

---

# Problemas abiertos sobre etiquetamientos super edge-magic y temas relacionados

S.C. López<sup>1\*</sup>, F.A. Muntaner-Batle<sup>2</sup> y M. Rius-Font<sup>1\*\*</sup>

<sup>1</sup> Departament de Matemàtica Aplicada IV. Universitat Politècnica de Catalunya. C/Esteve Terrades, 5. 08860 Castelldefels {susana,mrius}@ma4.upc.edu

<sup>2</sup> Graph Theory and Applications Research Group. School of Electrical Engineering and Computer Science. Faculty of Engineering and Built Environment. The University of Newcastle. NSW 2308 Australia famb1es@yahoo.es

**Resumen.** El tema de los etiquetamientos de grafos ha experimentado un fuerte impulso en los últimos 40 años, muestra de ello son los dos libros dedicados en exclusiva a ellos, un completísimo artículo "survey" y más de 1000 artículos en la literatura.

En este artículo exploramos algunas preguntas abiertas sobre etiquetamientos super edge-magic. Nos interesa particularmente este tipo de etiquetamientos, debido a la cantidad de relaciones que poseen con otras clases de etiquetamientos, principalmente los graciosos y los armónicos.

**Palabras clave:** super edge-magic, deficiencia, magic model, productos mágicos.

## 1 Introducción

Un etiquetamiento de un grafo es una asignación de elementos de cierto conjunto (normalmente el de los enteros) a los vértices, a las aristas, o a los vértices y a las aristas del grafo, que cumple ciertas propiedades.

Rosa en el año 1967, introduce los etiquetamientos graciosos [20] como una manera de atacar la conjetura de Ringel [19], que afirma que cualquier árbol  $T$  de orden  $p$  descompone al grafo completo  $K_{2p+1}$  en  $2p+1$  copias de  $T$ . Hoy en día esta conjetura sigue abierta, y sólo casos particulares de la misma han conseguido resolverse.

Los etiquetamientos graciosos son el origen de otros tipos de etiquetamientos, destacamos, por el número de artículos publicados, los etiquetamientos armónicos introducidos por Graham y Sloan [10] en 1980.

Enomoto, Lladó, Nakamigawa y Ringel introducen en [3] los etiquetamientos super edge-magic. Aunque en un artículo anterior, Acharya y Hedge

---

\* Investigación financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación, proyecto MTM2008-06620-C03-01.

\*\* Investigación financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación, proyecto MTM2008-06620-C03-01.

[1] habían definido un etiquetamiento equivalente, usando progresiones aritméticas. En este artículo nos concentraremos básicamente en etiquetamientos super edge-magic que guardan fuerte relación con los graciosos y los armónicos. A continuación y con el objetivo de hacer este artículo razonablemente autocontenido, definimos los grafos y etiquetamientos graciosos, armónicos y super edge-magic.

Sea  $G = (V, E)$  un grafo de orden  $p$  y medida  $q$ . Un etiquetamiento *gracioso* de  $G$  es una función inyectiva  $f$  del conjunto de vértices en el conjunto  $\{0, 1, \dots, q\}$  tal que, cuando se asigna a cada arista  $xy$  la etiqueta  $|f(x) - f(y)|$ , las etiquetas obtenidas en las aristas son distintas. Los grafos que admiten este tipo de etiquetamientos se llaman graciosos. El grafo  $G$  se llama *armónico* si existe una función inyectiva  $f$  del conjunto de vértices en el grupo de enteros módulo  $q$  tal que cuando se asigna a cada arista  $xy$  la etiqueta  $f(x) + f(y) \pmod{q}$ , las etiquetas resultantes son distintas. Cuando  $G$  es un árbol, exactamente una etiqueta puede usarse en dos vértices. El grafo  $G$  es *super edge-magic* si existe una función biyectiva  $f : V \cup E \rightarrow \{i\}_{i=1}^{p+q}$  tal que (1)  $f(V) = \{i\}_{i=1}^p$  y (2)  $f(x) + f(xy) + f(y) = k$  para toda arista  $xy$ .

El objetivo de este trabajo es presentar algunos problemas abiertos vinculados a los etiquetamientos super edge-magic.

En primer lugar consideraremos el problema de la máxima densidad de un grafo super edge-magic, esto es, dado un grafo  $G = (V, E)$  con orden  $p$  y medida  $q$ , ¿podemos acotar  $q$  en función de  $p$ ? Enomoto, Lladó, Nakamigawa y Ringel [3], demuestran la desigualdad  $q \leq 2p - 3$  y en [7] se demuestra que los grafos super edge-magic que alcanzan la igualdad han de contener triángulos. Todo indica que aumentando la cintura del grafo, la medida de los grafos super edge-magic disminuye. En la Sección 2, abordamos esta cuestión y presentamos algunas posibles direcciones de investigación.

Sea  $G = (V, E)$  un grafo y sea  $M(G)$  un conjunto de enteros positivos, incluido el cero. Un entero  $n$  pertenece al conjunto  $M(G)$  si  $G \cup nK_1$  es super edge-magic. Se define la *deficiencia super edge-magic* de  $G$  como el mínimo de  $M(G)$ , si el conjunto es no vacío, e infinito en caso contrario. En la Sección 3, presentamos algunos de los resultados más significativos sobre la deficiencia super edge-magic e introducimos algunas preguntas que sugieren diferentes líneas de estudio.

Recientemente se ha generalizado el concepto de etiquetamiento super edge-magic al concepto de etiquetamiento super edge-magic respecto a un modelo [15]. Esta generalización demuestra que el concepto de super edge-magic tiene un fuerte vínculo con la coloración propia de aristas de un grafo. En la Sección 4, presentaremos algunas de las preguntas que surgen de esta nueva vía.

En la Sección 5, consideramos la relación entre el clásico problema de las reinas y los etiquetamientos a los que dan nombre.

En la Sección 6, estudiamos los etiquetamientos producto mágicos y producto antimágicos, que hasta la fecha han sido analizados en gran medida usando métodos probabilísticos.

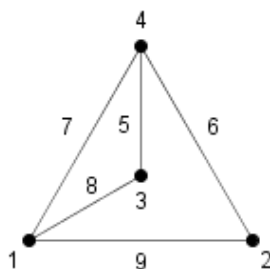
## 2 Cotas para la medida de grafos super edge-magic

En [3] Enomoto et al. demuestran el siguiente resultado.

**Lema 1.** *Si  $G = (V, E)$  es un grafo super edge-magic de orden  $p$  y medida  $q$ , se debe cumplir que:*

$$q \leq 2p - 3.$$

Es muy fácil encontrar grafos super edge-magic que alcanzan la igualdad  $q = 2p - 3$ . El grafo de la Figura 1 es uno de ellos.



**Figura 1.** Un grafo super edge-magic con  $q = 2p - 3$ .

Figueroa et al. demuestran en [7] que si un grafo  $G$  con orden  $p$  y medida  $2p - 3$  es super edge-magic, entonces  $G$  debe contener al menos un triángulo como subgrafo. De hecho demuestran:

**Teorema 1 ([7]).** *Sea  $G = (V, E)$  un grafo super edge-magic de orden  $p$  y medida  $q$ , donde  $p \geq 4$  y  $q \geq 2p - 4$ . Entonces  $G$  contiene triángulos.*

**Corolario 1 ([7]).** *Sea  $G = (V, E)$  un grafo super edge-magic de orden  $p \geq 4$  y medida  $q$ , con cintura estrictamente mayor que 3. Entonces*

$$q \leq 2p - 5.$$

No es complicado encontrar ejemplos de grafos bipartitos super edge-magic con orden  $p \geq 8$  y tamaño  $q = 2p - 5$  lo que demuestra que la cota del Corolario 1, es justa.

Estos resultados sugieren que los grafos super edge-magic con cintura mayor, deben tener una medida acotada por una cantidad más pequeña. De aquí que formulemos la siguiente pregunta.

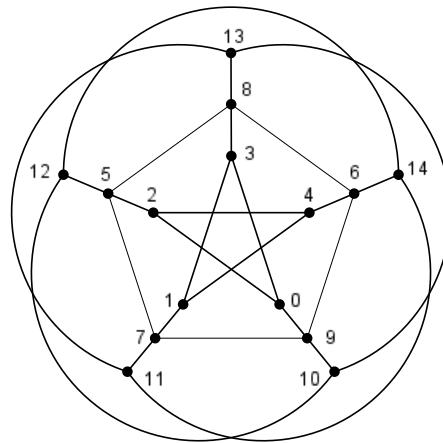
*Pregunta 1.* ¿Es posible encontrar una familia infinita de grafos super edge-magic con orden  $p$ , medida  $q = 2p - 5$  y cintura 5?

En [12] Ichishima, Muntaner y Rius proponen una familia de grafos con tales propiedades:

Sea  $\mathfrak{P} = \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$  la familia de grafos, donde cada  $P_n$  es de orden  $5n$  y medida  $10n - 5$ . Para  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , tenemos que el conjunto de vértices de  $P_n$  es el conjunto  $[0, 5n + 1]$  donde dados  $i, j \in \mathbb{Z}$  con  $i < j$ ,  $[i, j]$  denota el conjunto  $\{i, i + 1, \dots, j\}$ . El grafo  $P_n$  consiste en  $n$  ciclos, cada uno de ellos llamado nivel  $L_k$ , donde  $k \in [1, n]$ . Los vértices del nivel  $L_k$  son  $V(L_k) = [5k - 5, 5k - 1]$ . Cada vértice de  $L_k$  se une exactamente con un vértice del nivel  $L_{k-1}$ , y con exactamente un vértice del nivel  $L_{k+1}$  para todo  $k \in [2, n - 1]$ . En consecuencia los vértices de  $L_2, \dots, L_{n-1}$  tienen todos grado 4 y los vértices de  $L_1$  y  $L_n$  tienen grado 3. A continuación describimos estas adyacencias.

Denotamos por  $\bar{a}$  y por  $\bar{b}$  a los residuos de  $a$  y  $b$  módulo 5. Dados  $a, b \in V(L_k)$ ,  $k \in [1, n]$ . Entonces,  $ab \in E(P_n)$  si y solo si  $\bar{a} = \bar{b} +_5 2$  o  $\bar{b} = \bar{a} +_5 2$ , donde  $+_5$  denota la suma de los elementos en  $\mathbb{Z}_5$ . Mientras que si,  $a \in V(L_k)$  y  $b \in V(L_{k+1})$ ,  $k \in [1, n - 1]$ , entonces  $ab \in E(P_n)$  si y solo si  $\bar{b} = \pi(\bar{a})$  cuando  $k$  es impar, o  $\bar{b} = \pi^{-1}(\bar{a})$  cuando  $k$  es par, donde  $\pi$  representa la siguiente permutación de los elementos de  $\mathbb{Z}_5$  escrita con notación de ciclos:  $\pi = (0, 4, 1, 2)(3)$ .

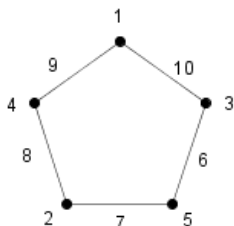
En la Figura 2 mostramos el grafo  $P_3$ . (Notemos que  $P_2$  es precisamente el grafo de Petersen).



**Figura 2.** El grafo  $P_3$ .

Es fácil demostrar que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la cintura de  $P_n$  es 5 y que  $P_n$  es super edge-magic. De aquí se deduce que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $f : [0, 5n - 1] \rightarrow [1, 5n]$  definida por la regla  $f(i) = i + 1$  da lugar a un

etiquetamiento super edge-magic de  $P_n$  (ver Lema 2, en Sección 4). En la Figura 3 se muestra un etiquetamiento super edge-magic de  $P_1$ .



**Figura 3.** Etiquetamiento super edge-magic de  $P_1$ .

Sobre la relación orden-medida-cintura de grafos super edge-magic, formulamos las siguientes preguntas.

*Pregunta 2.* Dado  $p \in \mathbb{N}$ , ¿Existe un grafo super edge-magic de orden  $p$ , tamaño  $q = 2p - 5$  y cintura 5?

*Pregunta 3.* [12] Hallar cotas superiores ajustadas para el tamaño de grafos super edge-magic con cintura  $g \geq 6$ .

### 3 El problema de la deficiencia super edge-magic

Motivados por el concepto de deficiencia edge-magic introducido por Kotzig y Rosa en [14], Figueroa, Ichishima y Muntaner presentan en [8] el concepto de deficiencia super edge-magic de un grafo.

Sea  $G = (V, E)$  un grafo y sea

$$M(G) = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : G \cup nK_1 \text{ es super edge-magic}\}.$$

Entonces, la *deficiencia super edge-magic* de  $G$ , denotada como  $\mu_s(G)$  se define como sigue:

$$\mu_s(G) = \begin{cases} \text{mín } M(G), & \text{si } M(G) \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{si } M(G) = \emptyset. \end{cases}$$

El problema de determinar la deficiencia super edge-magic ha interesado a un buen número de investigadores, y a pesar de que encontrar resultados generales es un problema difícil, este tema ha sido el foco principal incluso de algunas tesis doctorales, como por ejemplo [18]. A continuación presentamos algunos resultados que consideramos representativos sobre este tema.

**Teorema 2 ([8]).** *Sea  $K_n$  el grafo completo de orden  $n$ . Entonces,*

$$\mu_s(K_n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \in \{1, 2, 3\}, \\ 1, & \text{si } n = 4, \\ +\infty, & \text{si } n \geq 5. \end{cases}$$

**Teorema 3 ([8]).** *Sea  $C_n$  el ciclo de orden  $n$ . Entonces,*

$$\mu_s(C_n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar}, \\ 1, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ +\infty, & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

**Teorema 4 ([6]).** *Para todo entero  $n \geq 3$ ,*

$$\mu_s(2C_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es par}, \\ +\infty, & \text{si } n \text{ es impar}. \end{cases}$$

**Teorema 5 ([6]).** *Para todo entero  $n \geq 3$ ,*

$$\mu_s(3C_n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar}, \\ 1, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ +\infty, & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

**Teorema 6 ([6]).** *Para todo entero positivo  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,*

$$\mu_s(4C_n) = 1.$$

En [6] se presenta la siguiente conjetura:

*Conjetura 1.* Para para toda pareja de enteros  $m \geq 1$  y  $n \geq 3$ ,

$$\mu_s(mC_n) = 1 \text{ si } mn \equiv 0 \pmod{4}.$$

Una de las conjeturas más famosas referentes a etiquetamientos super edge-magic dice que:

*Conjetura 2 ([3]).* Todo árbol es super edge-magic.

Esto en términos de deficiencia es equivalente a decir que si  $T$  es un árbol, entonces  $\mu_s(T) = 0$ . Pero, ¿qué ocurre cuando pensamos en grafos acíclicos no necesariamente conexos? ¿Sigue siendo factible conjeturar que si  $F$  es un bosque cualquiera, entonces  $\mu_s(F) = 0$ ? La respuesta a esta última pregunta es no. El siguiente resultado sirve como contraejemplo.

**Teorema 7 ([8]).** *Sea  $nK_2$  un aparejamiento con  $n$  componentes. Entonces,*

$$\mu_s(nK_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar}, \\ 1, & \text{si } n \text{ es par}. \end{cases}$$

De todas formas, el siguiente resultado que se encuentra en [6] afirma que la deficiencia de todo grafo acíclico siempre es finita.

**Teorema 8.** *Sea  $F$  un bosque. Entonces,*

$$\mu_s(F) < +\infty.$$

En [6] Figueroa et al. conjeturan que:

*Conjetura 3.* *Sea  $F$  un bosque con exactamente dos componentes conexas. Entonces,*

$$\mu_s(F) \leq 1.$$

Hasta el momento no se ha conseguido demostrar ni refutar la conjetura, y sólo algunos ejemplos particulares, que parecen validarla, han sido hallados.

Para concluir esta sección, enunciamos el siguiente resultado, dado por Muntaner y Rius en [16].

**Teorema 9.** *Para todo grafo bipartito  $G$ , existe un número natural  $N(G)$ , tal que si  $\mu_s(G) \geq N(G)$ , entonces  $\mu_s(G) = +\infty$ .*

#### 4 Modelos super edge-magic

En la literatura pueden encontrarse generalizaciones de los grafos super edge-magic, por ejemplo en [11]. En esta sección presentamos una nueva, basada en la interpretación de los etiquetamientos super edge-magic como progresiones aritméticas de diferencia 1.

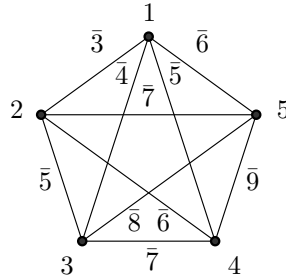
**Lema 2 ([5]).** *Un grafo  $G = (V, E)$  de orden  $p$  y medida  $q$  es super edge-magic si y solo si, existe una función biyectiva  $f : V \rightarrow \{i\}_{i=1}^p$  tal que  $S = \{f(x) + f(y) : xy \in E\}$  es un conjunto de exactamente  $q$  enteros consecutivos.*

Recordemos que una coloración propia de un grafo con  $n$  colores es una asignación de los  $n$  colores a las aristas, de manera que aristas incidentes a un mismo vértice reciben colores diferentes.

Consideramos una representación de  $K_n$  cuyos vértices son los vértices de un polígono de  $n$  lados. Cada asignación biyectiva de los números del 1 a  $n$  a los vértices induce un etiquetamiento de las aristas, dado por la suma de las etiquetas de los vértices incidentes. Queda fijada entonces, una coloración propia de las aristas que admite un orden natural (dado por el valor de los colores). Un grafo de orden  $n$  es super edge-magic si, como subgrafo de  $K_n$ , la coloración inducida en sus aristas respeta el orden establecido. Es decir, los valores de los colores (las etiquetas de las aristas) constituyen una progresión aritmética de diferencia 1.

Dados  $m, n$  números naturales. Un *super edge-magic  $m$ -modelo* de orden  $n$  es una coloración propia de las aristas de  $K_n$  que usa  $m$  colores con una  $m$ -tupla que determina un orden preestablecido de los colores. Diremos que un grafo  $G$  de orden  $n$  es *super edge-magic respecto al  $m$ -modelo* si y solo si  $G$  puede encontrarse como subgrafo de  $K_n$  en una representación que usa colores

consecutivos de la  $m$ -tupla, sin que haya repetición de colores. La Figura 4 muestra el  $m$ -modelo de orden  $n$ , comentado anteriormente, para  $m = 7$  y  $n = 5$ . Las aristas interiores presentan una coloración propia del ciclo de orden 5 que respeta el orden de los colores. En particular, diremos que  $C_5$  es super edge-magic con respecto a este 7-modelo.



**Figura 4.** Un 7-modelo de orden 5.

Destacamos que el número de aristas de un grafo super edge-magic con respecto a un  $m$ -modelo es siempre menor o igual que  $m$  y que un grafo que use los  $m$  colores siempre es super edge-magic respecto al  $m$ -modelo.

Se sabe que los ciclos de orden par no admiten un etiquetamiento super edge-magic [3]. Es decir, no son super edge-magic respecto al primer modelo descrito. De hecho, en [15] se da un  $m$ -modelo de  $m$  colores que no admite ningún grafo 2-regular de orden  $m$  que sea super edge-magic respecto a él. Dicho modelo se describe tomando como vértices los de un polígono regular, como aristas sus lados y diagonales, y considerando una coloración que asigna a dos aristas el mismo color si y solo si son paralelas.

A partir del concepto de grafo super edge-magic con respecto a un modelo aparecen nuevas líneas de investigación, algunas de la cuales aparecen en [15]. Destacamos las siguientes:

*Pregunta 4.* Fijado un número natural par  $m$ , encontrar un  $m$ -modelo de orden  $m$ , pongamos  $\nu_m$ , de manera que al menos un grafo 2-regular de orden  $m$  sea super edge-magic con respecto a  $\nu_m$ , o probar que tal modelo no existe.

*Pregunta 5.* Fijado un número natural  $m$ , encontrar un  $m$ -modelo de orden  $m$ , que maximice el número de grafos 2-regular de orden  $m$  que contiene el modelo. Encontrar dicho máximo.

*Pregunta 6.* Dado un grafo  $G$  de orden  $p$  y medida  $q$ . Encontrar, cuando sea posible, un  $q$ -modelo de orden  $p$  que no contenga ningún subgrafo isomorfo a  $G$  con coloración propia.

Terminamos con una observación respecto a la primera cuestión. Para  $m = 4$  el único grafo 2-regular de orden 4 es el ciclo  $C_4$ . Una simple comprobación



nos permite concluir que no existe una coloración propia de  $K_4$  con cuatro colores que permita realizar  $C_4$  usándolos todos. Sin embargo, el resultado en general no es cierto. La Figura 5 muestra una coloración propia de  $K_6$  donde puede observarse una realización de  $C_6$  usando los 6 colores. Ligando con la segunda cuestión, es fácil comprobar que no hay ninguna coloración propia de  $K_6$  que admita una realización de  $2C_3$  usando los seis colores. Por lo que en este caso, el máximo sería 1.

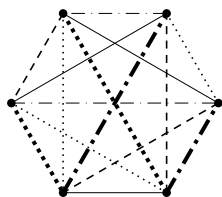


Figura 5. Una coloración propia de  $K_6$ .

### 5 Etiquetamientos reina

En 1848 el jugador de ajedrez alemán Max Bezzel, propone el puzzle de las 8 reinas. Este puzzle consiste en colocar ocho reinas en un tablero de ajedrez, de tal manera que no haya dos que se ataquen mutuamente. Esto es, no puede haber dos reinas ni en la misma fila, ni en la misma columna, ni en la misma diagonal.

En 1859, Frank Nanck propone la primera solución y extiende el problema a lo que hoy se conoce como puzzle de las  $n$  reinas. Este problema ha sido estudiado por muchos matemáticos, entre ellos Gauss y Cantor, y contar cuántas soluciones hay para un  $n$  determinado ha resultado ser un problema extremadamente complejo. Se han contado las soluciones que existen para ciertos números naturales, pero el problema en general está lejos de ser resuelto.

Por ejemplo se sabe que existen 92 soluciones para el problema original de las 8 reinas, de las cuáles sólo 12 son esencialmente distintas.

Motivados por este problema, en [2] se introduce el concepto de *etiquetamiento reina* de la siguiente manera: sea  $G = (V, E)$  un digrafo, posiblemente con lazos, un etiquetamiento reina de  $G$  es una biyección  $l : V \rightarrow [1, |V|]$  tal que para cada par de arcos,  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in E$ , tenemos que  $l(u_1) + l(v_1) \neq l(u_2) + l(v_2)$  y  $l(u_1) - l(v_1) \neq l(u_2) - l(v_2)$ .

Si un digrafo  $G$  admite un etiquetamiento reina, decimos que  $G$  es un digrafo reina. El nombre proviene de la correspondencia probada en [2], entre

las soluciones del problema de las  $n$  reinas y los etiquetamientos reina de digrafos 1-regulares, esto es ciclos o uniones de ciclos (admitiendo lazos con ciclos de orden 1) orientados de forma cíclica.

En relación a los etiquetamientos reina, destacamos el siguiente problema abierto:

*Pregunta 7.* Caracterizar el conjunto de grafos 1-regulares de orden  $n$  que admiten etiquetamientos reina.

De momento no se sabe mucho en relación a este problema. En [2] se demuestra que si  $n(n-1)$  es un natural divisible por 3, la unión de  $n(n-1)/3$  triángulos orientados cíclicamente admiten un etiquetamiento reina. Destacamos que entre todos los digrafos 1-regulares de orden 8, candidatos a admitir un etiquetamiento reina, el único que no lo admite es el que tiene grafo subyacente  $C_3 \cup C_5$ .

## 6 Etiquetamiento producto

Figuerola, Ichishima y Muntaner introducen conceptos análogos a los etiquetamientos mágicos y antimágicos, pero utilizando productos en lugar de sumas. En [4] se dan las definiciones siguientes.

Un grafo  $G = (V, E)$  de orden  $p$  y medida  $q$  se llama *producto-mágico* si existe una función biyectiva del conjunto  $E$  al conjunto  $[1, q]$ , tal que el producto de las etiquetas de las aristas incidentes a cada vértice es constante. Si este producto es distinto para cada vértice, entonces el grafo  $G$  se llama *antimágico*.

El grafo  $G$  se llama *producto arista-mágico* si existe una función biyectiva  $f : V \cup E \rightarrow [1, p+q]$ , tal que el producto  $f(u) \cdot f(uv) \cdot f(v) = k$ , para todo  $uv \in E$ .

Cuando el producto  $f(u) \cdot f(uv) \cdot f(v)$  es distinto para cada arista  $uv \in E$ , entonces el grafo se llama *producto arista-antimágico*. Los siguientes resultados y conjeturas se pueden encontrar en el artículo original de Figuerola et al. [4].

**Teorema 10.** *Un grafo  $G$  de medida  $q$  es producto-mágico si y sólo si  $q \leq 1$ .*

*Conjetura 4.* Un grafo conexo  $G$  de orden  $q$  es producto antimágico si y sólo si  $q \geq 3$ .

**Teorema 11.** *Un grafo  $G$  de medida  $q$  es producto arista-mágico si y sólo si  $q \leq 1$ .*

**Teorema 12.** *Todo grafo no isomorfo a  $K_2$  ni a  $K_2 \cup N_n$  es producto arista antimágico, donde  $N_n$  representa el grafo formado por  $n$  vértices aislados.*

Con respecto a la Conjetura 4, Kaplan, Lev y Roditty demuestran en [13] que los siguientes grafos son producto antimágicos:

- La unión disjunta de ciclos y caminos, donde cada camino tiene medida al menos 3.
- Grafos conexos de orden  $p$  y medida  $q$ , donde  $q \geq 4p \ln p$ .
- Grafos donde cada componente tiene medida como mínimo 2, y el grado mínimo es al menos  $8\sqrt{\ln q \ln(\ln q)}$ , donde  $q$  es la medida del grafo.
- Todo grafo  $K$ -partito completo excepto  $K_2$  y  $K_{1,2}$ .
- El producto corona de dos grafos  $G$  y  $H$ , denotado por  $G \odot H$ , donde  $G$  no contiene vértices aislados y  $H$  es regular.

Oleg Pikhurko obtuvo un excelente resultado al caracterizar el conjunto de todos los grafos, de orden grande, que son producto arista antimágicos.

**Teorema 13.** [17] *Todo grafo conexo de orden mayor que  $n_0 = 10^{10^{20}}$  es producto antimágico.*

Este resultado sugiere el siguiente problema:

*Pregunta 8.* Mejorar la cota  $n_0$ .

## 7 Conclusiones

En este artículo se han explorado algunas preguntas abiertas sobre etiquetamientos super edge-magic y conceptos que de una forma u otra guardan relación con ellos.

El área de los etiquetamientos de grafos es de gran actividad y de ella han surgido muchas cuestiones. Probablemente las más conocidas son las dos conjeturas que afirman que todo árbol es gracioso [19] y que todo árbol es armónico [10], aunque últimamente también la que afirma que todo árbol es super edge-magic [3] ha despertado gran interés.

Para una información más detallada y completa sobre etiquetamientos sugerimos la consulta del "survey" mantenido por Gallian [9], actualizado anualmente.

## Referencias

- [1] B. D. Acharya and S. M. Hegde. Strongly indexable graphs. *Discrete Math.* **93** (1991), 123–129.
- [2] G. Bloom, M. Lampis, F. A. Muntaner-Batle and M. Rius-Font. Queen labelings *AKCE Int. J. Graphs Comb.* Submitted.
- [3] H. Enomoto, A. Lladó, T. Nakamigawa and G. Ringel. Super edge-magic graphs. *SUT J. Math.* **34** (1998), 105–109.
- [4] R. M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima and F. A. Muntaner-Batle. Bertrand's postulate and magic product labelings. *Bul. I. Instit. Comb. Appl.* **30** (2000), 53–65.

- [5] R. M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima and F. A. Muntaner-Batle. The place of super edge-magic labelings among other classes of labelings. *Discrete Math.* **231** (1-3) (2001), 153-168.
- [6] R. M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima and F. A. Muntaner-Batle. Some new results on the super edge-magic deficiency of graphs. *J. Combin. Math. Comb. Comput.* **55** (2005), 17–31.
- [7] R. M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima and F. A. Muntaner-Batle. On super edge-magic labelings of certain disjoint unions of graphs. *Australas. J. Combin.* **32** (2005), 225–242.
- [8] R. M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima and F. A. Muntaner-Batle. On the super edge-magic deficiency of graphs. *Ars Combin.* **78** (2006), 33–45.
- [9] J. A. Gallian. A dynamic survey of graph labeling. *Electron. J. Combin.* **16** (2009), #DS6.
- [10] R. L. Graham and N. J. A. Sloane. On additive bases and harmonious graphs. *SIAM J. Alg. Discrete Math.* **1** (1980) 382–404.
- [11] A. Gutiérrez and A. Lladó. Magic coverings. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **55** (2005) 43–56.
- [12] R. Ichishima, F. A. Muntaner-Batle and M. Rius-Font. Bounds on the size of super edge-magic graphs depending on the girth. *Ars Combin.* Accepted.
- [13] G. Kaplan, A. Lev and Y. Roditty. Bertrand’s postulate, the prime number theorem and product anti-magic graphs. *Discrete Math.* **308** (2008), 787–794.
- [14] A. Kotzig and A. Rosa. Magic valuations of finite graphs. *Canad. Math. Bull.* **13** (1970), 451-461.
- [15] S. C. López, F. A. Muntaner-Batle and M. Rius-Font. Super edge-magic models. *Mathematics in Computer Science*. Submitted.
- [16] F. A. Muntaner-Batle and M. Rius-Font. Some results about super edge-magic and  $(k, d)$ -arithmetic graphs and labelings. *Utilitas Math.* **71** (2006), 57-64.
- [17] O. Pikhurko. Characterization of product anti-magic graphs of large order. *Graphs and Combin.* **23** (2007), 681–689.
- [18] A. Qudair-Baig. Super edge magic deficiency of forests. Tesis doctoral Universidad Abdus Salam School of Mathematical Science. GC University, Lahore, Pakistan. Sometida.
- [19] G. Ringel. Problem 25, in Theory of Graphs and applications. *Proc. Symposium Smolenica 1963*. Prague (1964), 162.
- [20] A. Rosa. On certain valuations of the vertices of a graph. *Theory of graphs (Internat. Symposium, Rome, July 1966)* Gordon and Breach, N. Y. and Dunod Paris (1967) 349–355.