

# Solución de ecuaciones diferenciales elípticas en regiones planas irregulares usando mallas convexas generadas por métodos variacionales empleando elementos finitos

F. Domínguez-M. · M. Equihua · S. Mendoza · J. Tinoco

Recibido: Marzo 2010, Aceptado: Abril 2010

©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2010

**Resumen** Recientemente, con el objeto de ser usadas para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales parciales en dominios de forma irregular empleando diferencias finitas, se han propuesto varios métodos variacionales eficientes y robustos para generar mallas estructuradas, convexas y suaves que funcionan bien en dichas regiones [3-9,11-14]. Para esas mallas, se han desarrollado también algunos esquemas de los cuales destaca la facilidad computacional que implica el usar una estructura lógicamente rectangular [1,2,15].

Este hecho los convierte en una alternativa de interés a los métodos de elementos finitos que emplean mallas no estructuradas, pues estas últimas tienen el inconveniente de que su programación requiere con frecuencia de una estructura de datos compleja.

Sin embargo, hay que reconocer que, dado que la triangulación de Delaunay se conoce de tiempo atrás, los métodos de elemento finito tienen la ventaja de que se ha estudiado el problema en muchos contextos y existe abundante literatura que describe como ensamblar eficientemente sistemas para aproximar la solución de una gran variedad de ecuaciones. Así, surge de manera natural la pregunta de qué tan competitivos son los elementos y/o diferencias finitos en las mallas estructuradas generadas variacionalmente en regiones muy irregulares -y que con frecuencia tienen elementos elongados- para obtener una solución numérica en forma computacionalmente sencilla empleando mallas estructuradas y al mismo tiempo con precisión razonable empleando elementos finitos. En este trabajo mostramos como lo-

gar este objetivo, y una serie de experimentos numéricos empleando mallas en regiones muy irregulares muestran la eficiencia del enfoque propuesto.

## FINITE ELEMENTS SOLUTION OF ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS IN IRREGULAR PLANE REGIONS USING STRUCTURED CONVEX GRIDS GENERATED BY VARIATIONAL METHODS

**Summary** Recently, in order to approximate the solution of a partial differential equation over an irregular planar domains, several efficient and robust variational methods designed to generate smooth and convex grids on such regions have been proposed [3-9,11-14]. For those grids, several schemes have also been designed, and for them it is quite clear how effortless the use of the grid logical rectangular data structure can be [1,2,15].

This fact makes these schemes attractive competitors to the finite element methods, which use unstructured grids and, in consequence, non trivial data structures in order to save the grid information.

Nevertheless, one must acknowledge that, since triangulations have been known for a while, finite element methods have been thoroughly studied, and there is a lot of research on how to assemble the systems required to solve a large class of equations. Thus, a question that arises in a natural way is how competitive are FE/FD methods, when applied to the structured convex grids generated for irregular regions -which often have elongated elements-, in order to produce the numerical solution in an easy computational way using structured grids and, at the same time, accurate enough by using finite elements. In this paper we show how to accomplish this goal, and a series of numerical examples at

the end provide a good example of the validity of the approach.

## 1. Introducción

Una forma robusta de generar mallas estructuradas suaves y convexas en regiones irregulares del plano consiste en minimizar un funcional apropiado: Esta es la idea principal de la generación variacional de mallas la cual ha sido estudiada con detalle en varios trabajos, y podemos afirmar que actualmente existe una teoría bastante consolidada que describe diversos funcionales que pueden emplearse para mallar regiones muy irregulares [3,9,11-13]. También, como se describe en [6] y [3,5,7,8], se cuenta con una interpretación de la geometría asociada a ellos que permite una comprensión profunda de la dinámica de su optimización; algunos ejemplos muy importantes se estudian en [3], [4] y [6].

En las siguientes secciones describiremos brevemente la notación del problema de generación variacional de mallas que emplearemos más adelante.

## 2. Generación variacional de mallas

Las regiones para el problema de nuestro interés son dominios  $\Omega$  simplemente conexos del plano, cuyas fronteras son curvas poligonales de Jordan orientadas positivamente. Para tales regiones, el problema de generación de mallas puede ser descrito como el de construir funciones continuas  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  que definen mapeos uno a uno

$$\mathbf{x} : R \mapsto \Omega \text{ con } \mathbf{x} = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

del cuadrado unitario

$$R = \{(\xi, \eta) | 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$$

sobre la región física  $\Omega$  y que satisfacen  $\mathbf{x}(\partial R) = \partial \Omega$ .

Denotamos por  $m$  y  $n$  los números “vertical” y “horizontal” de puntos en los “lados” de la región, y por  $\Omega$  la región plana definida por la curva poligonal de Jordan  $\gamma$  orientada positivamente de vértices  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{2(m+n-2)}\}$ .

Un conjunto

$$G = \{P_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

de puntos del plano con posiciones de la frontera fijadas dada por  $V$  es una malla estructurada <sup>1</sup> para  $\Omega$ , de orden  $m \times n$ .

Decimos que  $G$  es convexa si y sólo si cada uno de los  $(m-1)(n-1)$  cuadriláteros (o celdas)  $c_{i,j}$  de vértices  $\{P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}\}$ ,  $1 \leq i < m$ ,  $1 \leq j < n$ , es convexo y no degenerado.

Sea  $c$  un cuadrilátero orientado de vértices  $\{PQRS\}$ . Éstos definen cuatro triángulos orientados:  $\Delta^{(1)} = \Delta(SPQ)$ ,  $\Delta^{(2)} = \Delta(PQR)$ ,  $\Delta^{(3)} = \Delta(QRS)$  y  $\Delta^{(4)} = \Delta(RSP)$  (Figura 1). Consideraremos en lo sucesivo que cada celda  $c_{i,j}$  de la malla está dividida en cuatro triángulos  $\{\Delta_{i,j}^{(k)}, k = 1, \dots, 4\}$  en esta forma.

Observemos que la orientación de la frontera induce de manera natural la de los triángulos y sus celdas y por ende las áreas tienen un signo; ésta es la clave para determinar si una malla es convexa.

Existen dos cantidades básicas asociadas a los triángulos de las celdas:  $\lambda$  y  $\alpha$ . Para el triángulo orientado de vértices  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$  se definen como

$$\lambda(\Delta(A, B, C)) = \|A - B\|^2 + \|C - B\|^2;$$

$\overline{AB}$  y  $\overline{CB}$  son lados de la celda y

$$\begin{aligned} \alpha(\Delta(A, B, C)) &= (B - A)^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (B - C) \\ &= 2 \text{área}(\Delta(A, B, C)) \end{aligned}$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma Euclideana.

Es importante observar que  $G$  es convexa si y sólo si

$$\min\{\alpha(\Delta_q) | q = 1, \dots, N\} > 0,$$

donde  $N = 4(m-1)(n-1)$  es el número total de triángulos en  $G$ , considerando los cuatro triángulos en cada celda como se describió antes.

Los funcionales empleados para generar las mallas utilizadas en los experimentos numéricos fueron suavidad bilateral

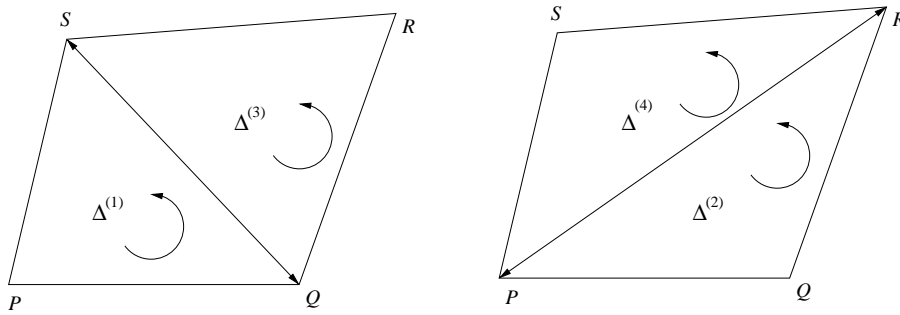
$$F_{SB}(G) = \frac{1}{2N} \sum_{q=1}^N \left[ \frac{\lambda_q - 2\alpha_q}{k_1 + \alpha_q} + \frac{\lambda_q - 2\alpha_q}{k_2 + \alpha_q} \right]$$

y área bilateral-longitud

$$F_{ABL}(G) = \sum_{q=1}^N \left[ \frac{1}{k_1 + \alpha_q} + \frac{1}{k_2 + \alpha_q} + \lambda_q \right]$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son parámetros adaptivos que pueden ser actualizados de tal forma que en un número finito de actualizaciones  $F_{SB}$  y  $F_{ABL}$  alcanzan su mínimo en el conjunto de mallas convexas para  $\Omega$ , si este último es no vacío. Las mallas convexas generadas minimizando estos funcionales así como el algoritmo para la actualización de  $k_1$  y  $k_2$  han sido reportados en [7,8].

<sup>1</sup> Conformada por cuadriláteros.



**Figura 1.** Los cuatro triángulos orientados definidos por los vértices de una celda

### 3. Solución empleando elementos finitos

Para una implementación sencilla con elementos finitos sobre triángulos, empleando las mallas generadas con los funcionales de la sección anterior, dividiremos la celda  $c_{i,j}$ , definida por los vértices  $\{P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}\}$ , en *dos* triángulos eligiendo para tal efecto la diagonal más corta de la celda. Un ejemplo de dicha malla triangulada puede verse en la Figura 2.

Usando esta selección de elementos en la malla, emplearemos la aproximación de Galerkin a la solución del problema elíptico de valores a la frontera

$$-\nabla \circ (K(x, y) \nabla u(x, y)) = f(x, y)$$

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$u(x, y) \Big|_{\partial\Omega} = g(x, y),$$

por medio de una combinación

$$u(x, y) \approx \sum_i U_i \phi_i$$

de funciones pirámide de trial y test cuyas caras se definen en un triángulo por

$$\phi(x, y) = A + Bx + Cy.$$

Así, de forma estándar, la forma débil de la ecuación (1) está dada por

$$\sum_i U_i \int_{\Omega} \nabla \phi_j \circ (K(x, y) \nabla \phi_i) dA = \int_{\Omega} \phi_j f dA$$

lo que produce la matriz de rigidez

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \circ (K(x, y) \nabla \phi_i) dA \quad (2)$$

y el vector de cargas

$$F_j = \int_{\Omega} \phi_j f dA. \quad (3)$$

Naturalmente, es posible elegir otro tipo de funciones prueba. Sin embargo, queremos una implementación sencilla y, como sabemos, el uso de funciones piramidales en triangulaciones permite una implementación eficiente del sistema definido por (2) y (3); adicionalmente, existen varios paquetes y bibliotecas disponibles en la literatura para este tipo de elementos.

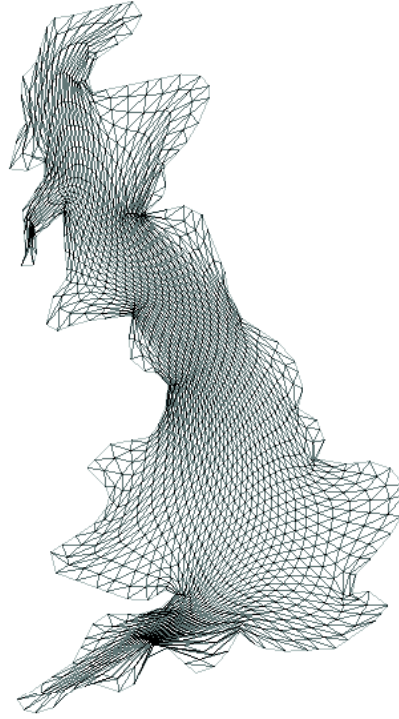
### 4. Solución empleando diferencias finitas

Para efectos de comparación emplearemos diferencias finitas que, como sabemos, en mallas rectangulares se caracterizan porque las derivadas en la ecuación se aproximan por cocientes de diferencias en los nodos de la malla. Dichos esquemas estándar se generalizan considerando un conjunto finito de nodos  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , para los cuales requerimos encontrar coeficientes  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  tales que [10]

$$\frac{\partial^q u}{\partial x^l \partial y^{q-l}} \Big|_{x=x_*} \approx \sum_i \Gamma_i u_i.$$

Los valores de  $\Gamma_i$  pueden calcularse de forma muy sencilla en regiones rectangulares. No obstante, aunque la idea básica es simple, el uso del teorema de Taylor produce esquemas más complicados en regiones irregulares; hasta donde sabemos, existen pocas propuestas de esquemas robustos para tales regiones, aunque resulta muy claro que muchos modelos pudieran mejorarse considerando dominios cuya geometría fuera más cercana a un dominio real, como por ejemplo, el de un lago.

El cálculo de dichos coeficientes ha sido estudiado por Tinoco *et al* [1,2], y Shashkov [15]. Emplearemos el esquema desarrollado para ecuaciones elípticas con matrices no diagonales analizado en [15], el cual se basa en la teoría de los operadores soporte.



**Figura 2.** Triangulación definida tomando la diagonal más corta de cada celda

En este esquema, el operador  $-\nabla \circ (K(x, y) \nabla u(x, y))$  en el nodo  $i, j$  se aproxima por

$$\begin{aligned} [-\nabla \circ (K(x, y) \nabla u(x, y))]_{i,j} &\approx C_{i,j} u_{i,j} + E_{i,j} u_{i+1,j} \\ &\quad + N E_{i,j} u_{i+1,j+1} \\ &\quad + N_{i,j} u_{i,j+1} + N W_{i,j} u_{i-1,j+1} \\ &\quad + W_{i,j} u_{i-1,j} + S W_{i,j} u_{i-1,j-1} \\ &\quad + S_{i,j} u_{i,j-1} + S E_{i,j} u_{i+1,j-1} \end{aligned}$$

donde, por ejemplo,

$$\begin{aligned} E_{i,j} &= (y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) \left( \frac{K_{11}}{2\mathcal{A}_{i,j}} \right) (y_{i,j} - y_{i+1,j+1}) \\ &\quad + (y_{i+1,j} - y_{i,j-1}) \left( \frac{K_{11}}{2\mathcal{A}_{i,j-1}} \right) (y_{i+1,j-1} - y_{i,j}) \\ &\quad - (y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) \left( \frac{K_{12}}{2\mathcal{A}_{i,j}} \right) (x_{i,j} - x_{i+1,j+1}) \\ &\quad - (y_{i+1,j} - y_{i,j-1}) \left( \frac{K_{12}}{2\mathcal{A}_{i,j-1}} \right) (x_{i+1,j-1} - x_{i,j}) \\ &\quad - (x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) \left( \frac{K_{12}}{2\mathcal{A}_{i,j}} \right) (y_{i,j} - y_{i+1,j+1}) \\ &\quad - (x_{i+1,j} - x_{i,j-1}) \left( \frac{K_{12}}{2\mathcal{A}_{i,j-1}} \right) (y_{i+1,j-1} - y_{i,j}) \\ &\quad + (x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) \left( \frac{K_{22}}{2\mathcal{A}_{i,j}} \right) (x_{i,j} - x_{i+1,j+1}) \\ &\quad + (x_{i+1,j} - x_{i,j-1}) \left( \frac{K_{22}}{2\mathcal{A}_{i,j-1}} \right) (x_{i+1,j-1} - x_{i,j}), \end{aligned}$$

$P_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ ,  $K(x, y)$  se evalúa en el centro de la celda  $c_{i,j}$  y  $\mathcal{A}_{i,j}$  es el promedio de las áreas de las celdas  $c_{i,j}$ ,  $c_{i-1,j}$ ,  $c_{i,j-1}$  y  $c_{i-1,j-1}$ . Los demás coeficientes se calculan de forma similar, los detalles pueden encontrarse en Shashkov [15].

Como es usual, con estos coeficientes se define un sistema algebraico de ecuaciones. A medida que  $m$  y  $n$  se incrementan, el sistema se vuelve ralo, por lo que puede resolverse iterativamente de forma eficiente.

## 5. Experimentos numéricos

Para los experimentos numéricos, hemos seleccionado tres regiones poligonales: Una de forma regular que denotaremos por el cisne, y dos definidas por curvas irregulares que aproximan la forma de Gran Bretaña y el estado de Michoacán en México (Ver Figura 3).

Empleando estos contornos, se generaron mallas con 21, 41, 61 y 81 puntos por lado minimizando los funcionales de suavidad bilateral y área bilateral-longitud. Posteriormente, se ensamblaron y resolvieron iterativamente los correspondientes sistemas de ecuaciones; análogamente, las matrices de coeficientes se calcularon para el esquema en diferencias a fin de obtener el sistema de ecuaciones asociado. En todos los casos, los sistemas se resolvieron con el método de Gauss-Seidel.

Para el problema (1), se seleccionaron los siguientes valores:



**Figura 3.** Regiones de prueba

1. Primer problema.

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = 2 \exp(2x + y).$$

2. Segundo problema.

$$K(x, y) = P^T D P,$$

con

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{8}) & \sin(\frac{\pi}{8}) \\ -\sin(\frac{\pi}{8}) & \cos(\frac{\pi}{8}) \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 1 + 2x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 2y^2 \end{pmatrix}$$

$$u = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

3. Tercer problema.

$$K(x, y) = P^T D P,$$

con

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 1 + 2x^2 + y^2 + y^5 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 2y^2 + x^3 \end{pmatrix}$$

$$u = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

La función  $f$  se calculó para que  $u$  fuera la solución exacta en cada caso.

Las normas  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$  del error para las pruebas se muestran en las Tablas 1, 2 y 3;  $err_h$  y  $err_d$  representa el error para los métodos de elemento finito y diferencias finitas, respectivamente. La norma  $\|\cdot\|_2$  se calculó como una función de malla

$$\|u - U\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} (u_{i,j} - U_{i,j})^2 \mathcal{A}_{ij}},$$

donde  $u$  y  $U$  son las soluciones exacta y aproximada calculadas en el nodo  $i, j$ , y  $\mathcal{A}_{ij}$  es el área de la celda  $c_{i,j}$ ; el orden se calcula empleando estos valores.

Las Figuras 4 y 5 muestran el error absoluto para las regiones Gran Bretaña y Michoacán en el tercer problema. En ambos casos, se muestran los resultados para mallas  $61 \times 61$  generadas con  $F_{ABL}$ .

Es posible observar que los errores más grandes son locales, y para ambos métodos, son del mismo orden. Es interesante observar que, presumiblemente debido a la forma irregular de las dos últimas regiones, en algunos se obtiene un orden negativo, lo que significa que en términos de la norma  $\|\cdot\|_\infty$  se obtiene una mejor aproximación empleando menos puntos.

## Conclusiones y trabajo a futuro

Como podemos concluir de los experimentos, es posible generar aproximaciones numéricas con buena precisión empleando mallas estructuradas convexas generadas por métodos variacionales. Esto claramente representa una mejora al compararlo con modelos que se basan en dominios rectangulares, los cuales son una aproximación pobre a ciertos dominios de problemas reales.

Adicionalmente, e incluso con mayor importancia, dado que nuestras implementaciones se basan en mallas lógicamente rectangulares, su implementación y codificación puede efectuarse de una forma muy sencilla; en contraste, para aplicarse eficientemente, las implementaciones que se basan en mallas no estructuradas requieren una estructura de datos mucho más complicada.

Nuestra investigación actual trata sobre el uso en estos esquemas de mallas de alta calidad generadas por otros funcionales a fin de resolver estas y otras ecuaciones diferenciales, y los resultados correspondientes se reportarán en un trabajo a futuro.

**Tabla 1.** Resultados para el problema 1

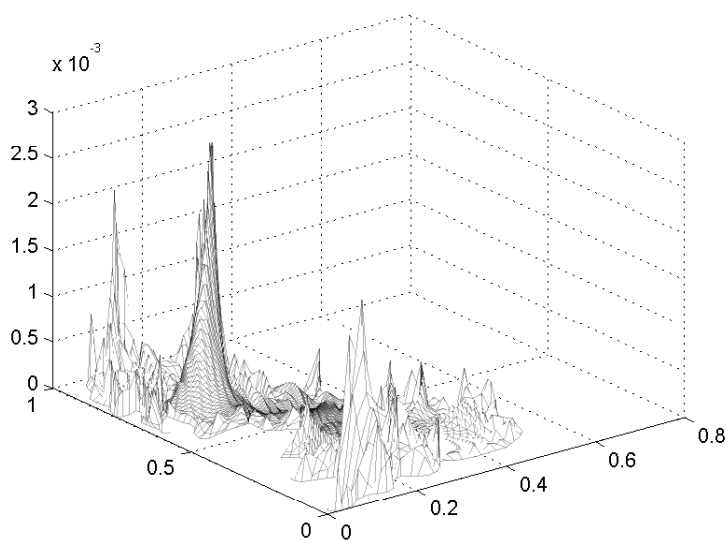
Malla	$\ err_h\ _\infty$	Orden	$\ err_h\ _2$	Orden	$\ err_d\ _\infty$	Orden	$\ err_d\ _2$	Orden
ENG21ABL	2.51E-02		2.07E-03		2.54E-02		2.36E-03	
ENG41ABL	4.56E-03	2.46	5.22E-04	1.99	7.31E-03	1.8	5.15E-04	2.19
ENG61ABL	3.74E-03	0.49	2.96E-04	1.4	2.51E-03	2.64	2.20E-04	2.1
ENG81ABL	1.42E-03	3.36	1.40E-04	2.61	1.37E-03	2.1	1.05E-04	2.57
ENG21SB	4.28E-02		3.53E-03		4.74E-02		3.11E-03	
ENG41SB	1.09E-02	1.98	8.01E-04	2.14	1.13E-02	2.06	6.95E-04	2.16
ENG61SB	1.28E-02	-0.41	5.69E-04	0.84	7.75E-03	0.94	3.75E-04	1.52
ENG81SB	3.11E-03	4.92	1.62E-04	4.37	1.81E-03	5.06	1.30E-04	3.68
MIC21ABL	1.95E-02		2.90E-03		3.48E-02		5.70E-03	
MIC41ABL	7.28E-03	1.42	1.00E-03	1.53	2.43E-02	0.52	1.80E-03	1.66
MIC61ABL	6.82E-03	0.16	4.75E-04	1.84	8.50E-03	2.59	7.24E-04	2.24
MIC81ABL	3.87E-03	1.97	3.16E-04	1.42	3.78E-03	2.81	3.94E-04	2.11
MIC21SB	1.60E-02		2.77E-03		3.09E-02		6.29E-03	
MIC41SB	9.01E-03	0.83	9.28E-04	1.58	2.58E-02	0.26	1.91E-03	1.72
MIC61SB	7.24E-03	0.54	4.21E-04	1.95	8.00E-03	2.89	7.54E-04	2.29
MIC81SB	4.14E-03	1.94	2.53E-04	1.76	3.94E-03	2.46	4.23E-04	2.01
SWA21ABL	1.38E-02		1.84E-03		1.20E-02		2.20E-03	
SWA41ABL	3.53E-03	1.97	3.47E-04	2.41	5.16E-03	1.22	5.50E-04	2
SWA61ABL	1.51E-03	2.1	1.83E-04	1.59	1.40E-03	3.22	2.05E-04	2.43
SWA81ABL	9.97E-04	1.45	8.88E-05	2.51	1.27E-03	0.34	1.15E-04	2.01
SWA21SB	1.32E-02		2.50E-03		1.90E-02		2.98E-03	
SWA41SB	3.40E-03	1.95	5.71E-04	2.13	5.59E-03	1.77	7.45E-04	2
SWA61SB	1.53E-03	1.96	2.16E-04	2.39	1.84E-03	2.74	2.35E-04	2.856
SWA81SB	9.70E-04	1.59	8.95E-05	3.07	1.51E-03	0.69	1.15E-04	2.48

**Tabla 2.** Resultados para el problema 2

Malla	$\ err_h\ _\infty$	Orden	$\ err_h\ _2$	Orden	$\ err_d\ _\infty$	Orden	$\ err_d\ _2$	Orden
ENG21ABL	5.68E-03		6.95E-04		7.50E-03		7.60E-04	
ENG41ABL	2.38E-03	1.26	1.71E-04	2.03	2.14E-03	1.81	1.82E-04	2.06
ENG61ABL	2.04E-03	0.37	1.16E-04	0.96	8.92E-04	2.16	8.63E-05	1.84
ENG81ABL	6.83E-04	3.81	4.47E-05	3.31	4.16E-04	2.65	3.70E-05	2.94
ENG21SB	1.19E-02		1.14E-03		1.60E-02		1.15E-03	
ENG41SB	5.30E-03	1.17	3.51E-04	1.7	4.42E-03	1.86	2.89E-04	1.99
ENG61SB	6.13E-03	-0.36	2.70E-04	0.65	3.13E-03	0.85	1.62E-04	1.43
ENG81SB	1.55E-03	4.79	7.07E-05	4.66	1.04E-03	3.82	5.37E-05	3.83
MIC21ABL	2.51E-03		3.92E-04		3.30E-03		7.57E-04	
MIC41ABL	1.03E-03	1.28	1.33E-04	1.56	1.88E-03	0.81	1.92E-04	1.98
MIC61ABL	6.57E-04	1.12	6.00E-05	1.96	7.00E-04	2.44	8.63E-05	1.97
MIC81ABL	7.06E-04	-0.25	5.43E-05	0.35	6.59E-04	0.21	5.38E-05	1.64
MIC21SB	2.07E-03		4.21E-04		5.29E-03		8.14E-04	
MIC41SB	1.00E-03	1.05	1.42E-04	1.57	1.92E-03	1.47	1.90E-04	2.1
MIC61SB	5.82E-04	1.33	6.26E-05	2.02	7.25E-04	2.39	8.04E-05	2.12
MIC81SB	9.56E-04	-1.72	5.25E-05	0.61	7.98E-04	-0.33	5.89E-05	1.08
SWA21ABL	2.14E-03		3.80E-04		2.21E-03		4.01E-04	
SWA41ABL	9.00E-04	1.25	6.93E-05	2.46	8.69E-04	1.35	1.08E-04	1.9
SWA61ABL	3.12E-04	2.62	3.89E-05	1.42	2.16E-04	3.43	4.28E-05	2.27
SWA81ABL	2.19E-04	1.23	1.69E-05	2.9	1.58E-04	1.09	2.32E-05	2.13
SWA21SB	2.56E-03		4.29E-04		2.67E-03		5.36E-04	
SWA41SB	8.24E-04	1.63	8.43E-05	2.35	6.52E-04	2.03	1.44E-04	1.9
SWA61SB	3.17E-04	2.36	3.44E-05	2.21	2.26E-04	2.62	4.90E-05	2.65
SWA81SB	2.50E-04	0.83	1.64E-05	2.57	2.37E-04	-0.17	2.23E-05	2.73

**Tabla 3.** Resultados para el problema 3

Malla	$\ err_h\ _\infty$	Orden	$\ err_h\ _2$	Orden	$\ err_d\ _\infty$	Orden	$\ err_d\ _2$	Orden
ENG21ABL	5.40E-03		6.81E-04		7.50E-03		7.62E-04	
ENG41ABL	2.37E-03	1.19	1.69E-04	2.01	2.14E-03	1.81	1.78E-04	2.09
ENG61ABL	2.10E-03	0.31	1.17E-04	0.91	9.40E-04	2.03	8.44E-05	1.85
ENG81ABL	6.86E-04	3.88	4.49E-05	3.33	4.15E-04	2.84	3.64E-05	2.92
ENG21SB	1.19E-02		1.12E-03		1.60E-02		1.14E-03	
ENG41SB	5.41E-03	1.13	3.54E-04	1.66	4.39E-03	4.5	2.82E-04	2.02
ENG61SB	6.27E-03	-0.36	2.75E-04	0.63	2.87E-03	1.48	1.57E-04	1.44
ENG81SB	1.61E-03	4.73	7.23E-05	4.64	1.04E-03	3.52	5.27E-05	3.8
MIC21ABL	2.48E-03		3.99E-04		3.48E-03		7.88E-04	
MIC41ABL	1.07E-03	1.22	1.36E-04	1.55	2.23E-03	0.64	2.02E-04	1.97
MIC61ABL	6.75E-04	1.13	6.28E-05	1.9	7.34E-04	2.74	8.63E-05	2.09
MIC81ABL	6.98E-04	-0.12	5.69E-05	0.34	6.56E-04	0.39	5.46E-05	1.6
MIC21SB	2.08E-03		4.18E-04		5.48E-03		8.83E-04	
MIC41SB	9.38E-04	1.15	1.41E-04	1.56	2.25E-03	1.28	2.04E-04	2.11
MIC61SB	5.74E-04	1.21	6.24E-05	2.02	7.38E-04	2.75	8.40E-05	2.19
MIC81SB	9.49E-04	-1.75	5.31E-05	0.57	8.40E-04	-0.45	6.17E-05	1.07
SWA21ABL	2.15E-03		3.88E-04		1.33E-03		2.21E-04	
SWA41ABL	8.94E-04	1.27	7.05E-05	2.46	1.67E-03	-0.33	1.05E-04	1.07
SWA61ABL	3.11E-04	2.6	3.93E-05	1.44	2.04E-04	5.19	2.40E-05	3.63
SWA81ABL	2.17E-04	1.26	1.72E-05	2.87	3.07E-04	-1.42	1.89E-05	0.83
SWA21SB	2.55E-03		4.29E-04		1.74E-03		2.23E-04	
SWA41SB	8.19E-04	1.64	8.42E-05	2.35	1.55E-03	0.16	1.08E-04	1.05
SWA61SB	3.16E-04	2.35	3.45E-05	2.2	2.23E-04	4.78	2.19E-05	3.93
SWA81SB	2.47E-04	0.85	1.68E-05	2.51	3.98E-04	-2.01	2.01E-05	0.3

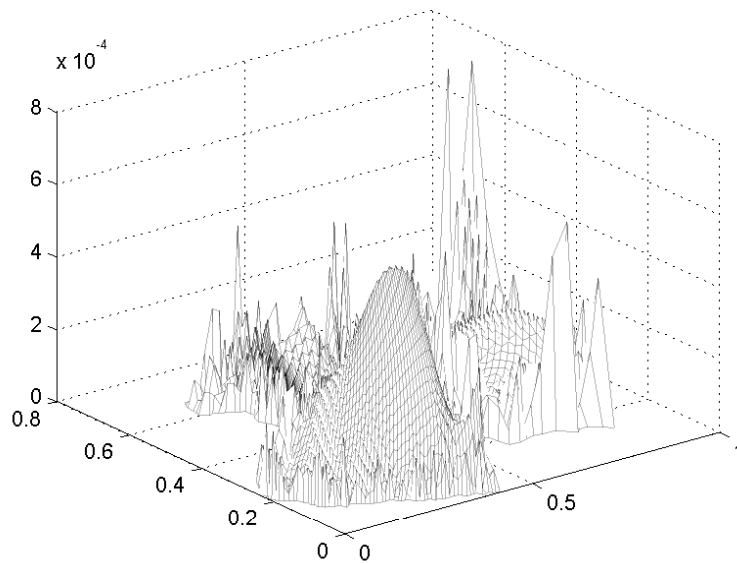
**Figura 4.** Error local para Gran Bretaña  $61 \times 61$ , tercer problema

### Agradecimientos

Los autores desean agradecer a los proyectos CIC-UMSNH “Complejidad numérica y computacional de la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales y algunas aplicaciones,” CONACyT DAIC 83415, “Generación numérica de mallas empleando el método variacional directo y algunas aplicaciones II,” y el proyec-

to de red PROMEP “Aplicaciones de la optimización numérica a la solución de diversos problemas de cómputo científico” por el apoyo financiero para la realización de este trabajo.

También deseamos agradecer sobremedida a los anónimos revisores de este trabajo por sus siempre valiosas sugerencias y comentarios.



**Figura 5.** Error local para Michoacán  $61 \times 61$ , tercer problema

## Referencias

1. Chávez González A., Cortés-Medina A., Tinoco-Ruiz J.G. (2002) A direct finite-difference scheme for solving PDEs over general two-dimensional regions. *Applied Numerical Mathematics*. 40:219-233
2. Chávez González A., Cortés-Medina A., Tinoco-Ruiz J.G. (2002) Testing the quality of grids generated using the direct approach. *Applied Numerical Mathematics* 40:191-206
3. Barrera-Sánchez P., Castellanos L., Domínguez-Mota F.J., González-Flores G.F., Pérez-Domínguez A. (2009) Area functionals for High Quality Grid Generation. *Numerical Modeling of Coupled Phenomena in Science and Engineering, Multiphysics Modeling series*. 1:31-44
4. Barrera-Sánchez P., Castellanos L., Domínguez-Mota F.J., González-Flores G.F., Pérez-Domínguez A. (2009) Adaptive Discrete Harmonic Grid Generation. *Mathematics and Computers in Simulation*. 79:1792-1809
5. Barrera-Sánchez P., Castellanos L., Pérez-Domínguez A. (1994) Métodos variacionales discretos para la generación de mallas. DGAPA-UNAM México
6. Barrera-Sánchez P., Domínguez-Mota F.J., González-Flores G.F. (2003) Robust Discrete Grid Generation on Plane Irregular Regions. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 43:845-854
7. Barrera-Sánchez P., Tinoco-Ruiz J.G. (1998) Area functionals in plane grid generation. En *Proceedings of the 6th. international Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation*. London, England. International Society of Grid Generation. Mississippi State. pp. 293-302
8. Barrera-Sánchez P., Tinoco-Ruiz J.G. (1998) Smooth and convex grid generation over general plane regions. *Mathematics and computers in simulation*. 46:87-102
9. Castillo J.E. (1991) Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation. *SIAM, Frontiers in Applied Mathematics*
10. Celia M., Gray W. (1992) *Numerical Methods for Differential Equations*. Prentice-Hall
11. Charakhch'yan A.A., Ivanenko S.A. (1997) A variational form of the Winslow grid generator. *Journal of Computational Physics*. 135:385-398
12. Charakhch'yan A.A., Ivanenko S.A. (1998) Curvilinear Grids of Convex Quadrilaterals. *Comput. Math. Math. Phys.* 28:126-133
13. Ivanenko S.A. (1999) *Harmonic Mappings*. Handbook of Grid Generation. En: CRC Press. p 8.1-841.841.
14. Knupp P., Robidoux N. (2000) A Framework for Variational Grid Generation: Conditioning the Jacobian Matrix with Matrix Norms. *SIAM J. Sci. Comput.* 21:2029-2047
15. Shashkov M. (1996) *Conservative finite difference methods on general grids*. Symbolic and Numeric Computation Series. En: CRC Press