac{6}{n^3} \right) \right] \end{array} \right\|$$

Matriu de les funcions de radiació:

$$\Delta F = \begin{bmatrix} F_{rad}(\lambda_1, T_1) & 1 - F_{rad}(\lambda_1, T_1) \\ F_{rad}(\lambda_1, T_2) & 1 - F_{rad}(\lambda_1, T_2) \\ F_{rad}(\lambda_1, T_3) & 1 - F_{rad}(\lambda_1, T_3) \\ F_{rad}(\lambda_1, T_4) & 1 - F_{rad}(\lambda_1, T_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,99972 & 2,00816 \times 10^{-4} \\ 0,99695 & 2,96753 \times 10^{-3} \\ 0,99882 & 1,09327 \times 10^{-3} \\ 0,99695 & 2,96753 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Propietats espectrals

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,1 & 0,8 \\ 0,9 & 0,2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho_i^k = 1 - \varepsilon_i^k \quad \Rightarrow \quad \rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Poders emissius espectrals, } E_i^k = \varepsilon_i^k \sigma T_i^4 \Delta F_i^k \quad \Rightarrow \quad E = \begin{bmatrix} 117539,81 & 23,61 \\ 353,29 & 8,41 \\ 12237,9 & 2,98 \\ 3532,94 & 10,52 \end{bmatrix}$$

La superfície 1 i 4 són negres i per tant les seves J_i^k espectrals són iguals als poders emissius,

$$J_1^k = \underbrace{\rho_1^k}_0 G_1^k + E_1^k = E_1^k \quad \text{i} \quad J_4^k = \underbrace{\rho_4^k}_0 G_4^k + E_4^k = E_4^k$$

Sistemes d'equacions (un per cada banda): (subratllem les incògnites)

$$\left. \begin{array}{l} \underline{J_2^1} = \rho_2^1 (F_{21} \underline{J_1^1} + F_{22} \underline{J_2^1} + F_{23} \underline{J_3^1} + F_{24} \underline{J_4^1}) + E_2^1 \\ \underline{J_3^1} = \rho_3^1 (F_{31} \underline{J_1^1} + F_{32} \underline{J_2^1} + F_{33} \underline{J_3^1} + F_{34} \underline{J_4^1}) + E_3^1 \end{array} \right\} \quad J_2^1 = 9763,12 \quad , \quad J_3^1 = 13226,79 \quad (\text{1a. banda})$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{J_2^2} = \rho_2^2 (F_{21} \underline{J_1^2} + F_{22} \underline{J_2^2} + F_{23} \underline{J_3^2} + F_{24} \underline{J_4^2}) + E_2^2 \\ \underline{J_3^2} = \rho_3^2 (F_{31} \underline{J_1^2} + F_{32} \underline{J_2^2} + F_{33} \underline{J_3^2} + F_{34} \underline{J_4^2}) + E_3^2 \end{array} \right\} \quad J_2^2 = 10,73 \quad , \quad J_3^2 = 12,01 \quad (\text{2a. banda})$$

$$\text{Ara coneixem totes les } J_i^k \text{ que posem a la matriu } J = \begin{bmatrix} 117539,81 & 23,61 \\ 9763,12 & 10,73 \\ 13226,79 & 12,01 \\ \underbrace{3532,94}_{\text{Banda 1}} & \underbrace{10,52}_{\text{Banda 2}} \end{bmatrix}$$

Fent el producte matricial, $G = F \times J$ i trobem totes les irradiacions espectrals.

$$G = F \cdot J = \begin{bmatrix} 9737 & 11,47 \\ 10455,36 & 11,58 \\ 9888,9 & 11,29 \\ \underbrace{12509,17}_{\text{Banda 1}} & \underbrace{11,67}_{\text{Banda 2}} \end{bmatrix} \quad \text{Ara sumem les files de les matrius J i G per trobar les}$$

radiositats i irradiacions totals de cada superfície.

$$G_i^{tot} = \sum_{k=1}^3 G_i^k, \quad J_i^{tot} = \sum_{k=1}^3 J_i^k, \quad q_i = (G_i^{tot} - J_i^{tot}) \cdot A_i$$

$$G^{tot} = \begin{bmatrix} 9748,47 \\ 10466,94 \\ 9900,19 \\ 12520,85 \end{bmatrix} \left[\frac{W}{m_2} \right], \quad J^{tot} = \begin{bmatrix} 117563,42 \\ 9773,84 \\ 13238,79 \\ 3543,46 \end{bmatrix} \left[\frac{W}{m_2} \right], \quad q = \begin{bmatrix} -5390,75 \\ 4864,53 \\ -62931,18 \\ 63457,4 \end{bmatrix} [W]$$

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 4,37 \times 10^{-11} \text{ W quadra perfectament !}$$

3) La funció de radiació de la superfície 2 a la banda 2, $\Delta F_2^2 = \Delta F_2^{70\mu m - \infty} = 2,96753 \times 10^{-3}$

4) El poder emissiu de la superfície 1 a la banda 1, $E_1^1 = E_1^{0-70\mu m} = 117539,8 \text{ W/m}^2$

5) Valors espectrals

$$G = \begin{bmatrix} 9737 & 11,47 \\ 10455,36 & 11,58 \\ 9888,9 & 11,29 \\ 12509,17 & 11,67 \end{bmatrix}, \quad G^{tot} = \begin{bmatrix} 9748,47 \\ 10466,94 \\ 9900,19 \\ 12520,85 \end{bmatrix} \left[\frac{W}{m_2} \right]$$

$$J = \begin{bmatrix} 117539,81 & 23,61 \\ 9763,12 & 10,73 \\ 13226,79 & 12,01 \\ 3532,94 & 10,52 \end{bmatrix}, \quad J^{tot} = \begin{bmatrix} 117563,42 \\ 9773,84 \\ 13238,79 \\ 3543,46 \end{bmatrix} \left[\frac{W}{m_2} \right], \quad q = \begin{bmatrix} -5390,75 \\ 4864,53 \\ -62931,18 \\ 63457,4 \end{bmatrix} [W]$$

6) Potència radiant que la superfície A₃ rep directament de la superfície A₁ $A_1 J_1^{tot} F_{13} = 3762$

7) Potència tèrmica total aportada a les superfícies del recinte escalfades externament,
 $q_1 + q_3 = -68321,93 \quad q_2 + q_4 = 68321,93 \quad W$

8) Potència radiant absorbida per la superfície A₃, $G_3^1 A_3 \varepsilon_3^1 + G_3^2 A_3 \varepsilon_3^2 = 167803,9 \text{ W}$

Ja que sabem que és compleix espectralment la llei de Kirchhoff, $\alpha_i^k = \varepsilon_i^k$

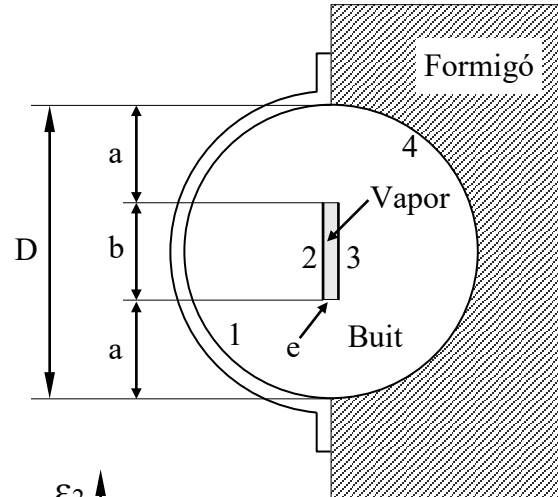
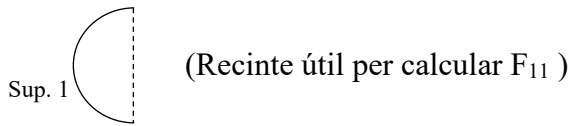
Exercici 4: conducte mixt de secció circular

Per un conducte metàl·lic d'alumini de secció rectangular circulara vapor saturat a 150 °C entre dos punts molt distants d'una instal·lació. Considerant negligible la dimensió menor del rectangle (e), realitzar un balanç espectral de potència radiant entre les 4 superfícies indicades a la figura sense negligir cap banda.

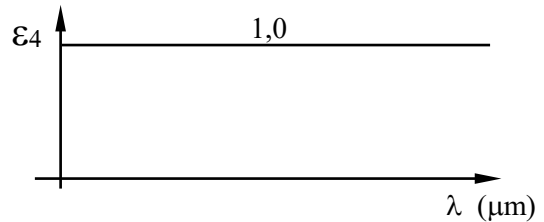
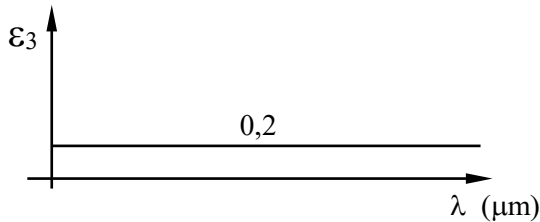
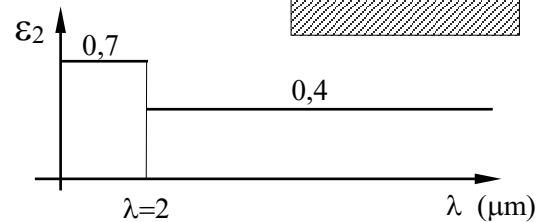
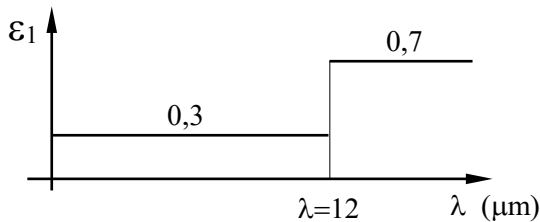
Dades:

D=200 mm , b=D/2, e≈ 0 , T_v=150 °C (vapor)

T₁=50 °C , T₂=T₃=T_v , T₄=200 °C (formigó)



Emitàncies espectrals.



Notació: superíndex → banda, subíndex → superfície

Tenint ben presents les hipòtesis considerades, contesteu les següents qüestions emprant el S.I. d'unitats i el conveni de signes pel flux net de potència radiant definit per q/A = G - J :

Determinar:

- 1) La taula dels factors de visió i de les funcions de radiació.
- 2) La taula dels poders emissius, radiositats i irradiacions espectrals de cada superfície.
- 3) El flux net de potència radiant de les 4 superfícies.
- 4) La potència radiant neta que guanya el vapor per metre de conducte.

Solució:

D=0,200 m , eK=273,15 , L=1 m , Longituds d'ona, λ₁=2 μm , λ₂=12 μm , T_{vapor}=150 °C

T₁=50 °C , T₂=T₃=T_{vapor} , T₄=200 °C , σ=5,67 · 10⁻⁴ W(m²·K⁴)

$$A_1 = \frac{\pi DL}{2} \quad A_2 = \frac{D}{2}L \quad A_3 = A_2 \quad A_4 = A_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,31416 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0,31416 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 323,15 \\ 423,15 \\ 423,15 \\ 473,15 \end{bmatrix} \text{ vector de superfícies i temperatures}$$

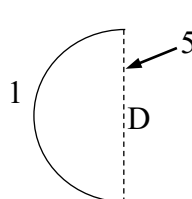
Funció de radiació amb λ en micres i T en kelvins

$$F_{rad}(\lambda, T) = \left\| \begin{array}{l} z \leftarrow \frac{14387,9}{\lambda T} \\ \frac{15}{\pi^4} \sum_{n=1}^{15} \left[\frac{e^{-nz}}{n} \left(z^3 + \frac{3z^2}{n} + \frac{6z}{n^2} + \frac{6}{n^3} \right) \right] \end{array} \right\|$$

$\Delta F_{rad}(\lambda_1, \lambda_2, T) = F_{rad}(\lambda_2, T) - F_{rad}(\lambda_1, T)$ per trobar la funció de radiació d'una banda

$$\Delta F = \begin{bmatrix} F_{rad}(\lambda_1, T_1) & \Delta F_{rad}(\lambda_1, \lambda_2, T_1) & 1 - F_{rad}(\lambda_2, T_1) \\ F_{rad}(\lambda_1, T_2) & \Delta F_{rad}(\lambda_1, \lambda_2, T_2) & 1 - F_{rad}(\lambda_2, T_2) \\ F_{rad}(\lambda_1, T_3) & \Delta F_{rad}(\lambda_1, \lambda_2, T_3) & 1 - F_{rad}(\lambda_2, T_3) \\ F_{rad}(\lambda_1, T_4) & \Delta F_{rad}(\lambda_1, \lambda_2, T_4) & 1 - F_{rad}(\lambda_2, T_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,18463 \cdot 10^{-7} & 0,45823 & 0,54177 \\ 3,75069 \cdot 10^{-5} & 0,64333 & 0,35663 \\ 3,75069 \cdot 10^{-5} & 0,64333 & 0,35663 \\ 1,65329 \cdot 10^{-4} & 0,70846 & 0,29137 \end{bmatrix}$$

Considerem el recinte útil de l'enunciat només per trobar el factor de visió F_{11} (suposem L molt gran) És evident que $F_{51}=1$ i aplicant la reciprocitat simple trobem F_{15}



$$F_{15} = \frac{A_5 F_{51}}{A_1} = \frac{A_5}{A_1} = \frac{DL}{\frac{\pi DL}{2}} = \frac{2}{\pi} \quad F_{11} + F_{15} = 1 \Rightarrow F_{11} = 1 - F_{15} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

En el recinte del problema, $F_{21}=F_{34}=1$ per tant $F_{12} = \frac{A_2 F_{21}}{A_1} = \frac{A_2}{A_1} = F_{43}$

$F_{13}=F_{42}=0$ ja que la superfície 1 no veu a la 3 i la 4 no veu a la 2.

Troblem F_{14} , $F_{11} + F_{12} + \underbrace{F_{13}}_0 + \underbrace{F_{14}}_? = 1 \Rightarrow F_{14} = 1 - (F_{11} + F_{12})$

Escrivim ara tota la matriu de factors de visió,

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\pi-2}{\pi} & \frac{A_2}{A_1} & 0 & 1 - \frac{\pi-2}{\pi} - \frac{A_2}{A_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 - \frac{\pi-2}{\pi} - \frac{A_3}{A_4} & 0 & \frac{A_3}{A_4} & \frac{\pi-2}{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,36338 & 0,31831 & 0 & 0,31831 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,31831 & 0 & 0,31831 & 0,36338 \end{bmatrix}$$

Emitàncies i reflectàncies espectrals de totes les superfícies:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,7 \\ 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,8 & 0,8 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poders emissius espectrals, $E_i^k = \varepsilon_i^k \sigma T_i^4 \Delta F_i^k$ $E = \begin{bmatrix} 7,76207 \cdot 10^{-5} & 84,99663 & 234,4848 \\ 0,04773 & 467,79441 & 259,32233 \\ 0,01364 & 233,8972 & 129,66116 \\ 0,46981 & 2,01324 \cdot 10^3 & 827,98663 \end{bmatrix}$

La superfície 4 és negra i per tant les seves J_i^k espectrals són iguals als poders emissius,

$$J_4^k = \underbrace{\rho_4^k}_{0} G_4^k + E_4^k = E_4^k \quad \text{Ja que la superfície 3 només veu la 4, } G_3^k = \sum_{j=1}^4 F_{3j} J_j^k = F_{34} J_4^k \quad \text{i}$$

$$J_3^k = \rho_3^k G_3^k + E_3^k = \rho_3^k F_{34} J_4^k + E_3^k \quad \text{per tant coneixem les } J_3^k$$

$$J = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ \underbrace{0,38949}_{\text{Banda 1}} & \underbrace{1,84449 \cdot 10^3}_{\text{Banda 2}} & \underbrace{792,05047}_{\text{Banda 3}} \\ \underbrace{0,46981}_{\text{Banda 1}} & \underbrace{2,01324 \cdot 10^3}_{\text{Banda 2}} & \underbrace{827,98663}_{\text{Banda 3}} \end{bmatrix} \quad \text{Tenim 2 incògnites a cada banda.}$$

Sistemes d'equacions (un per cada banda): (subratllem les incògnites)

$$\left. \begin{aligned} \underline{J}_1^1 &= \rho_1^1 (F_{11} \underline{J}_1^1 + F_{12} \underline{J}_2^1 + F_{13} \underline{J}_3^1 + F_{14} \underline{J}_4^1) + E_1^1 \\ \underline{J}_2^1 &= \rho_2^1 (F_{21} \underline{J}_1^1 + F_{22} \underline{J}_2^1 + F_{23} \underline{J}_3^1 + F_{24} \underline{J}_4^1) + E_2^1 \end{aligned} \right\} \quad J_1^1 = 0,17 \quad , \quad J_2^1 = 0,09873$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{J}_1^2 &= \rho_1^2 (F_{11} \underline{J}_1^2 + F_{12} \underline{J}_2^2 + F_{13} \underline{J}_3^2 + F_{14} \underline{J}_4^2) + E_1^2 \\ \underline{J}_2^2 &= \rho_2^2 (F_{21} \underline{J}_1^2 + F_{22} \underline{J}_2^2 + F_{23} \underline{J}_3^2 + F_{24} \underline{J}_4^2) + E_2^2 \end{aligned} \right\} \quad J_1^2 = 1042,28 \quad , \quad J_2^2 = 1093,16$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{J}_1^3 &= \rho_1^3 (F_{11} \underline{J}_1^3 + F_{12} \underline{J}_2^3 + F_{13} \underline{J}_3^3 + F_{14} \underline{J}_4^3) + E_1^3 \\ \underline{J}_2^3 &= \rho_2^3 (F_{21} \underline{J}_1^3 + F_{22} \underline{J}_2^3 + F_{23} \underline{J}_3^3 + F_{24} \underline{J}_4^3) + E_2^3 \end{aligned} \right\} \quad J_1^3 = 405,8 \quad , \quad J_2^3 = 502,8$$

Ara coneixem totes les J_i^k que posem a la matriu $J = \begin{bmatrix} 0,17 & 1042,28 & 405,8 \\ 0,09873 & 1093,16 & 502,8 \\ \underbrace{0,38949}_{\text{Banda 1}} & \underbrace{1844,49}_{\text{Banda 2}} & \underbrace{792,05}_{\text{Banda 3}} \\ \underbrace{0,46981}_{\text{Banda 1}} & \underbrace{2013,24}_{\text{Banda 2}} & \underbrace{827,99}_{\text{Banda 3}} \end{bmatrix}$

Fent el producte matricial, $G = F \cdot J$ trobem totes les irradiacions espectrals.

$$G = F \cdot J = \begin{bmatrix} 0,24 & 1367,54 & 571,07 \\ 0,17 & 1042,28 & 405,8 \\ 0,47 & 2013,24 & 827,99 \\ \underbrace{0,35}_{\text{Banda 1}} & \underbrace{1650,46}_{\text{Banda 2}} & \underbrace{682,16}_{\text{Banda 3}} \end{bmatrix} \quad \text{Ara sumem les files de les matrius J i G per trobar les}$$

radiositats i irradiacions totals de cada superfície.

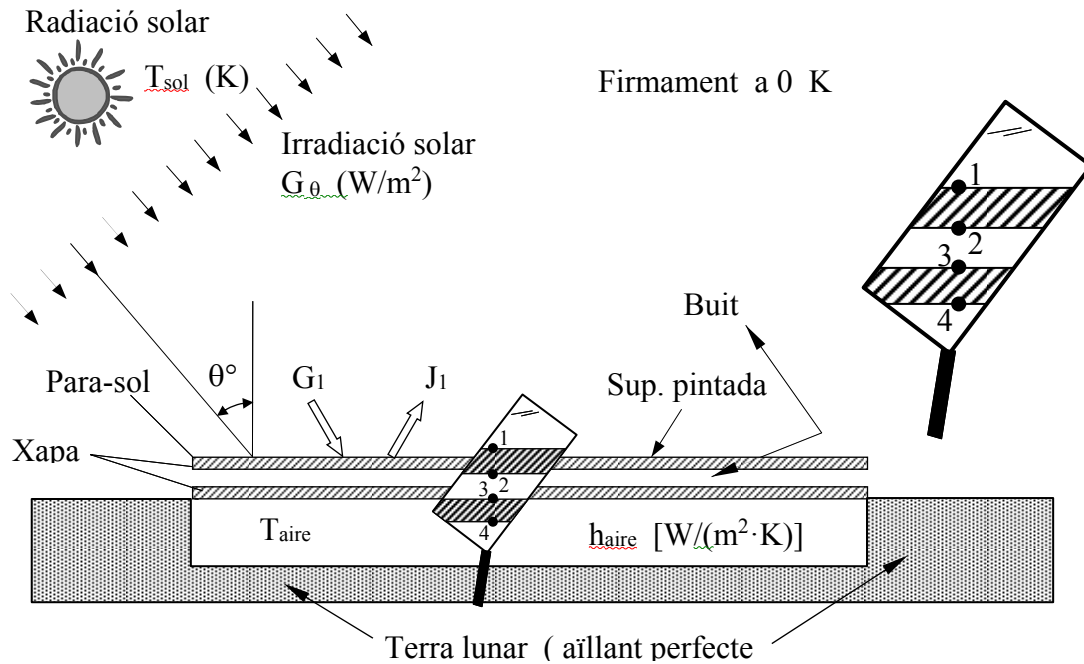
$$G_i^{tot} = \sum_{k=1}^3 G_i^k \quad , \quad J_i^{tot} = \sum_{k=1}^3 J_i^k \quad , \quad q_i = (G_i^{tot} - J_i^{tot}) \cdot A_i$$

$$G^{tot} = \begin{bmatrix} 1938,85 \\ 1448,25 \\ 2841,7 \\ 2332,97 \end{bmatrix} \quad \left[\frac{W}{m_2} \right] \quad , \quad J^{tot} = \begin{bmatrix} 1448,25 \\ 1596,06 \\ 2636,93 \\ 2841,7 \end{bmatrix} \quad \left[\frac{W}{m_2} \right] \quad , \quad q = \begin{bmatrix} 154,13 \\ -14,78 \\ 20,48 \\ -159,82 \end{bmatrix} \quad [W]$$

$$q_2 + q_3 = 5,7 \quad W$$

En aquest exercici, és veu clarament la possibilitat o conveniència de negligir la primera banda.

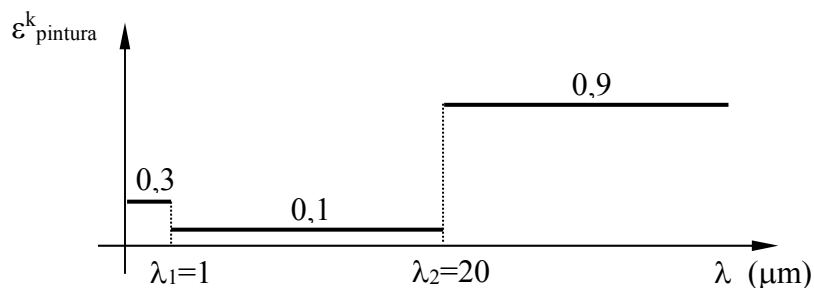
Exercici 5: cobert lunar (examen final 22/06/2005)



Un refugi lunar subterrani experimental de poca alçada i grans dimensions, amb aire en calma a 1 bar, es protegeix de la radiació solar amb un para-sol metàl·lic pintat pel costat del sol amb una pintura especial d'emissivitat espectral com s'observa a la figura. T_{aire} és la temperatura de l'aire quan s'assoleix el règim estacionari. Hipòtesis a considerar:

- Règim estacionari
- La irradiació solar és G_{θ} W/m^2 i incideix amb un angle θ respecte de la normal
- El refugi es troba situat a la lluna (buit absolut a l'exterior del mateix)
- La temperatura del sol és T_{sol} (K) i el firmament el podem suposar a 0 K.
- Podem suposar la geometria com plans paral·lels infinits entre el sostre i el para-sol.
- Excepte la superfície pintada i exposada al sol, totes les altres superfícies metàl·liques (xapa) les podem considerar grises amb una emitància global igual a $\epsilon=0,6$.
- Suposem negligible la radiació de les parets interiors del refugi sobre el sostre.
- Considerem el terra lunar com un aïllant perfecte.

L'emissivitat espectral de la superfície pintada i exposada al sol es



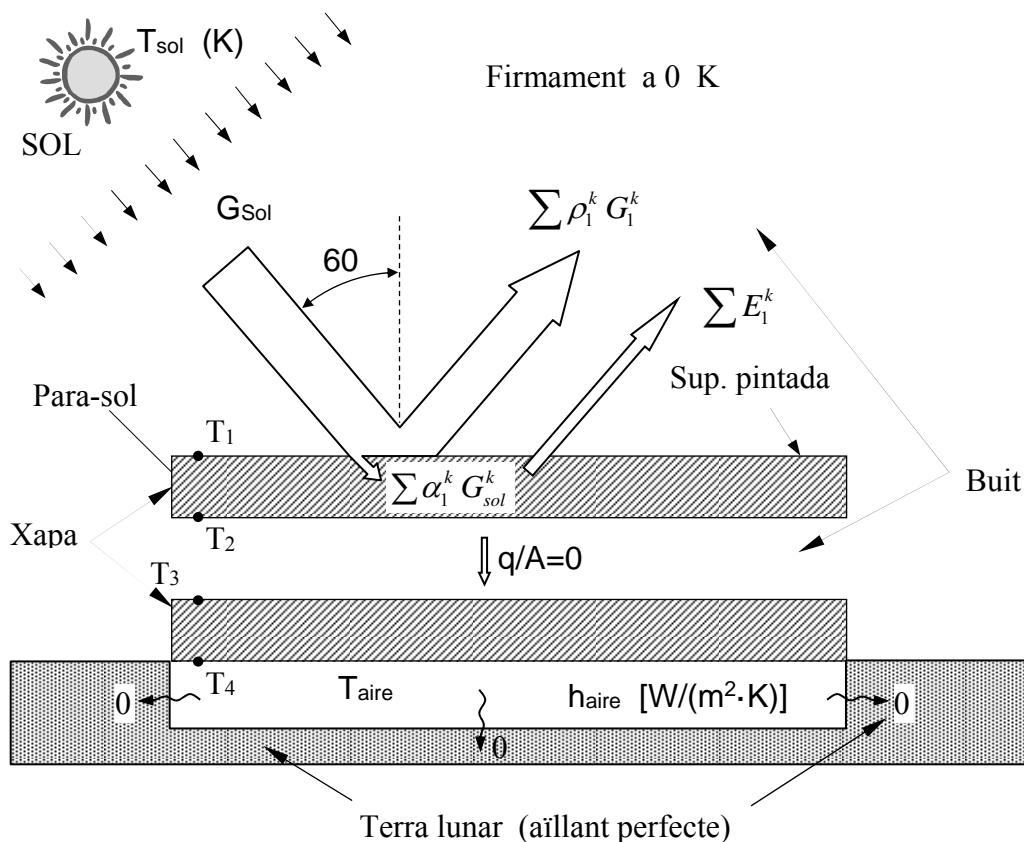
Dades: $T_{\text{sol}}=5400$ K , $G_{\theta} = 1200$ W/m^2 , $\theta= 60^\circ$, $h_{\text{c aire}}=20$ $W/(m^2 \cdot K)$

Considerant les dades anteriors i el conveni de signes pel flux net de potència radiant definit per $q/A=G - J$ determinar en règim estacionari:

- 1) Funció de radiació de la superfície 1 a la temperatura T_1 per les tres bandes.
- 2) Funció de radiació emprada per determinar la irradiació solar espectral.
- 3) Poder emissiu, irradiació i radiositat espectrals de la superfície 1 del para-sol. (W/m^2)
- 4) Totes les temperatures T_1, T_2, T_3, T_4 i T_{aire} ($^{\circ}C$)
- 5) Flux de potència radiant q/A a la superfície 1, 2,3 i 4 (W/m^2)
- 6) Flux de potència radiant total absorbida pel para-sol (superfície 1)

Solució:

$T_{sol}=5400\text{ K}$, $G_{\theta} = 1200\text{ W/m}^2$, $\theta = \pi/3\text{ rad}$, $h_{c\text{ aire}}=20\text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$
 $\sigma=5,67\cdot 10^{-8}\text{ W/(m}^2\text{ K}^4)$, $\lambda_1=2\text{ }\mu\text{m}$, $\lambda_2=10\text{ }\mu\text{m}$



L'enunciat ens diu que el sistema es troba en règim estacionari. Aquesta hipòtesi capgira totalment la dificultat que es preveu a primera vista en la resolució d'aquest exercici. El sostre del refugi ha de ser isoterm o sigui $T_3=T_4=T_{aire}$ i per tant $q/A=0$ (conducció tèrmica al sostre). Altrament, si a la xapa del sostre hi tinguéssim gradients de temperatura, l'aire del refugi s'escalfaria o es refredaria en contra de la hipòtesi d'estat estacionari. Pel mateix raonament, $T_1=T_2=T_3$, ja que sinó el sostre acabaria rebent o cedint potència al para-sol. Així doncs $T_1=T_2=T_3=T_4=T_{aire}$ sent T_1 la única temperatura incògnita que ens cal trobar. D'aquesta forma el balanç de potència tèrmica resulta molt senzill: tota la potència incident sobre el para-sol ha de ser igual a la que abandona el mateix cap al firmament. Com que la superfície pintada té propietats espectrals haurem de resoldre l'exercici considerant les tres corresponents bandes.

Balanç de potència tèrmica (opció 1) (potència incident = potència emergent)

$$\frac{q}{A}\Big|_{\text{sup.1}} = \underbrace{G_1^{\text{tot}}}_{G_{\text{sol}}} - J_1^{\text{tot}} = \sum_{k=1}^3 G_1^k - \sum_{k=1}^3 \underbrace{(\rho_1^k G_1^k + E_1^k)}_{J_1^k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{k=1}^3 G_1^k}_{1200 \cos 60} = \sum_{k=1}^3 \underbrace{(\rho_1^k G_1^k + E_1^k)}_{J_1^k}$$

Si tenim en compte que, $\frac{q}{A} = G - J = G - (\rho G + E) = G \underbrace{(1 - \rho)}_{\alpha} + E = \alpha G - E$ aleshores podem

plantejar,

Balanç de potència tèrmica (opció 2) (potència absorbida = potència emesa)

$$\frac{q}{A}\Big|_{\text{sup.1}} = \sum_{k=1}^3 \alpha_1^k G_1^k - \underbrace{\sum_{k=1}^3 E_1^k}_{E_1^{\text{tot}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^3 \alpha_1^k G_1^k = \sum_{k=1}^3 E_1^k$$

Coneixem tots els termes del membre de l'esquerra i hem de suposar una temperatura T_1 per igualar-ho al membre de la dreta.

Malgrat les dues opcions són equivalents escollim l'opció 2).

Determinem, les irradiacions espectrals de la superfície 1 tenint en compte que aquesta només rep radiació solar (focus emissor) en estar el firmament a 0 K.

Calculem les funcions de radiació amb la temperatura del sol per saber com es distribueixen la irradiació solar a les tres bandes:

$$\Delta F_{T_{\text{sol}}}^{0-1} = 0,68033 \quad , \quad \Delta F_{T_{\text{sol}}}^{1-20} = 0,31950 \quad , \quad \Delta F_{T_{\text{sol}}}^{20-\infty} = 0,00017$$

$$G_1^k = G_{\text{sol}} \cos \theta \Delta F_{T_{\text{sol}}}^k = 1200 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Delta F_{T_{\text{sol}}}^k \quad \text{irradiació espectral superfície 1}$$

$$\text{Irradiacions de la superfície 1, } G_1^{0-1} = 408,2 \quad G_1^{1-20} = 191,7 \quad G_1^{20-\infty} = 0,1 \quad \sum_{k=1}^3 G_1^k = 600$$

Potència absorbida per la superfície 1,

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_1^k G_1^k = \varepsilon_1^1 G_1^1 + \varepsilon_1^2 G_1^2 + \varepsilon_1^3 G_1^3 = 0,3 \times 408,2 + 0,1 \times 191,7 + 0,9 \times 0,1 = 141,7 \text{ W/m}^2$$

Ara iterant busquem una temperatura que verifiqui l'equació del balanç,

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_1^k \underbrace{G_{\text{sol}} \cos \theta \Delta F_{T_{\text{sol}}}^k}_{G_1^k} = 141,7 = \sum_{k=1}^3 \underbrace{\varepsilon_1^k \sigma T_1^4 \Delta F_{T_1}^k}_{E_1^k} \quad \text{Bandes: (0-1 } \mu\text{m), (1-20 } \mu\text{m) i (20-}\infty\text{)}$$

Resulta una temperatura $T_1 = 299,57 \text{ K} = 26,42 \text{ }^\circ\text{C}$

Determinem ara el poder emissiu espectral $E_1^k = \varepsilon_1^k \sigma T_1^4 \Delta F_{T_1}^k$ Primer calculem les funcions de radiació a la temperatura T_1 de les tres bandes:

$$\Delta F_{T_1}^{0-1} = 0 \quad , \quad \Delta F_{T_1}^{1-20} = 0,73705 \quad , \quad \Delta F_{T_1}^{20-\infty} = 0,26295$$

Poder emissiu espectral superfície 1,

$$E_1^{0-1} = 0 \quad E_1^{1-20} = 33,66 \quad E_1^{20-\infty} = 108,06 \quad \sum_{k=1}^3 E_1^k = 141,7$$

Determinem la radiositat espectral, $J_1^k = \rho_1^k G_1^k + E_1^k = (1 - \epsilon_1^k) G_1^k + E_1^k$ (coneixem G_1^k i E_1^k)

Adjuntem tots els resultats en una taula.

Superfície 1	Banda 0- λ_1	Banda λ_1 - λ_2	Banda λ_2 - ∞
Funció de radiació sup. 1	$\Delta F_1^1 = 0$	$\Delta F_1^2 = 0,73705$	$\Delta F_1^3 = 0,26295$
ΔF_{Tsol}^k (radiació solar)	$\Delta F_{Tsol}^1 = 0,68033$	$\Delta F_{Tsol}^2 = 0,31950$	$\Delta F_{Tsol}^3 = 0,00017$
Poder emissiu espectral	$E_1^1 = 0$ W/m ²	$E_1^2 = 33,66$	$E_1^3 = 108,06$
Radiositat espectral	$J_1^1 = 285,7$ W/m ²	$J_1^2 = 206,2$	$J_1^3 = 108,1$
Irradiació espectral	$G_1^1 = 408,2$ W/m ²	$G_1^2 = 191,7$	$G_1^3 = 0,1$

Temperatura $T_1=T_2= T_3=T_4=T_{aire}$	$T_1 = 26,4$ °C
q/A sup. “i” (i=1,2,3,4)	$\frac{q}{A_i} = 0$ W/m ²
Flux de potència radiant total absorbida pel para-sol (sup. 1)	141,7 W

6 EXERCICIS DE CLASSE (exàmens proposats a l'ETSEIB)

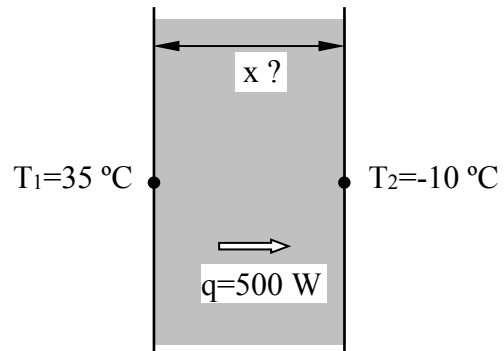
A continuació adjunto una sèrie d'exercicis, molts d'ells proposats en exàmens a l'antiga assignatura de Calor i Fred Industrial i a la nova assignatura Transferència de Calor (pla 94) impartides a l'ETSEIB per l'equip de professors de la unitat de Termodinàmica, els doctors Bartomeu Sigales, Rafael Ruiz, Enric Velo i jo mateix. Al final trobareu un apartat amb els resultats de tots aquests exercicis. Alguns estan resolts al capítol corresponent.

6.1 Paret aïllant d'un congelador

El compartiment d'un congelador consisteix en una cavitat cúbica que te 2 m de costat.

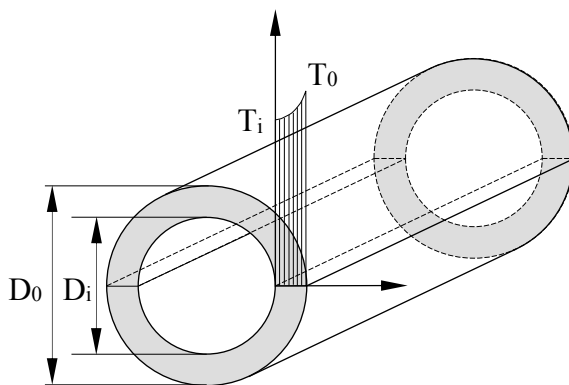
Suposi que la superfície inferior o base estigui perfectament aïllada.

¿Quin es el gruix mínim d'aïllant d'espuma de poliuretà $\lambda=0,030 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ que hauríem d'aplicar a les parets superior i laterals per assegurar uns guanys de calor de menys de 500 W, quan la superfície interior i exterior es troben a -10 i $35 \text{ }^\circ\text{C}$?



- Observeu que $\lambda=0,030 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K}) < 0,2$ i el podem considerar com un bon aïllant.
- Cal imaginar-se que la paret es compona només d'aïllant, i no considerem ni la xapa metàl·lica exterior ni la xapa de plàstic interior necessàries en totes les neveras. Suposem que tot el salt tèrmic te lloc essencialment a l'aïllant.

6.2 Conducte envoltat d'un vapor saturat



Per l'interior d'una canonada d'acer inoxidable, de diàmetre nominal 3/4 de polzada, Schedule 40 i llargària 1,5 m, es fa circular aigua. L'exterior està en contacte amb vapor saturat a pressió atmosfèrica. *Determinar:*

- Potència tèrmica transferida entre els dos fluids per metre de canonada si l'aigua entra a 2 m/s i $28 \text{ }^\circ\text{C}$ sent $34 \text{ }^\circ\text{C}$ la seva temperatura de sortida.
- Coefficient superficial exterior si la termosonda situada al punt mig de la

superfície exterior del tub marca $87 \text{ }^\circ\text{C}$.

- Temperatura mitjana de paret interior si la conductivitat tèrmica de l'acer és $13 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
- Coefficient de convecció interior.
- Flux de potència tèrmica referit a les àrees de les superfícies interna i externa.
- Massa de vapor que condensa en 60 segons.
- Coefficient global de transferència de calor referit a l'àrea exterior.

Resp.:

- | | | |
|---|--|---|
| a) $q/L=11471 \text{ W}/\text{m}$ | b) $h_{\text{vapor}}=10532 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ | c) $T_{\text{int}}=53 \text{ }^\circ\text{C}$ |
| d) $h_{\text{int}}=7930 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ | e) $q/A_{\text{int}}=174 \text{ kW}/\text{m}^2$, $q/A_{\text{ext}}=136,9 \text{ kW}/\text{m}^2$ | |
| f) $\dot{m}_{\text{cond}}=0,46 \text{ kg}/\text{min}$ | g) $U_0=1984,29 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ | |

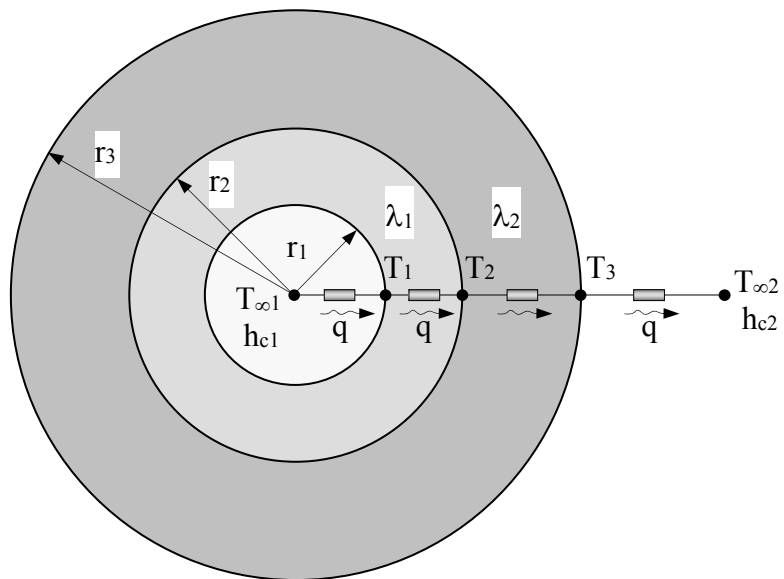
6.3 Paret composta de parets cilíndriques

Dades (S.I.):

Negligim la radiació

$r_1=0,020$ m

$L=30$ m



Cas	$T_{\infty 1}$ °C	h_{c1}	$T_{\infty 2}$ °C	h_{c2}	λ_1	λ_2	r_2	r_3
1	200	10	25	50	2	20	0,035	0,060
2	200	10000	25	10	11	4	0,035	0,060
3	200	10000	25	10	160	11	0,022	0,026

Determineu per els tres casos,

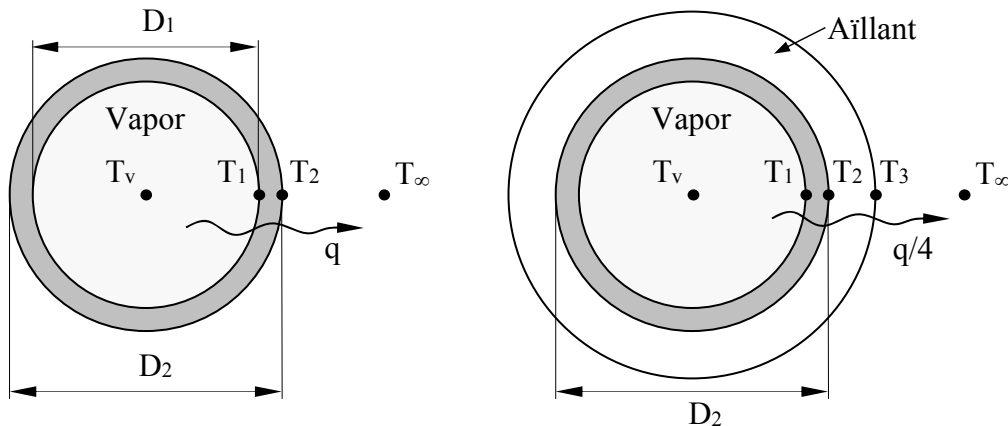
- 1) T_1 , T_2 , T_3 , q ?
- 2) $T_{\infty 1} - T_1$, $T_1 - T_2$, $T_2 - T_3$, $T_3 - T_{\infty 2}$
- 3) $T(r)$ per $r_1 < r < r_2$ (teniu la fórmula a l'apartat 1.4.2)
 $T(r)$ per $r_2 < r < r_3$

(representeu sobre cada dibuix, les temperatures tot mantenint les proporcions relatives)

Determineu també el valor de les 4 resistències tèrmiques i el valor de la resistència total. Aleshores hauríeu de pensar entre la relació que trobeu entre el valor relatiu de cada resistència tèrmica versus la resistència total, i els salts tèrmics corresponents. Amb altres paraules, quan la h_c es molt gran, la resistència es molt petita i que passa amb el salt tèrmic. En canvi la potència no es pas petita. Quina es la resistència que controla a la potència.

6.4 Aïllament d'una canonada

Per l'interior d'una canonada d'acer, $\lambda_{xapa}=41,5 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, de gran longitud, amb un diàmetre nominal d'una polzada, Schedule 80 ($D_1=24,308 \text{ mm}$, $D_2=33,401 \text{ mm}$), circula vapor d'aigua saturat a $207 \text{ }^\circ\text{C}$. A l'exterior tenim aire a $32 \text{ }^\circ\text{C}$ amb un coef. superficial $h_{c+r}=17 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ que inclou la convecció i la radiació. Observi que no se'ns facilita el coef. de convecció del vapor (caldrà estimar-lo) ni tampoc la longitud de la canonada. Considerem règim estacionari.



Per la canonada nua calcular:

- 1) La potència tèrmica transferida per metre de canonada.
- 2) La temperatura T_1 i T_2 de la superfície interior i exterior de la canonada respectivament.
- 3) Essent R_{vapor} , R_{xapa} , i R_{aire} les resistències tèrmiques del vapor d'aigua, la xapa i l'aire per metre lineal de canonada, determinar els quocients R_{aire}/R_{vapor} i R_{aire}/R_{xapa}
- 4) Determinar els tres salts tèrmics (vapor-xapa, xapa, i xapa-aire)
- 5) Cabal de condensat per metre de canonada.

Ara suposeu que hi afegim un aïllant de conductivitat, $\lambda_{aïll}=0,073 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, i que el coeficient superficial entre l'aïllant i l'aire passa a ser de $h_{c+r}=8,5 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$

- 6) Determini quin gruix d'aïllant cal afegir, perquè les pèrdues per metre lineal es redueixin a la quarta part.
- 7) Si T_3 és la temperatura superficial de l'aïllant, determini en aquestes noves condicions, les temperatures T_1 , T_2 i T_3 i el valor de totes les resistències tèrmiques.

Nota: val la pena que proveu com canvien tots els resultats o com no canvien al suposar o estimar un altre valor del coeficient de convecció del vapor, per exemple provant amb 30000 en lloc de 10000. Que passa amb els salts tèrmics. Veieu alguna resistència que controla el procés?. I quan una resistència es molt petita que passa amb la potència que és transfereix per la mateixa?

Es pot considerar una bona aproximació per determinar les pèrdues de la canonada, resoldre el problema tot suposant que la temperatura T_2 es igual a la del vapor saturat? En aquest cas, estariem suposant que el salt tèrmic entre el vapor i T_2 es 0 i aleshores si el salt tèrmic es 0 com es pot transferir la potència del vapor a l'aire, ja que un principi bàsic es que la calor es transfereix si ha un salt tèrmic no nul. Totes aquestes qüestions les hauríeu de veure clares al resoldre aquest exercici. Us seran útils per a tota la resta del curs.

Resp.: 4) $T_1-T_2=0,38 \text{ K}$ 6) $e < 25 \text{ mm}$

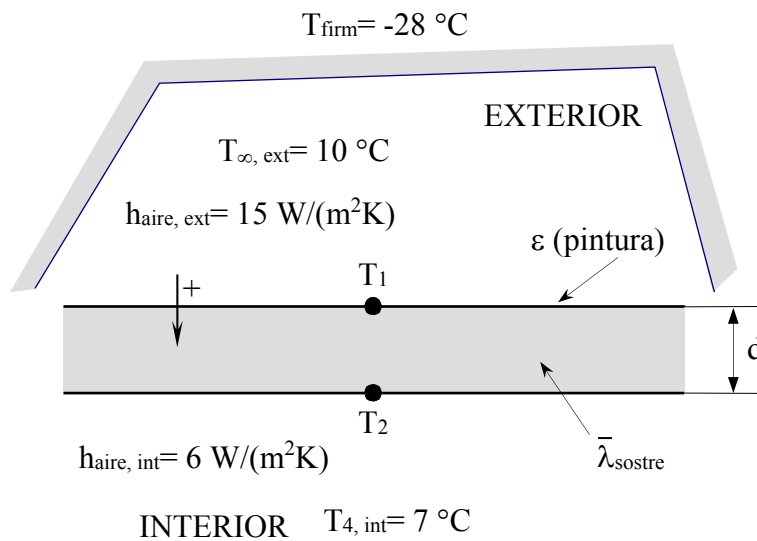
6.4 Aïllament d'una canonada

Cognoms i nom,

FULL DE RESULTATS : escrigui la solució manual completa (plantejament, equacions, etc) amb el full de resultats com a primera pàgina.

Pregunta	Variable	Valor	Unitats
1	q/L		W/m
2	T_1		°C
	T_2		°C
3	$\frac{R_{aire}}{R_{vapor}}$		
	$\frac{R_{aire}}{R_{xapa}}$		
4	$T_{vapor} - T_1$		°C
	$T_1 - T_2$		°C
	$T_2 - T_{aire}$		°C
5	$\dot{m}_{condensat}$		kg/s
6	e		mm
7	T_1		°C
	T_2		°C
	T_3		°C

6.5 Sostre d'un automòbil



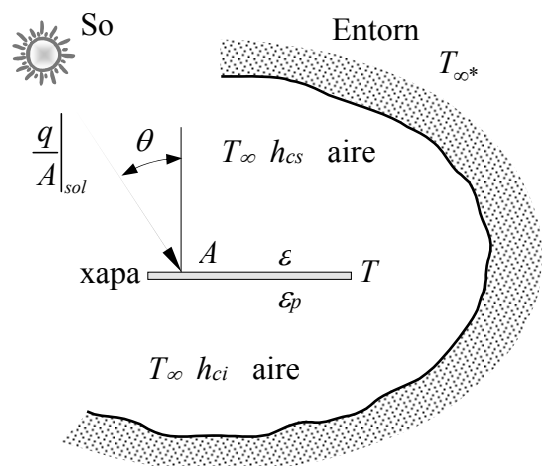
Un automòbil es troba aparcad a camp obert una nit clara d'hivern. L'aire exterior té una temperatura de $10\text{ }^\circ\text{C}$ i el seu punt de rosada és de $8\text{ }^\circ\text{C}$ (humitat relativa del 87%). A l'interior del vehicle, l'aire és a $7\text{ }^\circ\text{C}$. La temperatura efectiva del firmament és de 245 K. El sostre de l'automòbil té un gruix de 0,05 m i està format per diversos materials, amb una conductivitat aparent de $0,5\text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$. A efectes de bescanvi d'energia per radiació, la pintura exterior del sostre es pot considerar com una superfície

grisa difusa d'emissivitat 0,6. Els coeficients superficials de transmissió de calor per convecció a l'interior i a l'exterior són, respectivament, $6\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ i $15\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$. Considerar negligible la radiació de la superfície interior del sostre amb la tapisseria del cotxe.

- a) Condensarà aigua al sostre de l'automòbil? Calculeu la seva temperatura.
- b) Determineu quina hauria d'ésser l'emissivitat de la pintura per tal que no condensi aigua en aquestes condicions.

6.6 Xapa en equilibri tèrmic

Una xapa metàl·lica molt prima està suspesa horitzontalment en un ambient a $T_{\infty} = 0\text{ }^\circ\text{C}$ i un entorn radiant a $T_{\infty^*} = 1\text{ }^\circ\text{C}$, amb un coeficient de convecció a la cara superior $h_{cs} = 10\text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ i a la cara inferior $h_{ci} = 7\text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ respectivament. La seva cara superior d'emissivitat $\epsilon = 0,8$ i absorptància $\alpha = \epsilon$ rep un flux de radiació solar $q/A]_{\text{sol}} = 600\text{ W}/\text{m}^2$ que forma un angle de $\theta = \pi/3$ rad amb la seva normal. La cara inferior està recoberta amb pintura d'emissivitat $\epsilon_p = 0,4$ i absorptància $\alpha_p = \epsilon_p$



Determinar:

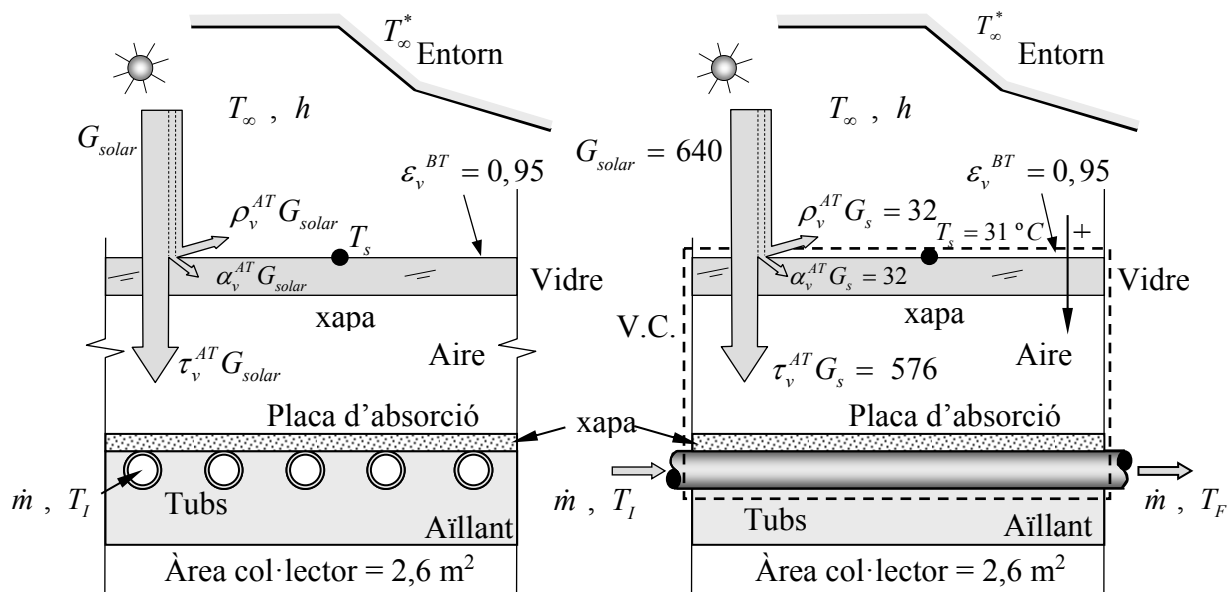
- 1) La temperatura d'equilibri tèrmic de la xapa.
- 2) La potència bescanviada per convecció a la superfície inferior i superior.
- 3) La potència bescanviada amb l'entorn a la superfície inferior i superior.
- 4) La potència que la xapa rep del sol.

6.7 Col·lector solar pla

Un flux solar de 640 W/m^2 incideix sobre un col·lector solar pla comú que se utilitza per escalfar aigua. D'acord a les propietats espectrals que s'indiquen al final d'aquest enunciat el 90 % d'aquesta radiació és transmet a través de la coberta de vidre i és absorbida directament per la placa d'absorció. La resta es reflectida (5 %) i absorbida parcialment per el vidre (5 %). L'àrea del col·lector es de $2,6 \text{ m}^2$.

A la part posterior de la placa d'absorció hi han unes canonades per les que hi circula aigua. Aquesta es calenta des de una temperatura d'entrada T_I fins a una temperatura de sortida T_F . La coberta de vidre es manté a $31 \text{ }^\circ\text{C}$ i experimenta un intercanvi de calor per radiació amb l'entorn que està a $-5 \text{ }^\circ\text{C}$. El coeficient de convecció entre la coberta de vidre i l'aire ambient, que està a 20°C , és de $9 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$.

- 1) Escrigui l'equació del balanç global d'energia del col·lector en funció dels paràmetres que intervenen en el problema. Determini el valor numèric de la potencia tèrmica subministrada a l'aigua per unitat de superfície del col·lector.
- 2) Calculi l'augment de temperatura que experimenta l'aigua per un cabal màssic total de $0,012 \text{ kg/s}$. Suposi que el calor específic de l'aigua és 4180 J/(kg K) .
- 3) Si es defineix la eficiència del col·lector, η com la relació entre el calor útil subministrat a l'aigua i l'energia solar que incideix sobre el col·lector. ¿Quan val la eficiència en aquest cas?



Nota: Aquest enunciat, porta implícites les següents hipòtesis.

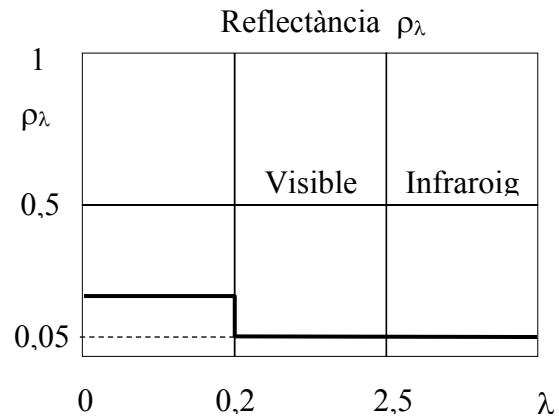
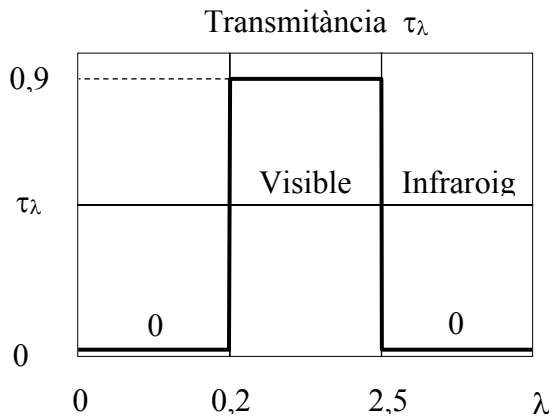
- i) El flux solar incident sobre el col·lector és normal a la superfície del mateix. En cas contrari, caldria multiplicar el valor de 640 W/m^2 per el cosinus de l'angle entre el flux solar incident i la normal a la superfície del col·lector.
- ii) La transmitància global (hemisfèrica total) del vidre es $0,90$ per la llum solar (banda de freqüències al voltant de la radiació visible) i pràcticament zero per la radiació emesa per la placa d'absorció o per el firmament (banda de freqüències del infraroig). Aquest és el conegut efecte hivernacle. En cas contrari, si el vidre no fos opac a la radiació infraroja, caldria considerar el intercanvi de radiació entre el firmament i la placa d'absorció a través del vidre.
- iii) La placa d'absorció es comporta com un cos negre. En cas contrari, reflectiria part de la

radiació solar, que al incidir sobre la superfície inferior del vidre podria ser absorbida, transmesa o reflectida, el que complicaria molt la resolució de l'exercici.

Gràcies a aquestes hipòtesis, les entrades de potència tèrmica son: potència radiant solar G_A que entra travessant la superfície de control, les sortides: la potència solar reflectida ρG_A , les pèrdues per convecció i radiació entre la superfície del vidre i l'exterior.

Sabem que el balanç net de potència tèrmica sobre la S.C. serà igual al balanç d'entalpia de l'aigua.

PROPIETATS ESPECTRALS DEL VIDRE CORRENT



Visible [0,4 – 0,7]

$$\rho + \tau + \alpha = 1$$

$$0,05 + 0,90 + \alpha = 1$$

$$\alpha = \alpha_v^{AT} = \varepsilon_v^{AT} = 0,05$$

(vidre: transparent a la rad. visible)

AT= alta temperatura

Infraroig [2,5 - 1000]

$$\rho + \tau + \alpha = 1$$

$$0,05 + 0 + \alpha = 1$$

$$\alpha = \alpha_v^{BT} = \varepsilon_v^{BT} = \mathbf{0,95}$$

(vidre: opac a la radiació infraroja)

BT= baixa temperatura

A la banda del visible ($0,4 \mu\text{m} < \lambda < 0,7 \mu\text{m}$): $\rho_\lambda=0,05$ $\tau_\lambda=0,90$ \Rightarrow $\alpha_\lambda=0,05$

En el nostre cas, es reflexa a la superfície del vidre justament el 5 % (32 W/m^2) de tota la radiació solar incident (G_A). També veiem que es transmet cap a l'interior del col·lector el 90 % (576 W/m^2) de la radiació solar incident.

Per tant el vidre absorbeix el 5 % de la radiació solar incident (32 W/m^2)

En el bescanvi de radiació entre el vidre i l'entorn (a baixa temperatura!) per $\lambda > 2,5 \mu\text{m}$ $\tau_\lambda=0$ d'acord al primer gràfic (transmitància del vidre) i $\rho_\lambda=0,05$ d'acord al segon gràfic

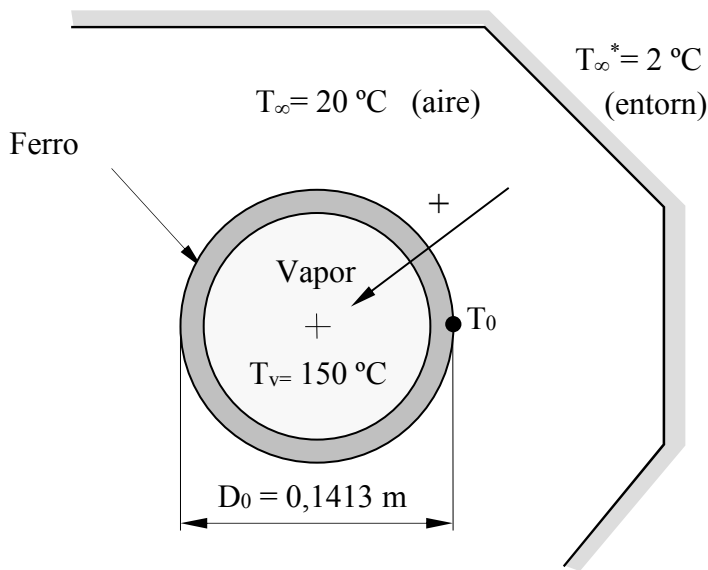
$$\Rightarrow \alpha_\lambda^{BT} = 0,95 = \varepsilon_\lambda^{BT} \text{ ja que } \rho + \alpha + \tau = 1.$$

Suggeriment:

- Considerem el volum de control V.C. de la segona figura.
- Queda clar que el balanç de potència tèrmica a la superfície superior del volum de control V.C. (que evidentment es positiu) es justament la causa de que augmenti l'entalpia de l'aigua ($T_F > T_I$)
- Considerem el conveni de signes de la segona figura. (es considera positiva la potència que entra al volum de control)

Resp.: 1) $320 < P_{\text{util_abs_aigua}} < 330 \text{ W}$ 2) $\Delta T_w > 15 \text{ }^\circ\text{C}$ 3) $\eta = 0,5102$

6.8 Conducte amb flux de radiació directe (resolta una variant a l'apartat 1.8)



Per una canonada horitzontal de ferro de 5 in. de diàmetre nominal SCH 40 ($D_0=141,3$ mm i $D_{INT}=128,194$ mm), situada en un recinte amb aire en calma a 20 °C i a 1 bar, circula vapor saturat a 150 °C. La canonada bescanvia potència radiant amb el seu entorn a $T_{\infty}^*=2$ °C.

També rep exteriorment una potència radiant addicional de $1355,78$ W/m per metre lineal de canonada que es distribueix uniformement.

Considerar:

$$\lambda_{Fe}=41,5 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$$

$$h_{vapor}=10000 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K}),$$

Regim estacionari, negligir la

resistència tèrmica de convecció del vapor i la de conducció de la xapa del tub. També es pot resoldre sense negligir res. Calculeu :

- Trobar les pèrdues del tub nu. Condensa o es reescalfa el vapor ?
Especifiqui la potència de convecció, de radiació amb l'entorn i la absorbida de la radiació directa. (emissivitat Fe $\varepsilon=0,6$)
- A partir d'ara suposeu que la potència radiant addicional és 500 W/m. Trobi el gruix necessari d'aïllant (vidre cel·lular) perquè les pèrdues siguin 100 W/m Si l'aïllant és recobreix amb una xapa de ferro d'emissivitat $\varepsilon = 0,6$ determinar totes les potències involucrades.
- Si es vol que la temperatura superficial sigui $T_{0_max}=60$ °C = 333 K trobi el gruix d'aïllant necessari i la potència tèrmica bescanviada per el vapor. En aquest cas també l'aïllant és recobreix amb una xapa de ferro d'emissivitat $\varepsilon = 0,6$ Trobi també totes les potències considerades. (la potència radiant addicional continua sent 500 W/m)

Nota:

Empreu la fórmula simplificada següent per a determinar el coeficient de convecció de l'aire,

$$h_c = 1,31 \left(\frac{|T_0 - T_{\infty}|}{D_{EXT}} \right)^{0,25} p^{0,5} \quad (\text{p en bars, } T_0 \text{ temperatura superfície})$$

Atenció: cal emprar el valor absolut a la fórmula anterior.

Per al vidre cel·lular entre 35 i 700 K preneu $\lambda_{aill} = 0,056 + 1,31 \times 10^{-4} (\bar{T} - 294)$ a on \bar{T} es la temperatura mitja de la paret cilíndrica de l'aïllant.

6.8 Conducte amb flux de radiació directe

Cognoms i nom,

FULL DE RESULTATS : escriu la solució manual completa (plantejament, equacions, etc) amb el full de resultats com a primera pàgina.

Adjunteu la taula de resultats d'acord al conveni de signes de la figura.

Concepte	a)	b)	c)
$\left. \frac{q}{L} \right _{CONV.} =$	W/m	W/m	W/m
$\left. \frac{q}{L} \right _{RAD. ENT.} =$	W/m	W/m	W/m
$\left. \frac{q}{L} \right _{RAD. DIRECTA} =$	W/m	W/m	W/m
$\left. \frac{q}{L} \right _{Total} = \left. \frac{q}{L} \right _{COND.}$	W/m	W/m	W/m
<i>El vapor condensa o es reescalfa ?</i>			
gruix x (mm)	-	mm	mm
$T_0 = T_{SUP.EXT.}$	°C	°C	°C
$\lambda_{aïllant}$	-	W/(m·K)	W/(m·K)
h_c (aire)	W/(m ² K)	W/(m ² K)	W/(m ² ·K)

Taula 1 Valors aproximats per a h_c en diferents processos convectius.

Mecanisme	Fluid	h_c , W/(m ² K)
<i>Canvi de fase</i>	Condensació de vapor d'aigua	5000 – 100000
	Aigua bullent	2500 – 25000
<i>Convecció forçada</i>	Metalls líquids	500 – 20000
	Aigua	250 – 12000
	Orgànics viscosos	50 – 3000
	Aire	15 – 300
<i>Convecció natural</i>	Metalls líquids	150 – 1200
	Aigua	100 – 850
	Orgànics viscosos	5 – 100
	Aire	5 – 20

6.9 Problema del forn (resolt a l'apartat 2.1.2)

Un forn que té una temperatura interior $T_i = 1400 \text{ }^\circ\text{C}$ està construït amb parets de $0,25 \text{ m}$ de gruix i una conductivitat $\lambda_p = 1,2 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$. La temperatura mitjana d'aquesta paret no ha de superar els $1350 \text{ }^\circ\text{C}$

Per reduir les pèrdues hom disposa de maons de (apilats pel cantó de 100 mm),

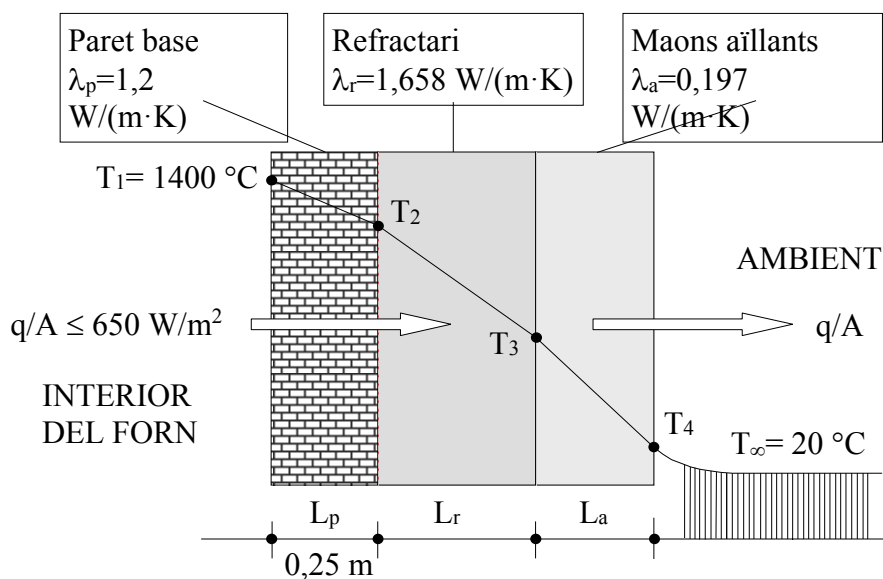
- refractari porós [$\lambda_r = 1,658 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$] i de
- maons aïllants [$\lambda_a = 0,197 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$] de $100 \times 250 \times 60 \text{ mm}$ en ambdós casos.

El refractari porós i l'aïllant suporten, com a màxim, $1300 \text{ }^\circ\text{C}$ i $1100 \text{ }^\circ\text{C}$, respectivament. El forn està en un recinte en el qual la temperatura mitjana de l'ambient (aire i entorn) és $T_\infty = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

El coeficient superficial de transmissió de calor a la superfície exterior de l'aïllant es pot prendre com:

$$h = 3 (T_4 - T_\infty)^{1/3} + 5 \times 10^{-8} \frac{T_4^4 - T_\infty^4}{T_4 - T_\infty}, \quad \frac{W}{m^2 K}$$

El forn és d'unes dimensions que permeten considerar que la transmissió de calor a les parets és unidimensional. Per a l'estat estacionari, trobeu el gruix de les parets que dona les pèrdues mínimes i calculeu la pèrdua calorífica un cop aïllat.



Resp.:

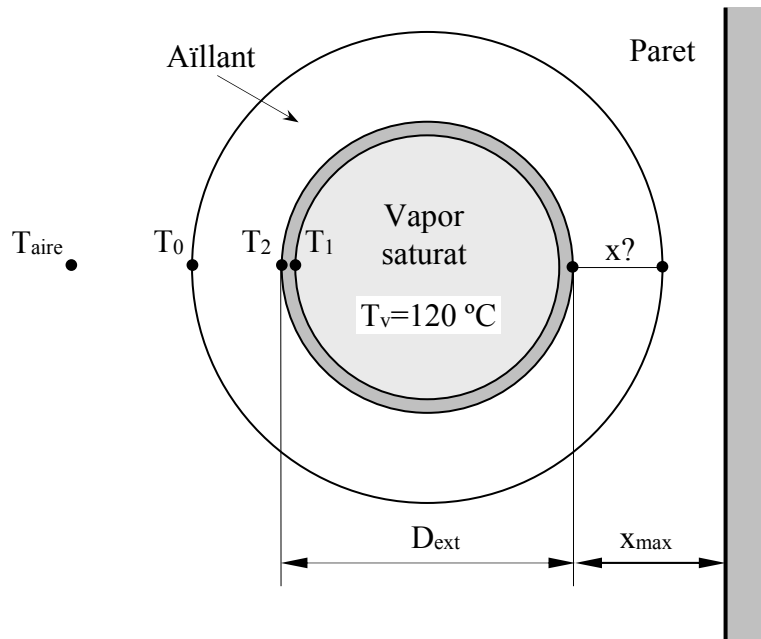
Pèrdues mínimes, (4,9)

$$n_r=4 \quad n_a=9 \quad ; \quad q/A=484,8 \text{ W/m}^2 \quad ; \quad T_2=1299 \text{ }^\circ\text{C} \quad ; \quad T_3=1035,85 \text{ }^\circ\text{C} \quad ; \quad T_4=51,5 \text{ }^\circ\text{C}$$

Gruix mínim (6,3)

$$n_r=6 \quad n_a=3 \quad ; \quad q/A=640,58 \text{ W/m}^2 \quad ; \quad T_2=1266,55 \text{ }^\circ\text{C} \quad ; \quad T_3=1034,73 \text{ }^\circ\text{C} \quad ; \quad T_4=59,23 \text{ }^\circ\text{C}$$

6.10 Aïllament d'una canonada (radi crític) (resolta una variant a l'ap. 2.1.3)



Un tub horitzontal d'acer al carboni de 1 in. de diàmetre nominal, BWG 14 i 12 m de longitud, que condueix vapor saturat a 120 °C, travessa un recinte amb aire en calma a 20 °C, de forma que per aquestes condicions específiques podem considerar un coeficient de transmissió superficial exterior equivalent h que inclou els mecanismes de transferència per convecció i radiació (aproximació lineal), donat per l'expressió següent,

$$h_{C+R} = h(T_0) = 6,88744 + 4,88 \times 10^{-2} (T_0 - 293) \frac{W}{m^2 K} \quad (T_0 = \text{la temperatura superficial en K})$$

Per limitacions d'espai, si s'aïlla el tub no es poden superar els 70 mm de diàmetre.

Determinar: (negligir la resistència de convecció del vapor i de conducció de la xapa)

- Quines seran les pèrdues de calor (potència tèrmica) del tub nu?
- Les pèrdues de calor si s'aïlla el tub amb el gruix màxim possible (per limitacions d'espai) dels aïllants B (bo) i D (dolent), amb conductivitats tèrmiques $\lambda_B = 0,071 + 1,09E-4 (T-294)$ i $\lambda_D = 0,80 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$
- Graficar les pèrdues de calor q (W) en funció del gruix d'aïllant x (mm) pels aïllants B (bo) i D (dolent).
- Quin seria el mínim gruix dels aïllants B i D que caldria emprar per reduir les pèrdues del tub nu un 25 %. Considera raonables els resultats obtinguts?.

Dades: $\phi = 1 \text{ in. BWG 14 (galga)} \Rightarrow D_{ext} = 25,4 \text{ mm}$, $D_{int} = 21,184 \text{ mm}$ i $e = 2,1082 \text{ mm}$

6.11 Cambra frigorífica

Les parets d'una cambra frigorífica tenen una superfície total de $A=600 \text{ m}^2$, un gruix de paret $L_p=140 \text{ mm}$ de totxo massís de conductivitat $\lambda_p = 0,87 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, i $L_a=50 \text{ mm}$ d'aïllant d'espuma de poliuretà amb una conductivitat $\lambda_a = 0,026 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$.

La temperatura interior és de $-25 \text{ }^\circ\text{C}$ i la temperatura mitjana per tot l'any a l'exterior és de $17 \text{ }^\circ\text{C}$. El coeficient de transmissió superficial interior és $h_{\text{int}} = 6,5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ i el valor corresponent per l'exterior és $h_{\text{C+R}} = 8,1 + 0,061 (T_{\infty,\text{ext}} - T_1) \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$.

Es proposa afegir un gruix addicional δ (cm) de poliuretà projectat ($30\pm 40 \text{ kg/m}^2$) d'igual conductivitat tèrmica que l'existent.

a) Determinar quin gruix cal afegir perquè les pèrdues es redueixin un 40 %.

b) Experimentalment s'ha pogut comprovar que l'aïllament correcte s'assoleix quan

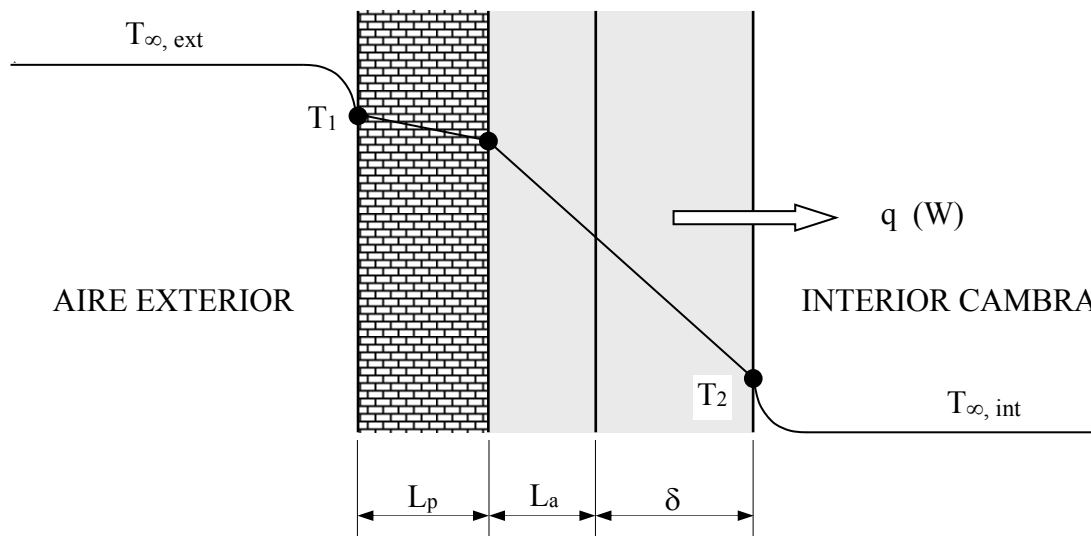
$$T_2 - T_{\infty,\text{int}} = \frac{5}{100} \overbrace{(T_{\infty,\text{ext}} - T_{\infty,\text{int}})}^{\Delta T_{\text{total}}} \text{ la diferència de temperatures entre la paret interior } T_2 \text{ i la de}$$

l'aire de la cambra $T_{\infty,\text{int}}$ és un 5 % del salt tèrmic total entre l'aire exterior $T_{\infty,\text{ext}}$ i l'aire interior $T_{\infty,\text{int}}$. Determinar quin gruix addicional donaria aquest resultat.

La cambra funcionarà una mitjana de 320 dies a l'any ($320 \times 24 \text{ h/any}$), sent el cost mig estimat de las pèrdues de $0,15 \text{ } \text{€}/(\text{Kw}\cdot\text{h})$. El cost total d'instal·lació del poliuretà projectat amb protecció inclosa és de $[25+0,20 \times \delta(\text{mm})] \text{ } \text{€}/\text{m}^2$, sent δ el gruix en mm de l'aïllant afegit.

El cost total de funcionament serà la suma del cost d'instal·lació, mes el cost d'operació o sigui el cost de les pèrdues al llarg de 5 anys (termini d'amortització).

c) Determinar el gruix δ d'aïllament addicional que cal afegir per minimitzar el cost total anualitzat, $\text{€}/\text{any}$ (convé graficar el $\text{COST TOTAL}(\text{€})/5 \text{ anys}$ en funció del gruix δ [mm])



Ajuda:(apartat c): 1) Fixeu un valor del gruix δ de poliuretà entre 90 i 140 mm.

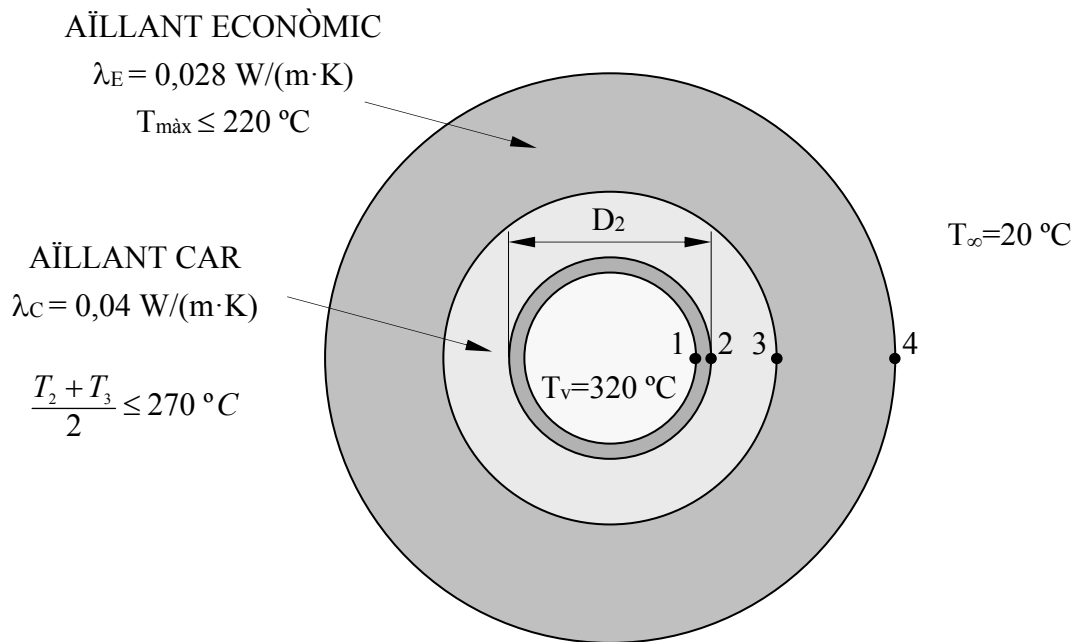
2) Determineu per cada gruix δ les pèrdues q en W . Només cal escriure 2 equacions, una entre $T_{\infty,\text{ext}}$ i T_1 i un altre entre T_1 i $T_{\infty,\text{int}}$ 3) La potència $q/1000$ es el valor de la potència en kW i si la multipliquem per les hores tenim el valor dels kW-h que si multipliquem per el cost del kW-h tenim el cost d'exploració d'un any. 4) El cost de instal·lació cal repartir-lo en els 5 anys d'amortització. 5) Si feu el mateix amb cada valor de delta, teniu el problema resolt. Ho grafiqueu i veureu a on es situa el mínim. (no trobareu pas una funció explícita que us permeti fer la gràfica).

Resp.: a) $10 < \delta < 60$ b) $10 < \delta < 25$ c) $50 < \delta < 130$ Cost total $< 14000 \text{ } \text{€}/\text{any}$

6.12 Aïllament multicapa

Una empresa vol augmentar el rendiment energètic de les seves instal·lacions. Per fer-ho, s'ha pensat en aprofitar les pèrdues calorífiques d'una conducció de vapor d'alta pressió per escalfar l'ambient d'un edifici d'oficines per on passa l'esmentada canonada. Aquest ambient es manté a una temperatura constant de 20 °C.

La canonada té un diàmetre exterior de 60 mm. Al seu pas per les oficines, el vapor és saturat a 320 °C. En el disseny de l'aïllament, hom considera dos tipus diferents de material (veure figura). L'aïllant sintètic resulta molt més econòmic que l'aïllant mineral. Ambdós es comercialitzen en coquilles de 5 en 5 mm de gruix.



Les condicions de disseny de l'aïllament d'aquesta conducció són:

- Per seguretat del personal, la superfície de la conducció, un cop aïllada, no pot superar els 40 °C.
- Per permetre el control de la temperatura ambient a 20 °C, s'estima que les pèrdues no han d'ésser inferiors a 60 W/m ni superiors a 70 W/m.

- a) Quin és el gruix més econòmic que compleix les condicions de disseny
 Per al càlcul del coeficient superficial de transmissió de calor feu servir l'aproximació,

$$h_{C+R} = 6,8872 + 0,048832 \times (T_4 - T_\infty) \quad \left[\frac{W}{m^2 K} \right]$$

Un cop seleccionat el nombre de coquilles de cada material.

- b) Quina és la temperatura exterior de l'aïllament?
 c) Quines seran les pèrdues en aquest cas?

Ajuda:

Observeu que el salt tèrmic total (320 -20) està fixat. També, tractant-se d'una canonada molt ben aïllada, podem considerar que la temperatura T_2 és aproximadament 320 °C

Amb aquesta suposició, observeu que les dues condicions dels dos aïllant són equivalents. (és clar que la temperatura màxima de l'aïllant econòmic es T_3)

Si ens demanen el gruix més econòmic, és evident que haurem de minimitzar la resistència tèrmica total del conjunt. I com que $q = \frac{T_{vapor} - T_{aire}}{R_{tot}} \Rightarrow R_{tot} = \frac{T_{vapor} - T_{aire}}{q}$ i se'ns diu que les

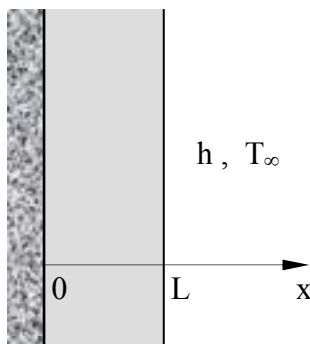
pèrdues hauran de valer entre 60 i 70 W/m, és clar que si acceptem les pèrdues màximes aconseguirem la resistència total mínima. Si ara apliquem l'equació entre els nodes 2 i 3, tot fixant la potència al seu valor màxim, obtindrem una equació amb 2 incògnites, el gruix i T_3 .

Si aïllem T_3 i aleshores imposem a T_3 la condició que se'ns dona a l'enunciat per l'aïllant car, trobarem la desigualtat que haurà de verificar el gruix de l'aïllant car.

Com el gruix ha de ser múltiple de 5 mm, haurem d'escollir un gruix que sigui el menor possible però que compleixi l'anterior desigualtat.

Ara, caldrà recalculer T_3 , amb el gruix escollit i la potència de 70 W/m.

Fem el mateix, per l'aïllant econòmic. Finalment, una vegada escollits els dos gruixos d'aïllants, haurem de recalculer T_3 , T_4 i les pèrdues definitives ja que la potència no serà 70 W/m a l'haver escollit gruixos discrets, múltiples de 5 mm.

6.13 Paret plana amb generació de potència tèrmica (resolt a l'ap. 2.3.1)

Dades: $\lambda = \text{cte.}$, L , \dot{g} (W/m^3) = cte., h , T_∞ , règim estacionari.

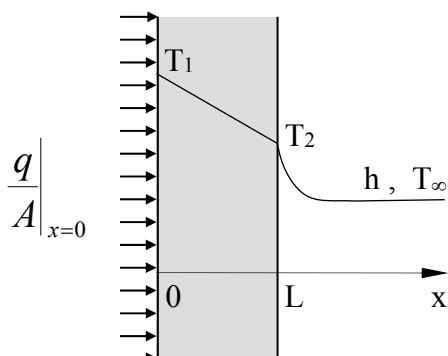
Condicions de contorn:

$$1) \quad x=0 \quad \left. \frac{q}{A} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{superfície aïllada})$$

$$2) \quad x=L \quad \left. \frac{q}{A} \right|_{x=L} = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h [T(L) - T_\infty]$$

Trobar el flux de potència tèrmic i la temperatura en funció de la posició x , $\left. \frac{q}{A} \right|_x$ i $T(x)$

Aplicació numèrica: $L=1\text{cm}$, $\lambda=20 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, $\dot{g}=8\cdot 10^7 \text{ W}/\text{m}^3$, $h=4000 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$, $T_\infty=100 \text{ }^\circ\text{C}$.

6.14 Paret plana amb aportació d'un flux de potència tèrmic

Dades:

$$\left. \frac{q}{A} \right|_{x=0}, h, T_\infty, \lambda = \text{cte.}, L$$

Règim estacionari.

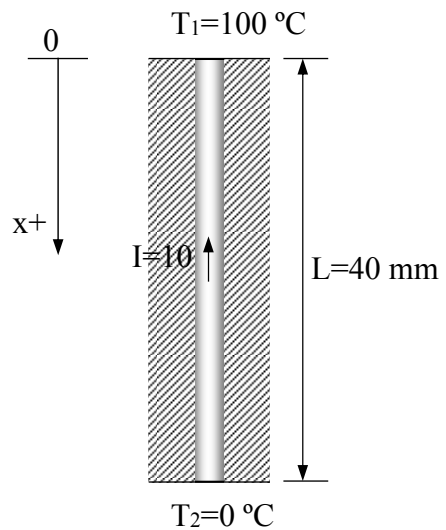
Distribució monodimensional.

Incògnites: T_1 , T_2 , $T(x)$ per $0 < x < L$

6.15 Conductor cilíndric aïllat lateralment

Tenim un conductor elèctric cilíndric com el de la figura que esta perfectament aïllat per la seva superfície lateral i es troba en règim estacionari.

Dades: llargada $L=40$ mm, diàmetre $D=10$ mm, conductivitat tèrmica $\lambda=2$ W/(m·K), resistivitat elèctrica $\rho_e=2 \times 10^{-5}$ $\Omega \cdot m$, intensitat $I=10$ A.
 Si les temperatures de les seves bases són, per $x=0$ $T=T_1=100$ °C i per $x=L$ $T=T_2=0$ °C



Trobar:

- 1) $T(x)$ en particular $T(0)$ i $T(L)$
- 2) $q(x)$ en particular $q(0)$ i $q(L)$
- 3) Fer un balanç global de potència tèrmica al volum de control delimitat per tota la superfície del conductor.

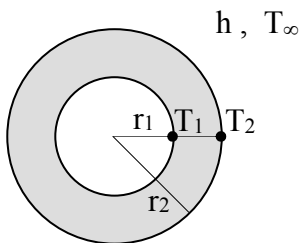
1) Primer calculem \dot{q}

2) Integrem l'equació diferencial

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{\lambda}$$

3) Tenim 2 condicions de contorn, etc.

6.16 Cable elèctric (cilindres coaxials amb i sense generació, resolt a l'ap. 2.3.2)



Dades:

r_1, r_2, L (gran), h, T_∞, λ (tots valors constants)
 \dot{q} (W/m³) $\neq 0$ per $0 < r < r_1$
 \dot{q} (W/m³) = 0 per $r_1 < r < r_2$
 Règim estacionari. Distribució unidimensional.

Incògnites: $T_1, T_2, T(r), \frac{q}{A}|_r$ per $\forall r$ tal que $0 < r < r_2$

2a. equació de Fourier en coordenades cilíndriques i règim estacionari $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$

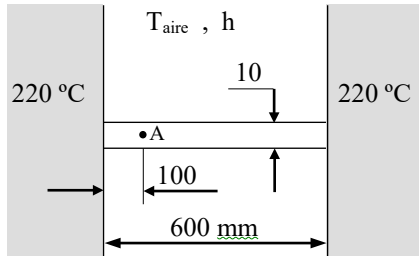
Resp.: $T_1 = T_\infty + \frac{\dot{q} r_1^2}{2} \times \left[\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda} + \frac{1}{h r_2} \right]$; $T_2 = T_\infty + \frac{\dot{q} r_1^2}{2 h r_2}$

$\forall r \quad 0 < r < r_1$, $T(r) = T_1 + \frac{\dot{q}}{4\lambda} (r_1^2 - r^2)$, $q(r) = \dot{q} \pi r^2 L = \dot{q} V(r)$, $\frac{q}{A}|_r = \frac{\dot{q} r}{2}$

$\forall r \quad r_1 < r < r_2$, $T(r) = T_1 - \frac{\dot{q} r_1^2}{2\lambda} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$, $q(r) = \dot{q} \pi r_1^2 L = \dot{q} V(r_1)$, $\frac{q}{A}|_r = \frac{\dot{q} r_1^2}{2r}$

6.17 Aleta d’extrem adiabàtic

Una barreta metàl·lica de 600 mm de longitud, 10 mm de diàmetre i una conductivitat tèrmica de 55 W/(m·K), que considerem independent de la temperatura, uneix dos blocs de grans dimensions a 220 °C. La temperatura de l’aire que l’envolta és de 25 °C i considerem un coeficient uniforme de transferència tèrmica, $h = h_{C+R} = 14 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$. Calcular:



- 1) La temperatura en règim estacionari del punt A situat a 100 mm de la base.
- 2) La temperatura en règim estacionari al punt mig de la barreta.
- 3) L’eficiència de la barreta com superfície estesa.

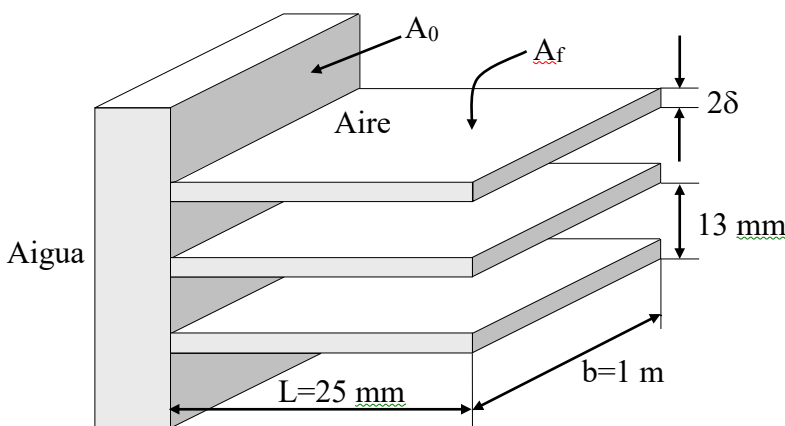
- 4) Determinar la potència tèrmica que travessa en règim estacionari la secció transversal de la barreta en el punt A situat a 100 mm de la base.
- 5) La potència tèrmica que dissipen a l’aire en règim estacionari els primers 100 mm de barreta (des de la base al punt A).

Resp.: 1) $T(0,100)=97,18 \text{ °C}$ 2) $T(0,300)=43,85 \text{ °C}$ 3) $\epsilon_f=0,3288$
 4) $q_{x=0,100} = 3,0368 \text{ W}$ 5) $q_{0-0,100} = 5,423 \text{ W}$ sent $q_{x=0} = 8,4598 \text{ W}$

6.18 Paret amb aletes a ambdós costats (extrem adiabàtic)

Se separen aire i aigua mitjançant una xapa plana d’acer suau de 4mm de gruix que es pot considerar de grans dimensions. Es proposa augmentar la potència tèrmica transferida entre aquest dos fluids afegint a la xapa pestanyes rectangulars rectes d’acer suau de 1,3 mm de gruix, 25 mm de longitud i espaiades a 13 mm entre centres.

¿Quin és el percentatge d’augment de la transferència de calor que és pot assolir afegint pestanyes a la cara de la xapa en contacte amb a) l’aire exterior, b) l’aigua, c) a ambdós costats? Prendre els coeficients superficials del costat aire i aigua iguals a 11,5 i 250 W/(m² K) respectivament. Consideri un quadrat de costat $b=1 \text{ m}$.



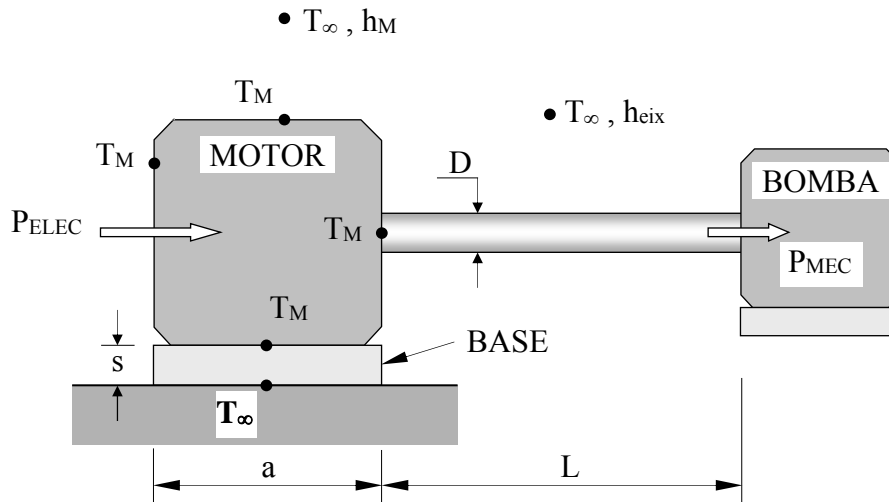
Dades:

$h_{\text{aigua}}=250 \text{ W}/\text{m}^2 \text{ K}$
 $h_{\text{aire}} = 11,5 \text{ W}/\text{m}^2 \text{ K}$
 $\lambda_{\text{acer suau}}=42,9 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$

$b = 1 \text{ m}$ (ample)
 $L = 25 \text{ mm}$ (alçada)
 $d = 13 \text{ mm}$ (separació)
 $2\delta = 1,3 \text{ mm}$ (gruix)
 $\delta_{\text{xapa}} = 4 \text{ mm}$ (gruix)
 $n_f =$ nombre d’aletes

Resp.: a) $\frac{q_{\text{aletes costat aire}}}{q_{\text{sense aletes}}} = 3,85$ b) $\frac{q_{\text{aletes costat aigua}}}{q_{\text{sense aletes}}} = 1,027$ c) $\frac{q_{\text{aletes als dos costats}}}{q_{\text{sense aletes}}} = 4,29$

6.19 Motor que acciona una bomba (ex. final del 27/06/2000, extrem adiabàtic, cas b)



Subministrem a un motor una potència elèctrica de 25 kW. Aquest motor acciona a través d'un eix de coure una bomba hidràulica, que rep de l'eix una potència mecànica de 15 kW. Per qüestions de seguretat laboral tenim la necessitat de determinar mitjançant balanços d'energia la temperatura T_M de la superfície de la carcassa del motor.

Dades:

$T_\infty = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ (temperatura de l'aire)
 $P_{MEC} = 15 \text{ kW}$ (potència mecànica que subministrem a la bomba a través de l'eix de coure)

Motor:

$h_M = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ (coeficient de **convecció + radiació** per la carcassa del motor)
 $A_M = 2 \text{ m}^2$ (superfície de la carcassa del motor exposada a convecció i radiació)
 $P_{ELEC} = 25 \text{ kW}$ (potència elèctrica que aportem al motor)

Eix:

$h_{eix} = 350 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ (coeficient de convecció forçada per l'eix de coure)
 $D = 60 \text{ mm}$ (diàmetre de l'eix) ; $L = 800 \text{ mm}$ (longitud de l'eix)
 $\lambda_{eix} = 400 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ (conductivitat tèrmica de l'eix de coure)

Base:

$a = 700 \text{ mm}$ (base quadrada) ; $s = 50 \text{ mm}$ (alçada de la base)
 $\lambda_{base} = 0,5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ (conductivitat tèrmica del material de la base)

Suposar a la base un perfil lineal de temperatures i una pèrdua tèrmica negligible per la seva superfície lateral.

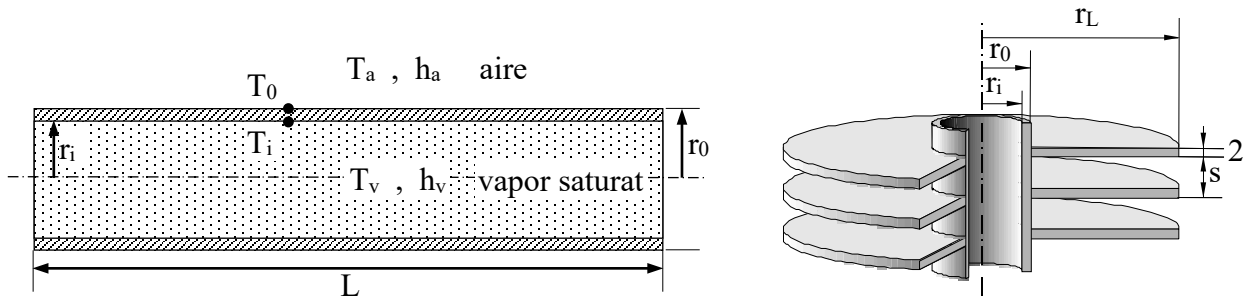
Negligim la pèrdua tèrmica a l'extrem de l'eix que acciona la bomba (aleta d'extrem adiabàtic)

Trobar:

- 1) El valor de la temperatura T_M de la superfície de la carcassa del motor en $^\circ\text{C}$.
- 2) Potència tèrmica dissipada a l'aire per la meitat de l'eix que toca el motor.
- 3) Potència tèrmica dissipada a l'aire per el quart d'eix que toca la bomba.
- 4) Temperatura en el punt mig del eix.
- 5) Quin valor de h_M fa que la temperatura anterior T_M en $^\circ\text{C}$ es redueixi un 77,4 %

Resp.: 5) $h_M = 97,32 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$

6.20 Tub amb aletes radials (ex. parcial curs 07-08 q2 , convecció a l'extrem)



A la figura de l'esquerra es mostra un tub d'acer de longitud L, radi interior r_i i exterior r_o que transporta vapor saturat a T_v °C en un ambient amb aire a T_a °C. **Dades:** $L=12$ m ; $r_i=10$ mm ; $r_o=12$ mm ; $T_a=10$ °C ; $h_a=100$ W/(m²·K) ; $T_v=160$ °C ; $h_v=12000$ W/(m²·K) ; $\lambda_{\text{acer}}=15$ W/(m·K)

- Calculi:**
- La potència dissipada en els L metres de tub nu, q_{0-L} (W)
 Temperatura de la superfície interior del tub nu, T_i (°C)
 Temperatura de la superfície exterior del tub nu, T_o (°C)

Consideri ara el mateix tub amb un conjunt d'aletes anulars d'acer integrades amb la geometria que es mostra a la figura de la dreta (cal tenir en compte la convecció per l'extrem). **Dades:** $r_L=24$ mm ; (aletes) $\lambda_f=\lambda_{\text{acer}}$; $s=7$ mm (separació entre aletes) ; $t=2\delta=2$ mm (gruix d'una aleta)

Utilitzi la formulació de Schmidt $\phi = \left[\frac{r_L}{r_o} - 1 \right] \left[1 + 0,35 \ln \left(\frac{r_L}{r_o} \right) \right]$; $e_f = \frac{\tanh(m r_o \phi)}{m r_o \phi} = \eta$

- Determini l'eficiència d'aquestes aletes, $e_f = \eta$
 La superfície primària total per L metres de tub amb aletes, A_p (m²)
 La superfície estesa total per L metres de tub amb aletes, A_f (m²)

A partir d'ara considerem el mateix tub però amb unes aletes anulars diferents. Les dades per aquestes noves aletes són: $e_f=\eta=0,52$; $A_p=0,54$ m² (sup. primària) ; $A_f=10,51$ m² (sup. estesa)

- Determini la potència total dissipada a l'aire $q_{0-L}(\text{amb aletes})$ (W)
 La potència dissipada per la superfície primària q_{A_p} (W)
 La potència dissipada per la superfície estesa A_f q_{A_f} (W)
 Temperatura de la superfície exterior del tub amb aletes, T_o (°C)

Ara volem aïllar els L metres del tub nu per aconseguir que la temperatura de la superfície es mantingui per sota de T_{0_max} i que simultàniament les pèrdues siguin inferiors a $q_{0-L}(\text{max})$ W Fem servir un aïllant de conductivitat $\lambda_{\text{aïllant}}$, i considerem ara un coeficient de transmissió superficial una mica menor a conseqüència de l'aïllament.

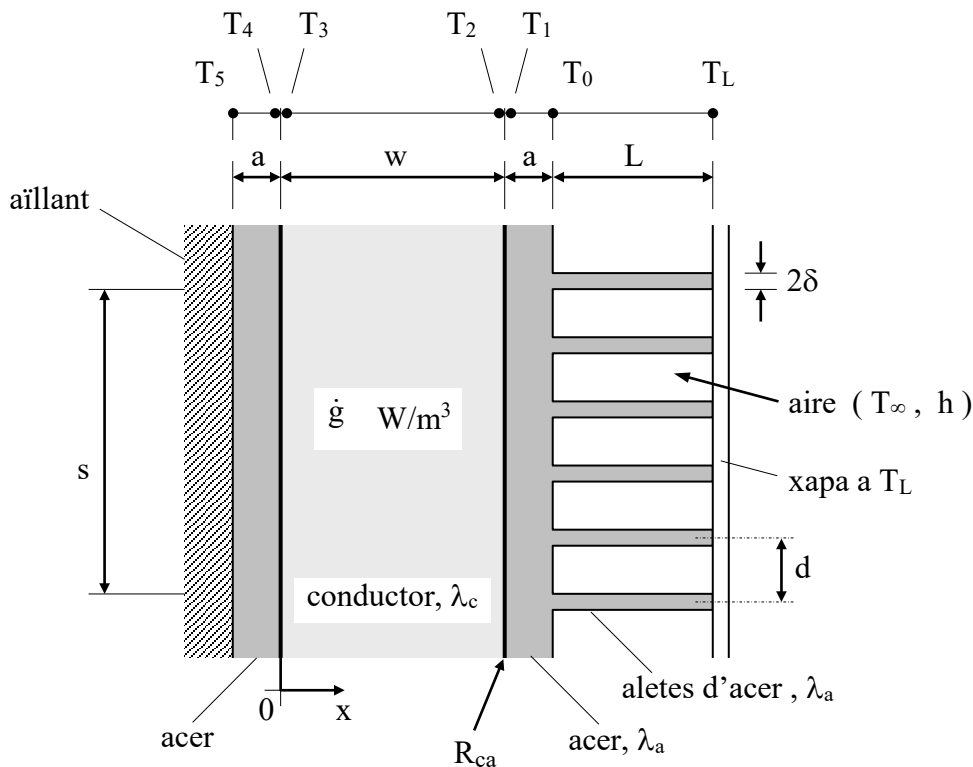
Dades: $h_{a_aïll}=75$ W/(m²·K) ; $T_{0_max}=50$ °C $q_{0-L}(\text{max})=6000$ W ; $\lambda_{\text{aïllant}}=0,60$ W/(m·K)

- Determini el mínim gruix d'aïllant per tal d'aconseguir tots dos objectius $x=$ mm

Resultats:

- $q_1=13246$ W $T_i=158,5$ °C
- $e_f=0,6523$ $A_p=0,65$ m² $A_f=5,18$ m²
- $q_3=77441$ W $T_o=139$ °C $q_{A_f}=70477,5$ W
- $x=15,44$ mm $T_o=48,7$ °C < 50 °C

6.21 Paret composta amb generació i aletes (variant parc. 06/04/01, cas c, resol't, 2.6)



Dades: $w=100 \text{ mm}$; $a=50 \text{ mm}$; $s=800 \text{ mm}$; $L=60 \text{ mm}$; $d=20 \text{ mm}$; $\delta=1,5 \text{ mm}$
 $\lambda_a= 11 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$; $\lambda_c= 13 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$; $R_{ca}=10^{-3} (\text{m}^2 \text{ K})/\text{W}$; $T_5=102,42 \text{ }^\circ\text{C}$
 $T_\infty= 25 \text{ }^\circ\text{C}$; $h= 20 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$; $T_L= 50 \text{ }^\circ\text{C}$; $A_c=s^2 \text{ m}^2$ (sup. frontal considerada)

Un conductor elèctric pla de grans dimensions, gruix w i conductivitat tèrmica λ_c s'encamisa amb unes plaques d'acer de gruix a i conductivitat tèrmica λ_a . Una de les plaques disposa d'un conjunt d'aletes rectes integrades (resistència de contacte =0) de secció transversal uniforme (constant).

La potència generada \dot{g} del conductor s'elimina per la superfície estesa que s'indica a la figura.

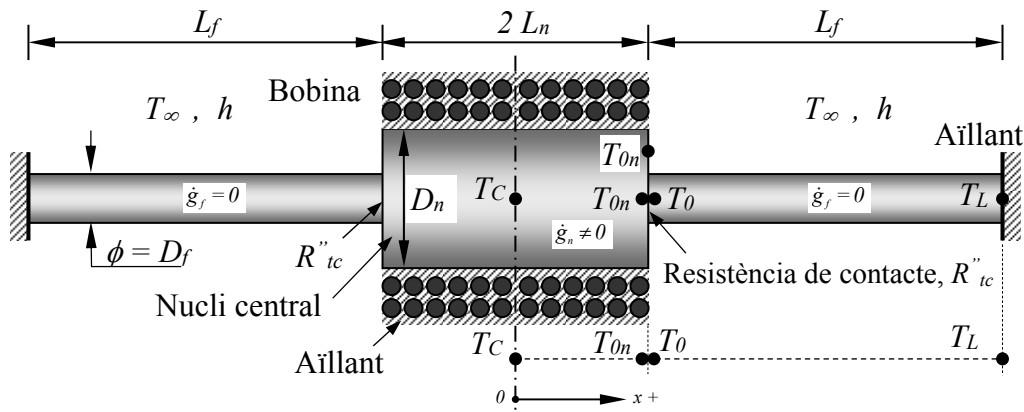
Entre les aletes i circula aire fred a la temperatura T_∞ . Prenem per l'aire un coeficient de convecció h uniforme per tot el recinte i negligim la radiació. La superfície oposada del conductor està perfectament aïllada. Entre el conductor i les plaques d'acer s'interposa una resistència de contacte de valor R_{ca}

Si en estat estacionari mesurem la temperatura $T_5 = 102,42 \text{ }^\circ\text{C}$ i amb les dades considerades, determinar per una superfície A_c (quadrat de costat s) del conductor elèctric:

- 1) Totes les temperatures T_0, T_1, T_2, T_4 , en $^\circ\text{C}$ i la potència generada al conductor elèctric.
- 2) Potència tèrmica que les aletes cedeixen a l'aire.
- 3) Potència tèrmica transferida pels extrems de les aletes.
- 4) Distribució de temperatures del conductor elèctric (eix x). Adjuntar la gràfica.
- 5) Secció de l'aleta a on la potència tèrmica transferida sigui mínima. (distància des de la base)

Resp.: 2) 2066,48 W 5) $0,04 < x_{\min} < 0,05$

6.22 Nucli escalfat per inducció electromagnètica (variant 04-05-q1, resolt ap. 2.6)



Dades:

Nucli central: cilindre ($2L_n$) envoltat per una bobina (amb generació) (subíndex= n)
 $D_n=40$ mm, $\lambda_n=8$ W/(m·K), $L_n=35$ mm, $\dot{g}_n = 3 \times 10^5$ W/m³, $R''_{tc}=2 \times 10^{-4}$ (m²·K)/W

Cilindre (L_f): fora de la bobina (sense generació) (subíndex= f):

$D_f=12$ mm, $\lambda_f=11$ W/(m·K), $L_f=65$ mm, $T_\infty = 5$ °C, $h = 9$ W/(m²·K)

Un cilindre d'acer amb conductivitat tèrmica λ_n de longitud $2L_n$ i diàmetre D_n (nucli central) s'envolta d'una bobina per escalfar-lo emprant inducció magnètica que representa una generació tèrmica volumètrica interna i uniforme de \dot{g}_n (W/m³). A cada una de les bases del nucli central i recolzem un cilindre també d'acer però de conductivitat tèrmica λ_f de longitud L_f i diàmetre D_f , sense generació de potència tèrmica $\dot{g}_f = 0$ exposat a un ambient d'aire en calma a la temperatura T_∞ i un coeficient de convecció h , sent negligible la radiació tèrmica amb l'entorn. Entre aquests cilindres i el nucli central s'interposa una resistència de contacte R''_{tc} i l'extrem oposat dels mateixos es considera adiabàtic.

Hipòtesis: a) Règim estacionari b) Considerem flux unidimensional en el nucli central al estar aquest aïllat lateralment. c) Ambdues bases del nucli central ($x = \pm L_n$) estan a la temperatura uniforme T_{0n}

d) Just després de la resistència de contacte la temperatura és T_0 (base del cilindre L_f)
 Determinar tots els resultats de l'exercici per **mitja peça**, o sigui des de $x=0$ fins a $x=L_n+L_f$,

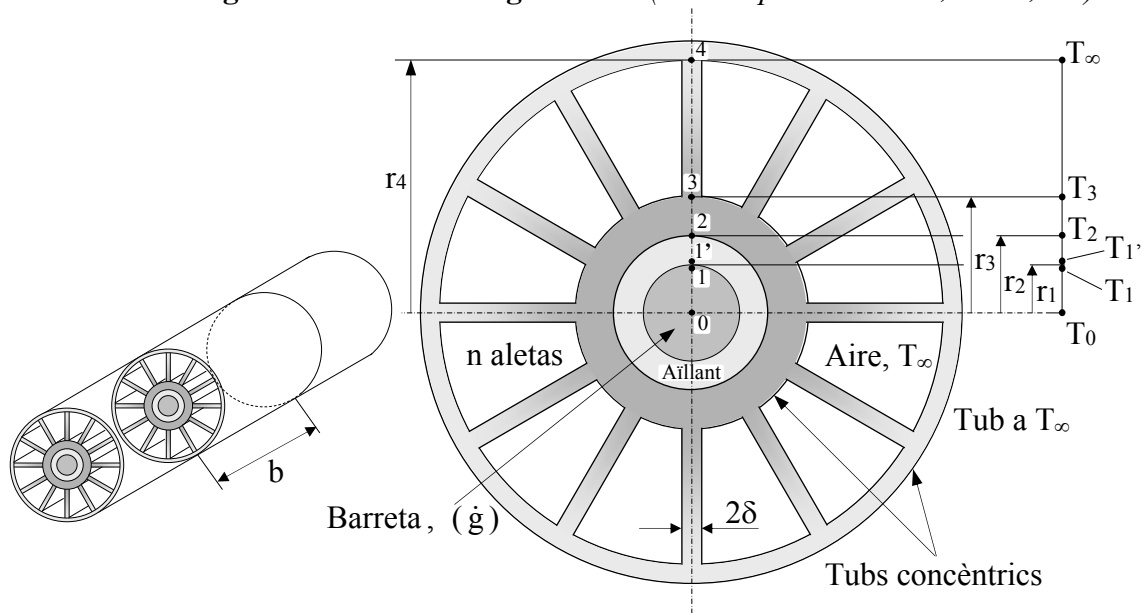
Trobar:

- 1) L'eficiència $\epsilon_{f,tc}$ d'una d'aquestes aletes (cilindre L_f) considerant la resistència de contacte.
- 2) El valor en °C de la temperatura T_{0n} en $x = +L_n$ (base del nucli central).
- 3) El valor en °C de la temperatura T_0 en $x = +L_n$ just després de la resistència de contacte.
- 4) Potència cedida a l'aire en W per la superfície primària en $x = +L_n$.
- 5) Potència cedida a l'aire en W per el cilindre de longitud L_f .
- 6) La temperatura del centre ($x=0$) del nucli central T_C en °C.
- 7) El perfil de temperatures $T(x)$ del nucli central en °C.

Si a partir d'ara els extrems no estan aïllats i la seva temperatura té un valor fixat $T_L = T_\infty$ trobar:

- 8) Potència (W) que la superfície primària i el cilindre (L_f) cedeixen per convecció a l'aire.
- 9) Temperatura T_{0n} en °C de la base del nucli central en $x = +L_n$.
- 10) Potència tèrmica transferida per l'extrem del cilindre de longitud L_f en $x = L_n+L_f$.

6.23 Barreta amb generació i aletes longitudinals (variant parc 02/11/01, resolts, 2.6)



Dades: $r_1=10 \text{ mm}$, $r_2=12 \text{ mm}$, $r_3=17 \text{ mm}$, $r_4=40 \text{ mm}$, $b=0,6 \text{ m}$

Barreta: $T_0=145,9 \text{ }^\circ\text{C}$; $\lambda_b=1,5 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$; *Aïllant:* $\lambda_a=0,5 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$; $R_{tc}=1,2 \times 10^{-3} \text{ (m}^2 \text{ K)/W}$

Aletes: $n=12$; $\delta=1,5 \text{ mm}$; $\lambda_f=42 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$; $h=200 \text{ W/(m}^2\text{K)}$; $T_\infty=35 \text{ }^\circ\text{C}$; $T_4=T_\infty=35 \text{ }^\circ\text{C}$

Una barreta **molt llarga** de radi r_1 i conductivitat tèrmica λ_b té una generació tèrmica volumètrica interna i uniforme \dot{g} (W/m^3). La barreta s'envolta d'un aïllant tèrmic de gruix r_2-r_1 i conductivitat tèrmica λ_a . Entre la barreta i l'aïllant s'interposa una resistència de contacte R_{tc} . Mitjançant un termoparell coneixem la temperatura de l'eix de la barreta T_1 .

La barreta i l'aïllant que l'envolta es troben a l'interior del conjunt format per dos tubs concèntrics ($\lambda = \lambda_f$) units mitjançant les n aletes (λ_f) longitudinals de secció recta rectangular constant i semigruix δ que es mostren a la figura. Negligim la resistència de contacte entre aquest conjunt i la superfície externa (punt 2) de l'aïllant.

Entre les aletes tenim aire fred a la temperatura T_∞ . El tub exterior que envolta a les aletes es troba a una temperatura constant (i no està envoltat d'aire com sembla a la figura) y aquesta és igual a la temperatura de l'aire T_∞ . Pensem que al voltant de la corona exterior i tenim una font tèrmica que manté la corona a la temperatura T_∞ .

Prenem per l'aire un coeficient de convecció h uniforme per tot el recinte i negligim la radiació. En estat estacionari i considerant un tram de longitud b :

Determinar,

- 1) El valor en $^\circ\text{C}$ de la temperatura T_3 és,
- 2) La generació interna de potència tèrmica (uniforme) \dot{g} en kW/m^3 a la barreta és,
- 3) La potència tèrmica en W que el conjunt de les 12 aletes cedeix a l'aire interior és,
- 4) La potència tèrmica en W que la superfície primària cedeix a l'aire interior és,
- 5) La potència tèrmica en W que el conjunt de les 12 aletes transfereix pels extrems, (+ si surt)
- 6) L'eficiència e_f d'una d'aquestes aletes és,
- 7) Si anomenem $L=r_4-r_3$, trobar la posició x (mm) de l'aleta a on la potència tèrmica transferida per conducció sigui mínima. (distància des de la base).

Suposi a partir d'ara que la generació de potència val 6000 kW/m^3

- 8) El valor en $^\circ\text{C}$ de la temperatura T_1 a la superfície de la barreta és,

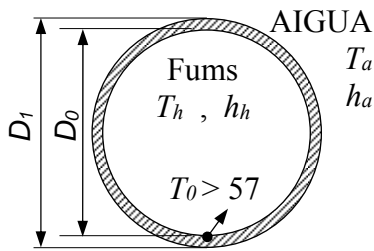
9) La temperatura $T(r)$ en $^{\circ}\text{C}$ per un punt de la barreta tal que $r = \frac{2}{3} \times r_1$ val,

10) La temperatura T_1' en $^{\circ}\text{C}$ just després de T_1 (*resistència de contacte*) és,

Lliurar aquest full amb el cognom i nom corresponent (incloent la solució manual)

Concepte	Valor	Unitats
T_3		$^{\circ}\text{C}$
\dot{g}		W/m^3
q_{aire}		W
q_{primaria}		W
q_{extrem}		W
Eficiència $e_f = \eta_f$		
x (pot mín)		mm
T_1		$^{\circ}\text{C}$
$T(2r_1/3)$		$^{\circ}\text{C}$
T_1'		$^{\circ}\text{C}$

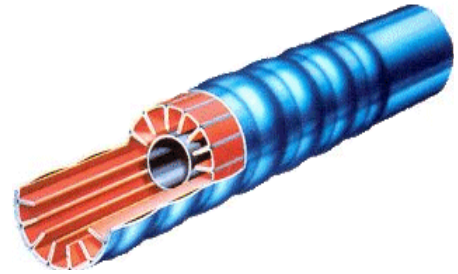
6.24 Tub Viessmann



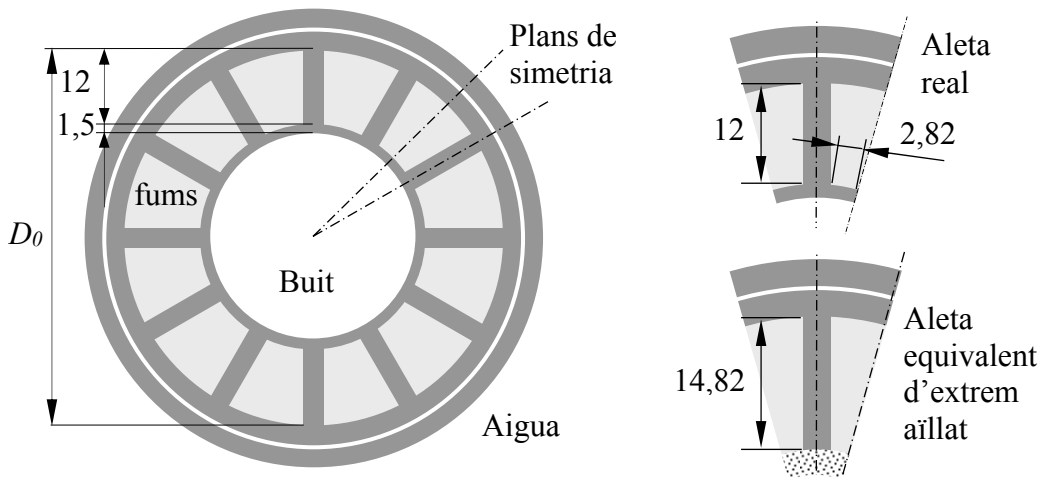
Quan la temperatura de retorn a una caldera es molt baixa, i la temperatura de la paret interior del tub T_0 en contacte amb els fums és redueix per sota de la temperatura de rosada ($T_R = 57\text{ °C}$) aleshores apareixen condensats de gran poder corrosiu.

Per aquest motiu s'ha de complir com condició de disseny que $T_0 > 57\text{ °C}$

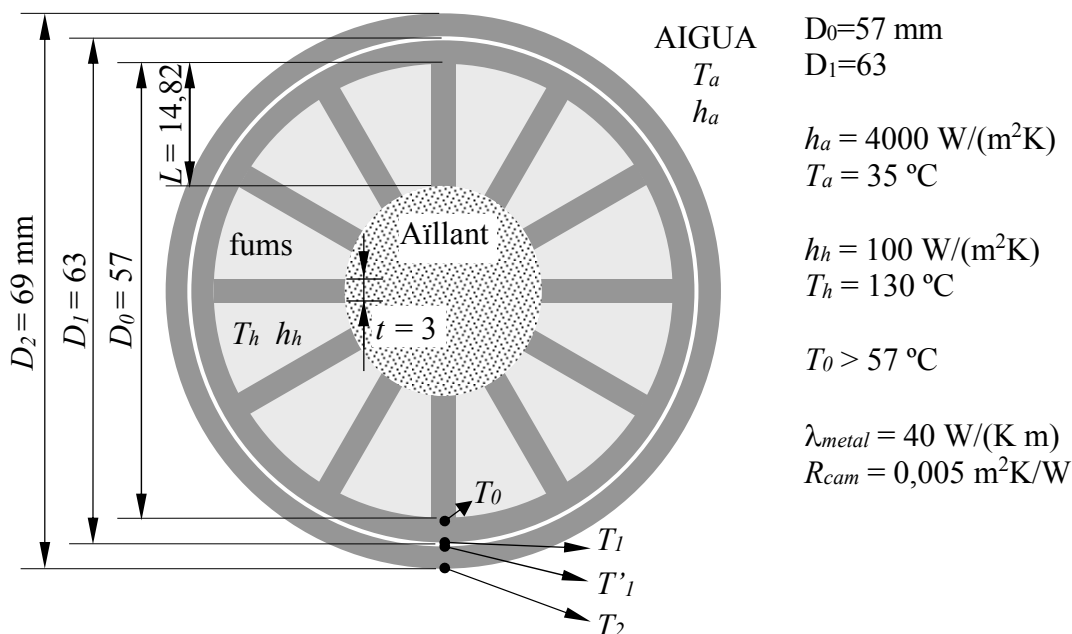
Per evitar aquest problema



un fabricant proposa afegir un tub concèntric exterior amb mal contacte amb l'original al deixar un petit espai d'aire entre ambdós, i per compensar aquest augment de resistència tèrmica decideix afegir 12 aletes longitudinals interiors que acaben damunt d'un tub buit interior, que actua com una prolongació de les aletes, de forma que a nivell pràctic és com si les aletes tinguessin una longitud addicional igual a la de l'arc de tub que arriba fins al pla de simetria (2,82 mm).



En definitiva els resultats seran idèntics als que obtindrem estudiant la següent geometria equivalent (cotes en mm)



Per tots els càlculs considerar una longitud de tub = 1 m

Determinar:

Tub llis

- 1) Emprant el tub simple sense aletes, indicar la temperatura mínima de l'aigua en °C, que ens garanteixi l'absència de condensacions o sigui que T_0 sigui major a 57 °C

Tub amb aletes

- 2) Ara considerant el tub amb aletes de l'enunciat, si volem reduir la temperatura de l'aigua fins a $T_a = 35$ °C ¿Quin hauria de ser el valor mínim de la resistència de contacte (de la cambra d'aire) expressada en $\text{m}^2\text{K/W}$ per que T_0 continues sent major a 57 °C evitant-se així la condensació dels fums?.
- 3) La eficiència en % de las aletes seria:
- 4) Ara amb la resistència de contacte facilitada de $R_{cam} = 0,005$; quina seria la temperatura mínima en °C a la que pot estar l'aigua T_a evitant-se ara també la condensació dels fums.

Tub amb aletes ($R_{cam} = 0,005$ i la temperatura de l'aigua $T_a = 35$ °C)

- 5) El valor de T_0 en °C.
- 6) Fracció de potència en % que els fums cedeixen a través de la superfície primària.
- 7) Temperatura en °C de la aleta a 12 mm de la base.
- 8) Potència en W/m guanyada per la primera part de les aletes (des de la base fins a una distancia de 12 mm)
- 9) Potència en W/m transferida per conducció a 12 mm de la base.
- 10) Potència total guanyada per l'aigua en W/m
- 11) Potència en W/m guanyada per la segona part de les aletes, des de els 12 mm fins a l'extrem.
- 12) ¿Es acceptable considerar en règim estacionari $T=T(x) \quad \forall x \quad 0 < x < L$, o sigui una única temperatura de l'aleta per tota la secció de la mateixa ?
- 13) Si l'extrem de l'aleta no estes aïllat tal i com correspon a la geometria equivalent proposada a l'enunciat, i aquest estes en contacte amb els fums, ¿La potència transferida en aquestes noves condicions serà major o menor a la calculada anteriorment?

Resp.: 2) $\epsilon_f=0,894$, 3) $R_{cam} = 9,155 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2\text{K/W}$, 6) 0,31 , 8) -1099,7 W

6.25 Tub amb aletes interiors en creu (parcial 13/04/2000, extrem adiabàtic)

Un tub de coure ($\lambda = 385 \text{ W/(K m)}$) de diàmetres $D_0 = D_{\text{ext}} = 22$ i $D_{\text{int}} = 20$ mm disposa interiorment de $n_f = 4$ aletes longitudinals de $2\delta = 1$ mm de gruix, la longitud de les quals arriba fins l'eix del propi tub.

Pel seu interior circula gas, que en una posició determinada es troba a $T_{\text{int}} = 90$ °C, essent el coeficient de convecció interior $h_{\text{int}} = 80 \text{ W/(m}^2\text{K)}$.

La temperatura de l'aire ambient que envolta el tub és $T_{\text{aire}} = 25$ °C, i el coeficient de convecció exterior es pot aproximar en aquestes condicions per la següent expressió:

$$h_{c, \text{aire}} = 3,5 (T_0 - T_{\text{aire}})^{0,25} \quad (T_0 \text{ es la temperatura superficial exterior del conducte)}$$

El tub es troba en un recinte de grans dimensions, les parets del qual són a $T_{\text{entorn}} = 10$ °C.

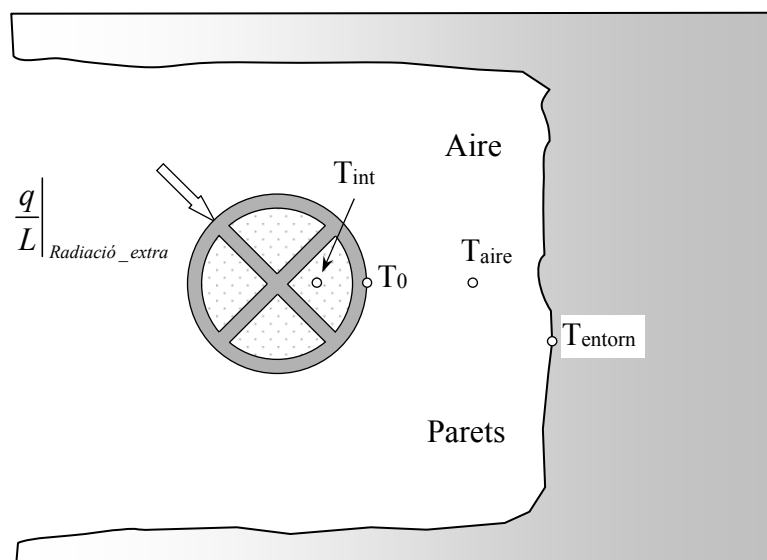
L'emissivitat de la superfície del tub, que coincideix numèricament amb l'absorbància, és $\epsilon_{\text{tub}} = \alpha_{\text{tub}} = 0,92$, i la de les parets del recinte $\epsilon_{\text{entorn}} = 0,25$.

Adicionalment el tub rep uniformement una potència radiant extra de 25 W/m per metre lineal.

1. Determineu en aquesta posició i en les condicions indicades a l'enunciat, la potència perduda pel gas interior per metre lineal de tub.
2. Calculeu el gruix mínim d'aïllament necessari ($\lambda_{\text{aïll}} = 0,025 \text{ W/(K m)}$ i $\epsilon_{\text{aïll}} = \epsilon_{\text{tub}}$) que permet limitar les pèrdues de calor del gas per sota del 50 % del valor calculat a l'apartat anterior, i que alhora per raons de seguretat ha de reduir la temperatura superficial a un valor màxim de 60 °C. (Cal tenir en compte que la potència radiant extra augmenta de forma proporcional a l'increment del diàmetre del tub un cop aïllat, segons la següent expressió,

$$q_{\text{Rad_extra_amb_aïllant}} = q_{\text{Rad_extra_tub_nu}} \times \frac{D_{\text{ext}} + 2x}{D_{\text{ext}}}, \quad \text{on } x \text{ és el gruix d'aïllament}$$

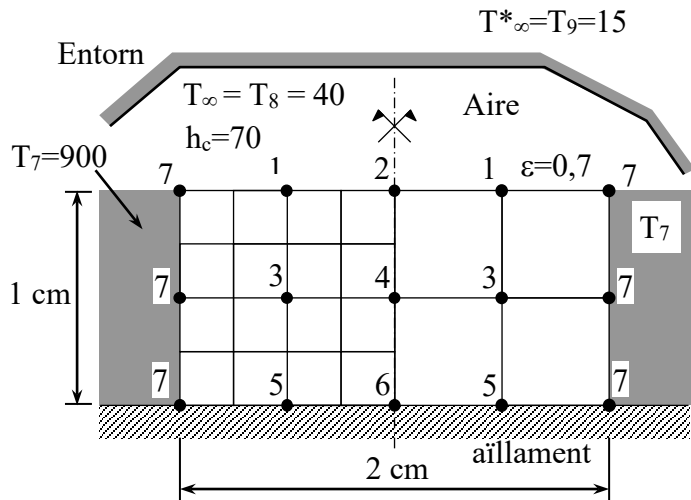
3. Pel tub sense aïllar, calculeu el valor mínim que hauria de tenir la potència radiant extra per tal d'aconseguir que el gas que circula per l'interior del tub s'escalfés.
4. Comproveu si és acceptable considerar que la temperatura de l'aleta només varia en funció de la distància a la base.



Resp.: $\epsilon = 0,988$, 1) $50 < q < 55 \text{ W/m}$, 2) $x_{\text{min}} = 2,327 \times 10^{-3}$

6.26 Tira de ceràmica (regim estacionari)

Una tira ceràmica ($\lambda=3, \rho=1600, c=800$ S.I.) de 1×2 cm s'interposa entre dos blocs metàl·lics que es mantenen a 900°C . La part inferior de la ceràmica es pot considerar ben aïllada. La part superior s'exposa a convecció amb aire a 40°C , $h=70 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ i a radiació amb un entorn a 15°C ($\epsilon=0,7$)



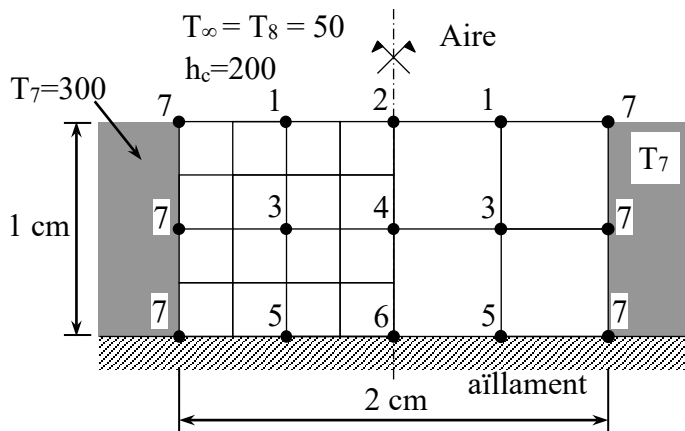
Trobar en regim estacionari i emprant un mètode matricial:

- a) Temperatures de tots els nodes
 - b) El balanç de calor de la meitat de la peça.
- Suposi $T_1=T_2=900^\circ\text{C}$ per iniciar les iteracions.

Resp.: $T_2 = 686,97^\circ\text{C}$ (estacionari) , $q_{\text{conv}} = -354 \text{ W}$, $q_{\text{bloc}} = 635,68 \text{ W}$
 $q_{\text{rad}} = -281,6 \text{ W}$

6.27 Tira de ceràmica (regim transitori, mètode implícit)

Una tira ceràmica ($\lambda=3, \rho=1600, c=800$ S.I.) de 1×2 cm s'interposa entre dos blocs metàl·lics que es mantenen a 300°C . La part inferior de la ceràmica es pot considerar ben aïllada. La part superior s'exposa a un ambient convectiu amb aire a 50°C , $h=200 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$. En l'instant $t=0$ el material ceràmic es troba a 300°C .



- a) Determini el interval de temps mínim que garanteixi l'estabilitat si volguessim fer servir el mètode explícit.

Trobar per $t=12 \text{ s}$, fent servir ara el mètode implícit i emprant un interval de temps de 2 segons.

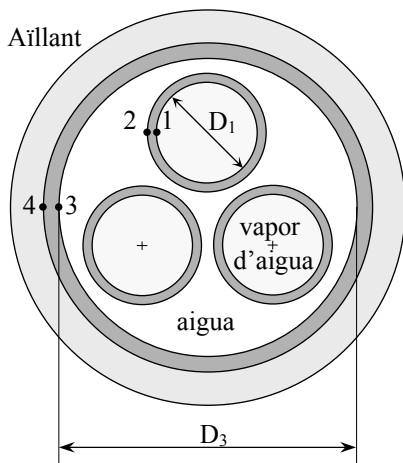
- b) Temperatures de tots els nodes en $^\circ\text{C}$.
- c) Balanç de potències de tota la peça al segon interval de temps.
- d) Balanç de calor de tota la peça durant els 6 primers intervals de temps en. ($\Delta t = 2 \text{ s}$)
- e) Temperatures del règim estacionari en $^\circ\text{C}$.

Resp.: a) $\Delta t_{\text{max_admissible}} = 2.3 \text{ s}$
 b) [246.69 $^\circ\text{C}$, 236.51, 282.03, 276.81, 290.56, 287.4]
 c) $q_{\text{aire}} = -651.1 \text{ W}$ $q_{\text{bloc}} = 134.7 \text{ W}$ $q_{\text{gen}} = 0$ $q_{\text{emmagtz.}} = -516.4 \text{ W}$
 d) $E_{\text{aire}} = -7482.4 \text{ J}$ $E_{\text{bloc}} = 2364.7 \text{ J}$ $E_{\text{gen}} = 0$ $E_{\text{emmagtz.}} = -5117.7 \text{ J}$
 e) Estacionari [229.51 $^\circ\text{C}$, 212.45, 262.62, 249.55, 271.43, 260.49]

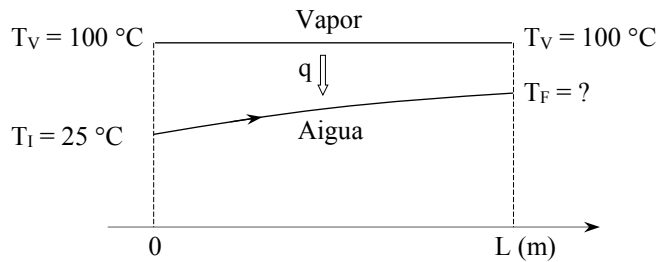
6.28 Envoltent i $n_t = 3$ tubs (algoritme a l'ap. 4.4.15)

Un condensador consisteix en una envoltent i tres tubs d'inoxidable ANSI 310 de 3/4 in BWG 16 i una envoltent de 2 in BWG 18 ($\phi_{\text{nominal}} = \phi_{\text{exterior}}$). Pels tubs interiors de 3/4 in circula vapor d'aigua saturat a 100 °C i entre els tubs i l'envoltent s'introdueix aigua a 1,7 m/s i 25 °C. L'envoltent està perfectament aïllada, de forma que podem suposar negligible la transferència de calor cap a l'ambient. Suposant un valor del coeficient de convecció típic pel vapor d'aigua de 7000 W/(m²·K)

- Calculeu la longitud del bescanviador perquè la temperatura de sortida de l'aigua sigui de 35 °C, i la quantitat de vapor condensat en aquest cas.
- Calculeu la pèrdua de càrrega de l'aigua.
- Calculeu la quantitat de vapor condensat si el cabal d'aigua es redueix un 25 % essent la longitud del bescanviador la calculada a l'apartat a).
- Jutgeu molt breument (6 línies màxim) si és una bona alternativa emprar un canviador d'envoltent i tubs per aquest disseny i si es lògic aïllar l'envoltent.



Conductivitat tèrmica
(acer inoxidable-ANSI 310)
 $\lambda(T) = 11,86 + 2,246 \cdot 10^{-2} (T - 273) \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$



Característiques geomètriques del condensador

- $D_2 = 3/4 \text{ in} = 19,05 \times 10^{-3} \text{ m}$
- BWG 16 $\Rightarrow e_{12} = 1,651 \times 10^{-3} \text{ m}$
- $D_1 = D_2 - 2e_{12} = 15,748 \times 10^{-3} \text{ m}$
- $D_4 = 2 \text{ in} = 50,8 \times 10^{-3} \text{ m}$;
- BWG 18 $\Rightarrow e_{34} = 1,2446 \times 10^{-3} \text{ m}$
- $D_3 = D_4 - 2e_{34} = 48,3108 \times 10^{-3} \text{ m}$

Propietats de l'aigua (S.I.):

$$c_p = 2820 + 11,82 \times T - 0,03502 \times T^2 + 3,599 \times 10^{-5} T^3$$

$$\lambda = -0,3835 + 0,00525 \times T - 6,265 \times 10^{-6} T^2$$

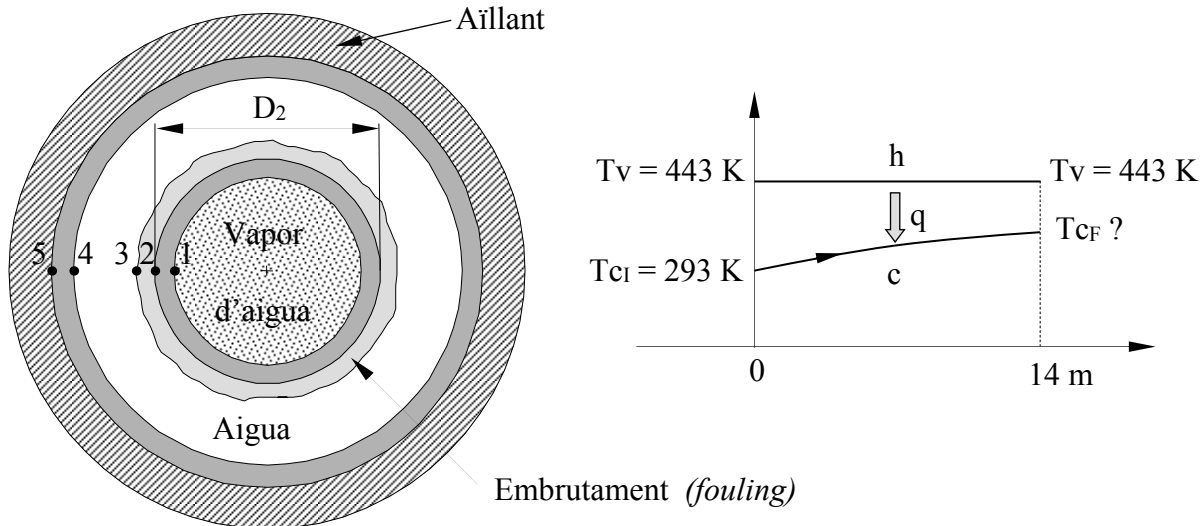
$$\rho = 741,966 + 1,9613 \times T - 0,00371211 \times T^2$$

$$\log_{10} \mu = -13,73 + \frac{1830}{T} + 0,0197 \times T - 1,47 \times 10^{-5} T^2$$

Resp.: b) $\Delta P = 6413 \text{ Pa}$ c) Amb la reducció del cabal $\Delta P = 3799,55 \text{ Pa}$

6.29 Doble tub amb embrutament (curs 05-06-q1, 18/01/2006)

Un condensador de doble tub presenta per el costat tubs després d'un any de funcionament un embrutament (fouling) tal com es mostra a la figura. Per inspecció directa, comprovem que es tracta d'una pel·lícula o incrustació sòlida bastant uniforme d'un gruix $x = 0,2$ mm i amb una conductivitat tèrmica $\lambda = 0,4$ W/(m·K). Aquest condensador escalfa aigua mitjançant vapor d'aigua saturat a 443 K.



Vapor d'aigua saturat:

$h_v = 6000$	W/(m ² ·K)	coeficient de convecció del vapor saturat
$T_v = 443$	K	temperatura del vapor saturat
$\Delta h_{lg} = 2049,5$	kJ/kg	calor latent de vaporització a 443 K

Aigua:

$m_c = 5,5$ kg/s	cabal màssic d'aigua per l'envolvent	
$T_{cI} = 293$ K	temperatura d'entrada	
$c_p = 2820 + 11,82 \times T - 0,03502 \times T^2 + 3,599 \times 10^{-5} T^3$	[calor específic, J/(kg·K)]	
$\lambda = -0,3835 + 0,00525 \times T - 6,265 \times 10^{-6} T^2$	[conductivitat tèrmica, W/(m·K)]	
$\rho = 741,966 + 1,9613 \times T - 0,00371211 \times T^2$	[densitat, kg/m ³]	
$\log_{10} \mu = -13,73 + \frac{1830}{T} + 0,0197 \times T - 1,47 \times 10^{-5} T^2$	[viscositat dinàmica, kg/(m·s)]	

Tubs:

El canviador consta de dues canonades llises d'acer al carboni de 14 m de llargària, amb una conductivitat tèrmica igual a $\lambda_{tub} = 18$ W/(m·K)

Tub interior de 1 in. Sch 40 ($D_1 = 26,645$ mm $D_2 = 33,401$ mm)

Tub exterior de 3,5 in. Sch 40 ($D_4 = 90,119$ mm $D_5 = 101,600$ mm)

Llargària dels tubs $L = 14$ m ; Considerem llisa la superfície de la incrustació.

Canviador brut (7 punts)

Suposi $T_{cF} = 300$ K i $T_3 = 370$ K per començar a iterar. Faci només la primera iteració.

- 1) Determinar el coeficient de transferència global U_2 en W/(m²·K), la temperatura final de l'aigua T_{cF_nova} (en °C), la potència transferida q (kW), la quantitat d'aigua que condensa

\dot{m}_{cond} (kg/h) i la pèrdua de càrrega ΔP (kPa). Recalculi amb la potència trobada T_{3_nova} per iniciar la 2^a iteració.

Explicar amb claredat els passos seguits.

Canviador net (3 punts) (simplement assignant $D_3=D_2$ en els càlculs anteriors o be $x=0$ s’anul·la la resistència d’embrutament)

2) Determinar el coeficient de transferència global U_{2_net} , la potència transferida i la reducció

de potència en aquest cas $\left(\% \text{ reducció de potència} = \frac{q_{net} - q_{brut}}{q_{net}} \times 100 \right)$.

Resultats a la taula adjunta.

Cognom i nom:

Apartat 1)

Costat aigua	Valor	Unitats (S.I.)	Costat aigua	Valor	Unitats (S.I.)
P_h		m	G		kg/(m ² ·s)
P_t		m	Re		
S_h		m ²	Pr		
D_h		m	n		
ΔT_{MLDT}		K	ϕ		
q		kW	C_f		
U_2		W/(m ² ·K)	Nu		
Hausen-Duwel			R_{vapor}		K/W
h_{caigua}		W/(m ² ·K)	R_{xapa}		K/W
T_{CF_nova}		°C	$R_{embrutamen}$		K/W
\dot{m}_{cond}		kg/h	T_{3_nova}		°C
ΔP		kPa			

Apartat 2) (cal recalcular pràcticament tota la taula anterior)

Costat aigua	Valor	Unitats (S.I.)
U_{2_net}		W/(m ² ·K)
q_{net}		kW
% reducció		

Resp.: 1) $\Delta P=1,744$ kPa , $U_2=874,368$ W/(m²·K) , $Nu=422,5$
 2) $\Delta P=1,717$ kPa , $h_{aigua}=4313,8$ W/(m²·K) , $T_{3,nova}=77,9$ °C

6.30 Conducte amb manòmetre diferencial entre els seus extrems

Un tub d'alumini d'un feix és sotmès a flux creuat amb vapor d'aigua saturat a la temperatura de 100 °C per escalfar un líquid que circula pel seu interior, amb les propietats globals del seu punt mig que s'adjunten:

ρ (kg/m ³)	1101,43	μ (kg/m·s)	9,5714E-3
c_p (J/kg K)	2474	μ_o (kg/m·s)	2,1487E-3
ν (m ² /s)	8,69E-6	Pr	93
λ (W/m·K)	0,256	-	-

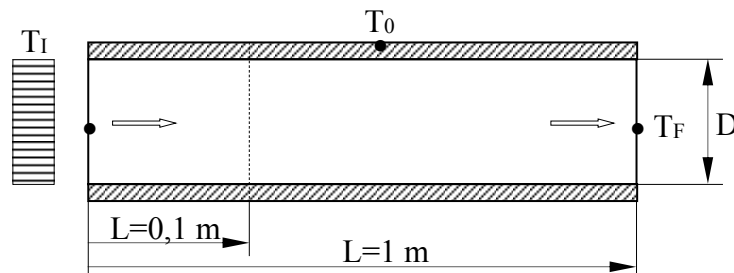
Dades geomètriques: Diàmetre interior $D_{int} = 30 \text{ mm}$, Longitud $L = 0,90 \text{ m}$

Mitjançant un manòmetre diferencial es llegeix una pèrdua de càrrega entre l'entrada i la sortida de 98,73 mm de c.a. (L=0,90 m) Emprant si us cal l'equació de Filolenko, **trobar**:

- 1) Flux a l'entrada (G en kg/m²s) i la velocitat del líquid en el punt mig del seu recorregut.
- 2) El coeficient de convecció interior.
- 3) Si la temperatura d'entrada fos igual a 312,2 K determini la temperatura de sortida i la potència guanyada per el líquid.

Resp.: 2) $h_{int}=1216,65 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$

6.31 Tub amb temperatura de paret constant.

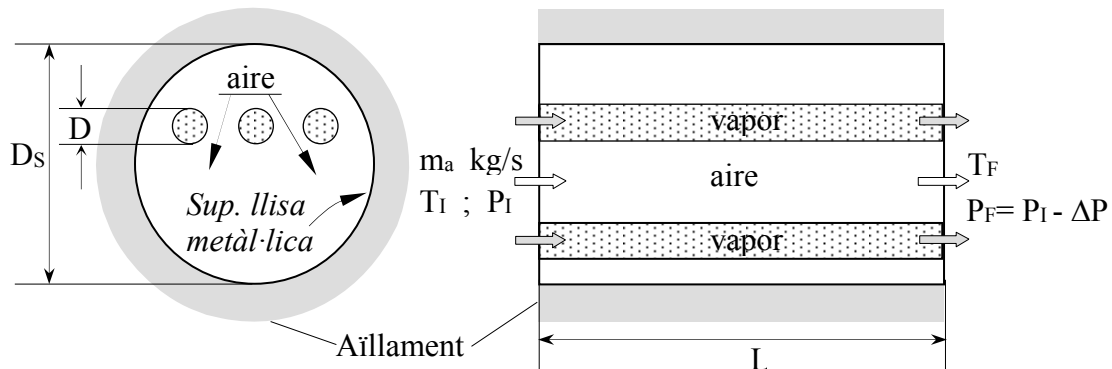


S'introdueixen 0,01 kg/s d'aire sec a 283 K i 101,3 kPa (considerar pressió constant para el càlcul de propietats) en un tub de acer de 20 mm de diàmetre interior i es manté a tota la seva longitud una temperatura de paret constant de 383 K. Considerant la superfície interior llisa i utilitzant la fórmula de Gnielinski, determinar per els dos trams que es mostren a la figura, un de 0,1 m i l'altre de 1 metre de longitud,

- | | | |
|--|--|-------------------------------------|
| Temperatura final de cada tram en °C. | 1) $T_F(0,1)=290,187 \text{ K}$ | $T_F(1)=329,387 \text{ K}$ |
| 1) Potència recuperada per l'aire. | 2) $q_{0-0,1}=72,155 \text{ W}$ | $q_{0-1}=465,731 \text{ W}$ |
| Coeficient de convecció mig per cada tram. | 3) $h_{0-0,1}=119,174 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ | $q_{0-1}=99,612 < h_{0-0,1} !$ |
| Pèrdua de càrrega. | 4) $\Delta P_{0-0,1}=40,103 \text{ Pa}$ | $\Delta P_{0-1}=448,644 \text{ Pa}$ |

6.32 Escalfador d'aire (*envolvent amb un feix longitudinal*)

En una canonada metàl·lica de longitud $L=5$ m perfectament aïllada, de diàmetre interior $D_s=200$ mm i superfície interior llisa, es col·loquen $n=25$ tubs metàl·lics de diàmetre $D=25,4$ mm, disposats regularment a portell. Per l'interior dels tubs circula vapor d'aigua saturat a la pressió atmosfèrica i per l'interior del conducte, s'introdueix aire a $P_1=1$ atm i una temperatura global de $T_1=60$ °C. Mitjançant la lectura d'un manòmetre diferencial coneixem la pèrdua de càrrega del costat aire, $\Delta P=180$ mm de c.a. Mesures elèctriques ens permet estimar la potència total consumida per l'equip d'impulsió en 1300 W.



Per estimar les propietats de l'aire a la temperatura mitja global del tram podeu considerar inicialment un increment $T_F-T_1=30$ °C. Si el regim no es laminar aplicar Filolenko i Gnielinski.

Determinar: (fer servir les propietats de l'aire en funció de la temperatura i $c_p=1009$ J/(kg·K))

- Quin es el cabal d'aire m_a (kg/s) que circula ?
- Rendiment de l'equip d'impulsió de l'aire? $\left(\eta = \frac{P_{UTIL}}{P_{TOTAL}} \right)$
- Quina temperatura global T_F tindrà l'aire a la sortida $x=L$?
- Quina potència tèrmica absorbeix l'aire en el mateix tram $0-L$?
- Responen les mateixes preguntes si la pèrdua de càrrega fos de 10 mm de c.a. i la potència total consumida per l'equip d'impulsió fos ara igual a 16 W

Apunti a la taula els *resultats definitius* i les unitats corresponents dels apartats a,b,c i d:

CONCEPTE	Valor	Unitats (S.I.)	CONCEPTE	Valor	Unitats (S.I.)
m_a		kg/s	D_h		
Pot. útil		W	Re_D		
η		%	C_f		
T_F		°C	Pr		
q		W	Hausen-Dw.		
ΔP		Pa	G		kg/(m ² s)
h_c			u		m/s

Resp.: $\eta=78,04$ % , $q=18167,4$ W

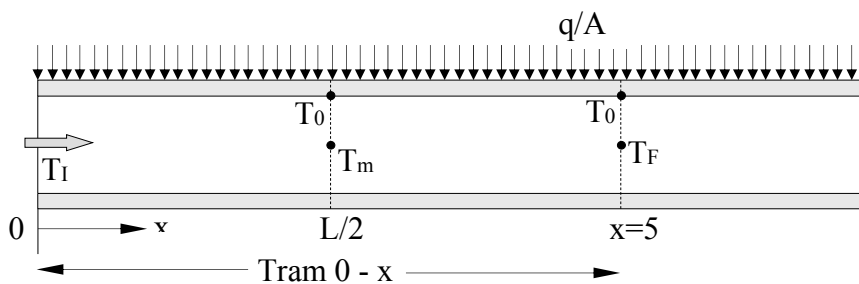
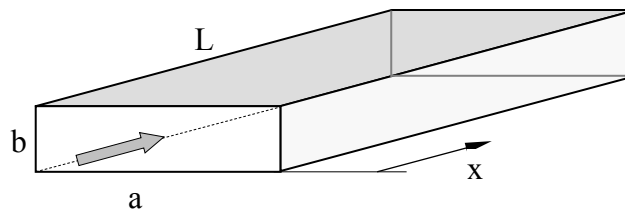
6.33 Conducte rectangular envoltat d'una manta elèctrica (variant resolta a l'ap. 4.5)

Per un conducte d'alumini de gran longitud, de secció rectangular de 300×100 mm, introduïm aire sec a 1100 mbar=110 kPa, 15 m/s i 10 °C. El conducte està envoltat per una manta elèctrica que subministra al interior del mateix un flux de potència tèrmica de 2 kW/m².

Determinar en estat estacionari:

- a) Temperatura de la cara interior de la paret a $x=5$ m de la entrada.
- b) Temperatura global i pressió de l'aire en aquest punt.
- c) Ompli la taula de resultats que s'adjunta per el tram 0-5 m (S.I.)
- d) Algorítme necessari per resoldre els apartats anteriors.

G	q	ReD	C _f	Nu _D	h ₀₋₅	Pr	T _m	T ₀	P _m



Propietats de l'aire sec (S.I.):

$$\rho = 3,484 \times 10^{-3} \frac{P}{T} \quad (P \text{ en Pa} ; T \text{ en K})$$

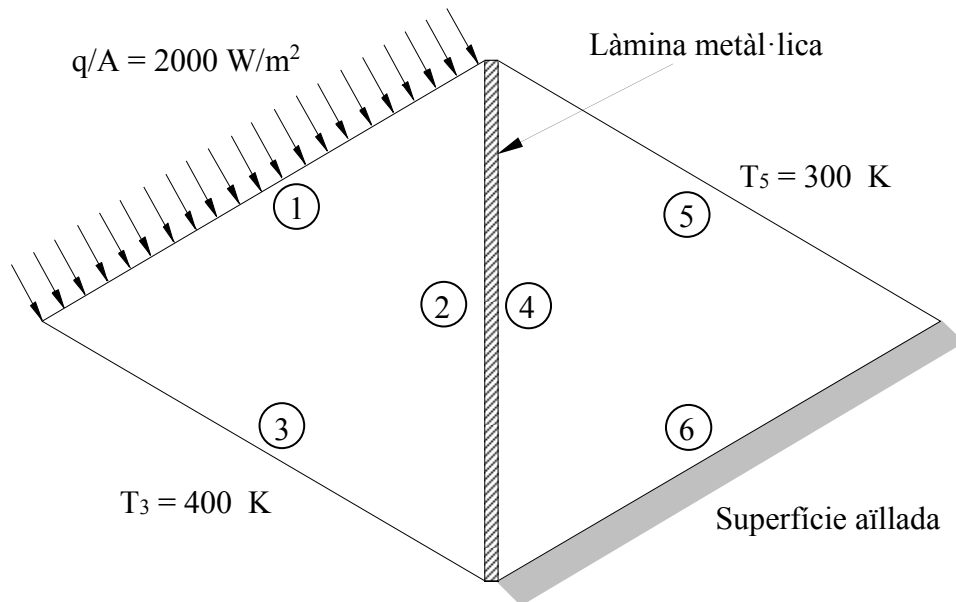
$$c_p = 1004 \quad \lambda = (3,807 + 0,074 \times T) 10^{-3}$$

$$\mu = \left(2,469 + 0,0536 \times T + \frac{P}{8280 \times 1000} \right) 10^{-6}$$

Resp.: Nu_D=282,06 , G=20,3 kg/(m²·s)

6.34 Doble recinte radiant (ex. final 21/01/94)

Una làmina metàl·lica de gruix negligible separa dos recintes de gran longitud (en la direcció \perp perpendicular al paper) amb la secció que es representa per els dos triangles equilàters de la figura.



Taula de dades i resultats

Sup. i	ϵ_i	T_i (K)	$q/A]_i$ (W/m ²)	J_i (W/m ²)	G_i (W/m ²)
1	0,3				
2	1				
3	0,3	400			
4	1				
5	0,8	300			
6	Aïllada				

En règim estacionari, omplir les caselles buides de la taula de resultats que s'adjunta, determinant:

- 1) Totes les temperatures.
- 2) Les radiositats, irradiacions i flux de potència radiant de cada superfície
- 3) Quadre global de potències per al conjunt de els dos recintes.
- 4) Flux de potència radiant reflectit per la superfície 2 i 3 a la banda de 2 a 10 μm .

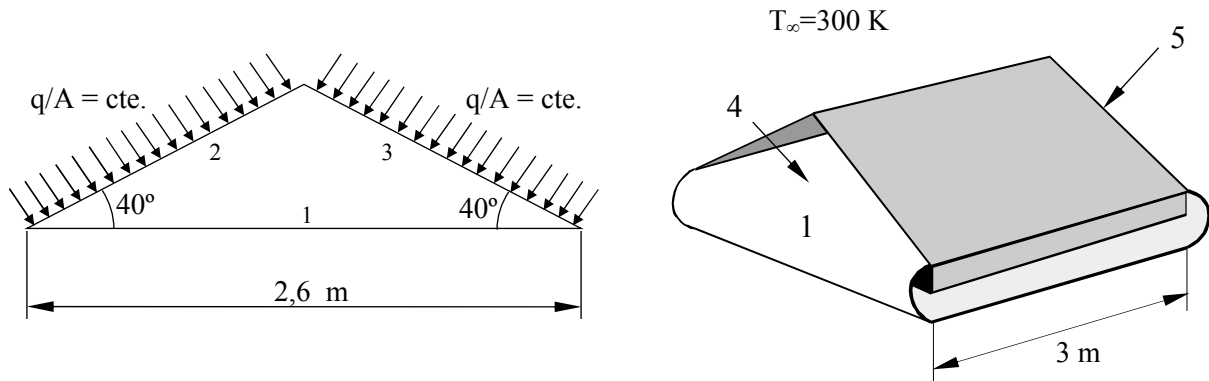
Resp.: $G_3=3679 \text{ W/m}^2$ 3) $\sum_{i=1,3,5,6} q_i = 0$

4) La superfície 2 és negra i per tant la potència reflectida es 0

La superfície 3 reflecteix, $\rho_3^k G_3^k = 1698 \text{ W/m}^2$ (banda k, 2-10 μm)

6.35 Túnel radiant (variant amb 5 superfícies grises)

El túnel d'escalfament per radiació de la figura, consisteix en un sostre radiant i una cinta transportadora que llisca per la seva part inferior. (tenim ara 5 superfícies)



Dades: Règim estacionari. Superfícies 1, 2 i 3 opaques. Superfície 4 i 5, negres a $T_3=300\text{ K}$
 $q/A=2000\text{ W/m}^2$, $T_1=450\text{ K}$, $T_\infty=300\text{ K}$, $\varepsilon_1=0,7$; $\varepsilon_2=0,5=\varepsilon_3$; $\varepsilon_4=\varepsilon_5=1$
 Factors de visió $F_{12}=0,4291=F_{13}$ $F_{45}=0,0436$

- 1) Trobar per cada superfície el valor de la radiositat e irradiació totals, el flux de potència radiant q/A i la temperatura de les superfícies 2 i 3. Comprovar amb els resultats les simetries observades.
- 2) Potència consumida per la cinta transportadora acceptant els resultats de 1).
- 3) Potència neta que s'escapa per els extrems oberts del túnel.
- 4) Taula complerta de factors de visió (2 decimals).
- 5) Potència que incideix directament sobre els dos forats (sup. 4 i 5) provinent de la superfície 1.

Ajuda: aquest recinte amb forma de tenda de campanya te els dos extrems oberts.

Haureu de considerar aquests extrems com superfícies virtuals negres a la temperatura de l'ambient o sigui a 300 K. Si reflexioneu una mica, veureu que tota la radiació que incideix interiorment sobre la boca, se'n va cap a l'ambient, o sigui que aquesta superfície virtual es comporta com un absorbidor perfecte.

Aleshores ja teniu el recinte tancat i ja podeu determinar la taula de factors de visió.

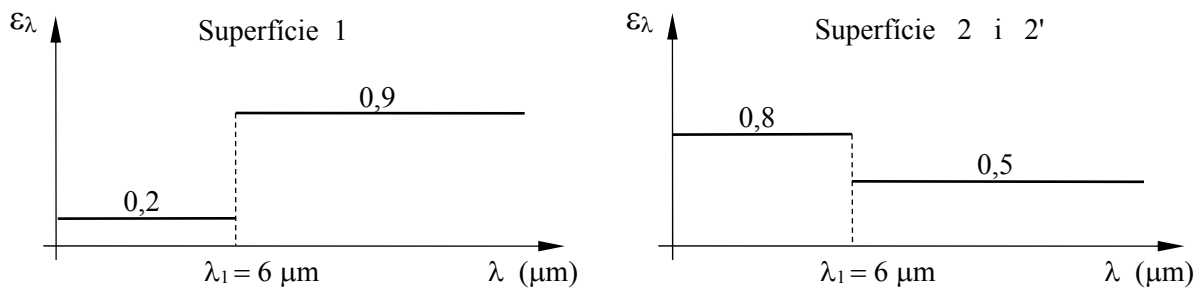
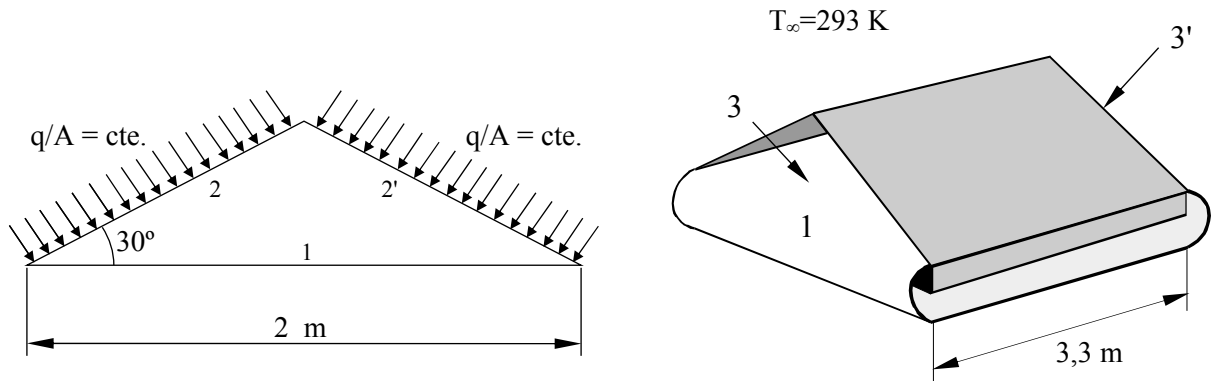
Simetries: és evident que degut a les simetries es un exercici que es podia plantejar amb 3 incògnites (J_1, J_2, J_3)

Pista, si us dono $F_{12}=F_{13}$ ja teniu F_{21} i F_{31} aplicant reciprocitat simple, si teniu F_{12} i F_{13} ja teniu $F_{14}=F_{15}$ per tant podeu trobar $F_{41}=F_{51}$ per reciprocitat, etc.

Resp.: 5) 3212,73 W

6.36 Túnel radiant (final juny/1988, propietats espectrals)

El túnel d'escalfament per radiació de la figura, consisteix en un sostre radiant i una cinta transportadora que llisca per la seva part inferior.



Dades: Règim estacionari. Superfícies 1, 2 i 2' opaques.
 $q/A = 2 \text{ kW/m}^2$ $T_1 = 430 \text{ K}$ $T_\infty = 293 \text{ K}$

Factors de visió Funcions de radiació
 $F_{12} = 0,470$ $F_{0-\lambda_1 T_\infty} = 0,03458$
 $F_{22'} = 0,116$ $F_{0-\lambda_1 T_1} = 0,17872$

Suposi per iniciar el procés iteratiu $T_2 = T_{2'} = 600 \text{ K}$

- 1) Trobar els valors de la radiositat e irradiació totals per cada superfície, a la primera iteració, amb la T_2 suposada. Trobar q/A a la superfície 1.
- 2) Potència consumida per la cinta transportadora acceptant els resultats de 1).
- 3) Potència neta que s'escapa per els extrems oberts del túnel.
- 4) Taula completa de factors de visió (2 decimals).

Resp.:

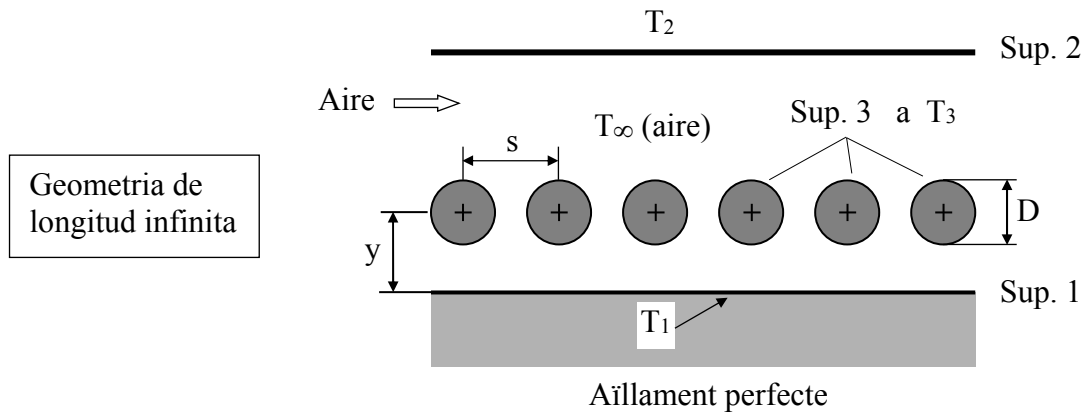
Superfície	G_i
1	5549,0
2	3880,9
3	4130,0

2) Potència consumida per la cinta transportadora $q_1 = 10929 \text{ W}$

6.37 Parrilla infinita de tubs radiants (final 08/06/2002, superfícies grises)

Una filera d'elements cilíndrics d'escalfament espaiats regularment s'usen per mantenir a T_1 (K) una paret ben aïllada d'un forn (sup. 1). La paret oposada es troba a la temperatura T_2 (K)

Factor de visió entre un pla infinit i una filera infinita de cilindres paral·lela al mateix.



$$F_{1-3} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{D}{s}\right)^2} + \left(\frac{D}{s}\right) \times \arctg\left(\sqrt{\frac{s^2 - D^2}{D^2}}\right) \quad (\text{angle en radians}) \quad F_{1-3} \neq f(y) !$$

Entre les dos parets paral·leles i circula un flux d'aire. El coeficient de convecció per la superfície aïllada (1) és h_c , sent T_∞ la temperatura de l'aire.

Suposi que les parets i les barres cilíndriques son negres. Determini la temperatura màxima admissible d'operació T_3 requerida per les barres calefactores que permeti mantenir constant la temperatura T_1 .

Dades: $D = 20 \text{ mm}$, $s = 35 \text{ mm}$, $T_1 = 410 \text{ K}$, $T_2 = 310 \text{ K}$, $T_\infty = 370 \text{ K}$, $h_c = 200 \text{ W/(m}^2\text{K)}$

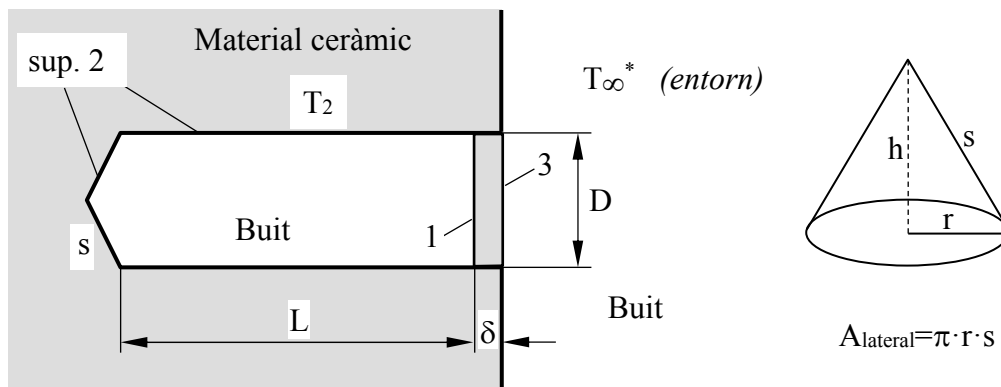
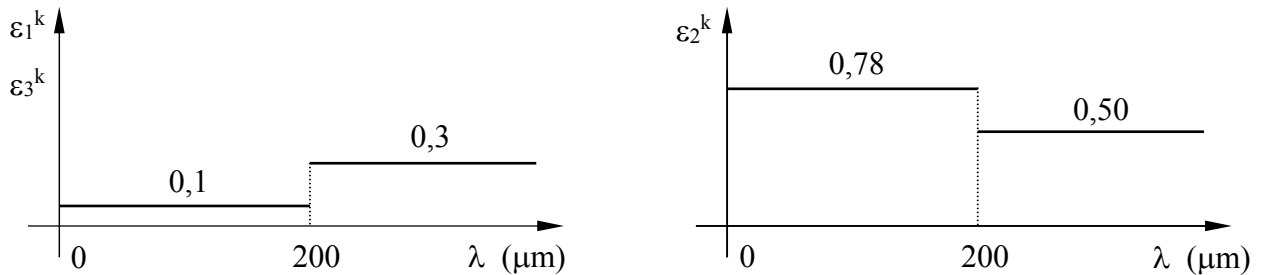
Trobar (en S.I.):

- 1) La temperatura d'operació requerida T_3 de les barres calefactores.
- 2) La taula de factors de visió.
- 3) Potència radiant incident i emergent (emesa i reflectida) sobre la sup. 3
- 4) El poder emissiu espectral de la superfície 1 a la banda de 2 a 8 μm

Resp.: 3) Potència radiant incident sobre la sup. 3 igual a 5914,4 W

6.38 Forat cilíndric en un bloc piroceràmic (final 16/01/08, fórmules 2 superfícies)

Per reduir el flux de potència radiant corresponent a un forat de diàmetre D practicat a un bloc piroceràmic al buit que es manté a una temperatura T_2 , tapem la secció d'entrada mitjançant un bloc circular del mateix material de gruix δ recobert amb pintura d'alumini per les dues cares. L'emissivitat espectral del bloc piroceràmic (ε_2^k) i la de la pintura d'alumini ($\varepsilon_1^k = \varepsilon_3^k$) són,



Dades: $T_2 = 500 \text{ K}$, $T_{\infty}^* = 300 \text{ K}$, $L = 0,40 \text{ m}$, $D = 0,20 \text{ m}$, $s = 0,12 \text{ m}$

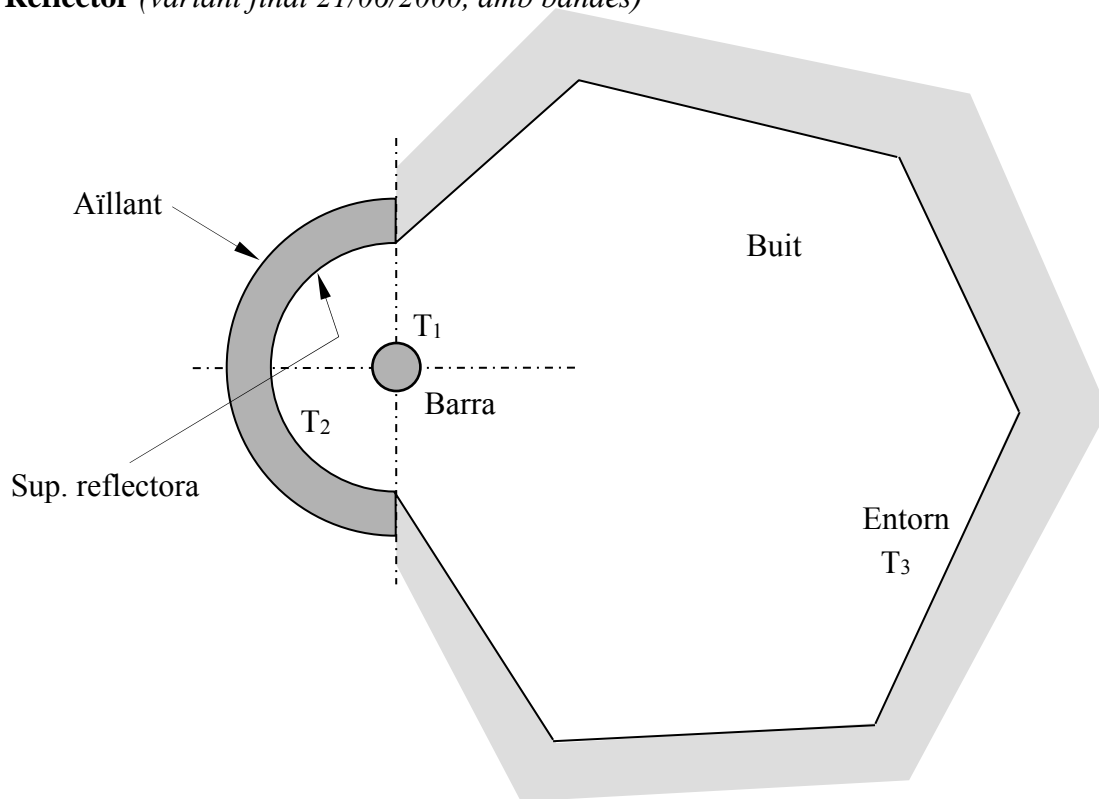
Material ceràmic $\lambda_c = 0,22 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, $\delta = 0,010 \text{ m}$

La superfície 2 consta d'una part cilíndrica i una part cònica de generatriu s

Determinar (en S.I.):

- 1) Taula numèrica de les funcions de radiació amb les temperatures finals de l'exercici.
- 2) Taula numèrica dels factors de visió.
- 3) Expressió algebraica (només lletres) de les equacions ja simplificades que hagi fet servir per resoldre l'exercici.
- 4) Les temperatures T_1 i T_3 en K corresponents a les superfícies interior i exterior de la tapa.
- 5) Expressió algebraica i valor numèric de la potència radiant incident i emergent de la superfície 2.
- 6) Taula numèrica de irradiacions, radiositats i fluxos de potència (valors totals) de les tres superfícies.
- 7) Expressió algebraica i valor numèric de la potència radiant que abandona la superfície 2 (emergent) e incideix directament sobre si mateixa (sup. 2).
- 8) Si augmentem l'emissivitat de la superfície 3 que li passa a la temperatura i la potència transferida per aquesta superfície.

Resp.: 6) $G_2 = 3523,2 \text{ W/m}^2$, 7) $911,74 \text{ W}$

6.39 Reflector (variant final 21/06/2000, amb bandes)

Una estufa elèctrica amb potència regulable disposa, tal com mostra la figura, d'una resistència calefactorsa en forma de barra cilíndrica (superfície 1), i un reflector mate (difús), amb forma de semicilindre concèntric amb la barra (superfície 2).

Els diàmetres de la barra i reflector són respectivament de 20 mm i 60 mm, i la seva longitud es pot considerar infinita. L'emissivitat de la superfície reflectora és 0,9 i la de les parets de l'entorn val 0,2, en canvi la de la barra calefactorsa varia amb la freqüència de tal manera que per longituds d'ona inferiors a 5 μm val 0,7, mentre que la resta de l'espectre val 0,4.

El reflector està perfectament calorífugat per la part posterior, i el conjunt es troba en un entorn al buit (superfície 3) les parets del qual es mantenen a 25 °C.

Per determinar el valor de la potència elèctrica consumida per metre lineal de l'estufa, tenint en compte que la temperatura de la barra calefactorsa és de 850 °C, calculeu:

- 1) La matriu de factors de visió
- 2) La temperatura de la superfície reflectora
- 3) Totes les G i les J (espectrals i totals) **Resp.:** $G_1=15703,02 \text{ W/m}^2$ (valor total)
- 4) Finalment la potència elèctrica consumida per metre lineal de l'estufa $q/L]_1$
- 5) Amb aquesta mateixa potència, quina seria la temperatura de la barra si no s'hagués col·locat el reflector. **Resp.:** 5) $T_1=1079,26 \text{ K}$

Per començar els càlculs prendre T_2 igual a la mitja aritmètica de T_1 i T_3

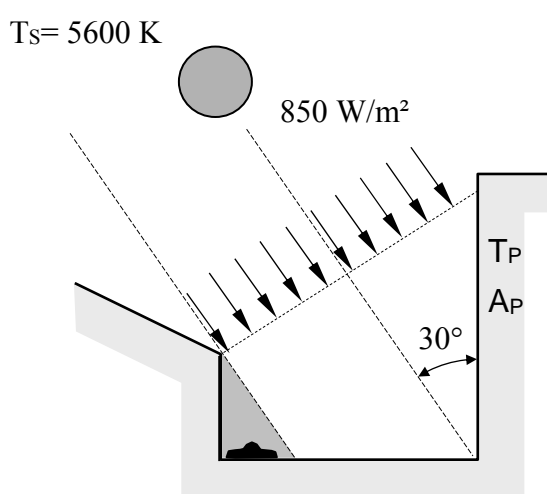
Ajuda: La sup. 3 es molt més gran que les altres, de forma que $A_3 \gg A_1$ i $A_3 \gg A_2$ i per tant $F_{33}=1$ i aleshores queda clar quan val F_{31} i F_{32} L'expressió de J_3' no és pas una incògnita. Es pot calcular directament de l'expressió $J_3 = \rho_3 G_3 + E_3$ però cal saber-ho trobar.

És cert que $q_2 = (G_2 - J_2) \times A_2 = 0$ per una superfície aïllant. Però no és cert que això es compleixi necessàriament per una banda (ja que per una banda aquests terme pot ser positiu i en un altre negatiu).

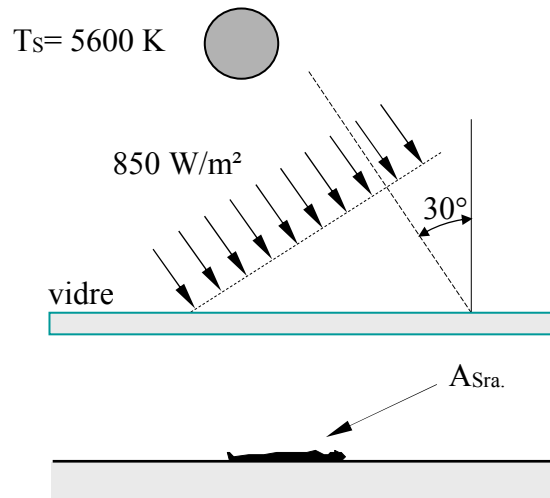
6.40 Sr. i Sra. Ros

El matrimoni Ros, que és de vacances a Almeria, ha llegit que la radiació ultraviolada de la banda de 0,28 a 0,32 μm és cancerosa i està molt preocupat per la possibilitat d'adquirir un càncer de pell per excés d'insolació.

Per aquest motiu, el Sr. Ros, un cop arriba a la piscina decideix reposar a l'ombra, però enfront d'una gran paret mat vertical de 200 m^2 de superfície exposada al Sol, tal com indica la figura a. La paret rep un front de radiació solar de 850 W/m^2 , formant un angle de 30 ° amb el pla de la paret (vegeu la figura a). Per simplificar, considerarem la seva distribució espectral igual a la procedent d'un cos negre a 5600 K. La superfície de la paret és a 60 °C. El factor de visió de la paret mat amb el Sr. Ros és de 0,002.

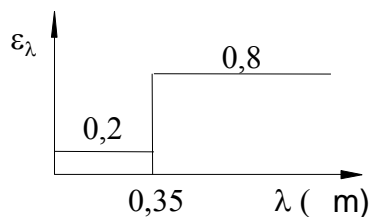


a) Sr. Ros

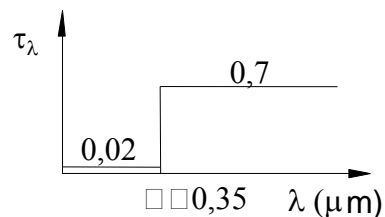


b) Sra. Ros

c) Paret vertical



d) Vidre



Per la seva banda, la Sra. Ros decideix prendre el Sol en un hivernacle de vidre, figura b, i es pot suposar que només rep radiació procedent del Sol (negligim l'efecte de la resta de superfícies). Les característiques radiants de la paret mat i del vidre de l'hivernacle són les mostrades a les figures c i d, respectivament.

- 1) Si la superfície de la Sra. Ros exposada al Sol és de 1,1 m^2 , quina potència cancerosa rep cadascú i, en conseqüència, quin dels dos té més risc de contreure càncer de pell?
- 2) Quina potència total rep cadascú? Quin dels dos passarà més calor?

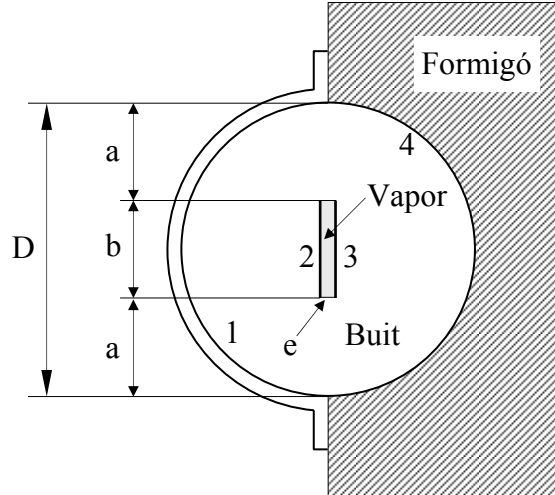
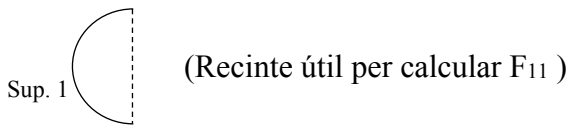
Resp.: 1) El Sr. Rubio rep 2,868 W i la Sra. Rubio rep 0,34 W de potència cancerosa.
 2) El Sr. Rubio rep 263,29 W i la Sra. Rubio rep 533,41 W de potència tèrmica.
 Passa més calor la Sra. Rubio.

6.41 Conducte mixt de secció circular (variant final juny/1999, resolt a l'ap. 5.8)

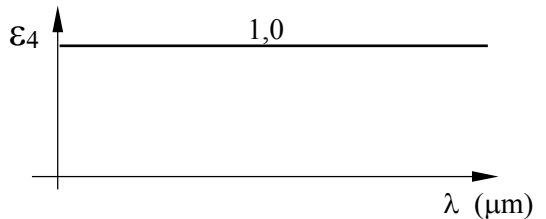
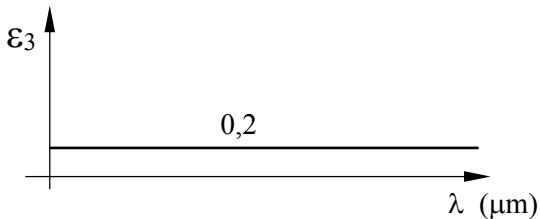
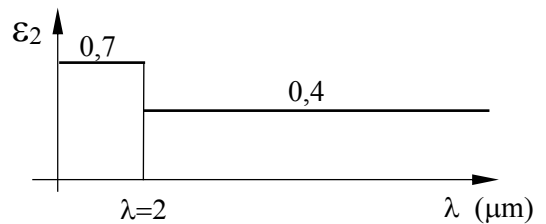
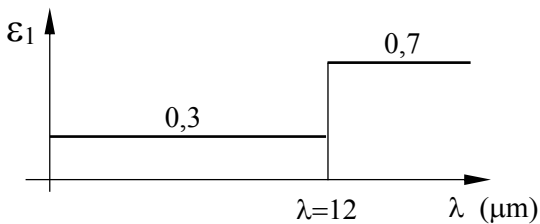
Per un conducte metàl·lic d'alumini de secció rectangular circular vapor saturat a T_v °C entre dos punts molt distants d'una instal·lació. Considerant negligible la dimensió menor del rectangle (e), realitzar un balanç espectral de potència radiant entre las 4 superfícies indicades a la figura.

DADES :

- $D = 300 \text{ mm}$, $b = D/3$, $e \approx 0$
- $T_1 = 51 \text{ °C}$
- $T_v = 120 \text{ °C (vapor)} = T_2 = T_3$
- $T_4 = 150 \text{ °C (formigó)}$



Emitàncies espectrals.



NOTACIÓ: superíndex → banda, subíndex → superfície

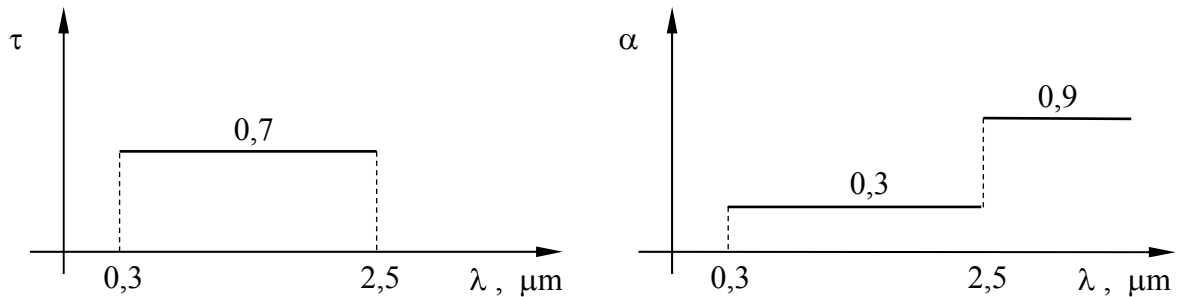
Tenint ben presents les hipòtesis considerades, contesteu les següents qüestions emprant el S.I. d'unitats i el conveni de signes pel flux net de potència radiant definit per $q/A = G - J$:

Determinar:

- 1) La taula dels factors de visió i de les funcions de radiació.
- 2) La taula dels poders emissius, radiositats i irradiacions espectrals de cada superfície.
- 3) El flux net de potència radiant de les 4 superfícies.
- 3) La potència radiant neta que guanya el vapor per metre de conducte.

6.42 Bombeta

El filament d'una bombeta de 180 W, es pot assimilar a un cos negre convex de $2 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ de superfície. Es troba tancat dins una esfera de vidre de 30 mm de radi, amb les propietats radiants representades a les figures.



Trobeu:

- 1) La potencia radiant que travessa el vidre.
- 2) Rendiment de la bombeta, entès com la fracció de la potència consumida que arriba finalment a l'habitació dins la banda de llum visible ($0,4 < \lambda < 0,7 \mu\text{m}$).
- 3) Fracció d'aquesta llum que arriba a la pupil·la d'una persona ($D_{\text{PUPIL·LA}} = 3 \text{ mm}$), col·locada a 4 m de la bombeta, i amb la seva visió desviada un angle de 30° de la mateixa (recordeu el concepte de factor de visió).

La temperatura de l'aire coincideix amb la de les parets del local i es de 25°C , essent aquestes a efectes pràctics grises amb $\alpha_{\text{PARETS}} = 0,8$. El coeficient de convecció natural de l'aire amb una

esfera de radi R , ve donat per l'expressió:
$$h_c = 1,6 \left| \frac{T_0 - T_\infty}{R} \right|^{0,23}$$

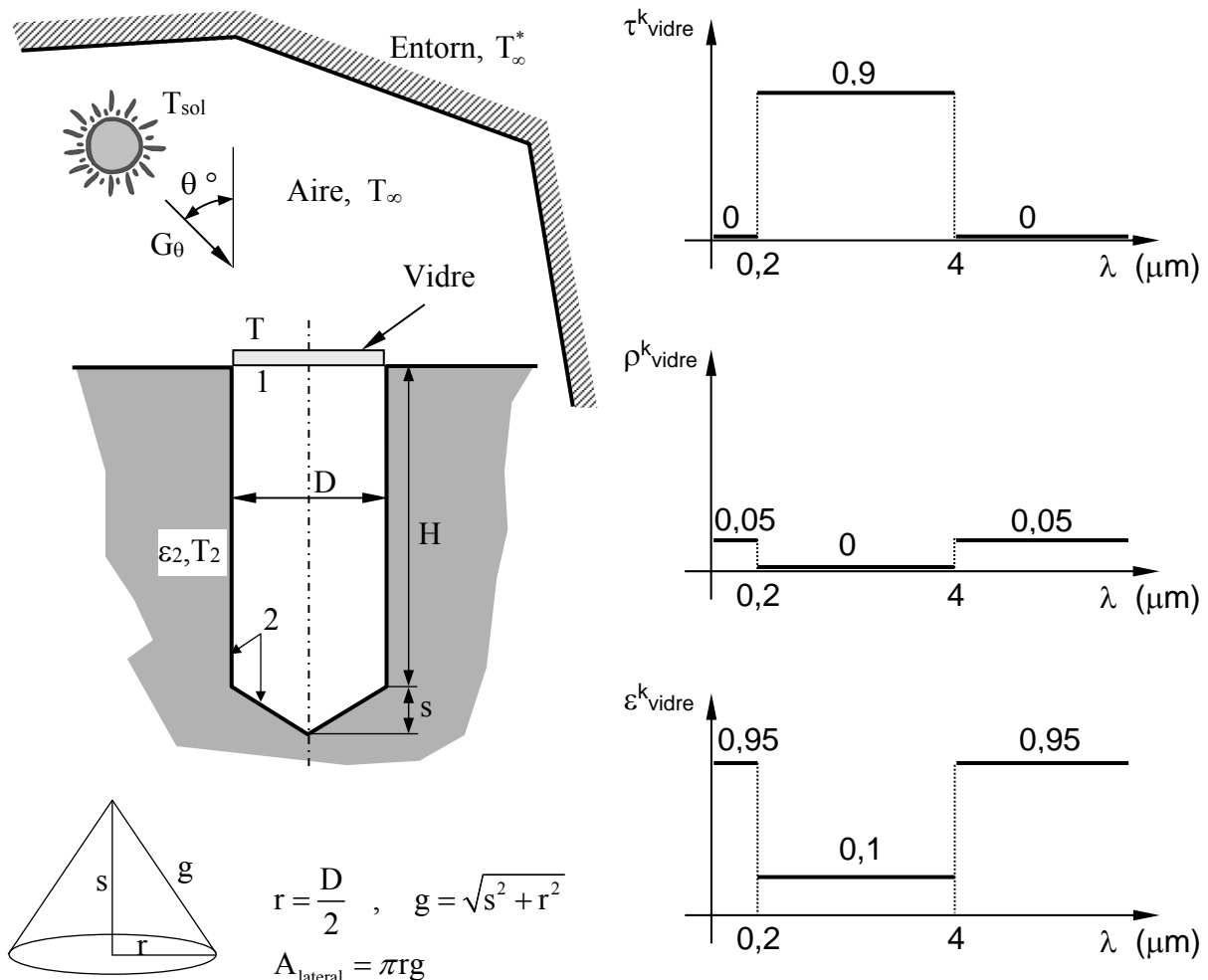
- 4) Determineu si la temperatura del vidre al règim estacionari és superior a 400 K.

Resp.:

- | | |
|--------------------------|--|
| 1) $q = 111,6 \text{ W}$ | 3) $F_{\text{Bombeta} \rightarrow \text{Pupil·la}} = 3,0446 \text{ E-8}$ |
| 2) $\eta = 10,46 \%$ | 4) $T_{\text{VIDRE}} > 400 \text{ K}$ |

6.43 Cavitat coberta amb un vidre

Una cavitat de D (mm) de diàmetre i $H+s$ (mm) d'alçada és manté en règim estacionari a la temperatura T_2 . Tanquem l'obertura d'aquesta cavitat amb un vidre de gruix negligible de forma que podem considerar pràcticament iguals les temperatures de les seves dues cares i amb les propietats espectrals que s'adjunten. Sobre el vidre incideix una irradiació solar G_θ (W/m^2) amb una inclinació de θ° respecta a la normal de la superfície del vidre i aquest es troba envoltat d'aire a la temperatura ambiental T_∞ i un entorn a T_∞^* . El coeficient de convecció exterior és $h_{\text{aire_ext}}$ i podem negligir la convecció a l'interior de la cavitat.



Dades: $D=50 \text{ mm}$, $H=100 \text{ mm}$, $s=30 \text{ mm}$

$T_{\text{sol}}=5400 \text{ K}$, $T_\infty=20^\circ\text{C}$ (aire) , $T_\infty^*=5^\circ\text{C}$ (entorn) , $T_2=250^\circ\text{C}$ (cavitat)

$G_\theta=800 \text{ W}/\text{m}^2$ (radiació solar) , $\theta=30^\circ$, $h_{\text{aire_ext}}=12 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$, $\epsilon_2=0,7$

Determinar: 1) La temperatura T del vidre.

2) La potència necessària per mantenir la cavitat a $T_2=250^\circ\text{C}$

Nota: recordi que el vidre és opac a les radiacions d'una font a baixa temperatura i per tant podem aplicar les equacions de dues superfícies al recinte 1-2.

Resp.: 1) $T_{\text{vidre}}=130,6^\circ\text{C}$ 2) $q=3,99 \text{ W}$

7 **BIBLIOGRAFIA FONAMENTAL** (comentada)

Adjunto una relació de llibres que considero fonamental en la transferència de calor. També he afegit alguns dels articles que han fet història en aquesta matèria.

1. ARPACI, V.S., *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley, Reading (MA), 1966
[Text amb 2 primers capítols excepcionals que fins i tot avui suggereixen idees per enfocar qualsevol problema de Transferència de Calor. Obra de rigor i claredat en la seva totalitat amb un extraordinari enfocament dels problemes de Transferència de Calor per conducció. També és notable el capítol 9, sobre la resolució de problemes de la conducció mitjançant les diferències finites, per la seva claredat i profunditat.]
2. ARPACI, V.S., P.S. LARSEN, *Convection Heat Transfer*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1984
[Text esperat durant anys, donat el prestigi dels seus autors, però malgrat ser molt rigorós no resol els grans problemes que planteja la convecció, analogies, difusivitats turbulentes, etc.. Cal destacar el seu excel·lent tractament de la capa límit laminar per qualsevol Pr i amb dissipació (Ec no nul), i de la turbulència, si be també hem de indicar que no s'aporten idees noves en aquest camp. Considero interessant el tractament del canvi de fase i en particular els esquemes o dibuixos que clarifiquen l'explicació. Em sembla genial i ho faig servir habitualment a les meves classes la forma en que els autors introdueixen els diferents models de capa límit en funció de l'espectre no continu del nombre de Prandtl. (metalls líquids, gasos i olis). És una obra en el seu conjunt de molt valor i poc llegida per la seva dificultat i enfocament matemàtic. Noto a faltar la connexió d'aquesta obra amb el món industrial, amb la problemàtica que planteja la variació de la propietats amb la temperatura i amb les expressions obtingudes dels resultats experimentals.]
3. BEJAN, A., *Heat Transfer*, John Wiley & Sons, New York, 1993
[Text d'estil clàssic, rigorós i didàctic en el tractament i estructuració temàtica. Resulten molt pedagògiques i il·lustratives les fotografies sobre la fenomenologia d'alguns temes de convecció. En general, pocs exemples i problemes originals.]
4. BEJAN, A., *Convection Heat Transfer*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1995
[Text de caràcter generalista, amb un tractament excel·lent d'alguns temes com el de la turbulència. Dedicar un interessant capítol a l'estudi de la transició, en el qual s'inclou una taula de dades experimentals i s'analitzen les lleis generals que regeixen la transició, amb la idea de generalitzar el Re_L de transició per a diferents tipus de flux establint una adequada dimensió característica dels mateixos. Molt correcte també el tractament de la convecció natural, incloent nombroses correlacions, però noto a faltar una anàlisi més crítica de les mateixes. No utilitza massa les tècniques numèriques.]
5. CHAPMAN, A.J., *Heat Transfer, 4th ed.*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1984,
(3a edic. en castellano, Bellisco, Madrid, 1990)
[Possiblement dels millors llibres de text fa uns anys, amb una profunda anàlisi crítica i de la fenomenologia del problema. Potser la part de radiació és la més fluixa i l'ús del coeficient de convecció constant el seu pitjor defecte en aquest tema. Excel·lent resum de les funcions de Bessel en apèndix. Es va utilitzar extensament en els anys setanta en les escoles del nostre país.]
6. COLLIER, J.G., *Convective Boiling and Condensation, 2nd ed.*, McGraw-Hill, New York, 1981
[Conté moltes dades experimentals i exemples numèrics que falten en els textos sobre flux bifàsic, en general.]
7. ECKERT, E.R.G., R.M. DRAKE, *Analysis Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1972
[És una ampliació del Heat and Mass Transfer dels mateixos autors, elevat el nivell, encara que segueix sent un text de cort clàssica. Tracta alguns temes especialitzats com conducció amb límits mòbils (Cap. 5) i transmissió de calor a altes velocitats (Cap.10). És interessant com text per assolir unes bones bases teòriques. No està adaptat al tractament numèric dels problemes. És un bon llibre per a fixar una sòlida base teòrica però de difícil maneig per al no iniciat. L'apèndix B, de propietats tèrmiques, és el millor entre els textos no específics de propietats.]
8. EDWARDS, D.K., *Radiation Heat Transfer Notes*, Hemisphere, Washington (DC), 1981
9. FAHIEN, R.W., *Fundamentals of Transport Phenomena*, McGraw-Hill, New York, 1983
[Es tracta d'un llibre genial amb gran altura científica. Conté una anàlisi i presentació molt clara del càlcul vectorial aplicat als fenòmens de transport.]

10. GNIELINSKI V., *New Equations for Heat and Mass Transfer in Turbulent Pipe and Channel Flow*, *Int. Chem. Eng.*, **16**:2, 359-368 (1976)
11. HINZE, J.O., *Turbulence, 2nd ed.* McGraw-Hill, New York, 1982
[Tractat fonamental sobre el tema. És necessari un coneixement clar del càlcul tensorial per a comprendre'l en profunditat.]
12. HOLMAN J.P., *Transferència de Calor*, McGraw-Hill, Madrid (8 ed. 1998)
[Best seller a EEUU. Metodologia poc rigorosa però molt senzilla per a la radiació. Llibre de text molt clar per a iniciar-se en el tema. Redacció impecable amb innombrables problemes resolts. Sense cap dubte un dels llibres de major difusió i èxit comercial dintre d'aquesta temàtica als EEUU, possiblement a causa de el seu planteig senzill dels problemes. És criticable el mostrar un món de la transferència tèrmica excessivament meravellós al no ressaltar les veritables dificultats que apareixen en els problemes de l'enginyeria tèrmica. No s'expliquen massa els punts no resolts i les limitacions de les diverses metodologies.]
13. INCROPERA, F.P., DEWITT, D.P., *Fundamentos de transferencia de calor*, 4ªed. (1999) Prentice Hall, México.
[Text enciclopèdic, en general molt amè amb innombrables i ben seleccionats exemples il·lustratius. Interessant la col·lecció de problemes proposats. Resulta fluix el tema de convecció amb canvi de fase. Rellevant caràcter didàctic en el seu conjunt. Potser el millor llibre de text per a un curs introductori.]
14. IRVINE & J.P. HARNETT, *Advances in Heat Transfer*,
Vol. 1, 1964; Vol. 2, 1965; Vol. 3, 1966; Vol. 4, 1967; Vol. 5, 1968; Vol. 6, 1969; Vol. 7, 1971; Vol. 8, 1972; Vol. 9, 1973; Vol.10, 1974; Vol.11, 1975; Vol.12, 1976; Vol.13, 1977; Vol.14, 1978; Supplement I, 1978; Vol.15, 1982 Academic, New York 1964.
[Col·lecció de llibres que recull treballs monogràfics (novetats des del punt de vista fonamental) altament especialitzats d'autors independents. Al meu judici, es tracta de la publicació científica de major qualitat i extensió en transferència de calor. Especialistes en cada tema cobreixen innombrables àrees de la transferència tèrmica: (Convecció natural, 1967, 1975 ; Convecció en gasos enrarits, 1965, 1971. Radiació en medis no participants, 1965 . Transmissió en fluids no newtonians 1965, 1982; Convecció en sistemes rotatius, 1968; Propietats radiants dels gasos 1968, 1972, 1976; Transmissió de calor i fricció turbulenta en canonades amb fluids de propietats variables 1970; Tubs de calor 1971; Transmissió en feixos de tubs amb flux creuat 1972; Convecció natural en recintes, 1972; Transferència de calor en condensació, 1970 Transmissió de calor en llits fluids, 1974, 1978; Estabilitat de la convecció natural 1973; ebullició en pel·lícula, 1975; Sobreescalfament en ebullició 1976; Teoria del secat 1964 , 1977; Transferència de calor en corrents gas - sòlid, 1973,*etc, etc.]
15. KAKAÇ, S., R.H. SHAH, W. AUNG, *Handbook of Single Phase Convective Heat Transfer*, John Wiley & Sons, New York, 1987
[La millor obra enciclopèdica de l'última dècada del segle vint. Exposa una immillorable anàlisi comparatiu, crític i detallat de les més destacades correlacions experimentals i teòriques per a tots els tipus de convecció i règims de circulació, sota diferents geometries. El seu tractament i estructuració és de caràcter absolutament exemplar. En molts aspectes més profund i seriós que el famós Handbook de Rohsenow. És el típic text on trobes el que no trobes enlloc. S'inclou un capítol magistral sobre convecció laminar forçada en conductes, rèplica del famós suplement 1 (1978) *Advances in Heat Transfer* (exhaurit).]
16. KAYS, W.M., M.E. CRAWFORD, *Convective Heat and Mass Transfer, 3rd ed.*, McGraw-Hill, New York, 1993
[Potser una de les millors llibres que s'han escrit sobre convecció. Edició completament revisada, fonamental i molt més pràctica que la primera encara que menys rigorosa que la de Arpaci & Larsen. Poc preparat per a l'anàlisi numèrica.]
17. KAYS, W.M., A.L. LONDON, *Compact Heat Exchangers, 3rd ed.*, McGraw-Hill, New York, 1984
[És la 2a edició lleugerament retocada de 1964. Obra única i fonamental sobre bescanviadors compactes. Essencial l'extensa informació que recullen les seves innombrables taules i gràfics, en els quals s'abasten la pràctica totalitat de configuracions i geometries possibles. Segueix sent insubstituïble encara que aquesta edició no està preparada per al càlcul numèric. Considero importants i amb un gran valor pedagògic els quatre exemples resolts al final del llibre, encara que encara amb un enfocament molt manual i sense pensar en el PC.]

18. MILLS, A.F., *Heat Transfer*, Irwin, Homewood, 1992,
(edic. en castellano, Times Mirror de España. Irwin, Madrid, 1995)
[Un dels textos més recents, minuciosos i innovadors quant a l'enfocament docent amb la incorporació d'exemples molt bé plantejats, il·lustrats i resolts. Es completa amb la incorporació d'un programari (en Dos) modest que permet a l'alumne manejar totes les expressions que apareixen en la transferència de calor evitant la tediosa tasca de programar-les, el que facilita una anàlisi paramètrica de les mateixes impensable fins a la data. Ho considero com un dels llibres de text més recomanable com bibliografia bàsica per als principiants.]
19. MODEST, M.F., *Radiative Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1993
20. MYERS, G.E., *Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*,
Genium Schenectady, New York, 1987
[Pensem que és el model del que deu ser un llibre, amb una claredat en l'exposició excel·lent. Amb aquest text es poden arribar a entendre els mètodes matemàtics analítics més complexos de la conducció de Calor amb una gran facilitat. La primera lliçó és un plantejament general i després s'introdueixen consecutivament els següents mètodes: Equacions de Bessel (Molt bé), Separació de variables, Superposició, Combinació complexa, Normalització, Diferències finites, Elements finits (el de menys nivell). És el text ideal per a l'estudiós autodidacta. Inclou una excel·lent col·lecció d'enunciats de problemes. La seva única llacuna és el tractament de la integral de Duhamel. Simplement genial, didàctic i d'alt nivell, adjectius no fàcilment aplicables simultàniament a un mateix text.]
21. ÖZISIK, M.N., *Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection*,
Wiley-Interscience, New York, 1973
[Text purament teòric, amb una notació (*que hem adoptat*) i un rigor impecable. Partint de la teoria electromagnètica estableix les propietats radiants de les superfícies, els factors de visió per a reflexió difusa i especular, les equacions que regeixen el fenomen de radiació en la seva manera més general en un medi participant (amb mitjà interposat absorbent i rerradiant) i posteriorment analitza els mètodes de resolució de les equacions integrals. Finalment tracta de manera teòrica la interacció conducció-radiació i convecció-radiació. A nivell teòric i d'utilitat per a un enginyer, juntament amb el Wiebelt, vam pensar que és dels millors textos que s'han escrit fins a l'actualitat. Aquesta obra mestra, d'un rigor absolut en les deduccions, manca no obstant això d'exemples il·lustratius que la farien encara més valuosa.]
22. ÖZISIK, M.N., *Heat Transfer: a Basic Approach*, McGraw-Hill, New York, 1985,
(edic. en castellano, McGraw-Hill Latinoamericana, Bogotá, 1979)
[Fins a la data potser el millor llibre de text que existeix per a una primera lectura. Introdueix els conceptes amb innumerables exemples senzills. Molt ben estructurat.]
23. ÖZISIK, M.N., *Heat Conduction, 2nd ed.*, Wiley-Interscience, New York, 1993
[El cim del tractament analític de la conducció per a ús pràctic. Llibre molt complet, rigorós, ben estructurat i sistemàtic. Extraordinaris els capítols 2, 3 i 4 sobre separació de variables i el 5 sobre la Integral de Duhamel. Molt encertat el Cap. 12 sobre mètodes numèrics. Disponible la versió en castellà. Claredat d'exposició amb inclusió d'innombrables i rellevants exemples de tipus teòric. La implantació dels models numèrics ha fet devaluar la importància d'aquest llibre, al permetre aquests el tractament de condicions de contorn no lineals així com la variació de les propietats amb la temperatura.]
24. PALACIOS, J., *Análisis Dimensional*, 2ª ed., corregida i augmentada. Espasa-Calpe S.A. Madrid 1964 .
25. PATANKAR, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*,
Hemisphere, McGraw-Hill, Washington-New York, 1980
[Obra de gran interès doncs exposa l'únic mètode amb diferències realment operatiu i fàcil de manejar per al tractament de fluxos recirculants i problemes de convecció forçada general. Per a comprendre la importància d'aquest text, basta indicar que el mètode suggerit és recollit en l'obra enciclopèdica dels mètodes numèrics, també comentada de Minkowycz, el Handbook of Numerical Heat Transfer]
26. PRANDTL L., *Essentials of Fluid Dynamics*, Blackie & Son, 117, London, (1969).
27. REYNOLDS O., *An Experimental Investigation of the Circumstances which determine whether the Motion of Water Shall be Direct or Sinuous and of the Law of Resistance in Parallel Channels*, Philos. Trans. Roy. Soc., **174**, 935-982, (1883).

28. ROHSENOW, W.M., H.Y. CHOI, *Heat Mass and Momentum Transfer*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1961
[Llibre extraordinari, amb moltíssima informació encara vigent. Mereix llegir-se el tema de turbulència amb una exposició brillant de les analogies. En general és un text compromès i resol molts punts negres que la majoria d'autors esquiven.]
29. ROHSENOW, W.M., J.P. HARTNETT, E.N. GANIÇ (eds.)
Handbook of Heat Transfer Fundamentals, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1985
[L'obra mestra més important i exhaustiva que existeix sobre transferència de calor. Text que suposa una important millora de la versió anterior, en el tractament pràctic de la convecció natural, dels fluxos externs i la radiació en gasos. La radiació sense medi participant no supera a l'anterior. Pobra el capítol sobre propietats. Tracta els temes amb el rigor requerit, fent contínues referències a altres autors per a evitar deduccions intermèdies, la qual cosa obliga a un coneixement previ notable del tema tractat. Com tot manual no és útil per als principiants. Tampoc és útil per a comprendre metodologies en profunditat però sí per a situar-nos en el tema i conèixer la bibliografia relacionada més especialitzada. Deuria ser més crític, i no exposar diverses metodologies o formulacions sense definir-se respecte a les mateixes.]
30. ROHSENOW, W.M., J.P. HARTNETT, E.N. GANIÇ (eds.)
Handbook of Heat Transfer Applications, 2nd ed., McGraw-Hill, New York 1985
[Text que serveix de adequat complement al volum Fundamentals, realitzant el tractament dels temes pràctics. Encara que semblava impossible també s'ha millorat la part de bescanviadors. El resum d'energia solar és més pràctic que el del *Solar Energy Handbook* dirigit pel mateix Kreith. Segurament per la seva extensió i preu no puguem recomanar-lo als estudiants d'un curs bàsic en transferència de calor, encara que podria ser molt adequat per a aquells que es decanten per la intensificació termoenergètica.]
31. ROHSENOW WARREN M., HARTNETT JAMES P. & CHO YOUNG I.,
Handbook of Heat Transfer, 3rd Ed., (1998), McGraw-Hill, New York.
[En solament un volum, substitueix als dos anteriors. Mes manejable i amb les mateixes excel·lències. No obstant això alguns temes estan millor tractats en la segona edició].
32. SCHACK, A., *Industrial Heat Transfer*, Chapman and Hall, London, 1965
[Text pioner en 1929. Vàlides les equacions per a aire i aigua que inclou, així com les Taules comparatives dels valors calculats i experimentals dels coeficients de convecció, que ens informa sobre la precisió que podem esperar en els càlculs.]
33. SCHLICHTING, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed., McGraw-Hill, New York, 1987, (edic. en castellà, URMO, Bilbao, 1972)
[Únic en el tema. Referència clàssica per excel·lència insubstituïble i font enciclopèdica d'innombrables treballs originals. Inclou un tractament de la zona de transició interessant.]
34. SCHLÜNDER, E.U., et al,
HEDH Heat Exchanger Design Handbook, Hemisphere Pub. Co., New York, 1983
Vol. 1 : Heat Exchanger theory.
Vol. 2 : Fluid Mechanics and Heat Transfer.
Vol. 3 : Thermal and Hydraulic Design of Heat Exchangers.
Vol. 4 : Mechanical Design of Heat Exchangers.
Vol. 5 : Physical Properties.
[Tractat monumental sobre disseny, tant mecànic com tèrmic, d'equips tèrmics, amb una recopilació de transferència de calor (Vol 2) exhaustiva i incomparable, excepte el volum 5 de propietats que és flux. Excepcional, inclòs el preu, més aviat pensat per a empreses d'enginyeria o biblioteques. Font encara no superada en *el disseny d'equips tèrmics.*]
35. SIEGEL, R., J.R. HOWELL, *Thermal Radiation Heat Transfer, 3rd ed.*, Hemisphere, Washington DC, 1992
[Magnífic per la seva profunditat, complet i amb molts exemples, però de lectura incòmoda per la seva notació. La millor font de problemes resolts de radiació que coneixem. (té solucionari). Els brillants exemples (es nota que SIEGEL és membre de la NASA) donen llum a molts conceptes teòrics poc clars en textos com el de ÖZISIK.]
36. SIGALÉS, B., *Transferència de calor tècnica Vol. 1, 1a. ed.*, Editorial Reverté S.A., Barcelona, 2003
[Es tracta d'un text en llengua castellana d'un gran nivell, molt complet i amb molts exemples resolts.]

Disposa d'un CD amb programes de suport informàtic per a facilitar la resolució de molts dels exercicis que es proposen. Aquest text facilita molt a l'enginyer la realització dels càlculs tèrmics. S'està preparant ja un segon volum amb un enfocament específic en el disseny d'equips tèrmics.]

37. STOER J. and BURLIRSCH R., *Introduction to Numerical Analysis*, (1983), Springer-Verlag, New York.
[Text excel·lent sobre mètodes numèrics. Inclou els algorismes detallats. Sense ser un expert en el tema el considero insuperable.]
38. TAINE, J., J.-P. PETIT, *Transferts thermiques: Applications (18 exercices intégralement corrigés)*, Dunod Université, París, 1991
[És presenten resoltos 18 exercicis d'un nivell excepcional. També d'un gran nivell i enfocament matemàtic. Molt interessant per especialistes.]
39. TEMA, *Standards of Tubular Exchangers Manufactures Association*, 6th ed., TEMA, New York, 1978
[Normativa de disseny mecànic mes completa i coherent que existeix, i encara que adaptada a la tecnologia dels EEUU, s'aplica en la indústria petroquímica i energètica a nivell mundial.]
40. VARGAFTIK, N.B, *Handbook of Physical Properties of Liquids and Gases*, 2nd ed., Hemisphere, Washington (DC), 1983
[Recopilació molt detallada d'origen rus encara que amb poques substàncies. Si la substància estudiada està inclosa és definitiu.]
41. VARGAFTIK, N.B, et al. (eds.), *Handbook of Thermal Conductivity of Liquids and Gases*, CRC Press, Boca Raton (FL), 1994
42. VDI- WÄRMEATLAS., *VDI Heat Atlas*, First edition, VDI- Verlag, Düsseldorf, 1963.
43. WIEBELT, J.A., *Engineering Radiation Heat Transfer*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966
[A pesar dels seus trenta anys, juntament amb el *Özsisik*, és el llibre més clar sobre radiació que coneixem (exhaurit). Concís, rigorós i amb exemples numèrics molt bé seleccionats. Bons apèndixs de factors de visió i propietats de superfícies. Inclou un codi en Fortran per a determinar el balanç de potència radiant en un recinte de 9 superfícies (màxim) difuses amb un màxim de 20 bandes. No tan complet ni ambiciós des d'un punt de vista teòric com el de *Özsisik* però molt didàctic.]