

DETERMINACION DE LA PROBABILIDAD DE ERROR EN SISTEMAS  
DE COMUNICACION DIGITAL POR FIBRAS OPTICAS :  
ESTUDIO COMPARATIVO DE METODOS "CUASI-EXACTOS"

F. CASADEVALL\*, G. JUNYENT\*\*, J.J OLMOS\*, R. AGUSTI\*

\* Cátedra de Emisores y Receptores, E.T.S.I. Telecomunicación Barcelona.

\*\* Cátedra de Líneas y Cables, E.T.S.I. Telecomunicación Barcelona.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio comparativo de diversos métodos para calcular la probabilidad de error en un sistema de comunicación digital por fibra óptica. Los procedimientos utilizados permiten determinar el valor de la probabilidad de error a partir de los momentos de la variable aleatoria que caracteriza al ruido y a la interferencia entre símbolos presentes en el sistema. Ya que el número de momentos utilizado determina la precisión del cálculo a dichos métodos se les denomina cuasi-exactos.

I. INTRODUCCION

El parámetro que mide la calidad de un sistema de transmisión digital es la probabilidad de error en el símbolo,  $P_e$ . Para el cálculo de la probabilidad de error es necesario conocer la función de densidad de probabilidad que caracteriza a los fenómenos aleatorios (ruido térmico, ruido shot e interferencia entre símbolos) que aparecen en el sistema.

En comunicaciones por fibra óptica resulta extraordinariamente complejo el encontrar dicha función de densidad de probabilidad debido a :

- 1.- La naturaleza no estacionaria del ruido shot.
- 2.- La dependencia del ruido shot con el mensaje digital transmitido.
- 3.- La presencia de la interferencia entre símbolos (ISI)

En consecuencia se han desarrollado numerosos estudios destinados a encontrar una solución que permita la obtención de la probabilidad de error en el símbolo sin necesidad de conocer de una forma explícita la función de densidad de probabilidad.

Los métodos desarrollados pueden agruparse en dos grandes familias :

a.- Los métodos denominados exactos o mejor "cuasi-exactos", que permiten determinar el valor de la probabilidad de error a partir del conocimiento de los momentos de la variable aleatoria considerada. El número de momentos utilizados determina la precisión del cálculo.

b.- Métodos que dan cotas superiores o inferiores, y en ocasiones ambas, de la probabilidad de error.

En este trabajo analizamos el comportamiento de diversos métodos cuasi-exactos a fin de comparar sus méritos y prestaciones.

## II. FORMULACION GENERAL DEL PROBLEMA

De  $|1|$ , la señal  $y(t)$  presente en el circuito de muestreo y decisión de un sistema de transmisión digital por fibra óptica viene dada por :

$$y(t) = G \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t-nT) + S(t) + n_T(t)$$

siendo:  $\{a_n\}$  una secuencia de símbolos independientes y equiparables,  $a_n \in (0,1)$ , transmitidos a una velocidad  $1/T$ ,  $G$  es una constante que depende de los parámetros de la fuente de potencia óptica del transmisor, de la fibra óptica y del fotodetector del receptor;  $h(t)$  es la respuesta impulsional global del sistema;  $S(t)$  el ruido shot y  $n_T(t)$  el ruido térmico.

Si en el instante  $t_0$  se muestra  $a_0$  :

$$y(t_0) = G a_0 h_0 + Z_T$$

$$Z_T = r_T + n_T(t_0)$$

$$r_T = G w + S(t_0) \tag{1}$$

$$w = \sum_{n \neq 0} a_n h_n = \text{ISI}$$

$$h_n = h(t_0 - nT)$$

Las probabilidades de error condicionadas son :

$$P(e/0) = P(z > D/a_0 = 0) = \int_D^{\infty} f_z(\alpha) d\alpha \tag{2}$$

$$P(e/1) = P(z < D-h_0/a_0 = 1) = \int_{-\infty}^{D-h_0} f_z(\alpha) d\alpha \tag{3}$$

donde :

$$z = W + G^{-1} [S(t_0) + n_T(t_0)]$$

$f_z(\alpha)$  = función densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $z$

$D' = GD =$  Umbral de decisión

### III. PREDICCIÓN DE LA PROBABILIDAD DE ERROR USANDO SERIES DE GRAM-CHARLIER

Un método para obtener fácilmente la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria, a partir del conocimiento de sus momentos, es usar un desarrollo en serie de Gram-Charlier. En efecto si aproximamos  $f_z(\alpha)$  por :

$$f_z(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m T_m(\alpha) \quad ; \quad \text{Serie de Gram-Charlier}$$

donde

$$T_m(\alpha) = \frac{d}{d\alpha^m} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\alpha^2/2) \right]$$

de (2) y (3) las expresiones de las probabilidades de error condicionadas resultan :

$$P(e/0) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{D}{\sqrt{2}} \right) \right] - \sum_{n=3}^{\infty} a_n T_{n-1}(D)$$

$$P(e/1) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{h_0 - D}{\sqrt{2}} \right) \right] - \sum_{n=3}^{\infty} a_n T_{n-1}(h_0 - D)$$

donde

$$T_n(x) = -\{x T_{n-1}(x) + (n-1) T_{n-2}(x)\}$$

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

$$T_1(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\alpha^2/2) d\alpha$$

donde :

$$z = w + G^{-1} \left[ S(t_0) + n_T(t_0) \right]$$

$f_z(\alpha)$  = función densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $z$

$D'$  =  $GD$  = Umbral de decisión

### III. PREDICCIÓN DE LA PROBABILIDAD DE ERROR USANDO SERIES DE GRAM-CHARLIER

Un método para obtener fácilmente la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria, a partir del conocimiento de sus momentos, es usar un desarrollo en serie de Gram-Charlier. En efecto si aproximamos  $f_z(\alpha)$  por :

$$f_z(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m T_m(\alpha) \quad ; \quad \text{Serie de Gram-Charlier}$$

donde

$$T_m(\alpha) = \frac{d}{d\alpha^m} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\alpha^2/2) \right]$$

de (2) y (3) las expresiones de las probabilidades de error condicionadas resultan :

$$P(e/0) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{D}{\sqrt{2}} \right) \right] - \sum_{n=3}^{\infty} a_n T_{n-1}(D)$$

$$P(e/1) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{h_0 - D}{\sqrt{2}} \right) \right] - \sum_{n=3}^{\infty} a_n T_{n-1}(h_0 - D)$$

donde

$$T_n(x) = -\{x T_{n-1}(x) + (n-1) T_{n-2}(x)\}$$

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

$$T_1(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\alpha^2/2) d\alpha$$

La relación entre los términos  $a_n$  y los momentos  $\{\mu_m\}$  de la variable aleatoria  $z$  es :

$$a_{2m} = \frac{\mu_{2m}}{(2m)!} - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{a_{2l}}{2^{(m-1)} (m-1)!} \quad ; \quad m \geq 1$$

$$a_{2m+1} = \frac{\mu_{2m+1}}{(2m+1)!} - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{a_{2l+1}}{2^{(m-1)} (m-1)!} \quad ; \quad m \geq 1$$

$$a_0 = \mu_0$$

$$a_1 = -\mu_1$$

#### IV. PREDICCIÓN DE LA PROBABILIDAD DE ERROR USANDO EL METODO DE HO-YEH

De (1) se observa que la variable aleatoria  $z_T$  es la suma de dos variables  $n_T(t_0)$  y  $r_t$ , estadísticamente independientes. Al ser  $n_T(t_0)$  una variable aleatoria gaussiana, de (2) y (3) las probabilidades de error condicionadas puede expresarse como :

$$P(e/a_0=i) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{A_i + (-1)^{i+1} \alpha}{\sigma \sqrt{2}} \right) f_r(\alpha) d\alpha, \quad i \in (0,1) \quad (4)$$

$$A_i = \begin{cases} h_0 - D & i=1 \\ D & i=0 \end{cases}$$

Donde  $r = G^{-1} r_T$ ,  $\operatorname{erfc}(x)$  es la función error complementaria,  $f_r(\alpha)$  es la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $r$  y  $\sigma^2$  es la varianza de la variable aleatoria  $G^{-1} n_T(t_0)$

Desarrollando en serie la función error complementaria alrededor del punto  $A_i/\sigma\sqrt{2}$  las probabilidades de error condicionadas resultan :

$$P(e/0) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{D}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ - \left( \frac{D}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1} \left( \frac{D}{\sqrt{2}\sigma} \right) \frac{W_n}{n! (\sqrt{2}\sigma)^n}$$

$$P(e/1) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{h_0 - D}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ - \left( \frac{h_0 - D}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H_{n-1} \left( \frac{h_0 - D}{\sqrt{2}\sigma} \right) \cdot \frac{W_n}{n! (\sqrt{2}\sigma)^n}$$

Siendo  $W_n$  el momento de orden  $n$  de la variable aleatoria  $r$  y  $H_n(x)$  el polinomio de Hermite de orden  $n$  y argumento  $x$ .

#### V. PREDICCIÓN DE LA PROBABILIDAD DE ERROR USANDO UNA REGLA DE CUADRATURA DE GAUSS (R.C.G.)

Este método se fundamenta en la evaluación de la integral de probabilidad, expresión (4), de una forma suficientemente precisa mediante un proceso de integración numérica. Para ello utiliza una generalización del método de integración de Newton, [2], que consiste en sustituir la función a integrar por un polinomio de interpolación de grado  $n$  tal que tenga  $n+1$  puntos comunes con la función en el intervalo de integración. Dado que el método de integración de Gauss permite una distribución de puntos de interpolación variable, podemos satisfacer al menos  $2n$  condiciones independientes.

Si se satisfacen las siguientes condiciones :

- 1º.- Sea  $f_r(\alpha)$  una función de peso en el intervalo a integrar
- 2º.- Los momentos de la función  $f_r(\alpha)$  existen y son finitos.
- 3º.- Existe una única secuencia de polinomios ortonormales a  $f_r(\alpha)$

se demuestra, [3], que existen  $n$  números reales  $x_1, x_2, \dots, x_n$  comprendidos dentro del intervalo de integración y  $n$  valores  $A_i$  tales que :

$$P(e/0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{D-\alpha}{\sqrt{2}\sigma}\right) f_r(\alpha) d\alpha \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_i \operatorname{erfc}\left(\frac{D-X_i}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$P(e/1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{h_0-D+\alpha}{\sqrt{2}\sigma}\right) f_r(\alpha) d\alpha \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_i \operatorname{erfc}\left(\frac{h_0-D+X_i}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

En la referencia [4] G.H. Golub y J.H. Welsch muestran un método que permite obtener los  $n$  pesos  $A_i$  y las  $n$  abscisas  $x_i$  a partir de los  $2n+1$  primeros momentos de la variable aleatoria  $r$

#### VI. RESULTADOS

Se han obtenido resultados para un enlace de 36 Km de longitud, utilizando fibra multimodo con 800 MHz de ancho de banda a -3dB en 1 Km y con una variación de dicho ancho de banda con

6.- F. CASADEVALL, "Contribución al estudio de técnicas de ecualización en repetidores regenerativos para sistemas de transmisión digital por fibras ópticas a alta velocidad", Tesis Doctoral, E.T.S.I. Telecomunicación, Barcelona 1983.

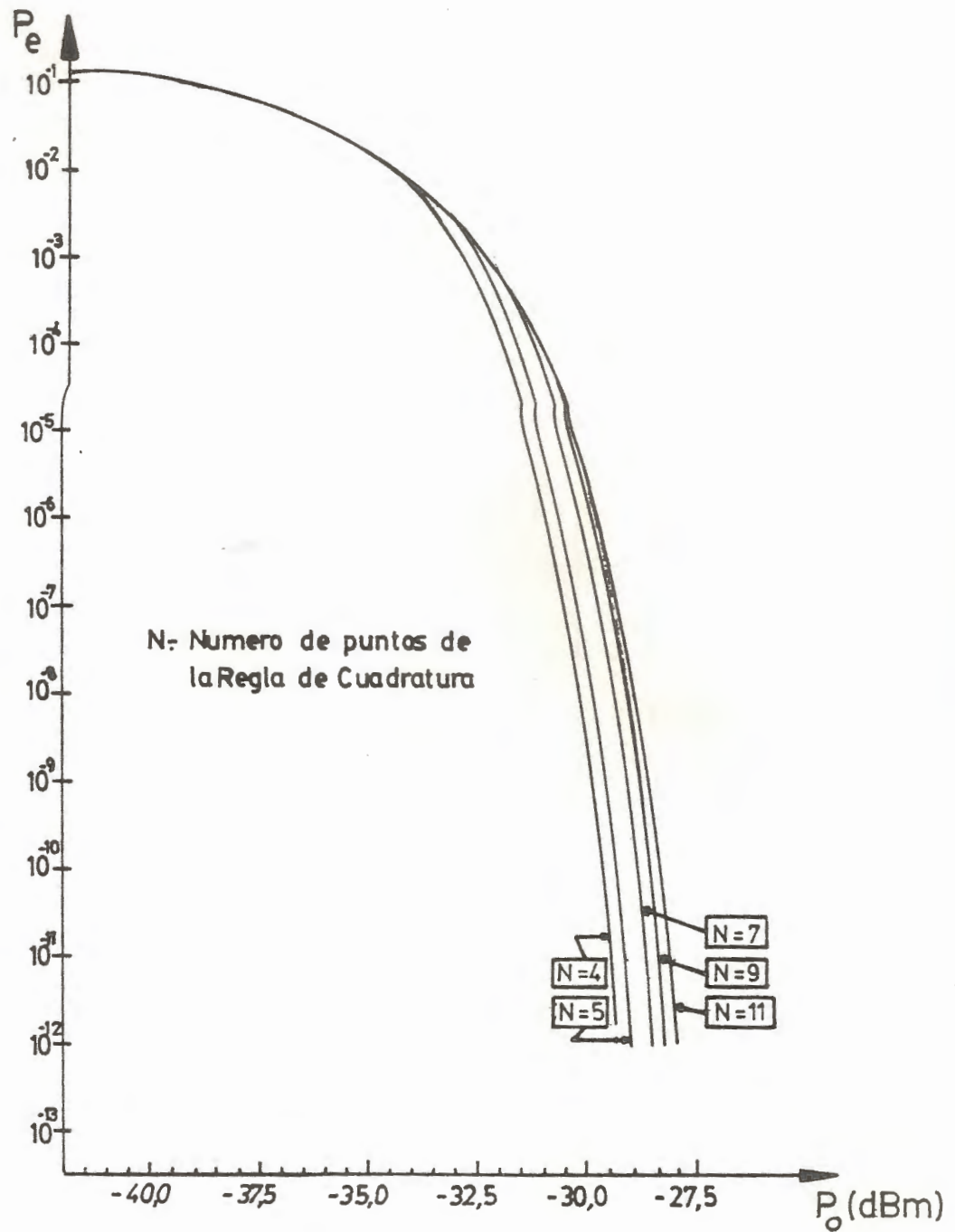


Figura 1: Probabilidad de Error en función de la Potencia Óptica incidente en el fotodetector

$P_o$ (dBm)	$P_e$ según R.Q.G.	$P_e$ según HO-YEH
- 30	0.3716786286	0.3716785961
- 20	0.2482546197 $10^{-1}$	0.2482537011 $10^{-1}$
- 15	0.6036509584 $10^{-5}$	0.2630250984 $10^{-5}$
- 14	0.52102326021 $10^{-7}$	---
- 13	0.3122363404 $10^{-10}$	0.14659744341 $10^{-30*}$
- 12	0.5984248767 $10^{-14}$	0.17617251666 $10^{-57*}$

TABLA 1

$P_o$ (dBm)	$P_e$ según G.Q.R.	$P_e$ según HO-YEH
- 20	0.1707377384	0.1707377241
- 13	0.5083592043 $10^{-2}$	0.5079937446 $10^{-2}$
- 11	0.1524084698 $10^{-3}$	0.1535317302 $10^{-3}$
- 10	0.6126000905 $10^{-5}$	0.2124407569 $10^{-6}$
- 9	0.4465987426 $10^{-7}$	0.7244164969 $10^{-13} *$
- 8	0.2317529934 $10^{-10}$	0.13830337237 $10^{-30*}$
- 7	0.1919051510 $10^{-15}$	0.3418364441 $10^{-62} *$

TABLA 2