

Análisis numérico de las funciones corriente circulación y vorticidad, para flujo rotatorio con frontera rígida

A. Lizardi R. · R. López C. · J.R. Morales G. · H. Terrés P. ·
A. Lara V. · A. Hernández G.

Recibido: Marzo 2010, Aceptado: Abril 2010

©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2010

Resumen En este trabajo se obtienen y analizan los campos de las funciones vorticidad tangencial (ξ), circulación (Γ) y corriente meridional (Ψ), que se generan en el interior de un cilindro cerrado que tiene el fondo giratorio y la tapa superior y envolvente sin movimiento. Los resultados se presentan mediante gráficas en las que se comparan dichas funciones, para un número de Reynolds de 3×10^4 y para un factor de forma (alto/radio) del recipiente de 0.5, 1.0 y 2.0. Se encontró, al comparar el sistema con relación geométrica 2 respecto al de 1, que la función corriente disminuye 29.63%; que la circulación permanece constante y que la vorticidad se reduce un 65.91%. Por otro lado, al comparar el sistema con relación geométrica 0.5 respecto al de 1, se encontró que la función corriente aumenta 1.4 veces, que la circulación se incrementó 3.45 veces y que la vorticidad aumentó 0.7 veces. Los resultados anteriores dan una idea del comportamiento de las funciones corriente, circulación y vorticidad tangencial para las relaciones geométricas antes mencionadas, pero se requiere de un mayor análisis para poder utilizar estos resultados al caso particular de mezclado o de alguna otra aplicación práctica de ingeniería.

NUMERICAL ANALYSIS OF STREAM FUNCTION, VORTICITY AND CIRCULATION FOR A ROTATING FLOW WITH RIGID BOUNDARY

Summary The tangential vorticity function, circulation and meridian stream that form in a closed rotating cylinder are analyzed. The cylinder has a rotating bottom whereas the lateral surface and the top are fixed. The results are presented as graphs that compare the mentioned functions for different aspect ratios. The comparing aspect ratios are: 0.5, 1.0 and 2.0. In comparing the 2.0 aspect ratio versus the 1.0 aspect ratio; it is found that the stream function diminished a 29.63%, whereas the circulation does not change and the vorticity decreases 65.91%. On the other hand comparison of the cylinder with aspect ratio 0.5 against the one with aspect ratio 1; gives that the stream function increases 1.4 times; that the circulation increases 3.45 times and the vorticity increases 0.7 times. The analysis was made for a 3×10^4 Reynolds number. The mentioned results give an indication of the influence of the aspect ratio as to the motion inside the cylinder. Further investigation is required in order to apply the results to particular conditions of mixing or another practical application.

1. Introducción

El flujo rotatorio confinado en un cilindro vertical, que es generado por un impulsor radial, es importante por las aplicaciones prácticas que tiene en el campo de la ingeniería y por el análisis teórico que presenta al resolver sus ecuaciones rectoras. Entre las aplicaciones prácticas se puede mencionar el flujo en maquinaria centrífuga, cámaras de mezclado, equipo para plantas de tratamiento de agua, etc. Las expresiones matemáti-

A. Lizardi R. · R. López C. · J.R. Morales G. · H. Terrés P. ·
A. Lara V. · A. Hernández G.
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Departamento de Energía, Área de Termofluidos
Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas
Del. Azcapotzalco, C.P. 02200, México D.F.
e-mail: arlr@correo.azc.uam.mx

cas que describen el comportamiento dinámico del flujo rotatorio parten de las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas polares cilíndricas. La no linealidad y el acoplamiento de sus términos hacen que su solución sea compleja. Por ello la simulación numérica, al paso del tiempo, se ha desarrollado ampliamente.

Hsien-Ping Pao [1] propuso un método numérico para estudiar un fluido viscoso incompresible confinado en una cámara cilíndrica donde la tapa superior está rotando a una velocidad angular constante y las paredes y fondo del recipiente permanecen fijos. Se analiza la función corriente y circulación, la distribución de velocidades y el coeficiente de par para un rango del número de Reynolds de 1 a 400. Bertelá y Gori [2] presentaron un método numérico que permite resolver el flujo estable y transitorio de un fluido dentro de una cámara cilíndrica con la cubierta rotando. En el estudio se analizan las componentes de velocidad, líneas de corriente y coeficiente de torque para un número de Reynolds de 100 y 1000, y para una relación geométrica de 0.5, 1 y 2. Lang *et al.* [3] estudiaron numéricamente el flujo laminar estable en un cilindro fijo con un disco rotando en la tapa superior. El trabajo resalta el análisis del coeficiente de torque y de los flujos volumétricos primario y secundario para un rango del número de Reynolds de 1 a 10^5 y para una relación geométrica de 0.02 a 3.

El objetivo de este trabajo es analizar las funciones corriente meridional (Ψ), circulación (Γ) y vorticidad tangencial (ξ) que se generan en el interior de un cilindro cerrado que tiene el fondo giratorio y la tapa superior y envolvente sin movimiento. Los resultados se presentan mediante gráficas en las que se comparan dichas funciones, para un número de Reynolds de 3×10^4 y para un factor de forma (alto/radio) del recipiente de 0.5, 1.0 y 2.0.

2. Planteamiento del problema

El modelo físico consiste en un recipiente cilíndrico vertical de altura H y radio E , el cual contiene un fluido newtoniano, viscoso e incompresible (Figura 1).

En el fondo del depósito se encuentra un impulsor radial que genera el movimiento del fluido y que gira a una velocidad angular constante. En la parte superior del sistema se tiene la condición de frontera cerrada a la atmósfera y se analizan tres factores de forma (H/E) para el recipiente: 0.5, 1.0 y 2.0.

3. Modelo matemático

El modelo matemático que describe el flujo axisimétrico de un fluido viscoso, incompresible, en esta-

do permanente, que gira en el interior de un depósito cilíndrico, se expresa a través de las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas polares cilíndricas (R, Φ, Z) [4]

$$\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{V^2}{R} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} + \nu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right] \quad (2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{UV}{R} + W \frac{\partial V}{\partial Z} = \nu \left[\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] \quad (3)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial R} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} + \nu \left[\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right] - g \quad (4)$$

En este sistema de ecuaciones dimensionales las incógnitas son las tres componentes de velocidad (U, V, W) y la presión (P). Pero se enfrenta el problema de que la presión en cualquier punto del fluido depende de las componentes de velocidad. Para salvar esta dificultad, reduciendo el término de la presión, se hace una transformación de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en función de la vorticidad (ς), circulación (γ) y función corriente meridional (ψ). Una vez hecha la transformación de las ecuaciones, éstas se adimensionalizan, discretizan y resuelven. La forma adimensional resultante es [1]

$$u \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + w \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 \Gamma - \frac{2}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right] \quad (5)$$

$$u \frac{\partial \xi}{\partial r} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{u \xi}{r} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial (\Gamma^2)}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left[\nabla^2 \xi - \frac{\xi}{r^2} \right] \quad (6)$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = r \xi \quad (7)$$

Los parámetros que relacionan las variables adimensionales ($r, z, u, v, w, \Psi, \Gamma, \xi$) con las dimensionales ($R, Z, U, V, W, \psi, \gamma, \varsigma$) están definidos en las ecs.(8) y (9)

$$\frac{R}{E} = r, \quad \frac{Z}{E} = z, \quad \frac{U}{\Omega E} = u, \quad \frac{V}{\Omega E} = v, \quad \frac{W}{\Omega E} = w, \quad (8)$$

$$\frac{\Psi}{\Omega E^3} = \Psi, \quad \frac{\gamma}{\Omega E^2} = \Gamma, \quad \frac{\varsigma}{\Omega} = \xi, \quad Re = \frac{\Omega E^2}{\nu}$$

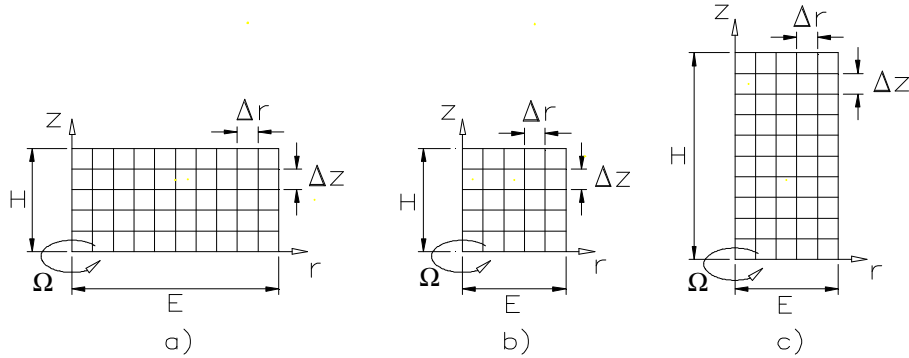


Figura 1. Modelo físico del sistema a analizar para un factor geométrico (H/E) de: a) 0.5, b) 1.0, c) 2.0

con

$$\gamma = 2\pi VR, \quad \varsigma = \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{\partial W}{\partial R}, \quad U = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad W = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (9)$$

donde E es el radio del depósito, Ω es la velocidad angular del impulsor y Re es el número de Reynolds definido para este sistema. Las ecuaciones de transporte de la circulación (5) y de la vorticidad tangencial (6) son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden no lineales de tipo parabólico. La ecuación de Poisson para la función corriente meridional (7) es una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo elíptico. Las condiciones de frontera para el caso de superficie rígida [6], son

$$\begin{aligned} r = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \xi = 0 \\ r = 1, \quad \Psi = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \xi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \\ z = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Gamma = r^2, \quad \xi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \\ z = 1, \quad \Psi = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \xi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (10)$$

4. Solución numérica

Para resolver las ecuaciones de movimiento que rigen en el interior del sistema (5), (6) y (7), junto con las condiciones de frontera (10), es necesario transformarlas a un espacio discreto, el cual es el espacio manejado por las computadoras. En el método numérico se aplica un esquema de diferencias finitas para reemplazar las ecuaciones diferenciales parciales por expresiones algebraicas aproximadas, que se obtienen de un desarrollo truncado de la serie de Taylor. La aproximación empleada en el método numérico para las ecuaciones que rigen en el sistema estudiado y las fronteras del mismo son de segundo y cuarto orden, respectivamente. En la Figura 1 se representa la malla en el plano meridional continuo (r, z) para el flujo axisimétrico considerado.

Así, las ecuaciones en diferencias finitas que rigen el movimiento del fluido en el interior del sistema son [7,8]

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j} = \frac{1}{2 \left[1 + \left(\frac{\Delta r}{\Delta z} \right)^2 \right]} \left\{ \Psi_{i+1,j} \left[1 - \frac{1}{2i} \right] + \Psi_{i-1,j} \left[1 + \frac{1}{2i} \right] + \left(\frac{\Delta r}{\Delta z} \right)^2 \Psi_{i,j+1} + \left(\frac{\Delta r}{\Delta z} \right)^2 \Psi_{i,j-1} - i (\Delta r)^3 \xi_{i,j} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,j} = \frac{1}{2 \left[1 + \left(\frac{\Delta r}{\Delta z} \right)^2 \right]} \left\{ \Gamma_{i+1,j} \left[\left(1 - \frac{1}{2i} \right) - \frac{Re}{4i \Delta z} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) \right] + \Gamma_{i-1,j} \left[\left(1 + \frac{1}{2i} \right) + \frac{Re}{4i \Delta z} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) \right] + \Gamma_{i,j+1} \left[\left(\frac{\Delta r}{\Delta z} \right)^2 + \frac{Re}{4i \Delta z} (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) \right] + \Gamma_{i,j-1} \left[\left(\frac{\Delta r}{\Delta z} \right)^2 - \frac{Re}{4i \Delta z} (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) \right] \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{i,j} = i^2 \left\{ \xi_{i+1,j} \left[\left(1 + \frac{1}{2i} \right) - \frac{Re}{4i \Delta z} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) \right] + \xi_{i-1,j} \left[\left(1 - \frac{1}{2i} \right) + \frac{Re}{4i \Delta z} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) \right] + \xi_{i,j+1} \left[\left(\frac{\Delta r}{\Delta z} \right)^2 + \frac{Re}{4i \Delta z} (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) \right] + \xi_{i,j-1} \left[\left(\frac{\Delta r}{\Delta z} \right)^2 - \frac{Re}{4i \Delta z} (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) \right] + \left[\frac{Re \Gamma_{i,j}}{i^3 (\Delta r) (\Delta z)} (\Gamma_{i,j+1} - \Gamma_{i,j-1}) \right] \right\} \left[2i^2 + 2i^2 \left(\frac{\Delta r}{\Delta z} \right)^2 + 1 - \frac{Re}{2 \Delta z} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) \right]^{-1} \quad (13) \end{aligned}$$

Para obtener los campos de las funciones corriente meridional (Ψ), circulación (Γ) y vorticidad tangencial

(ξ) se generó un programa de cómputo en lenguaje de programación C++. Dicho programa realiza el mallado del sistema, aplica las ecuaciones (11), (12) y (13) a cada nodo interno del sistema y las ecuaciones (10), previamente discretizadas, a cada nodo ubicado en la frontera del mismo. Posteriormente, por medio de una subrutina, resuelve el sistema de ecuaciones en forma iterativa hasta encontrar la convergencia. El criterio de convergencia utilizado es del tipo de error relativo, de la forma

$$\max \left[\frac{\Psi^{\sigma+1} - \Psi^{\sigma}}{\Psi^{\sigma}} \right] < \varepsilon \quad (14)$$

El orden de precisión de ε , en este trabajo, fue de 0.0001.

5. Resultados y discusión

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones (11), (12), (13) junto con las condiciones de frontera (10), a través del software diseñado, se hicieron corridas para un número de Reynolds de 3×10^4 . Los resultados de las funciones corriente meridional (Ψ), circulación (Γ) y vorticidad tangencial (ξ), para un factor de forma (H/E) de 1, 2 y 0.5, se muestran en las Figuras 2 a 10.

En la Figura 2, recipiente con relación geométrica 1, se observa que el valor de la función corriente meridional va disminuyendo de intensidad conforme se va alejando de su núcleo, el cual se encuentra ubicado en la parte inferior derecha del sistema. El valor máximo que toma la función corriente es de $1,37 \times 10^{-8}$. El campo de la función corriente muestra que lejos del núcleo el flujo volumétrico va disminuyendo, haciéndose presente la condición de frontera de gasto cero en las paredes del depósito, eje de rotación y superficie rígida. El comportamiento para el sistema con factor de forma 2 (Figura 5) es parecido aunque sus valores numéricos son menores. Para este caso el valor máximo es de $9,64 \times 10^{-9}$. Esta disminución es consecuencia del incremento de la frontera rígida en el sistema, lo cual ocasiona mayor fricción y menor gasto. Finalmente, el recipiente con relación geométrica 0.5, (Figura 8) muestra un comportamiento parecido a los dos anteriores pero con valores distintos. En este caso el valor máximo es de $3,3 \times 10^{-8}$. El incremento de su magnitud es consecuencia del aumento de la frontera en movimiento, es decir, al incrementar el tamaño del disco el gasto de fluido se ve favorecido. Haciendo una comparación entre el sistema con relación geométrica 2 respecto al de 1, se encontró que la función corriente disminuyó un 29.63%, y al comparar el sistema con relación geométrica 0.5 respecto al de 1 se encontró que dicha función aumentó 1.4 veces.

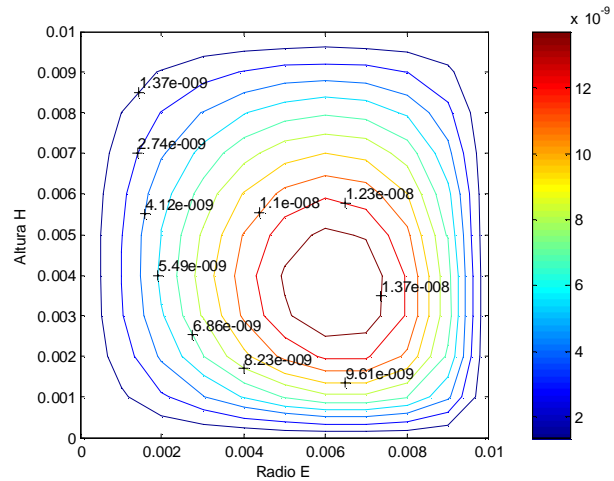


Figura 2. Función corriente meridional (Ψ) para $Re=3 \times 10^4$ y factor de forma 1

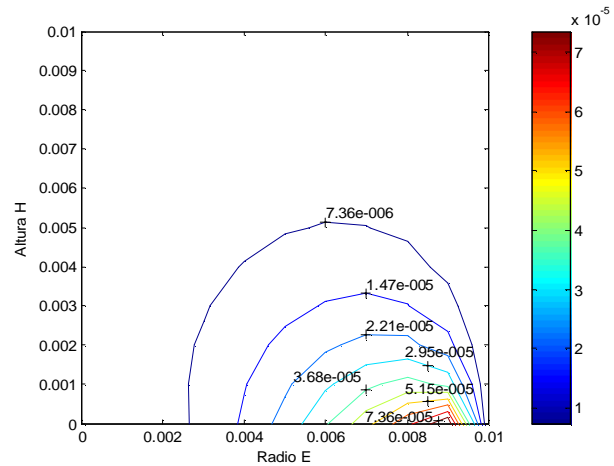


Figura 3. Función circulación (Γ) para $Re=3 \times 10^4$ y factor de forma 1

En la Figura 3, recipiente con relación geométrica 1, se observa que la circulación se genera en la frontera en movimiento. Su magnitud máxima es de $7,36 \times 10^{-5}$ y va disminuyendo a partir del disco impulsor. La intensidad del vórtice tiene una tendencia a disminuir al dirigirse hacia la frontera con superficie rígida y pared del depósito. Este efecto es similar a lo que se observa cuando un disco gira en un medio infinito con una velocidad angular constante alrededor de un eje perpendicular al plano. En este caso, por efecto del rozamiento, el fluido en contacto con la superficie del disco es arrastrado y, a consecuencia de la fuerza centrífuga, es impulsado hacia fuera. Con esto nuevas partículas se acercan al disco a lo largo del eje y son aceleradas también hacia fuera. El comportamiento para el sistema con factor de forma 2 (Figura 6) es parecido y sus valores numéricos son iguales. Lo anterior obedece a que la fuerza del vórtice depende de la velocidad angular y radio del disco,

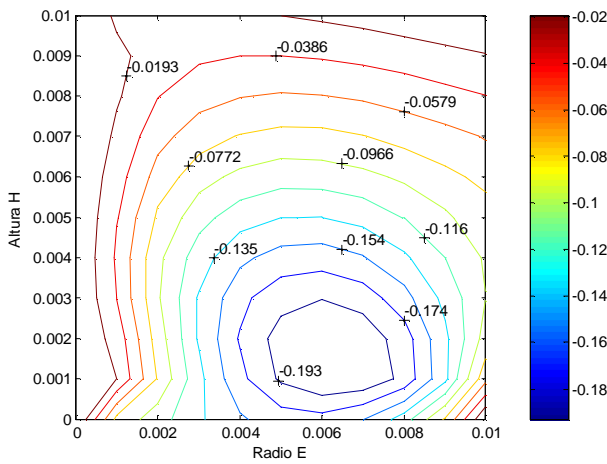


Figura 4. Función vorticidad tangencial (ξ) para $Re=3 \times 10^4$ y factor de forma 1

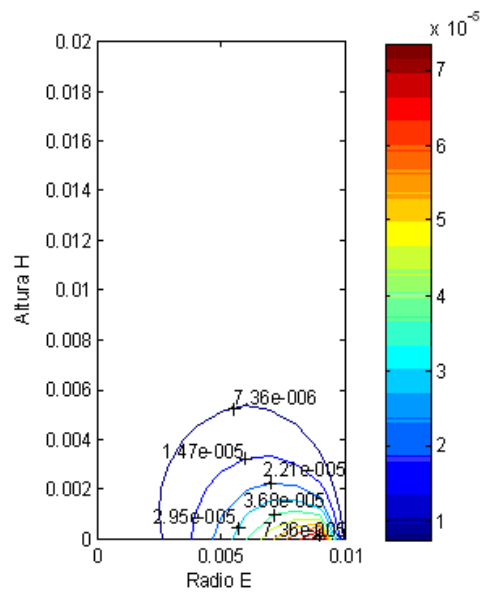


Figura 6. Función circulación (Γ) para $Re=3 \times 10^4$ y factor de forma 2

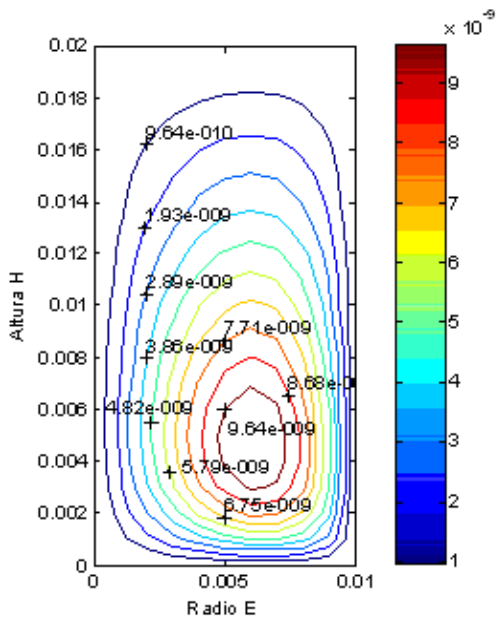


Figura 5. Función corriente meridional (Ψ) para $Re=3 \times 10^4$ y factor de forma 2

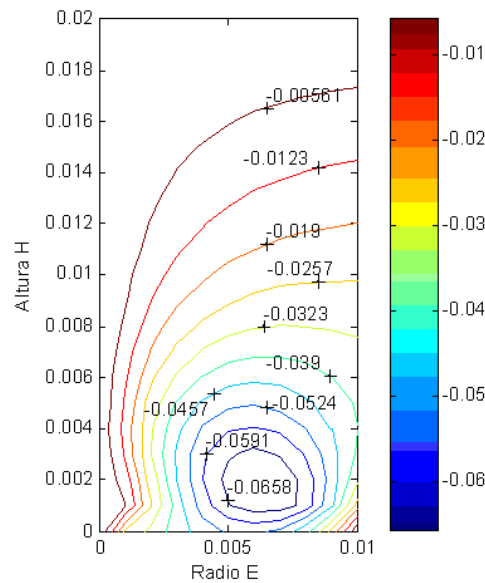


Figura 7. Función vorticidad tangencial (ξ) para $Re=3 \times 10^4$ y factor de forma 2

que en este caso son iguales. Finalmente, el recipiente con relación geométrica 0.5 (Figura 9) muestra un comportamiento parecido a los dos anteriores pero con valores distintos. En este caso el valor máximo es de $3,28 \times 10^{-4}$. El incremento de su magnitud es consecuencia del aumento de la frontera en movimiento, es decir, al incrementar el tamaño del disco la intensidad del vórtice se ve favorecida. Haciendo una comparación entre el sistema con relación geométrica 2 respecto al de 1, se encontró que la función circulación permaneció constante, y al comparar el sistema con relación geométrica 0.5 respecto al de 1, se encontró que dicha función se incrementó 3.45 veces.

En la Figura 4, recipiente con relación geométrica 1, se observa que la vorticidad tangencial forma un núcleo en la parte central inferior del sistema. Su magnitud máxima es de -0.193 y va decreciendo conforme se acerca a la frontera con superficie rígida y eje del cilindro. En este caso se observa que la intensidad de la rotación del fluido es mayor en las cercanías del disco impulsor. El signo negativo indica que la rotación del flujo es en sentido horario y es uniforme en todo el sistema. El comportamiento para el depósito con factor de forma 2 (Figura 7) es parecido aunque sus valores

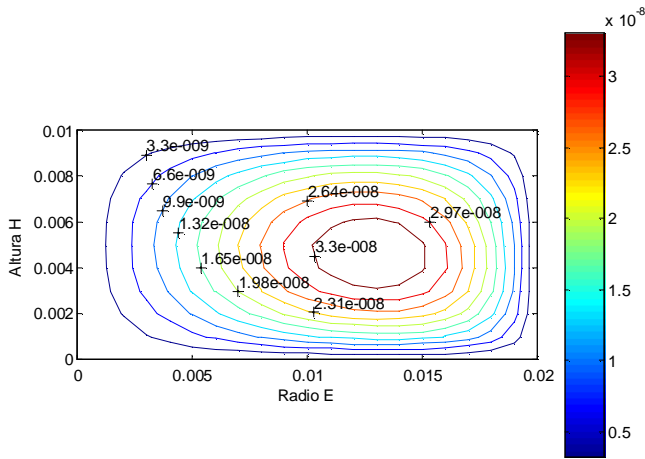


Figura 8. Función corriente meridional (Ψ) para $Re=3 \times 10^4$ y factor de forma 0.5

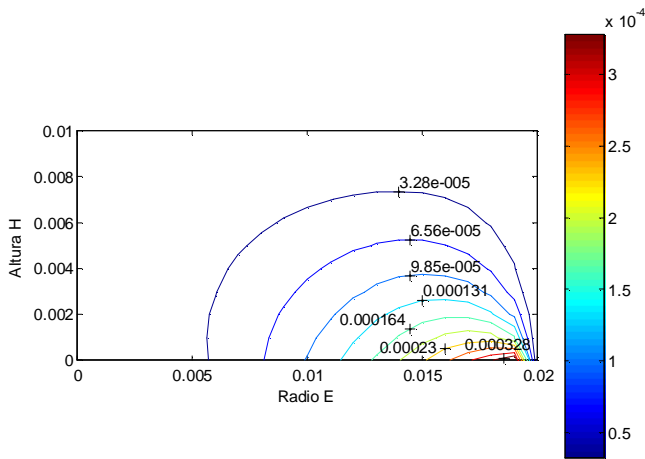


Figura 9. Función circulación (Γ) para $Re=3 \times 10^4$ y factor de forma 0.5

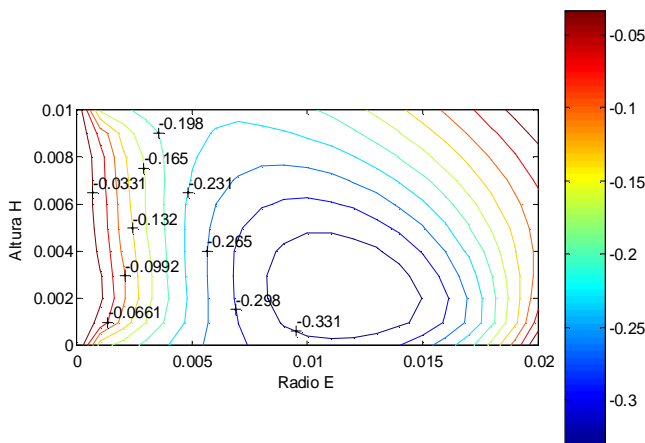


Figura 10. Función vorticidad tangencial (ξ) para $Re=3 \times 10^4$ y factor de forma 0.5

numéricos son menores. Para este caso el valor máximo es de -0.0658 . Esta disminución es consecuencia del incremento de la frontera rígida en el sistema, lo cual ocasiona mayor fricción y menor intensidad en la rotación. Finalmente, el recipiente con relación geométrica 0.5 (Figura 10) muestra un comportamiento parecido a los dos anteriores pero con valores distintos. En este caso el valor máximo es de -0.331 . El incremento de su magnitud es consecuencia del aumento de la frontera en movimiento, es decir, al incrementar el tamaño del disco la intensidad de la rotación del fluido se ve favorecida. Haciendo una comparación entre el sistema con relación geométrica 2 respecto al de 1, se encontró que la función vorticidad se redujo un 65.91%, y al comparar el sistema con relación geométrica 0.5 respecto al de 1, se encontró que dicha función tuvo un aumento de 0.7 veces.

6. Conclusiones

El propósito de este trabajo ha sido estudiar el comportamiento de las funciones corriente meridional (Ψ), circulación (Γ) y vorticidad tangencial (ξ) que se generan en el interior de un cilindro cerrado que tiene el fondo giratorio y la tapa superior y envolvente sin movimiento. El estudio consistió en modelar y resolver en forma numérica las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas polares cilíndricas para un fluido viscoso e incompresible de propiedades físicas constantes. Los resultados se presentaron mediante gráficas en las que se compararon dichas funciones, para un número de Reynolds de 3×10^4 y para un factor de forma (alto/radio) del recipiente de 0.5, 1.0 y 2.0. Los resultados mostraron que el valor de la función corriente (Ψ) es dependiente del radio y de la altura del depósito, pues al aumentar el tamaño del impulsor su magnitud se vio favorecida y al incrementar la altura del recipiente su valor disminuyó. En cambio, el valor de la función circulación (Γ) fue dependiente solamente del radio, pues al aumentar el tamaño del impulsor su valor se incrementó y al aumentar la altura del recipiente su valor se mantuvo constante. La vorticidad tangencial (ξ), al igual que la función corriente, es dependiente del radio y de la altura del depósito, pues al aumentar el tamaño del impulsor su magnitud se vio favorecida y al incrementar la altura del recipiente su valor disminuyó. Haciendo una comparación entre el sistema con relación geométrica 2 respecto al de 1, se encontró que la función corriente disminuyó un 29.63%; que la circulación permaneció constante y que la vorticidad se redujo un 65.91%. Por otro lado, al comparar el sistema con relación geométrica 0.5 respecto al de 1, se encontró que la función corriente aumentó 1.4 veces, que la circulación

se incrementó 3.45 veces y que la vorticidad tuvo un aumento de 0.7 veces.

Referencias

1. Pao H-P. (1972) Numerical solution of the Navier Stokes equations for flows in the disk-cylinder system. *Phys. Fluids*. 15(1):4-11
2. Bertelá M., Gori F. (1982) Laminar flow in a cylindrical container with a rotating cover. *J. Fluids Eng.* 104 (1):31-39
3. Lang E., Sridhar K., Wilson N.W. (1994) Computational study of disk driven rotating flow in a cylindrical enclosure. *Journal of fluids engineering*. 116(4):815-820
4. Landau y Lifshitz. (1982) *Fluids Mechanics*. Vol. 6. Pergamon Press
5. Tijonov A. N., Samarsky A.A. (1980) *Ecuaciones de la física matemática*. Edit. MIR, Moscú, pp 1-29
6. Gerber N. (1975) Properties of rigidly rotating liquids in closed partially filled cylinders. *ASME, Transactions, Series E - Journal of Applied Mechanics*. 42:734-735
7. Lizardi R. A, et. al. (2005) Flujo rotatorio en un medio finito con superficie rígida para tres factores de forma y distintos números de Reynolds. En *Memorias 4° Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*. Instituto Politécnico Nacional. México. D.F. 1(1):1-6
8. Lizardi R. A, et. al. (2002) Análisis del gradiente de presión de un fluido en vórtice libre contenido en un cilindro abierto. En *Memorias II Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas*. Guanajuato México. 1(1):1-6