

Aproximación del proceso de falla en sólidos con elementos finitos mixtos usando modelos de daño continuos

Gelacio Juárez · A. Gustavo Ayala

Recibido: Marzo 2010, Aceptado: Abril 2010

©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2010

Resumen Este artículo presenta formulaciones mixtas no lineales para simular el proceso de falla de materiales en sólidos mediante sus aproximaciones con elementos finitos. Las formulaciones presentadas son las correspondientes al trabajo virtual producido por los desplazamientos y esfuerzos virtuales y al trabajo virtual producido por los desplazamientos y deformaciones virtuales. Ambas formulaciones se derivan del trabajo virtual que incluye cuatro variables independientes. El comportamiento de los materiales se determina por un modelo de daño isotrópico continuo, el cual requiere de dos variables internas en cada punto de integración. En la implementación numérica, la aproximación desplazamiento-esfuerzo presenta problemas numéricos cuando el comportamiento del material se aproxima al daño total, por lo que solamente la formulación desplazamiento-deformación fue implementada. Se discuten las ventajas de la aproximación desplazamiento-deformación sobre una formulación típica de desplazamientos para simular el proceso de falla de materiales con modelos de daño como localización de deformaciones. Para mostrar la validez e ilustrar la efectividad de la formulación desplazamiento-deformación, se presentan los resultados de algunos ejemplos numéricos representativos.

Gelacio Juárez

Departamento de Materiales

Universidad Autónoma Metropolitana

México D.F. 02200, México

e-mail: gjl@correo.azc.uam.mx

A. Gustavo Ayala

Coordinación de Mecánica Aplicada

Instituto de Ingeniería

Universidad Nacional Autónoma de México

México D.F. 04510, México

e-mail: gayalam@iingen.unam.mx

APPROXIMATION OF THE MATERIAL FAILURE PROCESS IN SOLIDS WITH MIXED FINITE ELEMENTS USING CONTINUUM DAMAGE MODELS

Summary This paper presents nonlinear mixed formulations to simulate the material failure process in solids by its finite element approximation. The formulations presented are the corresponding virtual work by the virtual stresses and displacements and the virtual work by displacements and strains. Both formulations presented are derived from the principle of virtual work with four independent variables. The behaviour of the material is governed by an isotropic continuum damage model equipped with two internal variables at each integration point. In the numerical implementation, the displacement-stress formulation presents numerical problems when the behaviour of the material approaches complete damage, thus only the displacement-strain formulation was implemented. The advantage of the strain-displacement over a typical displacement formulation to simulate the material failure process with damage models as strain concentrations is discussed. To show the validity and illustrate the effectiveness of the displacement-strain formulation, results from some representative numerical examples are presented and discussed within the framework of continuum approximations.

1. Introducción

El proceso de falla en materiales en mecánica de sólidos se ha estudiado mediante diferentes formulaciones como los de: mecánica de fractura, agrietamiento distribuido [11], [12], grieta discreta [3], mecánica del daño

[6], [8], y localización de deformaciones [1], [4], [9], [10]. Los modelos continuos como los de plasticidad, agrietamiento distribuido y mecánica del daño distribuyen las deformaciones inelásticas sobre un volumen dado, mientras que los modelos de grieta discreta y localización de deformaciones concentran los efectos inelásticos en una discontinuidad, representada por una línea en problemas 2D o una superficie en 3D. Estas formulaciones tienen sus respectivas ventajas e inconvenientes, algunas de ellas atribuidas a las características del material y al modelo constitutivo empleado.

Los modelos constitutivos continuos, esfuerzo-deformación, empleados para simular el proceso de falla en material son dependientes de la malla, puesto que el tamaño y orientación puede impactar los resultados. El efecto de estas inconveniencias puede reducirse utilizando un parámetro de espesor de grieta, h , que depende de la configuración del elemento finito (EF) [12]; sin embargo, puesto que las trayectorias de las bandas de agrietamiento están relacionadas con el tamaño de la malla, éstas generalmente se mejoran usando mallas finas. Para superar estos problemas, este artículo presenta formulaciones alternativas para simular el proceso de falla en materiales dentro del contexto de la mecánica de daño continuo. Se desarrollan dos formulaciones mixtas correspondientes al trabajo virtual producido por los desplazamientos y esfuerzos (DE) virtuales y al producido por los desplazamientos y deformaciones (DD) virtuales. En este artículo sólo la formulación DD se aproximó e implementó con el Método de los Elementos Finitos (MEF) debido a las dificultades encontradas en la implementación numéricas de la formulación DE.

2. Formulación energética

2.1. Formulación general

Considere un sólido, definido como un dominio en 3D con puntos materiales \mathbf{x} , y frontera Γ (Figura 1). Las condiciones de frontera son las tracciones prescritas, \mathbf{t}^* , en la superficie Γ_σ y los desplazamientos prescritos, \mathbf{u}^* , en la superficie Γ_u , tal que $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma$ y $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset$. Se considera que la frontera Γ , del continuo está constituida por las superficies Γ_u y Γ_σ ; tal que Γ_u corresponde a la región de los desplazamientos prescritos y Γ_σ al resto de la frontera, que incluye la porción donde las tracciones de superficie están prescritas. En las secciones sucesivas las variables X^Y representan que el campos X es dependiente del campo Y .

El trabajo virtual producido por cuatro campos independientes de desplazamientos \mathbf{u} , deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$, esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ y tracciones \mathbf{t} , para el sólido descrito ante-

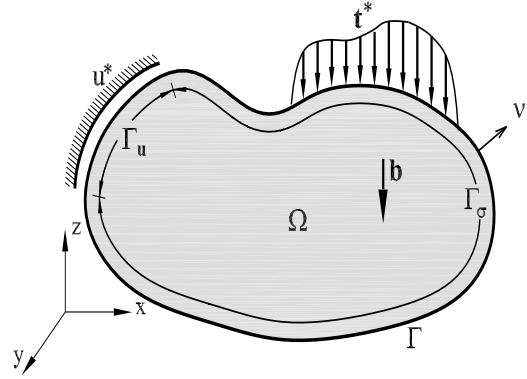


Figura 1. Dominio Ω , con condiciones de frontera en Γ

riormente se define como:

$$\int_{\Omega} [(\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) : \delta\boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon - \boldsymbol{\sigma}) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}^u - \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u}] d\Omega \quad (1)$$

$$- \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} [(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \delta\mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u}] d\Gamma = 0$$

en el que las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}^u$, y los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ se definen respectivamente como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^u = \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3)$$

donde $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})$ es la energía libre.

Si la energía libre complementaria $\Psi(\boldsymbol{\sigma})$ se define por la transformación de Legendre como:

$$\Psi(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} - \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4)$$

Se demuestra que las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma$, se definen como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5)$$

2.2. Formulaciones derivadas

Sustituyendo la densidad de energía de deformación complementaria de la ec. (4) y las tracciones $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}$, en la ec. (1), se reduce al trabajo virtual DE, definido como:

$$\int_{\Omega} [(\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma) : \delta\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}^u - \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u}] d\Omega \quad (6)$$

$$- \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma_u} [(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta\mathbf{u}] d\Gamma = 0$$

Si se acepta que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$, y que, $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu}$, en la ec. (1), se reduce al trabajo virtual DD, definido como:

$$\int_{\Omega} \left[(\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon^u} - \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon) : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^u - \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} [(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon + \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \delta \mathbf{u}] d\Gamma = 0 \quad (7)$$

Los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon^u}$ y $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ se definen como:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon^u} = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^u)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^u} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (9)$$

3. Aproximación con el MEF

3.1. Matrices

La aproximación mediante el MEF de los campos independientes en el trabajo virtual DE, definido en la ec. (6), son:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Gamma}_\sigma \boldsymbol{\gamma} \quad (11)$$

y para los campos independientes en el trabajo virtual DD, definido en la ec. (7), son la ec. (10) y

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon = \boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon \mathbf{e} \quad (12)$$

donde \mathbf{N} contiene las funciones de forma de los desplazamientos \mathbf{d} nodales ; $\boldsymbol{\Gamma}_\sigma$ las funciones de forma de los esfuerzos $\boldsymbol{\gamma}$ nodales ; y $\boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon$ las funciones de forma de las deformaciones \mathbf{e} nodales.

Los campos dependientes en la aproximación de DE se determinan respectivamente por las ecs. (2) y (5), como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^d = \nabla^S \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\gamma = \mathbf{D} : \boldsymbol{\gamma} \quad (14)$$

y en la aproximación DD de las ecs. (8) y (9) como:

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon \mathbf{e}) \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon^u} = \boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon^u}(\boldsymbol{\varepsilon}^u) = \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{B} \mathbf{d}) \quad (16)$$

donde \mathbf{B} es la matriz de transformación de desplazamientos estándar, que contiene las derivadas de las funciones de forma, $\partial(\mathbf{N} \mathbf{d}) = \mathbf{B} \mathbf{d}$.

Sustituyendo las ecs. (10), (11), (13) y (14) en la ec. (6) y asumiendo que los desplazamientos, $u^* = u$, en la frontera Γ_u , se tiene:

$$\int_{\Omega} \left[\boldsymbol{\Gamma}_\sigma^T (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{B} \mathbf{d}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{D} \boldsymbol{\Gamma}_\sigma \boldsymbol{\gamma})) \delta \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\Gamma}_\sigma \boldsymbol{\gamma}) \delta \mathbf{d} - \mathbf{N}^T \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{d} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{d} d\Gamma = 0 \quad (17)$$

Sustituyendo las ecs. (10) a (13), (15) y (16) en la ec. (7) y realizando la mismas consideraciones de desplazamientos en las frontera Γ_u , se tiene:

$$\int_{\Omega} \left[\boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon^T (\boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{B} \mathbf{d}) - \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{C} \boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon \mathbf{e})) \delta \mathbf{e} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{C} \boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon \mathbf{e}) \delta \mathbf{d} - \mathbf{N}^T \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{d} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{d} d\Gamma = 0 \quad (18)$$

Del trabajo virtual DE, dado en la ec. (17), se tiene el siguiente sistema:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\Gamma}_\sigma^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{B} \mathbf{d}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\Gamma}_\sigma^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{D} \boldsymbol{\Gamma}_\sigma \boldsymbol{\gamma}) d\Omega = 0 \quad (19)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\Gamma}_\sigma \boldsymbol{\gamma}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t}^* d\Gamma$$

y para el trabajo virtual DD de la ec. (18), se obtiene:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon^T \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{B} \mathbf{d}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon^T \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{C} \boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon \mathbf{e}) d\Omega = \mathbf{0} \quad (20)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{C} \boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon \mathbf{e}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t}^* d\Gamma$$

3.2. Linealización

La linealización de las ecuaciones constitutivas $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\gamma})$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^\gamma(\boldsymbol{\gamma})$ en la ec. (19) mediante su aproximación en series de Taylor es:

$$\begin{bmatrix} - \int_{\Omega} \boldsymbol{\Gamma}_\sigma^T \mathbf{D}^T \boldsymbol{\Gamma}_\sigma d\Omega & \int_{\Omega} \boldsymbol{\Gamma}_\sigma^T \mathbf{B} d\Omega \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Gamma}_\sigma d\Omega & 0 \end{bmatrix}^{(n,0)} \begin{Bmatrix} \Delta \boldsymbol{\gamma} \\ \Delta \mathbf{d} \end{Bmatrix}^{(n,1)} = \begin{Bmatrix} R_e \\ R_f \end{Bmatrix}^{(n,0)} \quad (21)$$

donde el tensor constitutivo de flexibilidad tangente \mathbf{D}^T , corresponde a la razón entre $\boldsymbol{\varepsilon}^\gamma$ y $\boldsymbol{\sigma}$. Los residuos R_e y R_f se definen como:

$$R_e = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Gamma}_\sigma^T \boldsymbol{\varepsilon}^\gamma(\boldsymbol{\gamma}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\Gamma}_\sigma^T \boldsymbol{\varepsilon}^d(\nabla \mathbf{d}) d\Omega \quad (22)$$

$$R_f = F_{ext} - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\gamma}) d\Omega$$

donde el residuo R_f representa equilibrio entre las fuerzas externas e internas, calculadas de los esfuerzos independientes, y R_e representa compatibilidad cinemática entre deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}^\gamma$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^d$.

La linealización de las ecuaciones constitutivas $\boldsymbol{\sigma}^e = \boldsymbol{\sigma}^e(\boldsymbol{\varepsilon})$ y $\boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{B}d)$ en la ec. (20) es:

$$\begin{bmatrix} -\int_{\Omega} \boldsymbol{\Gamma}_{\varepsilon}^T \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\Gamma}_{\varepsilon} d\Omega & \int_{\Omega} \boldsymbol{\Gamma}_{\varepsilon}^T \mathbf{C}_d^T \mathbf{B} d\Omega \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_e^T \boldsymbol{\Gamma}_{\varepsilon} d\Omega & 0 \end{bmatrix}^{(n,0)} \begin{Bmatrix} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \Delta d \end{Bmatrix}^{(n,1)} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}^{(n,0)} \quad (23)$$

donde el tensor constitutivo tangente, \mathbf{C}_e^T , corresponde a la razón entre $\boldsymbol{\sigma}^e$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, mientras que \mathbf{C}_d^T a la razón entre $\boldsymbol{\sigma}^d$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^d$. Los residuos R_1 y R_2 se definen como:

$$\begin{aligned} R_1 &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\Gamma}_{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^e(\boldsymbol{\Gamma}_{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\Gamma}_{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{B}d) d\Omega \\ R_2 &= F_{ext} - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^e(\boldsymbol{\Gamma}_{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega \end{aligned} \quad (24)$$

4. Modelo de daño continuo

La formulación presentada en este artículo considera materiales que presentan ablandamiento por deformación, como el mostrado en la Figura 2, con un modelo de daño como el de Oliver *et al.* [8] definido como:

$$\text{Energía libre} \quad \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, r) = (1 - \tilde{d}(r)) \Psi_0$$

$$\text{Ecuación constitutiva} \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - \tilde{d}) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\text{Variable de daño} \quad \tilde{d}(r) = 1 - \frac{q}{r}; \quad q \in [r_0, 0] \quad \tilde{d} \in [0, 1]$$

$$\text{Ley de evolución} \quad \dot{r} = \lambda \begin{cases} r \in [r_0, \infty) \\ r_0 = r|_{t=0} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}} \end{cases}$$

Criterio de daño

$$\begin{aligned} f(\tau_{\sigma}, q) &= \tau_{\sigma} - q = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}} - q; \quad \begin{cases} q \in [0, r_0] \\ q|_{t=0} = r_0 \end{cases} \\ g(\tau_{\varepsilon}, r) &= \tau_{\varepsilon} - r = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} - r; \end{aligned}$$

Regla de endurecimiento

$$\dot{q} = H^{\tilde{d}}(r) \dot{r}; \quad H^{\tilde{d}}(r) = q'(r) \leq 0$$

Condiciones de carga-descarga

$$f < 0; \lambda \geq 0; \lambda f = 0; \lambda \dot{f} = 0 \quad (25)$$

donde la variable de daño \tilde{d} se define en términos de la variable de endurecimiento/ablandamiento q , la cual es dependiente del parámetro de endurecimiento/ablandamiento H . El multiplicador de daño λ determina las condiciones de carga-descarga, la función $f(\tau_{\sigma}, q)$, limita el dominio elástico que define la superficie de daño en el espacio de esfuerzos. El valor r_0 es el valor umbral que limita el dominio elástico inicial.

Del modelo definido en la ec. (25) es posible obtener la ecuación constitutiva tangente en términos incrementales para casos de carga como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (26)$$

donde el operador constitutivo tangente \mathbf{C}^T , para el rango de carga no lineal se define como

$$\mathbf{C}^T = (1 - d) \mathbf{C} - \frac{q - Hr}{r^3} (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}) \quad (27)$$

y para el caso de carga elástica y descarga ($\dot{d} = 0$):

$$\mathbf{C}^T = (1 - \tilde{d}) \mathbf{C} \quad (28)$$

En la ec. (26), las deformaciones $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pueden tomar el valor de $\boldsymbol{\varepsilon}^d$ o $\boldsymbol{\varepsilon}^e$; consecuentemente, los esfuerzos calculados serán respectivamente $\boldsymbol{\sigma}^d$ o $\boldsymbol{\sigma}^e$.

La implementación numérica de la aproximación DD involucra dos valores de deformación, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^d$, en cada punto de integración, como se muestra en la Figura 3, por consiguiente, es necesario la evaluación de dos estados de esfuerzo, $\boldsymbol{\sigma}^{e(n,t)}$ y $\boldsymbol{\sigma}^{d(n,t)}$, para calcular los dos residuos de la ec. (24), y el cálculo de los dos tensores constitutivos tangentes, \mathbf{C}_e^T y \mathbf{C}_d^T , de la matriz de coeficientes de la ec. (23). Esta matriz mixta puede ser no simétrica, puesto que al tener dos estados de deformación en cada punto de integración, los tensores constitutivos tangentes pueden tener valores diferentes.

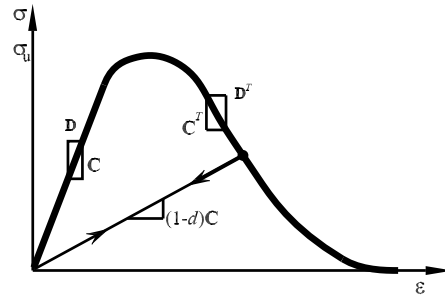


Figura 2. Comportamiento del material con ablandamiento

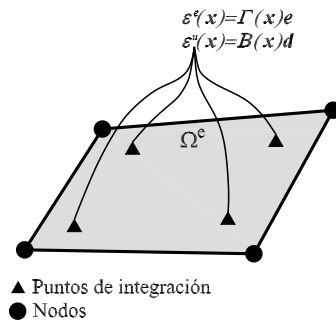


Figura 3. Puntos de integración

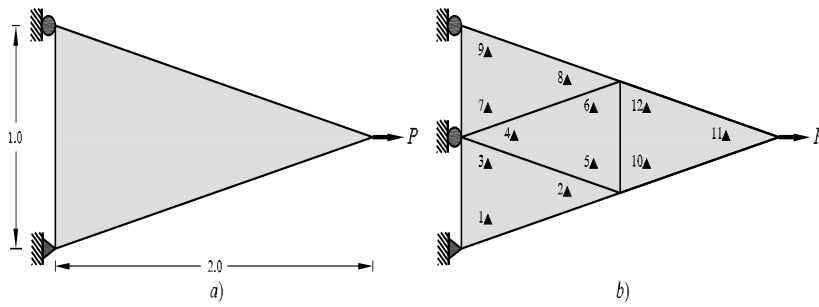


Figura 4. Cuña: a) geometría y b) discretización

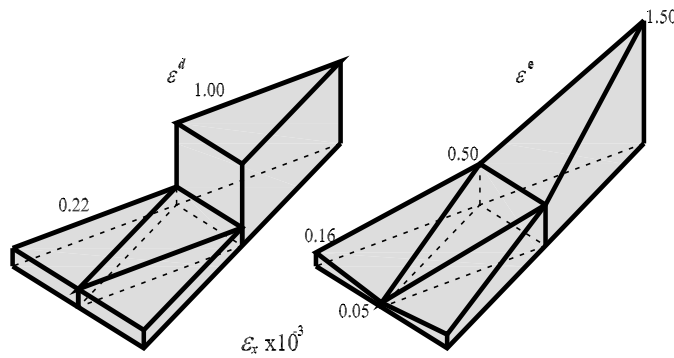


Figura 5. Deformaciones: a) ϵ^d y b) ϵ^e

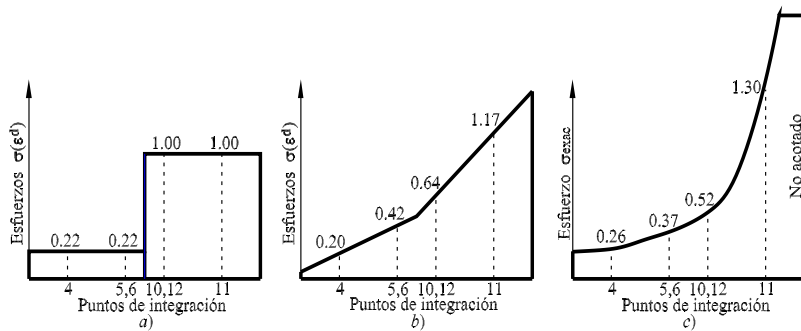


Figura 6. Esfuerzos: a) σ^d , b) σ^e y c) exactos

El inconveniente principal en la formulación DE es la inestabilidad numérica, presentada cuando el material se daña completamente, la variable de daño $d = 1$, consecuentemente el tensor tangente de flexibilidad, D^T , tiende a ser no acotado. Por lo anterior en este trabajo se implementó la formulación DD.

5. Validación

Para confirmar la superioridad de la formulación DD sobre una de desplazamientos, considere la cuña mostrada en la Figura 4. Las propiedades mecánicas del material son: modulo elástico $E=1000Pa$, relación de Poisson $\nu = 0,0$, esfuerzo a tensión máximo $\sigma_u = 1,0 Pa$.

Cuando se aplica una carga $P = 0,20833 N$ en la parte derecha de la cuña, las deformaciones ϵ^d , mostradas en la Figura 5a, son constantes en cada elemento, mientras que las deformaciones, ϵ^e , varían linealmente dentro del elemento en función del tipo de interpolación. De acuerdo con las deformaciones, en el punto de integración 11 el esfuerzo es $\sigma^d=1.00Pa$, menor que el esfuerzo $\sigma^e = 1,17Pa$, y la solución exacta es $\sigma=1.30Pa$, Figura 6. El daño inicia, al evaluarse los esfuerzos σ^e , en el punto de integración 11. Este ejemplo muestra la mejoría de la formulación presentada para simular el proceso de falla del material en sólidos, porque en este tipo de problemas se presentan altos gradientes de desplazamiento que se capturan mejor con esta formulación.

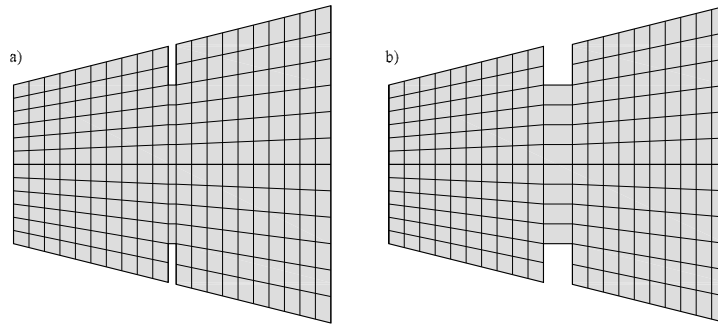


Figura 7. Discretización del espécimen: a) sin daño y b) dañada

6. Ejemplos numéricos

Para demostrar la capacidad de la aproximación DD en esta sección se presentan algunos ejemplos numéricos. El modelo de daño continuo isotrópico definido en la ec. (25) se utilizó para describir el comportamiento del material. Estos ejemplos satisfacen las condiciones necesarias y suficientes de convergencia de Brezzi y Babuska, como se hacen en [5], mediante la prueba del parche para formulaciones mixtas, desarrollada por [13].

6.1. Viga de sección variable

Una viga de sección variable con espesor de 50 mm, mostrada en la Figura 8, presenta dos muescas al centro. Las propiedades mecánicas del material son: módulo elástico $E = 16900 \text{ N/mm}^2$, relación de Poisson $\nu = 0,2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_u = 2,4 \text{ N/mm}^2$, energía de fractura, $G_f = 0,3 \text{ N/mm}^2$. Se aplican desplazamientos sobre el borde derecho del espécimen; el daño inicia en los elementos ubicados en la vecindad de las muescas.

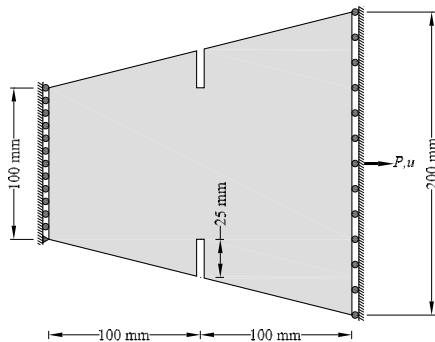


Figura 8. Geometría de un espécimen con una muesca

La Figura 7 muestra las malla empleadas en la discretización del espécimen. Las curvas, reacción P contra el desplazamiento u , en la Figura 9 muestran que formulación DD proporciona una buena aproximación como los obtenidos por [2], quienes utilizan el modelo de discontinuidades interiores.

6.2. Viga con una muesca

En este ejemplo se estudia una viga a flexión con la muesca al centro mostrada en la Figura 10, la cual fue probada experimentalmente por [7]. Las propiedades mecánicas del material son: módulo elástico $E = 20,000 \text{ MPa}$, relación de Poisson $\nu = 0,2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_u = 2,4 \text{ MPa}$, energía de fractura $G_f = 113 \text{ J/m}^2$. La carga se induce con desplazamientos aplicados gradualmente al centro de la viga. La falla del material inicia en los elementos vecinos a la muesca, propagándose hasta la parte superior de la viga como se muestra en la Figura 11.

La Figura 12 muestra la curva carga, P , versus desplazamiento en el centro de la viga durante su proceso de falla.

7. Conclusiones

La formulación DD presentada en este trabajo puede ser no simétrica cuando se tiene un comportamiento no lineal del material con ablandamiento, puesto que los tensores constitutivos tangentes, dependientes respectivamente de los desplazamientos y de las deformaciones, tiene diferentes valores.

En la implementación de la formulación desarrollada, particularmente en la evaluación del estado de esfuerzos con el modelo de daño constitutivo, es necesario utilizar dos variables internas en cada punto de integración; una variable para las deformaciones dependientes

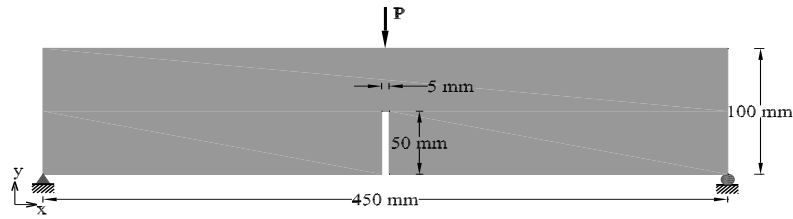


Figura 10. Geometría de una viga con muesca

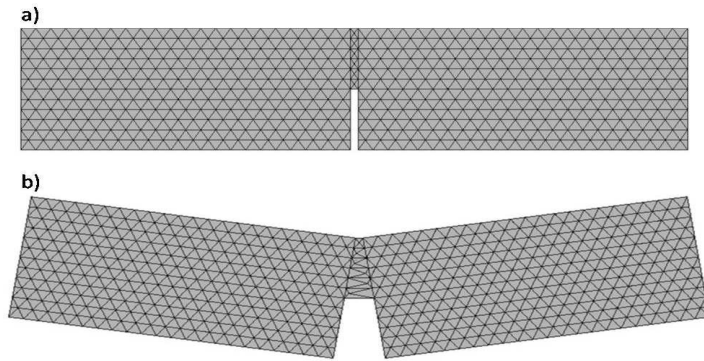


Figura 11. Viga: a) sin daño y b) dañada

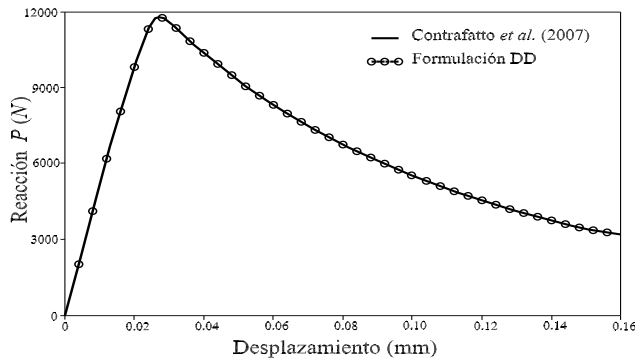


Figura 9. Diagrama reacción P vs. desplazamiento u .

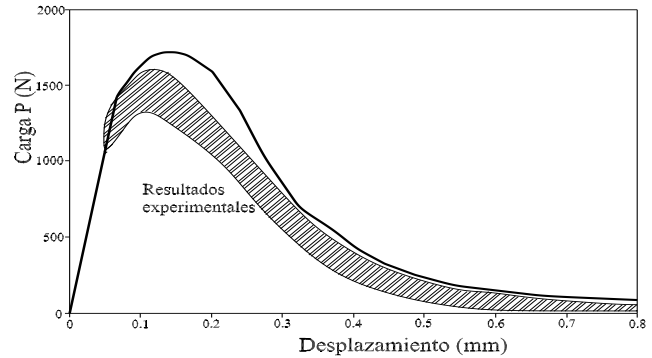


Figura 12. Diagrama carga contra desplazamiento

de los desplazamientos y la otra para las deformaciones independientes.

La formulación DD desarrollada no presenta problemas de atoramiento de esfuerzos y tiene una mejor propagación del daño debido a la distribución de las deformaciones independientes.

Referencias

1. Armero F., Garikipati K. (1996) An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids. *Int. J. Solids Struct.* 33:2863-2885

2. Contrafatto L., Cuomo M., Micciché M. L. (2007) A intra-element discontinuities approach for modelling cohesive fracture processes. En *Proceedings XVIII AIMETA*. National Congress. 11-14 September 2007. Brescia. Italia. pp. 11-14.
3. Hillerborg A., Modeer M., Petersson P.E. (1976) Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem. Concr. Res.* 6:773-782
4. Juárez G., Ayala A.G. (2009) Variational Formulation of the Material Failure Process in Solids by Embedded Discontinuities Model. *Numer. Meth. Part Differ. Equ.* 25:26-62
5. Juárez G., Ayala A.G. (2009) Nonlinear Mixed Finite Element Formulations to Simulate the Material Failure Process in Solids. Enviado para su revisión a *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*
6. Kachanov L.M. (1958) Time of rupture process under creep conditions. *Inzvestia Akademii Nauk. Otd Tech Nauk.* 8:26-31

7. Kormeling H.A. (1983) Reinhardt H.W. Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy modified concrete. Stevin Laboratory. Delft University of Technology. Report No. 5-83-18
8. Oliver J., Cervera M., Oller S., Lubliner J. (1990) Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. In *Proc. SCI-C Comput Aided Anal and Des of Concrete Struc.* N. Bicanic *et al.* (Eds.) pp. 945-957
9. Oliver J. (1996) Modelling strong discontinuities in solid mechanics via deformation softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals. *Numerical simulation, Int. J. Numer. Methods Engrg.* 39:3575-3600. Part 2. *Numerical simulation, Int. J. Numer. Methods Engrg.* 39:3601-3623
10. Simo J.C., Oliver J., Armero F. (1993) An analysis of strong discontinuities induced by deformation-softening in rate-independent inelastic solids. *Computat. Mech.*, Vol. 12:277-296
11. Rashid Y.R. (1968) Analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nucl. Eng. Des.* 7(4):334-344
12. Rots J.G. (1988) Computational modelling of concrete fracture. PhD dissertation. Delft University of Technology
13. Zienkiewicz O.C, Qu S., Taylor R.L., Nakazawa S. (1986) The Patch Test for mixed formulaci3n, *Int. J. Num. Methods in Engrg.* 23:1873-83