

# Interpolación con Funciones de Base Radial y el Método del Sistema Diferencial para identificación de parámetros en acuíferos

Miguel Ángel Moreles · Francisco Mejía

Recibido: Marzo 2010, Aceptado: Abril 2010

©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2010

**Resumen** La caracterización de acuíferos es un problema fundamental en Geohidrología. El problema consiste en estimar los parámetros fenomenológicos a partir de datos de alturas piezométricas. Los datos de campo son obtenidos en pozos de observación los cuales son pocos y dispersos en el acuífero. En este trabajo proponemos una solución al problema de estimación en dos partes. Primero utilizamos un método de interpolación con funciones de base radial para generar datos suficientes de alturas piezométricas, después aplicamos el método del sistema diferencial para la estimación de parámetros. Mostramos la aplicabilidad del método en una caracterización del acuífero Silao-Romita en Guanajuato México.

## RBF INTERPOLATION AND THE DIFFERENTIAL SYSTEM METHOD FOR PARAMETER IDENTIFICATION IN AQUIFERS

**Summary** Aquifer characterization is an important problem in Geohydrology. The problem consists in estimating phenomenological parameters given piezometric data. In general field data is obtained in observation wells, which are few and scattered in the aquifer. In this work we propose a solution to the problem of parameter estimation in two parts. First we use an interpolation

technique by means of radial basis functions to generate sufficient piezometric data, then we apply the Differential System method for parameter estimation. To illustrate the method, we show a characterization of the Silao-Romita aquifer located in Guanajuato Mexico.

## 1. Introducción

El flujo en un acuífero freático e isotrópico se puede modelar con la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( Kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Kh \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \eta_e \frac{\partial h}{\partial t} - f \quad (1)$$

donde  $h(x, y, t)$  es la elevación de la superficie libre del acuífero (altura piezométrica, potencial hidráulico),  $f(x, y, t)$  es el término fuente representando flujo vertical, positivo en dirección hacia abajo. La conductividad hidráulica,  $K(x, y)$ , y la porosidad efectiva,  $\eta_e(x, y)$  son los parámetros fenomenológicos del modelo.

Si  $K(x, y)$  y  $\eta_e(x, y)$ , son conocidos, el problema directo consiste en resolver la ecuación diferencial parcial (1) para  $h$ , sujeta a condiciones iniciales y de frontera apropiadas. En este trabajo consideramos el siguiente *problema inverso*: dadas  $p$  condiciones de flujo para los tiempos  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , determinar los parámetros del modelo  $K(x, y)$  y  $\eta_e(x, y)$ . Para  $t$  fija, una condición de flujo es un conjunto de datos  $h(x_m, y_n, t)$ , y  $f(x_m, y_n, t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Una dificultad inherente en el problema inverso es que en la práctica los datos de condiciones de flujo son pocos y dispersos en el acuífero. Con el fin de generar datos suficientes se puede utilizar un método de interpolación. En este trabajo utilizaremos la técnica de interpolación con funciones de base radial (RBF por sus

Miguel Angel Moreles · Francisco Mejía

CIMAT

Callejón Jalisco S/N, Valenciana

Guanajuato, Gto 36240, México

Tel. (473) 73 2 71 55 Ext. 49568

Fax. (473) 73 2 57 49

e-mail: moreles@cimat.mx; frankflakes@cimat.mx

siglas en inglés). Esta técnica ha cobrado gran importancia, no solo en interpolación sino en solución numérica de EDP como base para métodos libres de malla. Como método de interpolación se obtienen resultados muy satisfactorios además existe una teoría sólida de aproximación, ver Wendland [9].

Para el caso de un acuífero freático, en Moreles *et al.* [6], se desarrolla un método directo para determinar la conductividad hidráulica  $K$  y la porosidad efectiva  $\eta_e$ , cuando el potencial y término fuente se conocen en diferentes condiciones de flujo, al menos una de ellas transitoria. El método consiste esencialmente en escribir la ecuación para cada condición de flujo, formando de las ecuaciones una ecuación diferencial parcial de primer orden en  $K$  y como un sistema algebraico en  $\eta_e$ . De ahí el nombre del Método del Sistema Diferencial (DS por sus siglas en inglés). El método DS se ha aplicado con éxito también en acuíferos confinados, ver Parravicini *et al.* [7] para el caso estacionario, y Vázquez *et al.* [8] para el caso transitorio. Una debilidad del método DS es que requiere una gran cantidad de datos, en este trabajo proponemos un método para de corregir esta debilidad. Nos referiremos al método como RBF-DS. Mostramos su aplicabilidad con una caracterización del acuífero Silao-Romita en Guanajuato México.

El contenido del trabajo es como sigue.

En la Sección 2 describimos el método de interpolación utilizando la función multicuádrica, los aspectos principales del método DS y finalmente el método RBF-DS para estimación de parámetros en acuíferos. En la Sección 3 desarrollamos la aplicación principal de este trabajo, una caracterización del acuífero Silao-Romita con datos de la Comisión Estatal del Agua del estado de Guanajuato México. Concluimos la exposición con comentarios finales y perspectivas futuras.

## 2. El método RBF-DS

### 2.1. Interpolación con funciones de base radial

La teoría de interpolación con RBF esta muy establecida. En este párrafo solo introduciremos los elementos básicos para nuestra aplicación. Basamos nuestra exposición en Wendland [9], donde se presenta un estudio muy completo sobre el tema.

Una función  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  es radial si existe  $\phi : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\varphi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|), \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Además  $\varphi$  se dice que es condicionalmente positiva definida de orden  $k$  (CPD- $k$ ) sobre  $\mathbb{R}^d$  si

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \varphi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \geq 0 \tag{2}$$

para cualquier conjunto de  $n$  puntos distintos  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ , y  $c = [c_1, \dots, c_n]^T \in \mathbb{R}^n$  que satisfice

$$\sum_{i=1}^n c_j \mathbf{x}_j^\xi = 0, \quad |\xi| < k.$$

La función  $\varphi$  es condicionalmente positivo-definida estricta de orden  $k$  sobre  $\mathbb{R}^d$  si para  $c \neq 0$  se cumple la igualdad estricta en (2).

Un interpolador con RBF condicionalmente positivas definidas de orden  $k$  es de la forma

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \eta_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) + \sum_{|\mathbf{l}| < k} \beta_{\mathbf{l}} \mathbf{x}^{\mathbf{l}}. \tag{3}$$

Aquí,  $\mathbf{l}$  es un multi-índice. En esta notación

$$|\mathbf{l}| = \sum_{j=1}^n l_j,$$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{l}} = x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}.$$

Un ejemplo de una función condicionalmente positiva-definida estricta de orden 1 es la función multicuádrica, definida por

$$\phi(r) = \sqrt{1 + \epsilon^2 r^2}$$

donde  $\epsilon$  es el parámetro de forma. La determinación del parámetro de forma  $\epsilon$  en aplicaciones es heurística.

Siguiendo la práctica en aplicaciones hidrológicas, ver por ejemplo Borga & Vizzaccaro [1], utilizaremos la función multicuádrica como función de interpolación. En consecuencia utilizaremos el interpolador

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \eta_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) + \beta. \tag{4}$$

De las condiciones

$$s(\mathbf{x}_i) = y_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n,$$

obtenemos un sistema lineal para los coeficientes  $\eta_j \beta_{\mathbf{l}}$  de la forma

$$\begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

donde

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

y  $\phi_{ij} = \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$ ,  $\mathbf{1}$  es un vector de unos de tamaño  $n \times 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\beta$ .

**Comentario.** La implantación numérica de los sistemas de interpolación con RBF es aparentemente sencilla, pero los sistemas obtenidos son en general mal condicionados y hay que precondicionarlos adecuadamente para aproximar correctamente la solución. La ventaja principal es que aún con pocos datos se obtienen resultados muy satisfactorios.

## 2.2. El método DS

Enseguida describimos el método DS con referencia explícita a un acuífero freático e isotrópico descrito por la ecuación (1). Aquí solo mostramos los pasos principales, los detalles de la implantación numérica se pueden consultar en Moreles *et al.* [6].

Supongamos que el término fuente  $f(x, y, t_i)$ , el potencial  $h(x, y, t_i)$  y su derivada con respecto al tiempo  $\partial h(x, y, t_i)/\partial t$  se conocen como funciones del espacio en  $p$  tiempos distintos. Un conjunto de datos esta dado por esas funciones, es decir  $p$  conjuntos de datos se suponen conocidos.

Introducimos la notación:

$$f^i \equiv f(x, y, t_i)$$

$$h^i \equiv h(x, y, t_i)$$

$$\partial h^i / \partial t \equiv h(x, y, t_i) / \partial t$$

la ecuación (1) se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K h^i \frac{\partial h^i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K h^i \frac{\partial h^i}{\partial y} \right) = n_e \frac{\partial h^i}{\partial t} - f^i$$

Desarrollando las derivadas obtenemos después de simplificar

$$h^i \frac{\partial h^i}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial x} + h^i \frac{\partial h^i}{\partial y} \frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial h^i}{\partial t} n_e = -\bar{\Delta} h^i K - f^i$$

donde

$$\bar{\Delta} h^i = h^i \Delta h^i + \left( \frac{\partial h^i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h^i}{\partial y} \right)^2$$

Definamos

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left( \frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial y}, n_e \right) \quad (6)$$

y los vectores  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{f}$  con componentes  $\bar{\Delta} h^i$  y  $f^i$  respectivamente.

Si suponemos que la conductividad  $K$  es conocida, tenemos para  $(x, y)$  fijo el siguiente sistema lineal

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = -K\mathbf{z} + \mathbf{f} \quad (7)$$

Si  $\text{Rango}(\mathbf{A}) = 3$  entonces el sistema (7) tiene una única solución en el sentido de mínimos cuadrados y está dada por

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (8)$$

Donde las funciones vectoriales  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son soluciones de los sistemas:

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{z} \quad (9)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{f}$$

Ahora escribiendo la ecuación (8) recordando la definición (6) y escribiendo la dependencia en  $(x, y)$  explícitamente, obtenemos el siguiente sistema para las dos componentes de  $\mathbf{u}$

$$u_1 = \frac{\partial K}{\partial x} = -K a_1 + b_1 \quad (10)$$

$$u_2 = \frac{\partial K}{\partial y} = -K a_2 + b_2$$

y la ecuación siguiente para la tercer componente

$$u_3 = n_e = -K a_3 + b_3 \quad (11)$$

El segundo paso en la identificación de parámetros consiste en considerar la ecuación en (10) como un sistema diferencial de primer orden en  $K$ .

Para resolver el sistema diferencial necesitamos datos de Cauchy, esto es, el valor de la conductividad en un punto  $\mathbf{x}^0 = (x_0, y_0)$  del dominio. El problema de Cauchy a resolver es el siguiente

$$u_1 = \frac{\partial K}{\partial x} = -K a_1 + b_1$$

$$u_2 = \frac{\partial K}{\partial y} = -K a_2 + b_2 \quad (12)$$

$$K(x_0, y_0) = K_0$$

La solución en un punto  $\mathbf{x} = (x, y)$  se encuentra eligiendo una trayectoria adecuada uniendo  $\mathbf{x}$  con el punto inicial, e integrando (12) a lo largo de la misma. Una vez que la conductividad ha sido evaluada, la ecuación (11) se utiliza para obtener la porosidad efectiva en cualquier punto del dominio.



**Figura 1.** Ubicación geográfica del acuífero Silao-Romita

### 2.3. Interpolación con RBF y aplicación al método DS

Sean  $h_i \in \mathbb{R}$   $i = 1, \dots, k$ , mediciones de niveles piezométricos, en las coordenada  $\mathbf{x}_i \in D \subset \mathbb{R}^2$  respectivamente. Interpolaremos sobre una malla rectangular  $R \subset D$ , de  $M \times N$  nodos con coordenadas  $\mathbf{p}_{(m,n)} = (x(m,n), y(m,n))$ , donde  $x(m,n) = x_0 + m \cdot \Delta x$ ,  $y(m,n) = y_0 + n \cdot \Delta y$ ,  $m = 0, 1, \dots, M-1$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . El nodo  $\mathbf{p}_{(0,0)} = (x_0, y_0)$  corresponde a la esquina inferior derecha de  $R$ . Mediante el interpolador dado por la ecuación (4) y el sistema obtenemos los coeficientes  $\boldsymbol{\eta}$  y  $\beta_0$ . Basta evaluar las siguiente expresión para obtener la interpolación en cada nodo de la malla

$$s(\mathbf{p}_{(m,n)}) = \sum_{j=1}^k \eta_j \gamma(\|\mathbf{p}_{(m,n)} - \mathbf{x}_j\|) + \beta_0.$$

Ahora, empleamos el método DS para la identificación de la conductividad y el coeficiente de almacenamiento. La matriz  $A$  y los coeficientes  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  que aparecen en el método DS involucran primeras y segundas derivadas parciales de  $h$ , que calculamos con diferencias finitas centradas

$$\frac{\partial h}{\partial x} [\mathbf{p}_{(m,n)}] \approx \delta_x h(\mathbf{p}_{(m,n)}) \equiv \frac{h(\mathbf{p}_{(m+1,n)}) - h(\mathbf{p}_{(m-1,n)})}{2\Delta x},$$

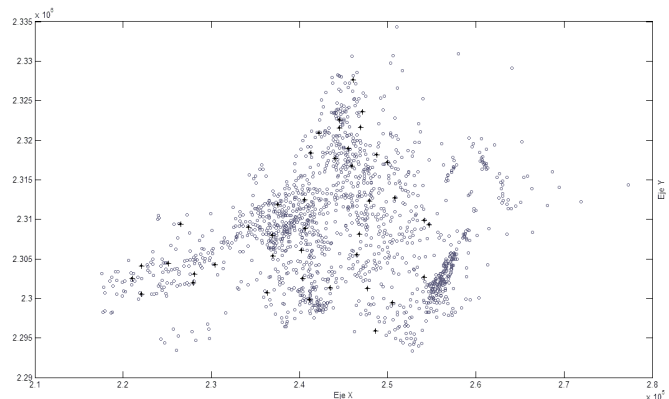
$$\frac{\partial h}{\partial y} [\mathbf{p}_{(m,n)}] \approx \delta_y h(\mathbf{p}_{(m,n)}) \equiv \frac{h(\mathbf{p}_{(m,n+1)}) - h(\mathbf{p}_{(m,n-1)})}{2\Delta y},$$

$$\Delta h [\mathbf{p}_{(m,n)}] \approx \delta^2 h(\mathbf{p}_{(m,n)}) \equiv [h(\mathbf{p}_{(m+1,n)}) + h(\mathbf{p}_{(m-1,n)}) + h(\mathbf{p}_{(m,n+1)}) + h(\mathbf{p}_{(m,n-1)}) - 4h(\mathbf{p}_{(m,n)})] \cdot (\Delta x)^{-2}$$

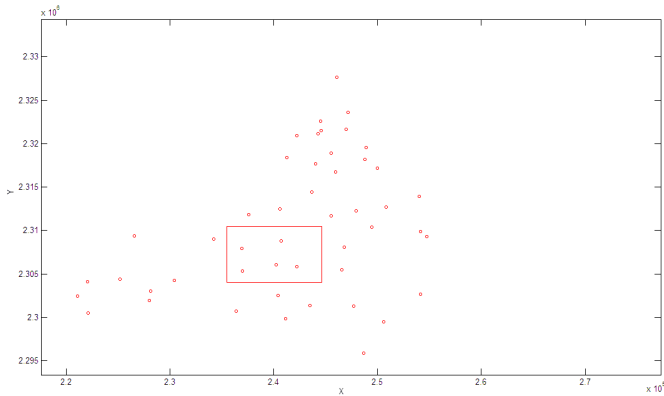
### 3. Aplicación al acuífero Silao-Romita

El acuífero Silao-Romita se localiza en el estado de Guanajuato México, colinda con otros acuíferos y para su estudio ha sido delimitado de acuerdo a la región que marca el mapa de la Figura 1. De acuerdo a investigaciones de campo, las características de las rocas en el subsuelo nos indican que el acuífero Silao-Romita puede considerarse como freático.

La Comisión Estatal del Agua de Guanajuato (CEAG) tiene un programa de monitoreo de los diferentes acuíferos del estado. En su base de datos hasta el año 2000 se reportan 1,508 pozos de bombeo. En cada pozo registra la cantidad de agua en metros cúbicos que se extrae por día. El acuífero cuenta con 34 pozos de observación, donde se mide el nivel freático periódicamente (ver Figura 2).



**Figura 2.** Círculos: ubicación de los pozos de extracción. Cruces: Ubicación de los pozos de observación



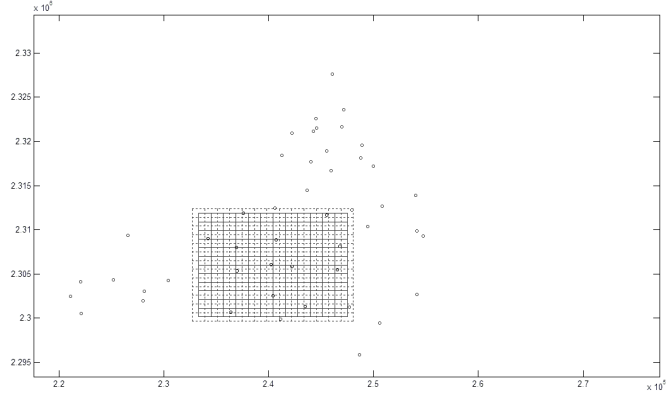
**Figura 3.** Región donde se llevo a cabo la identificación de parámetros. Número de pozos de bombeo en la región: 222

En Chávez *et al* [2] se realiza una modelación del acuífero Silao-Romita previo al 2000, la modelación es con diferencias finitas. La malla sobre el acuífero es un rectángulo de  $73,000 \times 57,500$  metros, dividido por celdas rectangulares de tamaño  $500 \times 500$  metros. La malla resultante (malla A) tiene un total de 116 nodos. Cada nodo posee un índice que señala el valor de la conductividad hidráulica en dirección  $x$ ,  $y$  y  $z$ , así como la recarga de agua por día. El acuífero está dividido en dos capas. Basta analizar la capa superior. Las mediciones de niveles piezométricos en los pozos de observación están realizadas con respecto de la capa superior, al igual que aquellas realizadas en los pozos de bombeo. Supondremos que el nivel inferior de la capa superior es igual en cada nodo de la malla, esto nos permitirá utilizar la ecuación (1) para el estudio del acuífero. Para aplicar el método propuesto en este trabajo, seleccionamos la subregión rectangular que se muestra en la Figura 3. Nos interesa una subregión representativa del acuífero con pocos datos. Esto último con el fin de evaluar el desempeño de las RBF.

Consideramos el método en varias etapas:

### Etapa 1. Interpolación de los datos

Disponemos de cuatro conjuntos de niveles piezométricos, medidos en los meses de Junio de 1998, Octubre de 1998, Junio de 1999 y Diciembre de 1999, Chávez *et al.* [2] pág. 153 y 154. En estado transiente, consideraremos los siguientes tiempos correspondientes respectivamente a cada uno de los meses mencionados:  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 123$ ,  $t_2 = 365$ ,  $t_3 = 549$  días. Los datos iniciales en  $t_0 = 0$  días, corresponden a las mediciones del mes de Junio de 1998. Para la interpolación de los datos el parámetro de forma es  $\epsilon = 0,25$  en la FBR multicuádrica  $\phi(r) = \sqrt{1 + \epsilon^2 r^2}$ . El valor elegido es el que arroja mejores resultados al aplicar el método en el acuífero



**Figura 4.** Líneas continuas: Malla B. Líneas punteadas: Malla C

sintético en Moreles *et al.* [6]. Aún para datos con ruido los resultados fueron satisfactorios.

Dividimos la subregión en una malla de  $13 \times 13$  nodos (malla B), sobre los cuales interpolaremos. Para conocer el término fuente en la malla B, debemos trazar una malla imaginaria (malla C) en donde los nodos de la malla B son los centros de las celdas de la malla C. Para determinar la fuente en el nodo  $(m, n)$  de la malla B, identificamos primero los nodos de la malla A contenidos en la celda  $(m, n)$  de la malla C. Luego sumamos todas las contribuciones (positivas y negativas) por cada nodo identificado.

### Etapa 2. Aproximación isotrópica

Del estudio geohidrológico del acuífero se observa que la anisotropía es muy débil. En consecuencia consideraremos una aproximación isotrópica de la conductividad y utilizar el modelo asociado a (1).

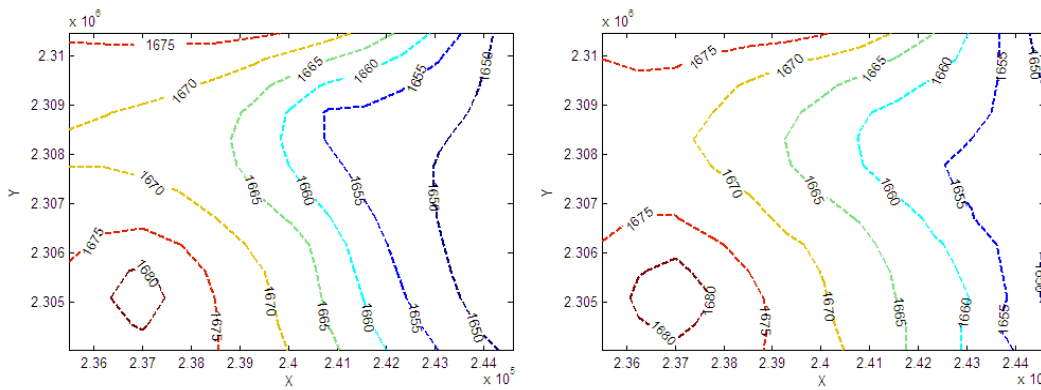
Proyectamos el vector  $\mathbf{K}\nabla h$  donde  $\mathbf{K} = [K_x, K_y, K_z]$ ,  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad y  $\nabla h = [\partial h/\partial x, \partial h/\partial y, 0]^T$ , sobre  $\nabla h$ , con lo que obtenemos

$$\pi_{\nabla h}(\mathbf{K}\nabla h) = K_{prom}\nabla h,$$

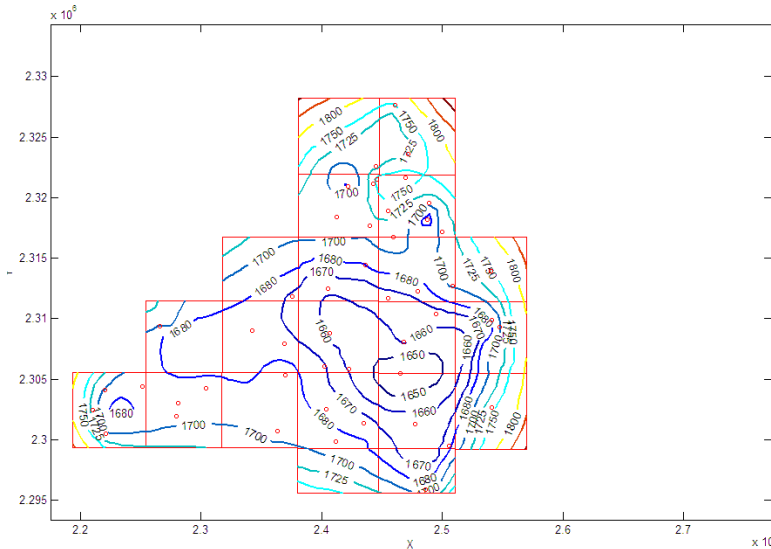
donde

$$K_{prom}(x, y) = \frac{K_x \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + K_y \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2},$$

es el promedio ponderado de las conductividades  $K_x$  y  $K_y$ . Entonces,  $K_{prom}$  dependerá solamente de las coordenadas espaciales si suponemos que  $h$  corresponde a un instante de tiempo fijo, por lo que  $h$  corresponderá al conjunto de condiciones iniciales.



**Figura 5.** Niveles piezométricos correspondientes al mes de Octubre de 2000. Lado izquierdo: Flujos interpolados. Lado derecho: Flujos identificados



**Figura 6.** Niveles piezométricos identificados, mes de Julio de 1998 (día 41)

**Etapa 3. Identificación de parámetros**

Para reducir la propagación de error al integrar en una trayectoria, del análisis del método DS se sugiere iniciar en el nodo de la malla *B* donde la norma del vector  $(a_1, a_2)$  es más pequeña. Como datos disponemos de la conductividad en las direcciones *x*, *y* y *z* en todos los nodos de la malla *A*. Para elegir la terna de valores  $(K_x, K_y, K_z)$  correspondiente al nodo inicial, escogemos al nodo de la malla *A* más cercano. Del paso anterior determinamos la aproximación isotrópica. Con el método DS identificamos la conductividad hidráulica así como los valores de la porosidad efectiva nodal.

**Etapa 4. Validación**

A manera de validación resolvemos el problema directo con los parámetros identificados para aproximar los niveles piezométricos del mes de Octubre de 2000, a tiempo  $t = 853$  días a partir de las condiciones iniciales.

El mes de Mayo de 2000 es el mes más cercano anterior al mes de Octubre de 2000, en que se hicieron mediciones en los pozos de observación. Disponemos además de mediciones en el mes de Octubre de 2000, por lo que podemos interpolar y comparar los niveles con aquellos obtenidos mediante la solución al problema directo. Para dar valores en la frontera adecuados, elegimos como condiciones iniciales las interpolaciones de los datos del mes de Mayo de 2000, a tiempo  $t = 699$  días a partir de las condiciones iniciales utilizadas en la identificación de parámetros. Los resultados del flujo en el acuífero se muestran en la Figura 5.

Podemos seleccionar diversas regiones rectangulares y hacer un mapa de flujos más detallado, o bien, realizar un mallado más fino en un rectángulo más grande. Para generar las líneas de flujo de la Figura 6 optamos por la primera opción, y mostramos las líneas de flujo

de los niveles piezométricos identificados en diversas regiones rectangulares a tiempo  $t = 41$  días. El propósito es reproducir el flujo del mes de Julio de 1998. Las condiciones iniciales corresponden a las interpolaciones de los datos del mes de Junio de 1998. Los resultados obtenidos están dentro del rango aceptable para la CEAG.

#### 4. Comentarios finales

Cuando se tienen datos de niveles piezométricos suficientes, el método DS ha probado ser muy eficiente para la identificación de parámetros fenomenológicos. En la práctica no necesariamente se tienen los datos necesarios para inversión con este método. Un propósito de este trabajo ha sido proponer una técnica de interpolación para corregir tal deficiencia, y explorar su aplicabilidad en un caso real. A pesar de las numerosas simplificaciones los flujos se reproducen en el rango permitido por las aplicaciones.

El problema de interpolación se puede abordar también con técnicas geoestadísticas. Consideremos un conjunto de  $n$  datos  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  como realizaciones de las variables aleatorias  $Z(x_i)$ . El problema es estimar el valor de una variable aleatoria en el punto  $x_0$ ,  $Z(x_0)$ : El método preferido es el Kriging, ver Chilès [3]. Al precisar la hipótesis geoestadística sobre el campo aleatorio y sobre su media, se determina el mejor estimador lineal insesgado. Es inmediato que el estimador es a su vez un interpolador de los datos  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . La elección de interpolación con funciones de base radial no es accidental. Bajo ciertas circunstancias interpolación con funciones de base radial es equivalente a estimación por el método Kriging en Geoestadística, ver Kent & Mardia [4]. En Mejía [5] se explora esta relación de manera más detallada. En particular se considera el problema de estimación de parámetros con el método DS, con datos interpolados con funciones de base radial y kriging. En el caso del acuífero sintético de Moreles *et al.* [6] los resultados son idénticos. La misma conclusión que Borga & Vizzaccaro [1]. Al considerar el acuífero Silao-Romita la aplicación del kriging no fue satisfactoria. Se precisa un análisis geoestadístico más complejo. La aplicación de RBF fue directa, por lo cual es la propuesta de este trabajo.

Finalmente, la eficacia de la función multicuadrática se ha mostrado exhaustivamente en aplicaciones. De nuestro conocimiento, una explicación fundamentada no existe en la literatura. Tal explicación sería de interés en varias disciplinas.

#### Referencias

1. Borga M., Vizzaccaro A. (1997) On the interpolation of hydrologic variables: formal equivalence of multiquadratic surface fitting and kriging. *J. of Hydrology*. 195:160-171
2. Chávez A., Pináles A., Ducoing R., Cruz J.L. 2006 *Modelación Aplicada a Sistemas Acuiferos: Enfoques y Desarrollos en México*. Comisión Estatal del Agua de Guanajuato (CEAG)
3. Chilès J.P., Delfiner P. 1999. *Geostatistics, Modelling Partial Uncertainty*. Wiley Series in Probability and Statistics
4. Kent J.T., Mardia K.V. 1994 *The Link Between Kriging and Thin-plate Splines* Probability, Statics and Optimisation pp 326-339
5. Mejía Díaz F. (2009) Interpolación con funciones de base radial y el método del sistema diferencial con aplicación en la identificación de parámetros en acuíferos. Tesis de Maestría. CIMAT
6. Moreles M.A., Vázquez R., Avila F. (2005) The differential system method for parameter identification; unconfined aquifer case. *Computacional Geosciences* 8(3):235-253
7. Parravicini G., Giudici M., Morossi G. Ponzini G. (1995) Minimal a priori assignment in a direct method for determining phenomenological coefficients uniquely. *Inverse Problems* 11:611-629
8. Vázquez R., Giudici M., Ponzini G., Parravicini G. (1997) The differential system method for the identification of transmissivity and storativity. *Transport in Porous Media*. 26:339-371
9. Wendland H. 2005 *Scattered data approximation*. Cambridge University Press