

El método de Bessel - Jacobi // consiste básicamente en descomponer la iluminación  $\xi(\rho, \phi_a)$  en una suma de términos integrables analíticamente, obteniéndose así el diagrama como suma de los términos integrados.

METODOS NUMERICOS DE ANALISIS DE ANTENAS PARABOLICAS

F. COSTAS, L. JOFRE, M. FERRANDO, A. CARDAMA.

E.T.S.I.T. BARCELONA

ABSTRACT

An algorithm, based in the Bessel - Jacobi method, is presented which allows to obtain an approximation for the radiation characteristics of parabolic-reflector antennas from knowledge of the field distribution on the two principal axis.

INTRODUCCION

En un proceso de diseño de antenas parabólicas es interesante disponer de métodos de análisis, que aunque aproximados, sean numéricamente eficientes.

En esta línea se presenta un algoritmo, basado en el método de Bessel - Jacobi, que permite el cálculo de las características de radiación de reflectores parabólicos a partir del conocimiento de la distribución de campo sobre los dos ejes principales del parabolóide.

Para la distribución de campos sobre la apertura se hace una hipótesis de regularidad en el diagrama del alimentador, que es una buena aproximación en el caso de alimentación frontal, lo que permite calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Bessel - Jacobi a partir de los ejes principales.

METODO DE BESSEL - JACOBI

Considérese la geometría de la fig-1 donde se supone una distribución de campo conocida y sea  $\xi(\rho, \phi_a)$  la componente tangencial de referencia.

El cálculo de los campos radiados supone la evaluación de una integral de superficie, que en coordenadas polares puede escribirse de la forma:

$$I(\theta, \phi) = \int_0^a \rho \int_0^{2\pi} \xi(\rho, \phi_a) e^{jk\rho \cos(\phi_a - \phi) \sin \theta} d\phi_a d\rho \quad (1)$$

El método de Bessel - Jacobi /1/ consiste básicamente en descomponer la iluminación  $\xi(\rho, \phi_a)$  en una suma de términos integrables analíticamente, obteniéndose así el diagrama como suma de los términos integrados. La suma es realmente una serie doble, y los términos se expresan, en las coordenadas polares de la apertura, como funciones sinusoidales según  $\phi_a$  y como polinomios modificados de Jacobi según  $\rho$ :

$$I(\theta, \phi) = a^2 \sum_n \sum_m \int_0^1 \rho' F_m^n(\rho') \int_0^{2\pi} \left[ A_{mn} \cos(n\phi_a) + B_{mn} \sin(n\phi_a) \right] \cdot e^{jka\rho' \sin \theta \cos(\phi_a - \phi)} d\phi_a d\rho' \quad (2)$$

Los términos integrados tienen variación sinusoidal según  $\phi$ , y en forma de funciones de Bessel según  $\theta$ :

$$I(\theta, \phi) = a^2 \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left[ A_{mn} \cos(n\phi) + B_{mn} \sin(n\phi) \right] \cdot 2\pi j^n \frac{J_{n+2m+1}(ka \sin \theta)}{\sqrt{2(n+2m+1)} ka \sin \theta} \quad (3)$$

Los términos  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  se obtienen por ortogonalidad de los polinomios modificados de Jacobi en el intervalo (0,1) como:

$$A, B_{mn} = \int_0^1 a, b_n(\rho') F_m^n(\rho') \rho' d\rho' \quad (4)$$

donde los  $a_n$ ,  $b_n$  son los coeficientes de Fourier del desarrollo de  $\xi(\rho, \phi_a)$  según  $\phi_a$ .

El método expuesto se rentabiliza al calcular el diagrama para muchas direcciones del espacio, puesto que el esfuerzo adicional para cada uno es reducido, en comparación con otros métodos, siendo el esfuerzo mayor el del cálculo de los coeficientes.

El desarrollo presentado, de aplicación general, es especialmente eficiente para aperturas circulares e iluminaciones suaves donde la serie es rápidamente convergente.

#### INTERPOLACION A PARTIR DE LOS PLANOS PRINCIPALES

El método de Bessel - Jacobi permite simplificaciones importantes

para distribuciones concretas de la iluminación que son una buena aproximación de situaciones reales en el análisis de reflectores parabólicos.

Supongamos, en particular, un paraboloide cuyo alimentador tiene un diagrama simétrico con respecto a los ejes x, y (fig. 1), con simetría par para la polarización de referencia. Sea ésta en dichos ejes:

$$\text{Eje x: } \xi(\rho, 0) = f_x(\rho = |x|) \quad (5)$$

$$\text{Eje y: } \xi(\rho, \pi/2) = f_y(\rho = |y|)$$

Se supone /2/ como aproximación para determinar, a partir de la iluminación en estos ejes, la iluminación de un punto cualquiera de la apertura, el desarrollo:

$$\xi(\rho, \phi_a) = f_x(\rho) \cos^2 \phi_a + f_y(\rho) \sin^2 \phi_a \quad (6)$$

Esta aproximación, que se supone válida para iluminaciones con variación según  $\phi_a$  muy suaves, se basa en las siguientes consideraciones:

- a) Se calcula la iluminación en un corte  $\phi_a$  como promedio de la de los ejes. Para una distribución con simetría de revolución el resultado es exacto.
- b) En  $\phi_a = 0$  y  $\phi_a = \pi/2$ , la interpolación coincide con la iluminación real.
- c) Es exacta para la iluminación producida por un dipolo elemental orientado según uno de los ejes.
- d) La iluminación de un paraboloide con alimentador simétrico se ajusta bien a la función:

$$\xi = g(\rho) (1 - ax^2 - by^2) \quad (7)$$

siendo a, b constantes y  $g(\rho)$  una función arbitraria, en cuyo caso la función es exacta.

Esta aproximación presenta dos grandes ventajas de cálculo:

- 1) Únicamente es necesario el conocimiento de los campos sobre los ejes. Esto no sólo reduce el volumen de datos, sino que representa además una gran simplificación de los cálculos o de las medidas.
- 2) La aproximación proporciona directamente el desarrollo según  $\phi_a$  necesario en el método de Bessel-Jacobi, con lo cual sólo es necesario desarrollar según  $\rho$ .

Para el cálculo del diagrama de polarización cruzada se realiza una aproximación equivalente, que para el caso de polarización lineal sería:

$$\xi(\rho, \phi_a) = f_c(\rho) \text{ sen } (2\phi_a) \quad (8)$$

siendo  $f_c(\rho)$  la distribución de polarización cruzada a lo largo de un corte a  $45^\circ$  de los ejes.

#### RESULTADOS NUMERICOS

Como aplicación del método desarrollado se ha estudiado el caso de un alimentador real, consistente en un dipolo con un disco plano reflector (fig. 2), cuyo diagrama para  $H = d = \lambda/4$  se representa en la fig. 3.

Se ha realizado el análisis para un paraboloide de 100 cm de diámetro y  $f/D = 0,5$  a una  $\lambda = 2,5$  cm, mediante el método de reflexión local /3/, utilizando la integración directa de (1) en una trama de  $60 \times 60$  puntos cuyo resultado se presenta a trazos en las figuras 4, 5, 6 para los cortes plano H, plano E y polarización cruzada a  $45^\circ$  respectivamente.

Se realizó entonces el análisis mediante la interpolación a partir de los planos principales utilizando el desarrollo (6) para la polarización de referencia y (8) para la cruzada. En el cálculo de (3) se tomaron 10 coeficientes obtenidos a partir de la integración de (4) sobre 40 puntos. Los resultados se representa en trazo continuo en las gráficas 4, 5, 6.

El error obtenido es de 0,03 dB en la ganancia y 0,1 dB en el primer lóbulo secundario.

La utilización del método de interpolación supone, respecto a la integración directa, un ahorro en tiempo de cálculo en un factor de 10 en el cálculo de la distribución en la apertura y en un factor de 5 en el diagrama secundario.

#### CONCLUSION

Una hipótesis de simetría y regularidad en el diagrama del alimentador ha permitido la obtención de la iluminación en la apertura de un reflector parabólico como interpolación de los ejes principales. La exactitud de los resultados en los casos analizados es satisfactoria obteniendo reducciones en tiempo de cálculo del orden de un factor de 5 a 10.

El procedimiento proporciona una primera aproximación del diagrama de un paraboloide sumamente interesante en procesos de análisis y medida.

#### REFERENCIAS

/1/ V.G. ISRAEL, R. MITTRA. "A new series representation for the radiation integral with application to reflector antennas". IEEE Trans. Ant.

Prop. Vol AP-25, nº 5, sep. 1977. pp 631 - 641.

/2/ F. COSTAS. "Alimentadores primarios para antenas parabólicas", P.F.C. ETSIT. Barcelona. Junio 1982.

/3/ L. JOFRE, F. COSTAS, A. CARDAMA. "Análisis de antenas parabólicas". Congreso Anual URSI, Barcelona 1982.

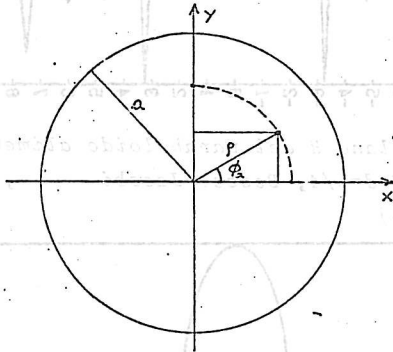


Fig. 1. Geometría general.

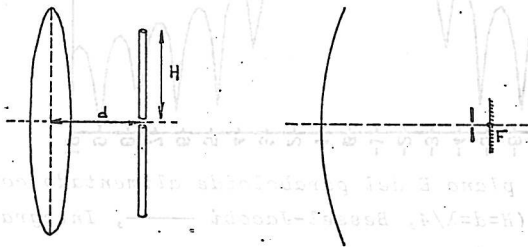


Fig. 2. Dipolo con disco reflector como alimentador.

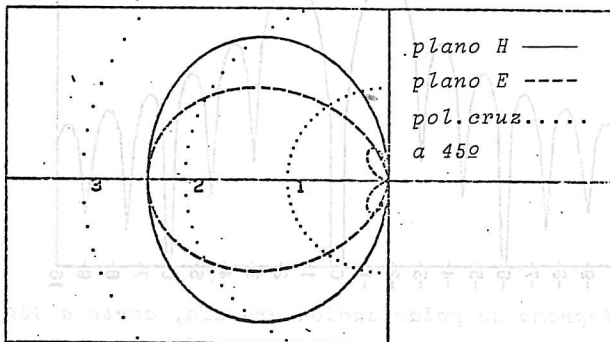


Fig. 3. Diagrama en escala lineal del dipolo con disco  
( $H=d=\lambda/4$ )

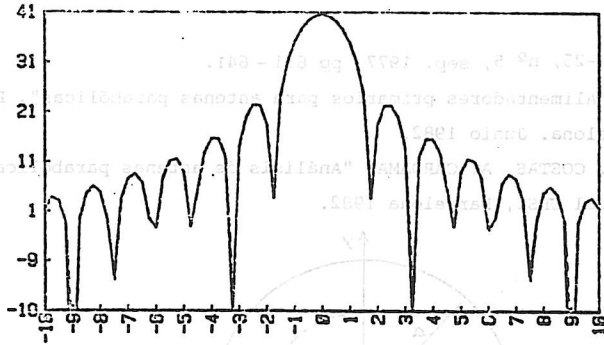


Fig. 4. Diagrama plano H del paraboloido alimentado con dipolo y disco ( $H=d=\lambda/4$ , Bessel-Jacobi —, Integración directa -----)

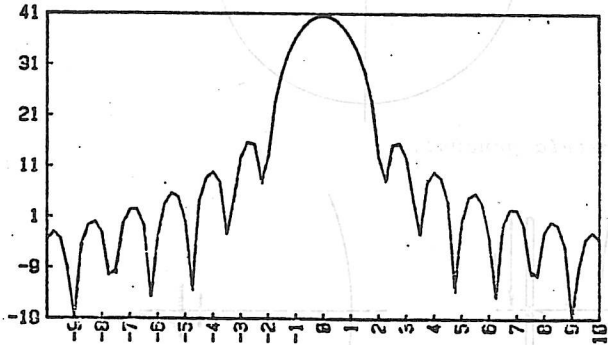


Fig. 5. Diagrama plano E del paraboloido alimentado con dipolo y disco ( $H=d=\lambda/4$ , Bessel-Jacobi —, Integración directa -----)

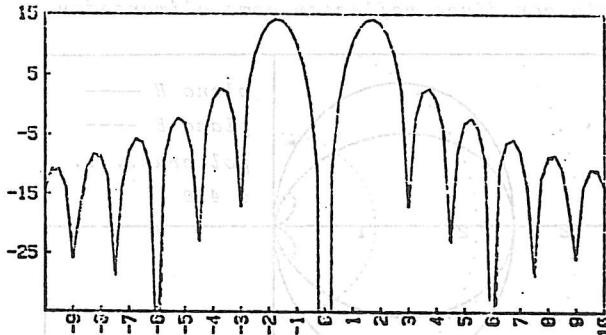


Fig. 6. Diagrama de polarización cruzada, corte a  $45^\circ$ , del paraboloido alimentado con dipolo y disco ( $H=d=\lambda/4$ , Bessel-Jacobi —, Integración directa -----)