

J.M. Rius, M. Baquero, J. Romeu, M. Ferrando, L. Jofre,
E. de los Reyes, A. Elias
Dpto. de Electrofísica, E.T.S.I. Telecomunicación
Apartado 30002 - 08080 Barcelona

ABSTRACT

This paper presents a new and efficient algorithm in cylindrical coordinates for microwave diffraction tomography. In comparison with algorithms in cartesian coordinates, it does not need mechanical rotation of the object and provides higher quality reconstruction with similar processing time.

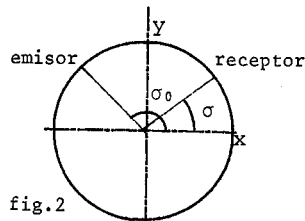
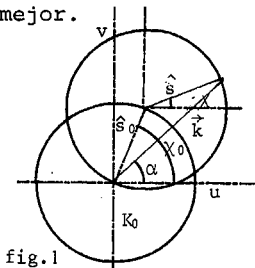
INTRODUCCION

Para aplicaciones biomédicas, la tomografía de microondas presenta sobre la de rayos X la ventaja de no ser una radiación ionizante. En cuanto a algoritmos, también hay importantes diferencias entre la tomografía de microondas y la de rayos X:

Los algoritmos de reconstrucción para rayos X se basan en el teorema de proyección: La transformada de Fourier de una proyección en una dirección dada es igual a un corte en la misma dirección de la transformada de Fourier bidimensional del objeto proyectado. Como los rayos X no se difractan, viajan en línea recta, y por tanto los campos medidos en una línea recta paralela a un frente de onda plano incidente después de atravesar el objeto son proporcionales a la proyección del mismo en una dirección perpendicular a la de propagación. Repitiendo el proceso para distintas direcciones obtenemos valores de la transformada de Fourier bidimensional del objeto. Con una interpolación podemos hacer la transformada inversa y obtener el objeto $|1|$.

En tomografía de microondas se produce difracción, de forma que para un frente de onda plano incidente, la transformada de Fourier de los campos medidos sobre una línea recta paralela al frente de onda es igual a un corte circular de la transformada de Fourier bidimensional del objeto. Repitiendo el proceso para distintas direcciones obtenemos un muestreo no uniforme de la transformada de Fourier bidimensional del objeto en un círculo de radio $\sqrt{2} \cdot K_0 \cdot |1|$.

Sin embargo, para aplicaciones biomédicas una geometría cilíndrica presenta la ventaja de ser envolvente y por tanto no precisar una rotación mecánica del objeto. El inconveniente de los algoritmos en coordenadas cilíndricas es la aparición de funciones de Bessel y transformadas de Hankel, que no pueden calcularse numéricamente de forma tan eficiente como las transformadas de Fourier. Sin embargo, puede reducirse el problema fácilmente al caso cartesiano, obteniendo muestras de la transformada de Fourier bidimensional del objeto equiespaciadas sobre cortes circulares y pudiendo aplicar la FFT bidimensional para reconstruir el objeto. Como ahora conocemos el espectro en un círculo de radio $2 K_0$, mayor que en el caso cartesiano, la resolución, y por tanto la calidad, de la imagen obtenida será mejor.



FUNDAMENTOS TEORICOS

Sea un objeto de constante dieléctrica $\epsilon_1(\vec{r})$ y magnética $\mu = \mu_0$ inmerso en un medio de constante dieléctrica ϵ_0 . Definimos:

$$o(\vec{r}) = 1 - \epsilon_1(\vec{r}) / \epsilon_0 \quad (1)$$

También definimos "amplitud de onda difractada por el objeto" $|1|, |2|$:

$$f(\hat{s}; \hat{s}_0) = K_0^2 \iint o(\vec{r}) \psi(\vec{r}; \hat{s}_0) e^{-jK_0 \hat{s} \cdot \vec{r}} d^2r \quad (2)$$

donde $\psi(\vec{r}; \hat{s}_0)$ es el campo total sobre el objeto (incidente+difractado) cuando incide una onda plana en dirección \hat{s}_0 , y K_0 es el número de onda en el medio que rodea al objeto.

Según la aproximación de Born, el campo total es igual al incidente si $o(\vec{r}) \ll 1$ (objeto poco difractante), es decir,

$$\psi(\vec{r}) = \psi^i(\vec{r}) = e^{-jK_0 \hat{s}_0 \cdot \vec{r}} \quad (3)$$

En este caso:

$$f(\hat{s}; \hat{s}_0) = K_0^2 \iint o(\vec{r}) e^{-jK_0(\hat{s} + \hat{s}_0) \cdot \vec{r}} d^2r = K_0^2 O(K_0(\hat{s} + \hat{s}_0)) \quad (4)$$

con $O(\vec{k}) = TF-2D(o(\vec{r}))$ (5)

Por tanto, en estas condiciones $f(\hat{s}; \hat{s}_0)$ es un corte circular de radio K_0 centrado en $\vec{k} = \hat{s}_0$ de la transformada de Fourier bidimensional del objeto (figura 1).

Para calcular $f(\hat{s}; \hat{s}_0)$ utilizamos el teorema de reciprocidad:

$$\int_{v_a} \vec{J}_a \cdot \vec{E}_b dv_a = \int_{v_b} \vec{J}_b \cdot \vec{E}_a dv_b \quad (6)$$

siendo \vec{J}_a las corrientes existentes en el volumen v_a que inducen campos \vec{E}_a sobre el volumen v_b , y \vec{J}_b las corrientes en v_b que inducen campos \vec{E}_b sobre v_a .

Si tenemos una antena emisora-receptora alrededor del objeto (fig. 2) tomamos $v_a = \text{antena}(\vec{r})$ y $v_b = \text{objeto}(\vec{r}')$. Entonces, para campos \vec{s} y corrientes \vec{J}_b perpendiculares al plano de la antena:

\vec{J}_b = corrientes equivalentes sobre el objeto inducidas por el campo incidente $\psi^i(\vec{r}', \hat{s}_0)$ y que producen el campo difractado $E_b = \psi^s(\vec{r})$.

\vec{J}_a = corrientes que si existieran sobre la antena receptora actuando como transmisora producirían sobre el objeto una onda plana en dirección \hat{s} : $\vec{E}_a = e^{-jK_0 \hat{s} \cdot \vec{r}}$ (7)

Las corrientes equivalentes inducidas por el campo incidente sobre el objeto son $|3|$:

$$\vec{J}_b = \frac{1}{j\omega\mu_0} K_0^2 o(\vec{r}') \psi(\vec{r}'; \hat{s}_0) \quad (8)$$

Así, para antena circular y objeto bidimensional en el plano de la antena tenemos:

$$\iint \frac{1}{j\omega\mu_0} K_0^2 o(\vec{r}') \psi(\vec{r}'; \hat{s}_0) e^{-jK_0 \hat{s} \cdot \vec{r}} d^2r = \iint_{\text{antena}} I_a(\vec{r}) \psi^s(\vec{r}) dl \quad (9)$$

De (3) y (9); con la geometría de la fig.2:

$$\int_0^{2\pi} I_a(\sigma) \psi^S(\sigma; \hat{s}_0) R d\sigma = \frac{1}{j\omega\mu_0} f(\hat{s}; \hat{s}_0) \quad (10)$$

$I_a(\sigma)$ debe ser tal que produzca una onda plana sobre el objeto en dirección $\hat{s} = 1_{L\chi} |3|$:

$$e^{-jK_0 \hat{s} \vec{r}} = -j\omega\mu_0 \int_0^{2\pi} I_a(\sigma) H_0^2(K_0 R) |\vec{r} - \vec{r}'| R d\sigma \quad (11)$$

Desarrollando ambos miembros en serie de Fourier

$$\sum_{-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(K_0 R) e^{jn(\sigma - \chi)} = -j\omega\mu_0 \int_0^{2\pi} I_a(\sigma) \frac{1}{4j} \sum_{-\infty}^{\infty} H_n^2(K_0 R) J_n(K_0 R) e^{-jn(\sigma - \chi)} R d\sigma$$

Invirtiéndolo el orden de integral y sumatorio:

$$j^{-n} e^{-jn\chi} = \frac{-j\omega\mu_0}{4j} H_n^2(K_0 R) R \int_0^{2\pi} I_a(\sigma) e^{-jn\sigma} d\sigma$$

$$I_a(\sigma) = \frac{4j}{-j\omega\mu_0 2\pi R} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{j^{-n}}{H_n^2(K_0 R)} e^{jn(\sigma - \chi)} \quad (12)$$

Si definimos $F_r(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{j^{-n}}{H_n^2(K_0 R)} e^{jn\gamma} = F_r(-\gamma)$ (13)

tenemos: $I_a(\sigma) = \frac{4j}{-j\omega\mu_0 R} F_r(\chi - \sigma)$ (14)

corrientes que producen una onda plana en dirección $\hat{s} = 1_{L\chi}$. De (10) y (14):

$$f(\hat{s}; \hat{s}_0) = -4j \int_0^{2\pi} \psi^S(\sigma; \hat{s}_0) F_r(\chi - \sigma) d\sigma \quad (15)$$

siendo $\psi^S(\sigma; \hat{s}_0)$ el campo difractado cuando incide una onda plana en dirección $\hat{s}_0 = 1_{L\chi_0}$.

Pero en nuestro caso no incide una onda plana sino una onda cilíndrica generada por una fuente puntual en $R_{L\sigma_0}$. Teniendo en cuenta que el campo difractado cuando incide una onda plana es la suma de los campos difractados debidos a una serie de ondas cilíndricas cuya suma es la onda plana, y que estas ondas cilíndricas son las generadas por las corrientes I_a :

$$\psi^S(\sigma; \hat{s}_0) = \int_0^{2\pi} \psi^S(\sigma; \sigma_0) I_a(\chi_0 - \sigma_0) R d\sigma \quad (16)$$

con $\psi^S(\sigma; \sigma_0)$ igual al campo difractado medido en σ cuando incide una onda cilíndrica generada por una fuente puntual unitaria situada en $R_{L\sigma_0}$ y $I_a(\chi_0 - \sigma_0)$ las corrientes en σ_0 que producen una onda plana en dirección $\hat{s}_0 = 1_{L\chi_0}$.

De (14), (15) y (16) tenemos:

$$f(\hat{s}; \hat{s}_0) = \frac{(4j)^2}{j\omega\mu_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi^S(\sigma; \sigma_0) F_r(\chi - \sigma) F_r(\chi_0 - \sigma_0) d\sigma d\sigma_0 \quad (17)$$

ALGORITMO

En lugar de una antena cilíndrica continua, tenemos un array circular de N antenas puntuales omnidireccionales emisoras-receptoras. Emitiendo con cada una de ellas consecutivamente y recibiendo como el resto obtenemos la matriz $\psi(n; n_0)$, que son muestras de $\psi^S(\sigma; \sigma_0)$.

Así, en el dominio discreto tenemos la convolución periódica:

$$f(m; m_0) = \frac{(4j)^2}{j\omega\mu_0} \frac{(2\pi)^2}{N^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \psi(n; n_0) F_r(m-n) F_r(m_0 - n_0) \quad (18)$$

Esta convolución se implementa eficientemente haciendo el producto de series de Fourier discretas de las secuencias periódicas $\psi(n; n_0)$ y $F_r(\gamma; \gamma_0)$ utilizando la FFT bidimensional. Como la serie de Fourier de $F_r(\gamma; \gamma_0)$ es

$$\frac{j^{-(n+n_0)}}{(2\pi)^2 H_n^2(K_0 R) H_{n_0}^2(K_0 R)}$$

podemos tenerla tabulada, y obtener $f(m; m_0)$ con 2 FFT bidimensionales.

A partir de $f(m; m_0)$, obtenemos $O(u, v)$ interpolando según las fórmulas:

$$\chi_0 = \alpha + \frac{\pi}{2} - \text{ARCSEN} \frac{|k|}{2K_0} \quad (19)$$

$$\chi = \chi_0 - \pi + 2\text{ARCSEN} \frac{|k|}{2K_0} \quad (20)$$

$$\text{con } \vec{k} = k_{L\alpha} = (u, v) \quad (21)$$

La interpolación es bilineal, y al ser un filtrado paso-bajo del espectro del objeto, empeora la reconstrucción para $|r|$ grandes. El resultado se mejora aumentando la densidad de muestras de $f(s; s_0)$ a base de añadir ceros a la serie de Fourier bidimensional de $f(s; s_0)$, consiguiéndose reconstrucciones independientes de $|r|$.

Con geometría cilíndrica, obtenemos muestras de $f(s; s_0)$ en un círculo de radio $2K_0$, mientras que en el caso cartesiano de onda plana incidente y antena lineal el radio es $2K_0$. De esta forma, la resolución de la imagen obtenida mejora en un factor $\sqrt{2}$.

RESULTADOS

El ordenador utilizado es un HP-9000 serie 500 de 32 bits y 4Mbytes de memoria interna.

Los resultados se han obtenido con $N = 64$ antenas, y radio del array circular $10\text{cm} = 7.14\lambda$ aumentando la densidad de muestras de $f(m; m_0)$ a 128×128 y con una reconstrucción final de 64×64 muestras. La frecuencia utilizada es de 2.45 GHz.

- Respuesta impulsional: Reconstrucción de una delta en el origen $o(x, y) = \delta(x, y)$, para un medio sin pérdidas (fig. 3) y con pérdidas (fig. 4). El medio con pérdidas es agua a 35°C y 2.45 GHz, $\epsilon_0 = 74 - j7$.
- Resolución: Reconstrucción con "Zoom" de 2 deltas separadas 0.5λ para medio sin pérdidas (fig. 5).
- Uniformidad de la imagen: Reconstrucción de una serie de deltas separadas $\lambda/4$ situadas en el eje x positivo, para un medio sin pérdidas (Fig. 6). Para $r > 5\lambda$ empeora la calidad de la reconstrucción debido a un muestreo insuficiente de los campos difractados con 64 antenas. Esta reconstrucción se ha obtenido con 256×256 muestras de $f(m; m_0)$.
- Modelo de cuerpo biológico: Con el siguiente modelo de brazo:

Hueso	$r < 2.5\text{cm}$	$\epsilon = 5.5 - j0.8$	$o = 0.92$
Músculo	$2.5\text{cm} < r < 4.2\text{cm}$	$\epsilon = 50 - j17.1$	$o = 0.27$
Grasa	$r > 5\text{cm}$	$\epsilon = 4.92 - j1.49$	$o = 0.93$

Se han obtenido las siguientes reconstrucciones:

- Fig. 7: Con los campos difractados calculados suponiendo que la aproximación de Born es exacta, en medio sin pérdidas
- Fig. 8: Igual que la anterior con pérdidas.
- Fig. 9: Con los campos difractados calculados exactamente (la aproximación de Born no se cumple).

CONCLUSIONES

Hemos visto como los algoritmos de reconstrucción en coordenadas cilíndricas pueden implementarse de forma eficiente evitando las transformadas de Hankel a base de reducir el problema al caso cartesiano.

De esta forma, la geometría cilíndrica nos permite evitar la rotación mecánica del objeto manteniendo la velocidad de cálculo del caso cartesiano y mejorando la resolución, pudiéndose diferenciar claramente objetos separados 0.5λ . Con 64 antenas la reconstrucción es uniforme hasta un radio de 5λ .

También hemos visto que en el caso de objetos biológicos, la aproximación de Born no es exacta, pero no impide distinguir tejidos de ϵ muy diferente.

Para los resultados de las fig. 4 a 9 el tiempo de cálculo es de unos 20 seg. con la versión actual del programa, no optimizada en velocidad. En el futuro se espera realizar la reconstrucción en tiempo real.

REFERENCIAS

- 1 - S.X. Pan and A.C. Kak, "A Computational Study of Reconstruction Algorithms for Diffraction Tomography: Interpolation versus Filtered Backpropagation". IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-31, No.5, pp. 1262-1275, October 1983.
- 2 - A.J. Devaney and G. Beylin, "Diffraction Tomography Using Arbitrary Transmitter and Receiver Surfaces". Ultrasonic Imaging, vol. 6, pp. 181-193, 1984.
- 3 - R.F. Harrington, "Time Harmonic Electromagnetic fields". McGraw-Hill, 1961.

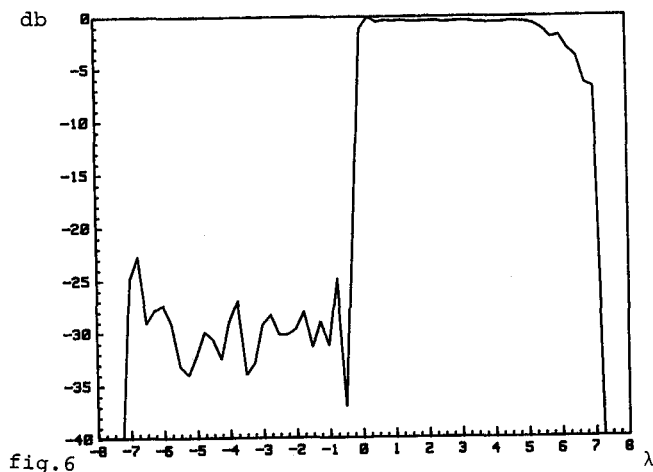


fig.6

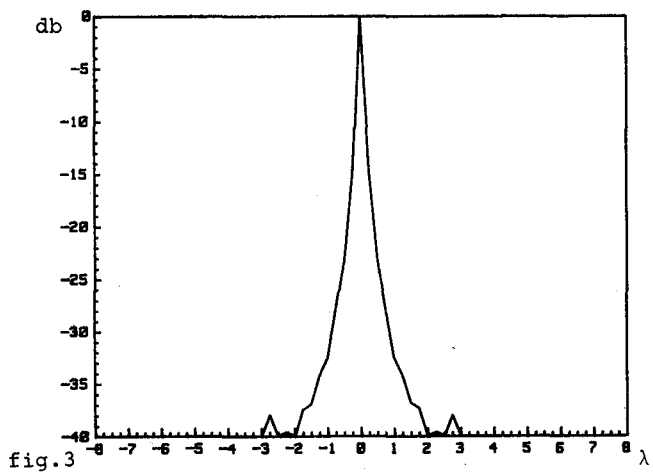


fig.3

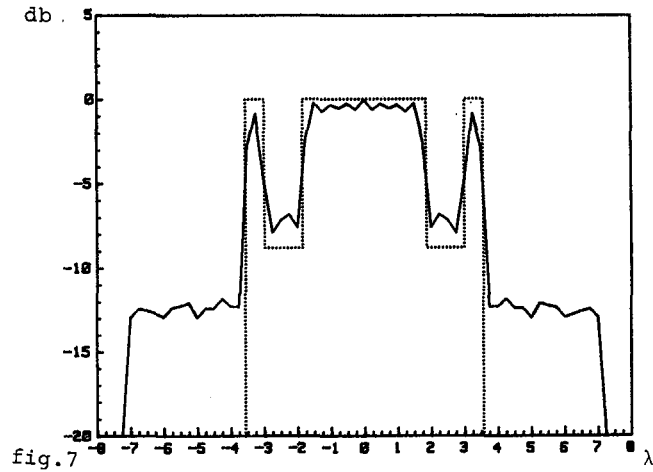


fig.7

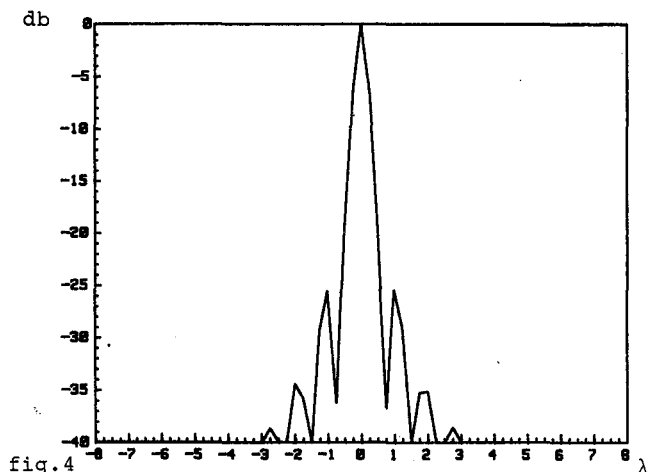


fig.4

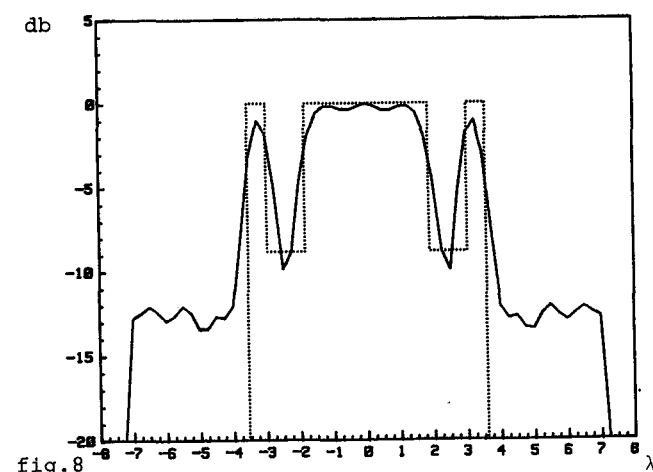


fig.8

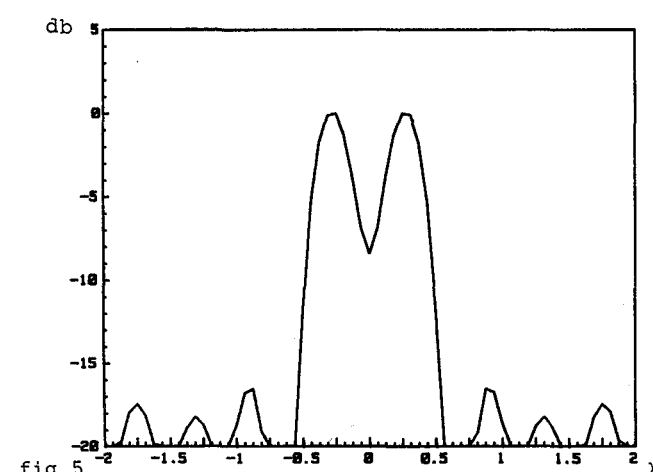


fig.5

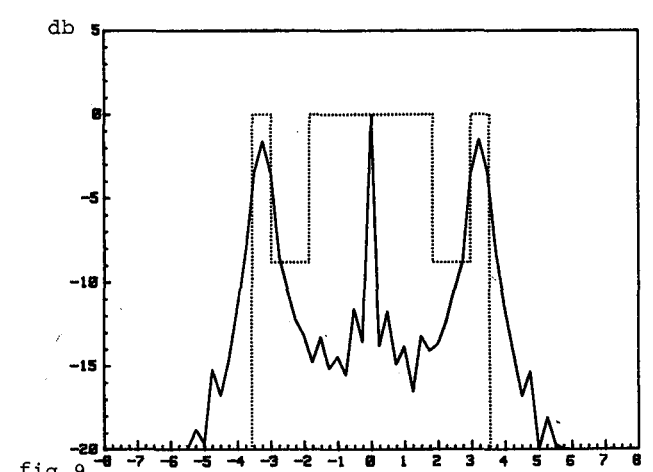


fig.9