

Soluções analíticas das condições de optimalidade do dimensionamento de secções rectangulares de betão armado

A.M. Barros · M.H.M. Barros · C.C. Ferreira

Recibido: Junio 2010, Aceptado: Diciembre 2010
©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2011

Resumen Formula-se o problema de custo mínimo de secções rectangulares de betão armado à flexão segundo o Eurocode 2 nas variáveis de dimensionamento altura da secção e área das armaduras. As condições de optimalidade de Kuhn-Tucker são resolvidas simbolicamente, obtendo-se 6 soluções de armadura simples com rotura pelo betão, pelo aço e simultânea, e uma solução de armadura dupla com rotura pelo betão. Identificam-se as regiões de optimalidade, que se mostra serem adjacentes, de cada uma das soluções no plano Cartesiano dos parâmetros ‘momento adimensional’-‘rácio das eficiências económicas do betão e do aço’.

ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE OPTIMALITY CONDITIONS FOR THE SIZING OF RECTANGULAR REINFORCED CONCRETE SECTIONS

Summary The minimal cost problem of rectangular reinforced concrete sections in bending according to Eurocode 2 in the design variables section height and reinforcing steel areas is stated. The Kuhn-Tucker optimality conditions are solved analytically, and 6 single reinforcement solutions with concrete rupture, steel and both, and one doubly reinforced with concrete rupture, are obtained. Optimality regions for each solution in the Cartesian plane ‘adimensionalised bending moment’-‘economical efficiency ratio of concrete and steel’ are identified and shown to be adjacent.

1. Introdução

As estruturas de betão armado são dimensionadas tendo em vista a verificação do seu comportamento em situações últimas e em situações de utilização. Para que tal possa ser feito são necessárias equações constitutivas que descrevam o comportamento dos materiais constituintes, nomeadamente o betão e o aço e também definir as condições ou os limites para os quais estas condições passam a ser violadas. Os eurocódigos estruturais têm apresentado grandes evoluções nos últimos anos sendo que o eurocódigo de betão EC2 de 2001 [1] apresenta algumas diferenças nas relações constitutivas dos materiais, com implicações no dimensionamento, relativamente à versão de 1998 [2]. Este código baseia-se no código modelo de 1990 [3] que foi utilizado também como base para a elaboração de modelos de dimensionamento de betão armado utilizados em diversos códigos

António Melão Barros
Instituto Superior Técnico
Dep. Engenharia Mecânica
Av. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal
Tel.: 351 21 8417462; Fax: 351 21 8417915
e-mail: melaobarros@ist.utl.pt

Maria Helena Melão Barros
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
Dep. Engenharia Civil
R. Luís Reis Santos - Pólo II, 3030-788 Coimbra, Portugal
Tel.: 351 239 797248; Fax: 351 239 797249
e-mail: hbarros@dec.uc.pt

Carla Costa Ferreira
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
Dep. Engenharia Civil
R. Luís Reis Santos - Pólo II, 3030-788 Coimbra, Portugal
Tel.: 351 239 797255; Fax: 351 239 797249
e-mail: carla@dec.uc.pt

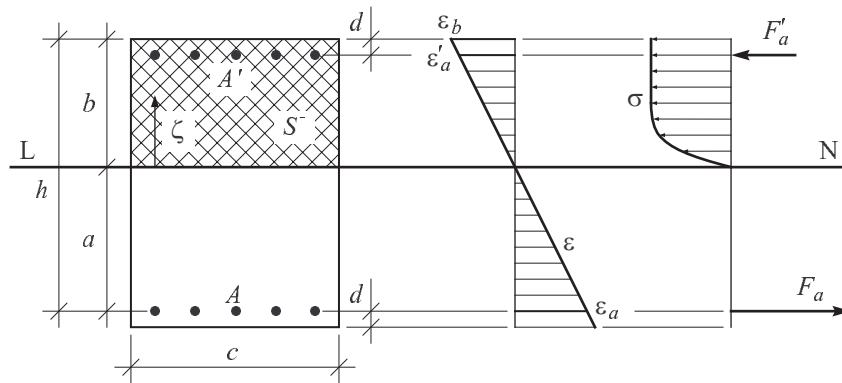


Figura 1. Secção de betão armado, extensões e tensões

portugueses. A lei constitutiva do betão utilizada no presente trabalho é a do EC2 de 1998 [2]. Esta lei coincide com as novas definições do EC2, versão de 2001 [1], no caso de betões cuja classe de resistência se situe entre o C12 e o C50, multiplicada pelo factor 1000/850.

Estes métodos de dimensionamento foram usados pelos autores na optimização de secções rectangulares de betão armado com utilização de processadores simbólicos [4, 5] obtendo-se, nomeadamente, fórmulas explícitas das armaduras óptimas. A optimização de secções de betão armado em termos do dimensionamento de secções foi tratada por [6] mediante uma base de dados com variação de secções e de armaduras; o método é aplicado em flexão composta considerando uma lei simplificada para o cálculo da resistência da secção. B.L. Karihaloo *et al.* apresentam trabalhos sobre optimização de estruturas de betão armado tendo em vista a minimização do custo do betão, do aço e da cofragem [7, 8, 9]; a flexão simples é tratada por uma lei simplificada que traduz de forma analítica a resistência da secção e a flexão desviada através de uma lei de interacção entre os momentos flectores nas duas direcções. B. Ceranic *et al.* [10] obtêm soluções de custo mínimo de secções rectangulares de armadura simples e dupla utilizando como lei constitutiva do betão o diagrama de bloco de tensões constante no betão comprimido e usando como variáveis de projecto as áreas de armadura e a altura da secção. A lei de parábola rectângulo é utilizada por [11] fazendo uso de uma função de penalidade e algoritmos genéticos. I. Payá *et al.* [12] fazem a optimização de pórticos de betão armado considerando como restrições todas as verificações regulamentares de estados limites últimos e de serviço variando as secções dos elementos e armaduras; os métodos utilizados são os da busca aleatória, do gradiente e metaheurísticos.

Neste trabalho formula-se e resolve-se simbolicamente o problema de dimensionamento óptimo ao estado último de uma secção rectangular de betão armado em flexão pura. As variáveis de projecto consideradas são a altura da secção e as áreas das armaduras inferior e superior; a função objectivo do problema de óptimo é a soma dos custos do aço e do betão. Por inclusividade, e por convirem formas particulares adaptadas à resolução simbólica do problema de optimização, apresenta-se a dedução de fórmulas de cálculo, segundo o Eurocode 2, do momento flector e do esforço axial (nulo). Estabelecem-se as condições necessárias de optimalidade, um sistema não linear de igualdades e desigualdades. Utilizando um processador simbólico obtêm-se 7 soluções analíticas das condições de optimalidade para os casos de armadura simples e dupla, com rotura pelo betão, pelo aço e simultânea. A optimalidade destas soluções é analisada, constatando-se que a solução óptima—fórmulas de cálculo das variáveis de projecto adimensionais e regime de rotura—é função de parâmetros adimensionais derivados do custo e resistência do aço e do betão, do momento flector, da altura máxima de projecto e do recobrimento.

2. Problema de análise

2.1. Fórmulas de flexão da secção rectangular

Considere-se a secção de betão armado da Figura 1 de largura c e altura útil h . Definem-se a razão altura/largura η e o recobrimento adimensional r :

$$\eta = \frac{h}{c}$$

$$r = \frac{d}{c}$$

A e A' são as áreas das armaduras inferior e superior, respectivamente, e definem-se os rácios de reforço:

$$\rho = \frac{A}{c^2}$$

$$\rho' = \frac{A'}{c^2}$$

Denotam-se por σ_{aR} e σ_{bR} as tensões de rotura do aço e do betão à tracção e compressão, respectivamente, e define-se o quociente das resistências

$$\beta = \frac{\sigma_{aR}}{|\sigma_{bR}|} > 0 \quad (1)$$

Sejam $\hat{\sigma}_a(\cdot)$ a função de resposta do aço, considerada ímpar, e $\hat{\sigma}_b(\cdot)$ a função de resposta do betão, tomando o valor 0 para extensões positivas. Definem-se as funções de resposta adimensionais:

$$\tilde{\sigma}_a(\cdot) = \frac{\hat{\sigma}_a(\cdot)}{\sigma_{aR}}$$

$$\tilde{\sigma}_b(\cdot) = \frac{\hat{\sigma}_b(\cdot)}{|\sigma_{bR}|}$$

A extensão das fibras longitudinais é $\epsilon = -\frac{\zeta}{R}$ em que ζ é a distância à linha neutra (\uparrow , Figura 1) e R é o raio de curvatura das fibras neutras. Seguindo um procedimento usual para a flexão de vigas rectangulares de material de comportamento não linear derivam-se seguidamente fórmulas de cálculo dos esforços em função das extensões da armadura inferior ϵ_a e mínima do betão ϵ_b [15]. Da diferença das duas extensões obtém-se o raio de curvatura

$$\epsilon_a - \epsilon_b = \frac{a+b}{R} \Rightarrow R = \frac{h}{\epsilon_a - \epsilon_b}$$

em que a e b são as distâncias à linha neutra da armadura inferior e máxima do betão à compressão (Figura 1), calculando-se por:

$$a = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_a - \epsilon_b} h$$

$$b = \frac{-\epsilon_b}{\epsilon_a - \epsilon_b} h$$

A distância da armadura superior à linha neutra é $b-d$ (Figura 1) e a sua extensão calcula-se por

$$\epsilon'_a = \epsilon_b + (\epsilon_a - \epsilon_b) \frac{r}{\eta}$$

O esforço axial é a resultante das tensões no betão e nas armaduras

$$\mathcal{N} = \int_{S^-} \sigma da + F_a + F'_a$$

em que S^- é a parte da secção à compressão (Figura 1); a resultante das tensões no betão calcula-se por

$$c \int_0^b \sigma(\zeta) d\zeta = c \int_0^{\epsilon_b} \hat{\sigma}_b(\epsilon) \left(-\frac{h}{\epsilon_a - \epsilon_b} \right) d\epsilon$$

mediante a mudança de variável

$$\zeta = -\frac{h}{\epsilon_a - \epsilon_b} \epsilon$$

e as resultantes das tensões nas armaduras inferior e superior (Figura 1), respectivamente, por

$$F_a = A \hat{\sigma}_a(\epsilon_a)$$

$$F'_a = -A' \hat{\sigma}_a(-\epsilon'_a)$$

obtendo-se:

$$\mathcal{N} = -\frac{ch}{\epsilon_a - \epsilon_b} \int_0^{\epsilon_b} \hat{\sigma}_b(\epsilon) d\epsilon + A \hat{\sigma}_a(\epsilon_a) - A' \hat{\sigma}_a(-\epsilon'_a) \quad (2)$$

Define-se o esforço axial adimensional

$$N = \frac{\mathcal{N}}{c^2 |\sigma_{bR}|} \quad (3)$$

que se calcula por:

$$N = -\frac{\eta}{\epsilon_a - \epsilon_b} \int_0^{\epsilon_b} \tilde{\sigma}_b(\epsilon) d\epsilon + \rho \beta \tilde{\sigma}_a(\epsilon_a) - \rho' \beta \tilde{\sigma}_a \left(-\epsilon_b - (\epsilon_a - \epsilon_b) \frac{r}{\eta} \right) \quad (4)$$

O momento flector calcula-se, atendendo a que se toma $\mathcal{N} = 0$,

$$\mathcal{M} = - \int_{S^-} \sigma(\zeta + a) da - (h-d) F'_a$$

e mediante a mesma mudança de variável que anteriormente, obtém-se:

$$\mathcal{M} = \frac{ch^2}{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2} \left(- \int_0^{\epsilon_b} \hat{\sigma}_b(\epsilon) \epsilon d\epsilon + \epsilon_a \int_0^{\epsilon_b} \hat{\sigma}_b(\epsilon) d\epsilon \right) + (h-d) A' \hat{\sigma}_a \left(-\epsilon_b - (\epsilon_a - \epsilon_b) \frac{r}{\eta} \right) \quad (5)$$

Define-se um momento adimensional

$$M = \frac{\mathcal{M}}{c^3 |\sigma_{bR}|} \quad (6)$$

que se calcula por:

$$M = \frac{\eta^2}{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2} \left(- \int_0^{\epsilon_b} \tilde{\sigma}_b(\epsilon) \epsilon d\epsilon + \epsilon_a \int_0^{\epsilon_b} \tilde{\sigma}_b(\epsilon) d\epsilon \right) + (\eta - r) \rho' \beta \tilde{\sigma}_a \left(-\epsilon_b - (\epsilon_a - \epsilon_b) \frac{r}{\eta} \right) \quad (7)$$

2.2. Particularização para o Eurocode 2

Em conformidade com o Eurocode 2 (EC2) [2] considera-se o aço elástico-perfeitamente plástico ($E = 200\text{GPa}$) e toma-se a função de resposta adimensional do betão (“parábola-rectângulo”):

$$\tilde{\sigma}_b(\cdot) = \begin{cases} -\frac{850}{1000} & \text{se } -\frac{35}{10\,000} \leq \epsilon \leq -\frac{2}{1000} \\ 850\epsilon(1 + 250\epsilon) & \text{se } -\frac{2}{1000} \leq \epsilon \leq 0 \\ 0 & \text{se } 0 \leq \epsilon \end{cases}$$

Admitindo que o aço está no regime plástico

$$\tilde{\sigma}_a(\epsilon) = 1 \Leftrightarrow \epsilon_c \leq \epsilon \leq \frac{1}{100}$$

em que $\epsilon_c = \frac{\sigma_{aR}}{E}$ é a extensão de cedência do aço e admitindo que o betão está no patamar horizontal do diagrama de tensão-deformação calculam-se os integrais:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\epsilon_b} \tilde{\sigma}_b(\epsilon) d\epsilon &= -\frac{17}{20}\epsilon_b - \frac{17}{30\,000} \\ \int_0^{\epsilon_b} \tilde{\sigma}_b(\epsilon) \epsilon d\epsilon &= -\frac{17}{40}\epsilon_b^2 + \frac{17}{60\,000\,000} \end{aligned} \right\} \\ \Leftrightarrow -\frac{35}{10\,000} \leq \epsilon_b \leq -\frac{2}{1000}$$

Para os regimes do aço e betão assumidos o esforço axial adimensional 4 calcula-se explicitamente por

$$N = \frac{\eta}{\epsilon_a - \epsilon_b} \left(\frac{17}{20}\epsilon_b + \frac{17}{30\,000} \right) + \rho\beta - \rho'\beta \quad (8)$$

e o momento flector adimensional 7 por

$$M = \frac{\eta^2}{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2} \left(\frac{17}{40}\epsilon_b^2 - \epsilon_a \left(\frac{17}{20}\epsilon_b + \frac{17}{30\,000} \right) - \frac{17}{60\,000\,000} \right) + (\eta - r)\rho'\beta \quad (9)$$

em que, por hipótese, $N = 0$.

3. Problema de custo mínimo e condições de optimalidade

3.1. Formulação do problema de óptimo

Toma-se para função de custo

$$C = C_a(A + A') + C_b(h + d)c \quad (10)$$

em que C_a e C_b são coeficientes de custo (económico ou ambiental) do aço e do betão, respectivamente. Denota-se por

$$\alpha = \frac{C_a}{C_b} > 0 \quad (11)$$

a razão dos custos e define-se um custo adimensional:

$$C = \frac{\mathcal{C}}{c^2 C_b} \quad (12) \\ = \alpha(\rho + \rho') + \eta + r$$

Define-se o problema de dimensionamento óptimo

$$C \longrightarrow \min_{\eta, \rho, \rho'}$$

sujeito à condições de esfoço axial nulo e momento não inferior a um valor M_0 prescrito

$$N = 0$$

$$M \geq M_0 > 0$$

aos constrangimentos laterais sobre as variáveis de projecto

$$\eta_0 \geq \eta > 0$$

$$\rho > 0$$

$$\rho' \geq 0$$

em que η_0 é o valor máximo prescrito da razão altura/largura, aos constrangimentos laterais sobre as extensões da armadura inferior e do betão

$$\epsilon_a \leq \epsilon_a \leq \bar{\epsilon}_a$$

$$\epsilon_b \leq \epsilon_b \leq \bar{\epsilon}_b$$

em que, de acordo com o EC2, $\bar{\epsilon}_a = \frac{1}{100}$ e $\bar{\epsilon}_b = -\frac{35}{10\,000}$, e decorrentes das hipóteses de regime do aço (plastificação) e do betão (patamar) $\underline{\epsilon}_a = \epsilon_c > 0$ e $\bar{\epsilon}_b = -\frac{2}{1000}$, e ainda às condições da armadura superior:

$$-\bar{\epsilon}_a \leq \epsilon'_a \leq -\underline{\epsilon}_a$$

3.2. Condições de optimalidade

Define-se a função de Lagrange

$$L(\epsilon_a, \epsilon_b, \eta, \rho, \rho', \lambda, \nu, \pi, \pi', \mu_a, \mu_b) = \\ = C + \lambda N + \nu(M - M_0) + \pi(\eta - \eta_0) + \pi'\rho' \\ + \mu_a(\epsilon_a - \bar{\epsilon}_a) + \mu_b(\epsilon_b - \bar{\epsilon}_b) \quad (13)$$

nas variáveis de estado independentes ϵ_a e ϵ_b (ϵ'_a é considerada função destas), nas variáveis de projecto $\eta > 0$, $\rho > 0$, e ρ' , e nos multiplicadores de Lagrange λ , ν , π , π' , μ_a e μ_b . Por simplicidade de tratamento do problema e de lógica de interpretação das soluções não se incluíram em 13 todos os constrangimentos do problema de óptimo. Constataremos que a condição de regime do betão (patamar) apenas estabelece um limite superior do rácio de eficiências económicas. A condição de

plastificação da armadura inferior não tem influência directa na determinação da solução óptima e, por motivo de lógica deductiva decorrente das soluções obtidas, apresenta-se como condição auxiliar na forma de constrangimento à escolha do aço. Os constrangimentos sobre a extensão da armadura superior têm apenas que ser considerados numa solução, em que serão tratados separadamente.

A condição de optimalidade de ponto sela nas variáveis primais e duais é

$$\begin{cases} L & \xrightarrow{\epsilon_a, \epsilon_b, \eta > 0, \rho > 0, \rho'} \text{mín} \\ L & \xrightarrow{\lambda, \nu \leq 0, \pi \geq 0, \pi' \leq 0, \mu_a \geq 0, \mu_b \leq 0} \text{máx} \end{cases}$$

e as condições necessárias de optimalidade são as de Kuhn-Tucker (K-T) na forma diferencial (Bazaraa *et al.* [13])

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \epsilon_a} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \epsilon_b} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \rho'} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \nu} \geq 0; \nu \leq 0; \nu \frac{\partial L}{\partial \nu} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \pi} \leq 0; \pi \geq 0; \pi \frac{\partial L}{\partial \pi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \pi'} \geq 0; \pi' \leq 0; \pi' \frac{\partial L}{\partial \pi'} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_a} \leq 0; \mu_a \geq 0; \mu_a \frac{\partial L}{\partial \mu_a} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_b} \geq 0; \mu_b \leq 0; \mu_b \frac{\partial L}{\partial \mu_b} = 0 \end{cases} \quad (14-a)$$

um sistema de igualdades, de constrangimentos de desigualdade e de sinal dos multiplicadores de Lagrange e de não rigidez complementar, e as condições de inclusão:

$$\begin{cases} \eta > 0 \\ \rho > 0 \end{cases} \quad (14-b)$$

O procedimento adoptado para a resolução simbólica do problema de optimização consiste na resolução sucessiva do sistema de igualdades e condições de inclusão com as 2^5 combinações dos constrangimentos saturados, ou multiplicadores de Lagrange correspondentes nulos, e verificação da optimalidade das soluções assim obtidas [14]. Tendo em vista a redução do número de soluções a considerar fazem-se algumas hipóteses sobre as soluções óptimas, não se analisando as combinações consideradas implausíveis. Nomeadamente, não se considera necessário analisar soluções com momento maior que o mínimo prescrito pelo que se utiliza o sistema resolvente

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \epsilon_a} = \lambda \frac{\partial N}{\partial \epsilon_a} + \nu \frac{\partial M}{\partial \epsilon_a} + \mu_a = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \epsilon_b} = \lambda \frac{\partial N}{\partial \epsilon_b} + \nu \frac{\partial M}{\partial \epsilon_b} + \mu_b = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \eta} = 1 + \lambda \frac{\partial N}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial M}{\partial \eta} + \pi = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \rho} = \alpha + \lambda \frac{\partial N}{\partial \rho} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \rho'} = \alpha + \lambda \frac{\partial N}{\partial \rho'} + \nu \frac{\partial M}{\partial \rho'} + \pi' = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = N = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \nu} = M - M_0 = 0 \end{cases} \quad (15-a)$$

de equações não lineares e desigualdades

$$\begin{cases} \eta > 0 \\ \rho > 0 \end{cases} \quad (15-b)$$

havendo que verificar a condição de optimalidade complementar à última igualdade em 15-a

$$\nu \leq 0 \quad (16)$$

e as combinações relevantes das demais condições de optimalidade

$$\begin{cases} \eta - \eta_0 \leq 0; \pi \geq 0; \pi(\eta - \eta_0) = 0 \\ \rho' \geq 0; \pi' \leq 0; \pi' \rho' = 0 \\ \epsilon_a - \bar{\epsilon}_a \leq 0; \mu_a \geq 0; \mu_a(\epsilon_a - \bar{\epsilon}_a) = 0 \\ \epsilon_b - \bar{\epsilon}_b \geq 0; \mu_b \leq 0; \mu_b(\epsilon_b - \bar{\epsilon}_b) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

que, pela sua simplicidade, determinam *a priori* 4 variáveis, calculando-se as 7 restantes mediante o sistema resolvente 15. Destas últimas combinações não se consideram plausíveis aquelas em que nem o betão nem o aço estejam no estado último determinado pelo EC2, *i.e.*, as combinações a analisar de regime dos materiais são as de rotura pelo betão, pelo aço e simultânea.

3.3. Definições adicionais

Constataremos que a solução óptima é determinada por três variáveis adimensionais que se introduzem neste ponto. O quociente das razões de custo e resistência é o rácio das eficiências económicas do betão e do aço

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{|\sigma_{bR}|}{\frac{C_b}{\frac{\sigma_{aR}}{C_a}}} \end{aligned} \quad (18)$$

que também se pode interpretar como rácio do custo por resistência do aço e do betão:

$$\xi = \frac{\frac{C_a}{\sigma_{aR}}}{|\sigma_{bR}|}$$

Define-se o momento mínimo adimensional

$$\begin{aligned}\widetilde{M} &= \frac{M_0}{\eta_0^2} \\ &= \frac{\mathcal{M}}{c\bar{h}^2 |\sigma_{bR}|}\end{aligned}\quad (19)$$

em que \mathcal{M} é o momento flector mínimo e \bar{h} é a altura máxima da secção.

Define-se finalmente o recobrimento adimensionalizado relativamente à altura máxima:

$$\begin{aligned}\tilde{r} &= \frac{r}{\eta_0} \\ &= \frac{d}{\bar{h}}\end{aligned}\quad (20)$$

4. Soluções de armadura simples

Investigam-se em primeiro lugar as soluções—que constataremos serem 6—em que

$$\rho' = 0$$

sendo necessário verificar a negatividade do multiplicador de Lagrange correspondente:

$$\pi' \leq 0$$

Consideram-se sucessivamente os casos em que o constrangimento sobre a altura é livre e saturado e, para cada um destes, as 3 combinações plausíveis dos regimes do betão e do aço.

4.1. Altura inferior à máxima

Nestes casos verificar-se-á

$$\eta \leq \eta_0$$

e, pela condição de não rigidez complementar, é dado:

$$\pi = 0$$

4.1.1. Betão no estado último: Solução 1

Neste caso tomam-se

$$\begin{cases} \epsilon_b = -\frac{35}{10\,000} \\ \mu_a = 0 \end{cases}$$

sendo necessário verificar as condições de optimalidade:

$$\begin{cases} \mu_b \leq 0 \\ \epsilon_a \leq \frac{1}{100} \end{cases}$$

As variáveis não pré-definidas calculam-se pelo sistema resolvente 15 obtendo-se

$$\begin{cases} \eta = \frac{4913\alpha + 5940\beta}{289} Z > 0 \\ \rho = 17Z > 0 \\ \epsilon_a = \frac{4913\alpha - 1200\beta}{2040\,000\beta} \\ \lambda = -\frac{\alpha}{\beta} < 0 \\ \nu = -\frac{1}{17\beta Z} < 0 \\ \pi' = -\frac{(4913\alpha - 5940\beta)Z + 289r}{4913Z} \\ \mu_b = -\frac{960\,000}{4913}\beta Z < 0 \end{cases}$$

em que

$$Z = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{(4913\alpha + 2970\beta)\beta}} \sqrt{M_0} > 0$$

tendo-se assinalado os sinais que se identificam imediatamente por inspecção.

Das duas condições para este regime a 1.^a verifica-se trivialmente e a 2.^a impõe o limite superior do rácio das eficiências económicas:

$$\epsilon_a \leq \frac{1}{100} \Rightarrow \xi \leq \frac{21\,600}{4913} \simeq 4.396\,5 \quad (21)$$

A condição de armadura simples impõe o limite inferior ao recobrimento adimensional

$$\pi' \leq 0 \Rightarrow r \geq -\frac{\sqrt{17}}{289} \frac{4913\alpha - 5940\beta}{\sqrt{\beta(4913\alpha + 2970\beta)}} \sqrt{M_0}$$

e para que este seja arbitrário basta que

$$r \geq 0 \Leftrightarrow \xi \geq \frac{5940}{4913} \simeq 1.209 \quad (22)$$

e neste estudo toma-se este último valor, por simplicidade, consistência e verosimelhança, por limite inferior do rácio das eficiências económicas. A condição de regime plástico impõe uma restrição à selecção do aço ou, alternativamente, o limite inferior de validade desta solução

$$\epsilon_a \geq \epsilon_c \Rightarrow \xi \geq \frac{1200}{4913} + \frac{120\,000}{289}\epsilon_c$$

e para que este seja inferior ao anterior basta que a tensão de rotura do aço seja inferior a 464.71 MPa.

A condição de dimensionamento livre da altura impõe o limite superior ao momento:

$$\eta \leq \eta_0 \Rightarrow \widetilde{M} \leq 4913 \frac{4913\xi + 2970}{(4913\xi + 5940)^2} \quad (23)$$

4.1.2. Aço e betão no estado último: Solução 2

Neste caso as variáveis de estado são dadas

$$\begin{cases} \epsilon_a = \frac{1}{100} \\ \epsilon_b = -\frac{35}{10\,000} \end{cases}$$

sendo necessário verificar a congruência dos sinais dos multiplicadores de Lagrange correspondentes:

$$\begin{cases} \mu_a \geq 0 \\ \mu_b \leq 0 \end{cases}$$

A solução do sistema resolvente 15 é

$$\begin{cases} \eta = \frac{540}{17} Z > 0 \\ \rho = \frac{17}{3} \frac{Z}{\beta} > 0 \\ \lambda = -\frac{\alpha}{\beta} < 0 \\ \nu = -\frac{289\alpha + 1620\beta}{16\,380\beta Z} < 0 \\ \pi' = -\frac{(13\,362\alpha - 29\,160\beta)M_0 + (26\,299\alpha + 147\,420\beta)rZ}{9282M_0} \\ \mu_a = \frac{2000}{41\,769} \frac{4913\alpha - 21\,600\beta}{\beta} Z \\ \mu_b = \frac{80\,000}{1547} \frac{17\alpha - 76\beta}{\beta} Z \end{cases}$$

em que (assinalaram-se os sinais identificados por inspeção):

$$Z = \frac{\sqrt{46\,410}}{2730} \sqrt{M_0} > 0$$

As condições de congruência dos sinais dos multiplicadores de Lagrange dos constrangimentos das variáveis de estado estabelecem o limite inferior

$$\mu_a \geq 0 \Rightarrow \xi \geq \frac{21\,600}{4913} \simeq 4.3965 \quad (24)$$

observando-se que é o limite superior da solução 1, imposto pela condição complementar desta, e o limite superior

$$\mu_b \leq 0 \Rightarrow \xi \leq \frac{76}{17} \simeq 4.4706 \quad (25)$$

do rácio das eficiências económicas do betão e do aço para os quais esta solução verifica as condições de K-T.

A condição complementar à armadura simples

$$\pi' \leq 0 \Rightarrow r \geq -\frac{6\sqrt{46\,410}}{1547} \frac{2227\alpha - 4860\beta}{289\alpha + 1620\beta} \sqrt{M_0}$$

está trivialmente verificada porque, para que o recobrimento seja um positivo arbitrário (o 2.º membro da desigualdade anterior é negativo no intervalo):

$$r \geq 0 \Leftarrow \xi \geq \frac{4860}{2227} \simeq 2.1823$$

O constrangimento sobre a altura impõe o limite superior ao momento:

$$\eta \leq \eta_0 \Rightarrow \widetilde{M} \leq \frac{1547}{9720} = 0.15916 \quad (26)$$

4.1.3. Aço no estado último: Solução 3

Neste caso o sistema de igualdades é resolvido com os dados

$$\begin{cases} \epsilon_a = \frac{1}{100} \\ \mu_b = 0 \end{cases}$$

sendo necessário proceder as verificações:

$$\begin{cases} \mu_a \geq 0 \\ \epsilon_b \geq -\frac{35}{10\,000} \end{cases}$$

A solução é

$$\begin{cases} \eta = 6(17\alpha + 20\beta)Z > 0 \\ \rho = \frac{17}{1710} \frac{17\alpha + 10\,260\beta}{\beta} Z > 0 \\ \epsilon_b = -\frac{187\alpha + 3420\beta}{272\,000\alpha} \\ \lambda = -\frac{\alpha}{\beta} \\ \nu = -\frac{1}{102\beta Z} < 0 \\ \pi' = -\frac{(102\alpha - 120\beta)Z + r}{102Z} \\ \mu_a = \frac{462\,400\alpha^2}{29\,241\beta} Z > 0 \end{cases}$$

em que:

$$Z = \frac{\sqrt{570}}{\sqrt{4913\alpha^2 + 5930\,280\alpha\beta + 3488\,400\beta^2}} \sqrt{M_0} > 0$$

A limitação da extensão do betão impõe o limite inferior ao rácio das eficiências

$$\epsilon_b \geq -\frac{35}{10\,000} \Rightarrow \xi \geq \frac{76}{17} \simeq 4.4706 \quad (27)$$

que se obteve como limite superior da solução 2 pela condição complementar desta. O limite superior obtém-se da condição adicional de que o betão esteja no patamar

$$\epsilon_b \leq -\frac{2}{1000} \Rightarrow \xi \leq \frac{1140}{119} \simeq 9.5798 \quad (28)$$

que se toma, neste estudo, como limite superior do rácio das eficiências económicas do betão e do aço.

A negatividade do multiplicador de Lagrange associado ao dimensionamento da armadura superior impõe o constrangimento ao recobrimento

$$\pi' \leq 0 \Rightarrow r \geq -6(17\alpha - 20\beta)Z$$

constatando-se que está trivialmente verificado no intervalo:

$$r \geq 0 \Leftarrow \xi \geq \frac{20}{17} \simeq 1.1765$$

À semelhança do que sucede nas soluções 1 e 2, a condição de altura livre impõe o limite superior ao momento:

$$\eta \leq \eta_0 \Rightarrow \widetilde{M} \leq \frac{17}{20\,520} \frac{289\xi^2 + 348\,840\xi + 205\,200}{(17\xi + 20)^2} \quad (29)$$

4.2. Altura igual à máxima

Com o constrangimento de limite superior da altura saturado

$$\eta = \eta_0$$

é necessário verificar a positividade do multiplicador de Lagrange correspondente:

$$\pi \geq 0$$

4.2.1. Aço no estado último: Solução 4

O regime é o mesmo do caso anterior (solução 3), com os dados

$$\begin{cases} \epsilon_a = \frac{1}{100} \\ \mu_b = 0 \end{cases}$$

e as condições de optimalidade:

$$\begin{cases} \mu_a \geq 0 \\ \epsilon_b \geq -\frac{35}{10\,000} \end{cases}$$

A solução encontrada é

$$\begin{cases} \rho = \frac{17\eta_0}{300\beta} \frac{1500Z+1}{100Z-1} > 0 \\ \epsilon_b = Z \\ \lambda = -\frac{\alpha}{\beta} < 0 \\ \nu = -\frac{160\alpha}{171\beta} \frac{1-100Z}{\eta_0} < 0 \\ \pi = \frac{1}{3420} \frac{-(187+272\,000Z)\alpha - 3420\beta}{\beta} \\ \pi' = -\frac{2\alpha}{171} \frac{91\eta_0+8000(\eta_0-r)Z+80r}{\eta_0} \\ \mu_a = \frac{85\alpha}{513\beta} \frac{\eta_0}{1-100Z} > 0 \end{cases}$$

em que (assinalaram-se os sinais cuja verificação é imediata):

$$Z = \frac{1}{100} - \frac{\sqrt{1938}\eta_0}{1000\sqrt{17\eta_0^2 - 40M_0}} < 0 \Leftarrow \widetilde{M} < \frac{17}{40} \simeq 0.425$$

O constrangimento sobre a extensão do betão estabelece o limite superior do momento para a validade desta solução:

$$\epsilon_b \geq -\frac{35}{10\,000} \Rightarrow \widetilde{M} \leq \frac{1547}{9720} \simeq 0.15916 \quad (30)$$

O limite inferior é estabelecido pela positividade do multiplicador de Lagrange do constrangimento sobre a altura

$$\pi \geq 0 \Rightarrow \widetilde{M} \geq \frac{17}{20\,520} \frac{289\xi^2 + 348\,840\xi + 205\,200}{(17\xi + 20)^2} \quad (31)$$

intercepta o limite superior para $\xi = \frac{76}{17} \simeq 4.4706$ e toma o valor mínimo para o limite superior do rácio de eficiências estabelecido no caso anterior:

$$\widetilde{M} \geq \frac{17}{192} \simeq 0.088542 \Leftarrow \xi = \frac{1140}{119}$$

A condição de betão no patamar está trivialmente verificada neste intervalo:

$$\epsilon_b \leq -\frac{2}{1000} \Rightarrow \widetilde{M} \geq \frac{17}{192}$$

A solução de armadura simples é óptima para qualquer valor do recobrimento

$$\pi' \leq 0 \Rightarrow \tilde{r} \geq \frac{1}{80} \frac{91 + 8000Z}{-1 + 100Z}$$

atendendo a que o limite inferior é negativo no intervalo de validade da solução:

$$r \geq 0 \Leftarrow \widetilde{M} \leq \frac{1309}{4104} \simeq 0.31896$$

4.2.2. Aço e betão no estado último: Solução 5

Com a altura $\eta = \eta_0$ e as extensões últimas

$$\begin{cases} \epsilon_a = \frac{1}{100} \\ \epsilon_b = -\frac{35}{10\,000} \end{cases}$$

dadas, o problema só tem solução para o momento

$$\widetilde{M} = \frac{1547}{9720} \simeq 0.15916$$

e a solução das 6 igualdades das condições de K-T 14-a é indeterminada nos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \rho = \frac{289}{1620} \frac{\eta_0}{\beta} > 0 \\ \lambda = -\frac{\alpha}{\beta} < 0 \\ \nu = \nu \\ \pi = -\frac{1}{1620} \frac{289\alpha+1620\beta}{\beta} - \frac{1547}{4860} \eta_0 \nu \\ \pi' = -2\alpha - \beta(\eta_0 - r)\nu \\ \mu_a = \frac{28\,900}{2187} \frac{\alpha}{\beta} \eta_0 + \frac{68\,000}{6561} \eta_0^2 \nu \\ \mu_b = \frac{108\,800}{2187} \frac{\alpha}{\beta} \eta_0 + \frac{258\,400}{6561} \eta_0^2 \nu \end{cases}$$

A identificação do domínio de optimalidade da solução faz-se mediante as condições de sinal dos multiplicadores de Lagrange. Destas obtêm-se as desigualdades

$$\begin{cases} \pi \geq 0 \Rightarrow \nu \leq -\frac{3}{1547} \frac{289\alpha + 1620\beta}{\beta\eta_0} \\ \pi' \leq 0 \Rightarrow \nu \geq -\frac{2\alpha}{\beta(\eta_0 - r)} \\ \mu_a \geq 0 \Rightarrow \nu \geq -\frac{51\alpha}{40\beta\eta_0} \\ \mu_b \leq 0 \Rightarrow \nu \leq -\frac{24\alpha}{19\beta\eta_0} \end{cases}$$

de que se conclui

$$-\frac{2\alpha}{\beta(\eta_0 - r)} < -\frac{51\alpha}{40\beta\eta_0} \leq \nu \leq \min\left(-\frac{3}{1547} \frac{289\alpha + 1620\beta}{\beta\eta_0}, -\frac{24\alpha}{19\beta\eta_0}\right) < 0$$

Das 1.^a e 3.^a desigualdades anteriores obtêm-se o limite inferior do rácio de eficiências

$$\left. \begin{array}{l} \pi \geq 0 \\ \mu_a \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \xi \geq \frac{21\,600}{4913} \simeq 4.3965 \quad (32)$$

e comparando os dois limites superiores obtêm-se os intervalos do multiplicador de Lagrange:

$$\begin{cases} -\frac{51\xi}{40\eta_0} \leq \nu \leq \\ \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{1547} \frac{289\xi + 1620}{\eta_0} \text{ se } 4.3965 \simeq \frac{21\,600}{4913} \leq \xi \leq \frac{76}{17} \simeq 4.4706 \\ -\frac{24\xi}{19\eta_0} \text{ se } \xi \geq \frac{76}{17} \simeq 4.4706 \end{array} \right. \end{cases}$$

Constata-se que os limites superiores são a particularização ($\widetilde{M} = \frac{1547}{9720}$) das soluções 2 e 4, nos respectivos intervalos de validade, e o limite inferior da solução 6 (adiante).

4.2.3. Betão no estado último: Solução 6

Os regimes do aço e do betão são os mesmos da solução 1, assumindo-se

$$\begin{cases} \epsilon_b = -\frac{35}{10\,000} \\ \mu_a = 0 \end{cases}$$

e sujeito às verificações:

$$\begin{cases} \mu_b \leq 0 \\ \epsilon_a \leq \frac{1}{100} \end{cases}$$

A solução é

$$\begin{cases} \rho = \frac{289\eta_0}{60(7+2000Z)\beta} > 0 \\ \epsilon_a = Z \\ \lambda = -\frac{\alpha}{\beta} \\ \nu = -\frac{17\alpha}{20\beta\eta_0} \frac{7+2000Z}{1+1700Z} < 0 \\ \pi = \frac{682\,907+334\,084\,000Z}{68\,000(4913\eta_0^2-8910M_0)Z+682\,907\eta_0^2-1532\,520M_0} \\ \frac{\alpha M_0}{\beta} - 1 \\ \pi' = -\frac{\alpha}{20\eta_0} \frac{34\,000(\eta_0+r)Z-79\eta_0+119r}{1+1700Z} \\ \mu_b = -\frac{16\,320\,000\alpha M_0^2\eta_0}{\beta} \\ \frac{139+68\,000Z}{(246\,985\,200+70\,567\,200\,000Z)M_0^2-(562\,206\,150+233\,465\,760\,000Z)} \\ \frac{M_0\eta_0^2+(197\,360\,123+96\,550\,276\,000Z)\eta_0^4}{M_0\eta_0^2+(197\,360\,123+96\,550\,276\,000Z)\eta_0^4} \end{cases}$$

em que:

$$Z = \frac{289\eta_0^2 - 840M_0 + \sqrt{17\eta_0^2(4913\eta_0^2 - 11\,880M_0)}}{240\,000M_0} > 0 \Leftarrow \widetilde{M} < \frac{2363}{5880} \simeq 0.40187$$

A extensão máxima do aço determina o limite inferior do momento para esta solução

$$\epsilon_a \leq \frac{1}{100} \Rightarrow \widetilde{M} \geq \frac{1547}{9720} \simeq 0.15916 \quad (33)$$

e, no intervalo de validade, a negatividade do multiplicador de Lagrange associado à extensão máxima do betão é estritamente verificada:

$$-\frac{340}{729} \frac{\alpha\eta_0}{\beta} \geq \mu_b > -\frac{680}{21} \frac{\alpha\eta_0}{\beta} \Leftarrow \frac{1547}{9720} \leq \widetilde{M} < \frac{2363}{5880}$$

Da condição de optimalidade sobre o multiplicador de Lagrange associado ao constrangimento de altura obtêm-se

$$\pi \geq 0 \Rightarrow \widetilde{M} \geq 4913 \frac{4913\xi + 2970}{(4913\xi + 5940)^2} \quad (34)$$

e comparando este limite inferior com o anteriormente obtido 33

$$\widetilde{M} \geq \begin{cases} 4913 \frac{4913\xi + 2970}{(4913\xi + 5940)^2} \text{ se } 1.209 \simeq \frac{5940}{4913} \leq \xi \leq \frac{21\,600}{4913} \\ \simeq 4.3965 \\ \frac{1547}{9720} \simeq 0.15916 \text{ se } 4.3965 \simeq \frac{21\,600}{4913} \leq \xi \leq \frac{1140}{119} \\ \simeq 9.5798 \end{cases}$$

constata-se que o limite inferior do momento na solução 6 é os limites superiores das soluções 1, 2 e 4, nos respectivos intervalos de validade do rácio das eficiências económicas. O valor máximo deste limite ocorre no extremo inferior do intervalo:

$$\widetilde{M} \geq \frac{4913}{15\,840} \simeq 0.31016 \Leftarrow \xi = \frac{5940}{4913} \simeq 1.209$$

Da condição sobre o multiplicador de Lagrange associado à armadura superior obtém-se o limite inferior do recobrimento

$$\pi' \leq 0 \Rightarrow \tilde{r} \geq 1 - \frac{2}{289} \sqrt{83\,521 - 201\,960\tilde{M}}$$

e constata-se que, para que o recobrimento seja um positivo arbitrário, *i.e.*, que a solução de armadura simples seja óptima independentemente do valor do recobrimento, basta que o momento seja inferior ao limite calculado na penúltima equação:

$$\tilde{r} \geq 0 \Leftrightarrow \tilde{M} \leq \frac{4913}{15\,840} \simeq 0.31016$$

Do limite superior de admissibilidade do momento deduz-se o limite superior (para admissibilidade da solução) do recobrimento:

$$\tilde{M} < \frac{2363}{5880} \simeq 0.40187 \Rightarrow \tilde{r} < \frac{79}{119} \simeq 0.66387$$

Alternativamente, obtém-se da mesma condição de optimalidade o limite superior do momento em função do recobrimento

$$\pi' \leq 0 \Rightarrow \tilde{M} \leq \frac{4913}{47\,520} (3 + 2\tilde{r} - \tilde{r}^2) \geq \frac{4913}{15\,840} \quad (35)$$

observando-se que toma o valor mínimo para recobrimento nulo.

A condição de plastificação da armadura impõe a restrição à selecção do aço

$$\epsilon_c \leq \frac{289 - 840\tilde{M} + \sqrt{17(4913 - 11\,880\tilde{M})}}{240\,000\tilde{M}}$$

uma função decrescente do momento, observando-se que para momentos inferiores ao valor mínimo do limite superior de admissibilidade da solução ($\tilde{M} = \frac{4913}{15\,840} \simeq 0.31016$), e para o qual a solução de armadura simples é óptima independentemente do valor do recobrimento, a tensão de cedência do aço mínima é superior a 464,71 MPa.

5. Solução de armadura dupla

5.1. Altura inferior à máxima

Argumenta-se que não é necessário analisar soluções com altura livre: as soluções óptimas de altura livre obtidas (1, 2 e 3) são de armadura simples; inversamente, as soluções óptimas de armadura dupla serão de altura constringida.

5.2. Altura igual à máxima

Exploram-se as soluções com

$$\begin{cases} \pi' = 0 \\ \eta = \eta_0 \end{cases}$$

sujeitas às condições de optimalidade:

$$\begin{cases} \rho' \geq 0 \\ \pi \geq 0 \end{cases}$$

5.2.1. Betão no estado último: Solução 7

Os regimes do aço e do betão são os mesmos da solução anterior, tomando-se

$$\begin{cases} \epsilon_b = -\frac{35}{10\,000} \\ \mu_a = 0 \end{cases}$$

e sujeito às condições:

$$\begin{cases} \mu_b \leq 0 \\ \epsilon_a \leq \frac{1}{100} \end{cases}$$

Neste caso o sistema de igualdades 15-a admite a solução única, em que se assinalam os sinais identificáveis por inspecção (a positividade do reforço inferior será analisada separadamente):

$$\begin{cases} \rho = \frac{47\,520M_0 + 4913(\eta_0^2 - 2\eta_0r - 3r^2)}{47\,520(\eta_0 - r)\beta} \\ \rho' = \frac{47\,520M_0 + 4913(-3\eta_0^2 - 2\eta_0r + r^2)}{47\,520(\eta_0 - r)\beta} \\ \epsilon_a = \frac{79\eta_0 - 119r}{34\,000(\eta_0 + r)} \\ \lambda = -\frac{\alpha}{\beta} < 0 \\ \nu = -\frac{2\alpha}{(\eta_0 - r)\beta} < 0 \\ \pi = \frac{(47\,520M_0 + 4913(\eta_0^2 - 2\eta_0r - 3r^2))\alpha - 23\,760(\eta_0 - r)^2\beta}{23\,760(\eta_0 - r)^2\beta} \\ \mu_b = -\frac{115\,600(\eta_0 + r)^2\alpha}{29\,403(\eta_0 - r)\beta} < 0 \end{cases}$$

Da positividade da área da armadura superior obtém-se o limite inferior do momento

$$\rho' \geq 0 \Rightarrow \tilde{M} \geq \frac{4913}{47\,520} (3 + 2\tilde{r} - \tilde{r}^2) \geq \frac{4913}{15\,840} \quad (36)$$

que se comparará com o limite superior da solução 6, obtido da condição complementar desta. A positividade do reforço inferior verifica-se trivialmente no intervalo de validade da solução, para todos os valores do recobrimento ($0 \leq \tilde{r} < 1$):

$$\rho \geq 0 \Rightarrow \tilde{M} \geq \frac{4913}{47\,520} (-1 + 2\tilde{r} + 3\tilde{r}^2) < \frac{4913}{47\,520} (3 + 2\tilde{r} - \tilde{r}^2)$$

A 2.^a condição de optimalidade deste parágrafo impõe um limite inferior ao momento e constata-se que decorre da 1. ^a

$$\rho' \geq 0 \Rightarrow \pi \geq 0$$

se

$$\xi \geq \frac{5940}{4913} \frac{1 - \tilde{r}}{1 + \tilde{r}} \leq \frac{5940}{4913} \simeq 1.209$$

no intervalo do rácio de eficiências em consideração.

A extensão no aço da armadura inferior é uma função decrescente do recobrimento, sempre inferior à última:

$$\epsilon_a = \frac{79 - 119\tilde{r}}{34000(1 + \tilde{r})} \leq \frac{79}{34000} \simeq 2.3235 \times 10^{-3} < \frac{1}{100}$$

Nesta solução a selecção do aço está condicionada ao valor máximo da extensão de cedência

$$\epsilon_c \leq \frac{79 - 119\tilde{r}}{34000(1 + \tilde{r})} \leq \frac{79}{34000}$$

determinado pelo valor do recobrimento, exclusivamente. O valor máximo da tensão de rotura do aço é de 464.71 MPa, que corresponde a $\tilde{r} = 0$. A condição de plastificação da armadura inferior pode, equivalentemente, ser formulada como restrição ao recobrimento

$$\epsilon_c \leq \epsilon_a \Rightarrow \tilde{r} \leq \frac{1}{17} \frac{79 - 34000\epsilon_c}{7 + 2000\epsilon_c} < \frac{79}{119} \simeq 0.66387$$

observando-se que para o limite superior de admissibilidade do recobrimento se tem o limite inferior do momento

$$\tilde{M} \geq \frac{2363}{5880} \simeq 0.40187 \Leftarrow \tilde{r} = \frac{79}{119} \simeq 0.66387$$

que se constata ser o limite superior de admissibilidade da solução 6, para o mesmo valor do recobrimento.

Resta verificar a condição de plastificação da armadura superior

$$\epsilon'_a = -\frac{1}{34000} \frac{119 - 79\tilde{r}}{1 + \tilde{r}} \leq -\epsilon_c$$

e, atendendo ao limite superior da extensão de cedência determinado pela extensão máxima na armadura inferior, esta condição verificar-se-á sempre desde que

$$\tilde{r} \leq \frac{20}{79} \simeq 0.25316$$

o que é concordante com os valores usuais do recobrimento. A condição de limite inferior da extensão da armadura superior está trivialmente verificada.

5.2.2. Aço e betão no estado último

Neste caso o sistema de igualdades 15-a admite uma solução única em que

$$\mu_a = -\frac{1700\alpha\eta_0}{6561\beta} \frac{29\eta_0 + 51r}{\eta_0 - r} < 0$$

o que viola a condição de optimalidade $\mu_a \geq 0$, reflectindo a impossibilidade de extensão máxima da armadura inferior na solução 6, de que o caso presente é uma situação extrema, previsivelmente inadmissível.

5.2.3. Aço no estado último

Também neste caso o sistema de igualdades 15-a tem uma solução única, com

$$\epsilon_b = -\frac{1}{8000} \frac{91 + 80\tilde{r}}{1 - \tilde{r}}$$

constatando-se que, para toda a gama de recobrimentos admissíveis,

$$\epsilon_b \leq -\frac{91}{8000} \simeq -0.011375 < -\frac{35}{10000}$$

a condição de limite inferior da extensão do betão é violada, e a solução é inadmissível.

6. Regiões de optimalidade das soluções

Apresentam-se na Figura 2 os domínios de optimalidade das soluções obtidas no plano ξ (rácio das eficiências económicas do betão e do aço) \tilde{M} (momento flector adimensionalizado) e assinala-se a numeração das equações que delimitam a optimalidade de cada uma. Na Figura 3 mostram-se, no mesmo plano, as regiões em que a solução é de armadura dupla (solução 7, com altura a máxima admissível) e simples (1–6), as anteriores em que a altura é a máxima admissível ($\eta = \eta_0$, soluções 4–6) e em que a altura óptima é calculada ($\eta < \eta_0$, soluções 1–3) e ainda os regimes últimos, de rotura pelo betão (soluções 1, 6 e 7), pelo aço (3 e 4) e simultânea (2 e 5). As soluções 4–6 são coincidentes com o dimensionamento corrente (da armadura) de acordo com o EC2 podendo ser óptimas, ou não, nos casos em que a solução óptima se obtém reduzindo a altura (soluções 1–3). Com a solução 7 podem calcular-se a área total das armaduras e a sua distribuição óptima e constata-se—o que não deixa de ser interessante em si mesmo—que é independente de factores de custo.

Foi verificada a continuidade das variáveis de projecto em toda a gama de parâmetros; os multiplicadores de Lagrange são contínuos com excepção das descontinuidades decorrentes da indeterminação assinalada na solução 5.

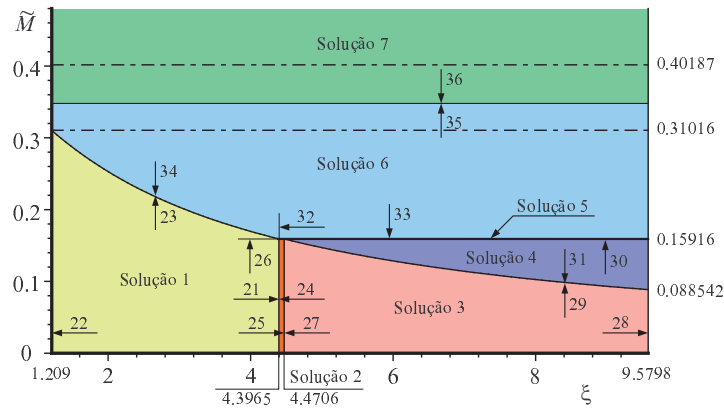


Figura 2. Mapa dos domínios de optimalidade das soluções

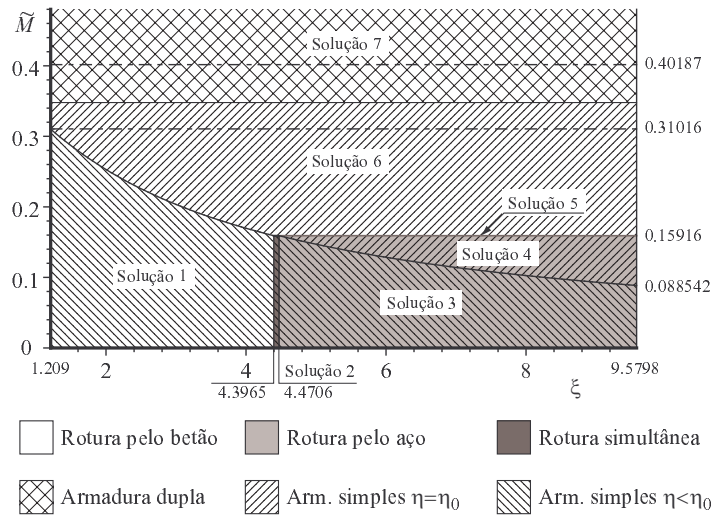


Figura 3. Caracterização das soluções óptimas

A delimitação das soluções 6 e 7 é determinada pelo valor do recobrimento, com os extremos $\tilde{M} = \frac{4913}{15840} \simeq 0.31016$, abaixo do qual a solução óptima é sempre de armadura simples, e $\tilde{M} = \frac{2363}{5880} \simeq 0.40187$ acima do qual de armadura dupla. Neste intervalo a selecção do aço está condicionada a uma tensão de cedência compreendida entre 464.71 MPa e 0. Inversamente, se escolhido o aço, o recobrimento máximo pode ser calculado pela fórmula apresentada na solução 7.

7. Exemplos

7.1. Exemplo 1

Neste exemplo comparam-se as soluções (óptimas em ambos os casos) para dois valores distintos do rácio das eficiências económicas do betão e do aço, $\xi = 8$ e

$\xi = 4$. Tomou-se o quociente das resistências de aço/betão $\beta = 15$ e as razões dos custos destes materiais $\alpha = 120$ e $\alpha = 60$, amplitude de variação facilmente justificável pela variação apenas do custo do aço para armaduras no passado recente. A razão máxima altura/largura é $\eta_0 = 2$ e o recobrimento adimensional é $\tilde{r} = 0,05$. Para valores crescentes do momento adimensional \tilde{M} , no caso $\xi = 8$, a solução óptima é, sucessivamente, 3 – 4 (rotura pelo aço) – 6 – 7 (rotura pelo betão), como se pode inferir directamente por análise da Figura 2. No caso $\xi = 4$ temos a sucessão 1 – 6 – 7 (rotura pelo betão). Na Figura 4 mostra-se o custo adimensional C da secção em ambos os casos. As quantidades de armadura $\rho + \rho'$ em ambos os casos está representada na Figura 5, observando-se que são diferentes para $\tilde{M} < 0,16970$. Com $\xi = 4$, para momentos inferiores ao indicado, a secção óptima é de altura inferior à máxima,

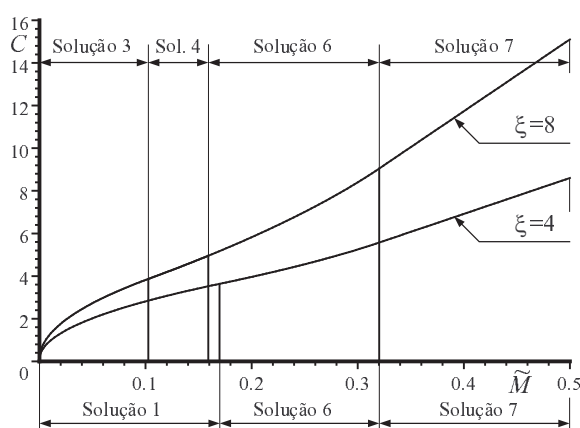


Figura 4. Exemplo 1: Custo C vs momento \tilde{M}

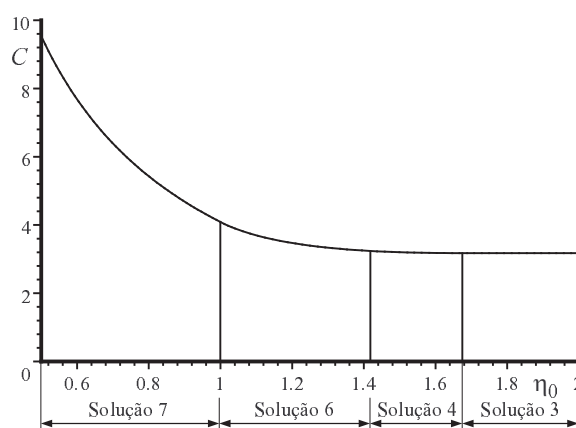


Figura 6. Exemplo 2: Custo C vs altura máxima η_0

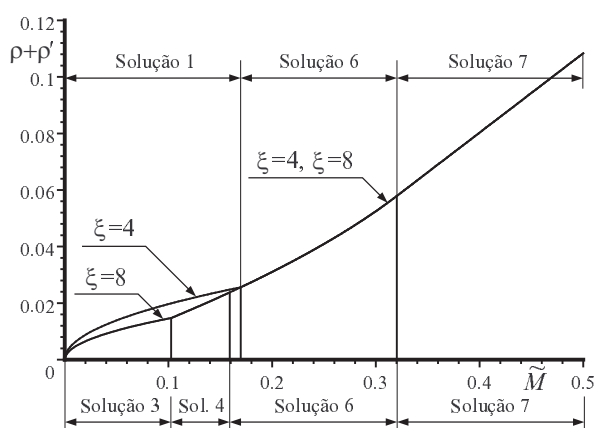


Figura 5. Exemplo 1: Armadura $\rho + \rho'$ vs momento \tilde{M}

i.e., $\eta < 2$ e o regime é de rotura pelo betão. Para $\xi = 8$ há redução de altura apenas para $\tilde{M} < 0,10262$, com rotura pelo aço para $\tilde{M} \leq 0,15916$. À maior quantidade de armadura com $\xi = 4$ para $\tilde{M} < 0,16970$ está associada uma altura óptima inferior (não representada), o que é expectável por $\xi = 4$ corresponder a uma menor eficiência económica do betão comparativamente com $\xi = 8$, ou, inversamente, uma maior eficiência comparativa do aço. Para $\tilde{M} \geq 0,16970$ as soluções (6 e 7) são idênticas (excepto o custo, Figura 4) com rotura pelo betão e armadura dupla para $\tilde{M} \geq 0,32024$.

7.2. Exemplo 2

Neste exemplo investiga-se a dependência da solução óptima num dos parâmetros de constrangimento, o valor máximo da razão altura/largura η_0 . Tomou-se um betão da classe C30 com tensão de rotura (de projec-

to) $|\sigma_{bR}| = 20$ MPa e um aço de designação S400 com tensão de rotura $\sigma_{aR} = 348$ MPa. O quociente das resistências é $\beta = 17,4$ e com a razão do custo aço/betão $\alpha = 121,8$ (aproximativa) obtém-se o rácio das eficiências económicas $\xi = 7$. O momento flector vale $\mathcal{M} = 100$ kN · m e tomaram-se para largura e recobrimento $c = 0,25$ m e $d = 0,0125$ m, respectivamente. Na Figura 6 representa-se o custo adimensional C da secção em função da altura adimensional η_0 para as soluções óptimas, a solução 7 (rotura pelo betão com repartição óptima das armaduras) no intervalo $[0,5, 0,99961]$, solução 6 (rotura pelo betão) no intervalo $[0,99961, 1,4180]$, solução 4 (rotura pelo aço) no intervalo $[1,4180, 1,6746]$ e solução 3 (rotura pelo aço com altura e armadura óptimas) no intervalo $[1,6746, 2]$. Consta-se que a secção mais económica é a que corresponde à solução 3, com altura $\eta = 1,6746$ ($h = 0,41865$ m) e armadura $\rho = 1,1907 \times 10^{-2}$ ($A = 7,4419 \times 10^{-4}$ m²) para um custo adimensional de $C = 3,1749$.

Referencias

1. EC2 . EN 1992-1. (Final Draft). (2001)
2. EC2 . ENV 1992-1-1. (1998)
3. CEB-FIP Model Code 1990. (1991) Committee Euro-International du Beton. CEB Bulletin No. 203-204 e 205. Thomas Telford.
4. Melão Barros M.H.F., Barros A.F.M., Ferreira C.C. (2004) Closed form solution of optimal design of rectangular reinforced concrete sections. *Engineering Computations*. 21(7):761-776
5. Barros M.H.F.M., Martins R.A.F., Barros A.F.M. (2005) Cost optimization of singly and doubly reinforced concrete beams with EC2-2001. *Struct Multidisc Optim*. 30:236-242
6. Choi C.K., Kwak H.G. (1990) Optimum RC member design with predetermined discrete sections. *J. of Structural Engineering*, ASCE. 16(10):2634-49

7. Kanagasundaram S., Karihaloo B.L. (1990) Minimum cost design of reinforced concrete structures. *Structural Optimization*. 2:173-184.
8. Adamu A., Karihaloo B.L. (1994) Minimum cost design of RC beams using DCOC. Part I: Beams with freely varying cross-sections. *Structural Optimization*. 7:237-251
9. Adamu A., Karihaloo B.L. (1994) Minimum cost design of RC beams using DCOC. Part II: Beams with uniform cross-sections. *Structural Optimization*. 7:252-259
10. Ceranic B. and Frier. (2000) Sensitivity analysis and optimum design curves for the minimum cost design of singly and doubly reinforced concrete beams. *Structural Multidisc. Optimization*. 20:260-268
11. Leps M., Sejnoha M. (2003) New approach to optimization of reinforced concrete beams. *Computers and Structures*. 81:1957-1966
12. Payá I., Yepes V., Clemente J.J., González F. (2006) Optimización heurística de pórticos de edificación de hormigón armado. *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. I*. 22(3):241-259
13. Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty C.M. (1993) *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons
14. Haug E.J., Arora J.S. (1979) *Applied Optimal Design: Mechanical and Structural Systems*. Wiley
15. Timoshenko S.P. (1975) *Resistência dos Materiais*. 3.^a ed., vol. 2. Livros Técnicos e Científicos Editora
16. Gallagher R.H. (1985) Diseño estructural óptimo - Una reseña. *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.*. 1(1):3-20
17. Hernandez S. (1993) Del diseño convencional al diseño óptimo. Posibilidades y variantes. Parte I. Análisis de sensibilidad y optimización local y global. *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* 9(1):91-110
18. Hernandez S. (1993) Del diseño convencional al diseño óptimo. Posibilidades y variantes. Parte II. Optimización multiobjetivo y sensibilidad de la solución óptima. *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* 9(3):259-270