

Modelado del daño en sólidos mediante formulaciones variacionales de discontinuidades interiores

Jaime Retama Velasco · A. Gustavo Ayala Milián

Recibido: Marzo 2010, Aceptado: Abril 2010

©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2010

Resumen En este artículo se presentan diferentes formulaciones variacionales para el modelado del daño en sólidos mediante la formulación de *discontinuidades interiores*. Inicialmente se establece un funcional de energía para un medio continuo; y a partir de éste se desarrollan las formulaciones de desplazamientos y mixta de desplazamientos-deformaciones del método de los elementos finitos para un sólido donde el daño se modela como una discontinuidad. Para validar la consistencia teórica de las formulaciones desarrolladas, al final del artículo se presenta un ejemplo de aplicación, y de su análisis se emiten comentarios y conclusiones.

MODELING OF DAMAGE IN SOLIDS BY VARIATIONAL FORMULATIONS OF EMBEDDED DISCONTINUITIES

Summary This paper presents different variational formulations for the modeling of damage in solids by the *embedded discontinuity* formulation. Initially the energy functional, for a continuum medium, is presented from which; the displacement and mixed strain-displacement formulations, of the finite element method, are developed for a solid where the damage is modeled as a discontinuity. To validate the theoretical consistency of the developed formulations, a numerical example is presented. Comments and conclusions, derived from this study, are given at the end of the paper.

J. Retama Velasco · A. G. Ayala Milián
Universidad Nacional Autónoma de México
Instituto de Ingeniería
Departamento de Mecánica Aplicada
Ciudad Universitaria, México D. F., CP. 04510
Tel.: 52 5556233508
e-mail: JRetamaV@iingen.unam.mx; GAyalaM@iingen.unam.mx

1. Introducción

El problema de la simulación numérica y computacional del daño experimentado por un sólido, es un tema de interés en diversas áreas de la ciencia cuya complejidad ha dado lugar al desarrollo de nuevos modelos numéricos que permiten simular el proceso de degradación de los materiales ante diversas condiciones de carga, que eventualmente llevan al sólido al colapso.

En este contexto, se tienen modelos numéricos que consideran el problema de daño como una degradación de las propiedades mecánicas del material sin la necesidad de redefinir la cinemática del continuo; este tipo de modelos incluyen al de *agrietamiento distribuido* y el de *daño continuo* [1,2,3]. En esta misma dirección se encuentran los modelos donde además de modificar la ley constitutiva del material de acuerdo al daño que éste experimenta, modifican la cinemática del continuo al enriquecer los campos en los que se requiere un comportamiento discontinuo; modelos como el del *elemento finito extendido*, XFEM por sus siglas en inglés, y el de *partición de la unidad* pertenecen a este tipo de modelos numéricos [4].

Estrictamente hablando los modelos anteriormente mencionados distribuyen el daño en todo el elemento, en su discretización mediante el método de los elementos finitos (MEF); sin embargo esto no permite modelar correctamente grietas localizadas o procesos de daño en materiales donde claramente existe una discontinuidad que provoca una descarga de las partes en las que el sólido se divide. Para simular este tipo de problemas de daño, se han desarrollado modelos, como el de discontinuidades interiores (DI) que sitúan el daño, en consistencia con el problema físico, mediante una discontinuidad física dentro del elemento [5,6,7]; esto se

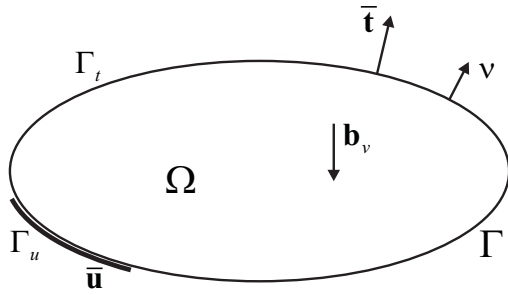


Figura 1. Sólido continuo

logra al enriquecer el campo de desplazamientos y/o de deformaciones.

En este artículo se estudia el daño mediante el modelo de DI en su aproximación discreta; en la que el campo de desplazamientos es discontinuo y en la parte de la discontinuidad se utiliza una relación constitutiva del tipo tracción-salto mientras que en el continuo se utiliza una del tipo esfuerzo-deformación.

2. Formulación variacional

A continuación se presenta el funcional de energía, para un sólido sin discontinuidades, correspondiente al principio variacional general canónico, dentro de la teoría de la elasticidad [8], de *Veubeke-Hu-Washizu* (VHW); el cual establece

$$\delta\Pi = 0 \quad (1)$$

Sea un sólido continuo, Figura 1, con volumen Ω , frontera Γ y fuerzas de cuerpo \mathbf{b}_v aplicadas en Ω . Las condiciones esenciales de frontera $\bar{\mathbf{u}}$ están definidas en Γ_u mientras que, las tracciones $\bar{\mathbf{t}}$ correspondientes a las condiciones naturales de frontera se aplican en Γ_t ; de tal forma que $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ y $\emptyset = \Gamma_u \cap \Gamma_t$. El vector normal $\boldsymbol{\nu}$ está definido en la superficie Γ_t .

El funcional de energía para este sólido se define como

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{t}) = & \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) + \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{b}_v \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \\ & \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \mathbf{t} \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) d\Gamma \end{aligned} \quad (2)$$

donde \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{t} son los campos de: desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y tracciones, respectivamente; independientes entre ellos y que son sujetos a variación. $\boldsymbol{\varepsilon}^u$ es un campo de deformaciones derivadas del campo

de desplazamientos mediante $\nabla^s \cdot \mathbf{u}$, y la función $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})$ es la densidad de energía de deformación derivada del campo integrable $\boldsymbol{\varepsilon}$.

En general cualquier formulación derivada del principio variacional general, ecuación (1), considera que las condiciones esenciales de frontera no se satisfacen, por lo que estas se incluyen en el funcional de energía, ecuación (2). Si estas condiciones de frontera se satisfacen *a priori*, $\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u} = 0$; el funcional de energía se reduce a uno de tres campos independientes, [9],

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{t}) = & \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) + \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{b}_v \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \\ & \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

donde la función de densidad de energía de deformación $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})$ se puede definir, para un cuerpo elástico, como

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\varepsilon}} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ los esfuerzos derivados del campo de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ mediante, $\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$. Si en la ecuación (4) se considera un tensor constitutivo \mathbf{C} para un medio elástico lineal, la función de densidad de energía de deformación se reescribe,

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

Las funciones que extremizan el funcional de la ecuación (3) se determinan de la condición de estacionaridad dada por la ecuación (1).

Al obtener la variación del funcional definido en la ecuación (3) y aplicando el teorema de la divergencia, se puede mostrar que las ecuaciones de Euler-Lagrange de dicho funcional corresponden a las siguientes ecuaciones de campo,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}_v = \mathbf{0} & \quad \text{en } \Omega \quad \text{equilibrio interno} \\ \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla^s \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} & \quad \text{en } \Omega \quad \text{compatibilidad de deformaciones} \\ \boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0} & \quad \text{en } \Omega \quad \text{ley constitutiva} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} - \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0} & \quad \text{en } \Gamma_t \quad \text{condiciones naturales de frontera} \end{aligned} \quad (6)$$

las cuales representan el *Problema de Valores en la Frontera* (PVF) asociado a un sólido sin discontinuidades, dentro de la teoría de la elasticidad.

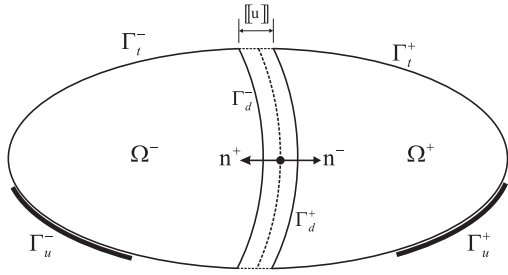


Figura 2. Sólido con una discontinuidad Γ_d

3. Discontinuidades interiores

Una vez establecido el funcional de energía para un sólido continuo, es posible tomar en cuenta dentro de éste la energía disipada en la frontera de una discontinuidad. Para ello, sea un sólido dividido por una discontinuidad Γ_d en dos subdominios Ω^- y Ω^+ , Figura 2, donde la normal a la discontinuidad es el correspondiente vector unitario \mathbf{n} y el desplazamiento relativo entre ambos subdominios se define por el salto $[[\mathbf{u}]]$ en el campo de desplazamientos. En estas condiciones el funcional de la ecuación (3), para un cuerpo elástico, se reescribe como

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{t}) = & \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}) + \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{b}_v \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \\ & \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \psi([[\mathbf{u}]]) d\Gamma \end{aligned} \quad (7)$$

donde $\psi([[\mathbf{u}]])$ es la función de densidad de energía libre, definida en la discontinuidad Γ_d , derivada del campo $[[\mathbf{u}]]$. Para una discontinuidad con un comportamiento elástico, esta función se escribe

$$\psi([[\mathbf{u}]]) = \int_0^{[[\mathbf{u}]]} \mathbf{t} d[[\mathbf{u}]] \quad (8)$$

donde \mathbf{t} son las tracciones en la discontinuidad derivadas de una relación constitutiva cohesiva tracción-salto, $\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot [[\mathbf{u}]]$. Para una discontinuidad con un comportamiento elástico lineal la función $\psi([[\mathbf{u}]])$ se reescribe como

$$\psi([[\mathbf{u}]]) = \frac{1}{2} [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{T} \cdot [[\mathbf{u}]] \quad (9)$$

A partir del funcional general (7) es posible generar una familia de formulaciones variacionales para la aproximación de discontinuidades interiores, al considerar

campos que hacen que algunas de las ecuaciones definidas en (6) se satisfagan *a priori*. En este artículo únicamente se derivan los funcionales de energía para las formulaciones: mixta de desplazamientos-deformaciones y de desplazamientos.

3.1. Formulación mixta de desplazamientos-deformaciones

Si se considera en la ecuación (7) que los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ se derivan de las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ al hacer $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$, se obtiene el funcional de energía para la formulación mixta, $\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, [[\mathbf{u}]]) = & \int_{\Omega} [\boldsymbol{\varepsilon}^u : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{b}_v \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \\ & \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \psi([[\mathbf{u}]]) d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

3.2. Formulación de desplazamientos

Para derivar el funcional de energía para la formulación de desplazamientos a partir de la ecuación (7) se considera que, adicionalmente a lo expuesto para la formulación mixta, el campo de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ se deriva del campo de desplazamientos; esto es $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \cdot \mathbf{u}$,

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, [[\mathbf{u}]]) = & \int_{\Omega} [\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{b}_v \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \\ & \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \psi([[\mathbf{u}]]) d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

4. Aproximación mediante el elemento finito

En esta sección, para una aproximación de elementos finitos, se definen los campos interpolados de manera independiente para cada una de las formulaciones variacionales presentadas anteriormente. Todas las formulaciones de discontinuidades interiores derivadas en la sección anterior, cumplen con una consistencia variacional que como resultado dan matrices de rigideces simétricas [5]; algo que no sucede con otras formulaciones donde se hace uso del método de las deformaciones mejoradas que dan lugar a matrices no simétricas [10, 11].

Los campos de desplazamientos \mathbf{u} y deformaciones independientes $\boldsymbol{\varepsilon}$ se aproximan como

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{N}_c \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (12)$$

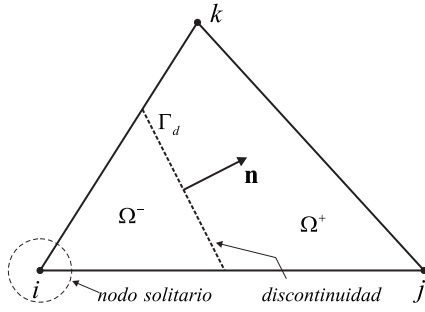


Figura 3. Definición del nodo solitario

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{e} \quad (13)$$

y a partir de la ecuación (12) se obtienen las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}^u$ mediante

$$\boldsymbol{\varepsilon}^u = \nabla^s \cdot \mathbf{u} = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_c \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (14)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}$ y $\tilde{\mathbf{u}}$ son los desplazamientos nodales regulares y los no regulares, relacionados con el salto $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$, respectivamente. \mathbf{N} y \mathbf{N}_c son las funciones de forma estándar y las relacionadas con el nodo solitario i , Figura 3; \mathbf{B} y \mathbf{B}_c son las respectivas matrices de transformación construidas con las derivadas de las funciones de forma. Finalmente \mathbf{N}_e contiene las funciones de forma relacionadas con el campo de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Sustituyendo las ecuaciones (12)-(14) en el funcional de energía para la formulación mixta, ecuación (10), y aplicando la condición de estacionaridad dada por la ecuación (1), se llega al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{e\hat{u}} & \mathbf{K}_{e\tilde{u}} \\ \mathbf{K}_{e\hat{u}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{e\tilde{u}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e} \\ \hat{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^{ext} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

donde

$$\mathbf{K}_{ee} = - \int_{\Omega} \mathbf{N}_e^T : \mathbf{C} : \mathbf{N}_e d\Omega \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_{e\hat{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_e^T : \mathbf{C} : \mathbf{B} d\Omega \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_{e\tilde{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_e^T : \mathbf{C} : \mathbf{B}_c d\Omega \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}} = \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_c^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_c d\Gamma \quad (19)$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b}_v d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (20)$$

Para obtener el sistema de ecuaciones algebraicas correspondiente a la formulación de desplazamientos, se aproxima únicamente el campo de desplazamientos \mathbf{u} y a partir de éste se obtienen las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}^u$. Sustituyendo las ecuaciones (12) y (14) en el funcional de energía (11) y al aplicar la condición de estacionaridad (1) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\hat{u}\hat{u}} & \mathbf{K}_{\hat{u}\tilde{u}} \\ \mathbf{K}_{\hat{u}\tilde{u}}^T & \mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{ext} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

donde

$$\mathbf{K}_{\hat{u}\hat{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T : \mathbf{C} : \mathbf{B} d\Omega \quad (22)$$

$$\mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_c^T : \mathbf{C} : \mathbf{B}_c d\Omega \quad (23)$$

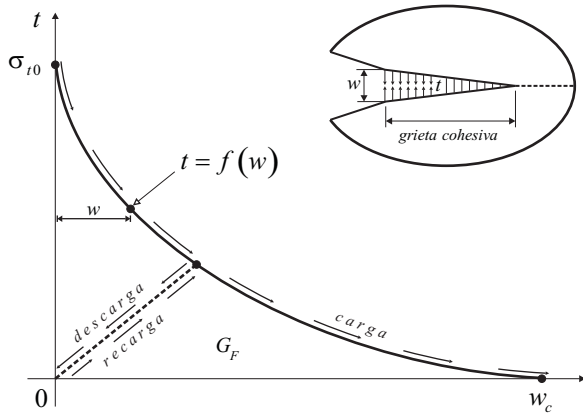
$$\mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_c^T : \mathbf{C} : \mathbf{B}_c d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_c^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_c d\Gamma \quad (24)$$

Como se puede observar en las ecuaciones (15) y (21), las matrices de coeficientes son simétricas. Para el caso donde se utilice un relación constitutiva para una falla mixta I-II, en la que los efectos de ambos modos estén acoplados, la estructura simétrica del tensor constitutivo \mathbf{T} se pierde.

5. Modelo de daño discreto

Para modelar la evolución del daño en una discontinuidad en la que ocurre el fenómeno no lineal asociado al daño, se utilizan relaciones constitutivas cohesivas tracción-salto [2,12]; en las que se consideran los modos posibles de falla en la discontinuidad asociados al fenómeno físico del problema.

El modelo constitutivo, utilizado en este estudio, considera que el comportamiento del material se define por el esfuerzo máximo a tensión del material σ_{t_0} y la energía de fractura G_F . La discontinuidad se introduce cuando el esfuerzo principal máximo σ_I es mayor al


Figura 4. Curva de ablandamiento

esfuerzo σ_{t_0} , similar al criterio de Rankine en teoría de plasticidad clásica.

La función que describe el estado de carga en la discontinuidad (carga/descarga) f está dada por:

$$f = \langle \llbracket u \rrbracket_n \rangle - \kappa \leq 0 \quad (25)$$

donde $\llbracket u \rrbracket_n$ es la componente normal del salto de desplazamientos. El símbolo $\langle \cdot \rangle$ representa los corchetes de McAuley con los que se toman en cuenta solo los valores positivos del salto normal y κ es el máximo valor alcanzado de $\llbracket u \rrbracket_n$, en el paso actual de carga, definido como

$$\kappa = \kappa(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) = \max \langle \llbracket u \rrbracket_n \rangle \quad (26)$$

Las tracciones en la discontinuidad se relacionan con el salto de los desplazamientos mediante

$$t_n = \sigma_{t_0} \left[1 - \frac{\kappa}{w_c} \right]^n \quad (27)$$

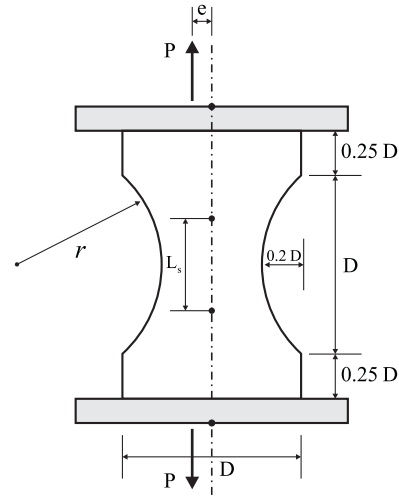
donde w_c es el máximo salto normal permitido en la discontinuidad y n es una constante que define la forma de la curva de ablandamiento, Figura 4.

Para obtener una disipación de energía consistente con la energía de fractura, las tracciones se relacionan con G_F mediante,

$$G_F = \int_0^{w_c} t_n \, dw \quad (28)$$

De la ecuación (27) se deriva el tensor constitutivo tangente \mathbf{T} al obtener la derivada de \mathbf{t} respecto a la variable κ , esto es

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \kappa} = -\frac{n \sigma_{t_0}}{w_c} \left[1 - \frac{\kappa}{w_c} \right]^{(n-1)} \quad (29)$$


Figura 5. Placa entallada

En el momento en que ocurre la discontinuidad, se tienen las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa_0 \\ \llbracket u \rrbracket_n &= \kappa_0 \\ t_n &= \sigma_I = \sigma_{t_0} \\ t_s &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

6. Ejemplo de aplicación

Para mostrar la validez del modelo propuesto, se presenta un ejemplo de aplicación donde se modela el comportamiento de una placa entallada sometida a tensión. La geometría del espécimen se muestra en la Figura 5 cuyo espesor es de 100 mm. La dimensión característica D es de 200 mm y el radio r de 145 mm. La carga se aplica con una excentricidad de $e = \frac{D}{50}$ (mm) con lo que se garantiza que no se presenten esfuerzos de compresión. Para comparar los resultados numéricos con los experimentales, se calculó la deformación al centro del elemento entre dos puntos separados una distancia $L_s = 0.6D$, como se ilustra en la Figura 5.

Con la finalidad de transmitir uniformemente el efecto de la carga excéntrica a todo el sólido, al espécimen se le colocaron dos placas infinitamente rígidas; una en la parte superior y otra en la parte inferior. Las propiedades del material utilizadas en el análisis fueron: módulo de elasticidad $E = 39800 \text{ MPa}$, relación de Poisson de $\nu = 0.2$, esfuerzo de falla a tensión $\sigma_{t_0} = 2.57 \text{ MPa}$ y energía de fractura $G_F = 0.1219 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$.

La geometría y las propiedades mecánicas utilizadas corresponden a experimentos de laboratorio desarrollados en la Universidad Tecnológica de Delft en Holanda

por Van Vliet [13]; cuya finalidad fué estudiar el efecto de escala de los especímenes en su comportamiento mecánico.

En la Figura 6 se muestra la discretización del problema mediante elementos finitos triangulares de deformación constante, considerando en la malla la simetría del problema físico.

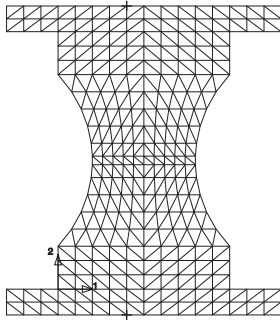


Figura 6. Mallado mediante elementos triangulares

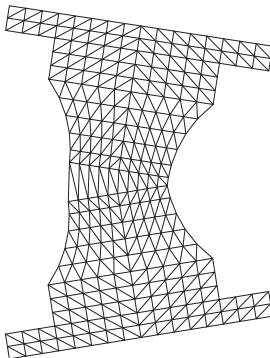


Figura 7. Configuración deformada del espécimen

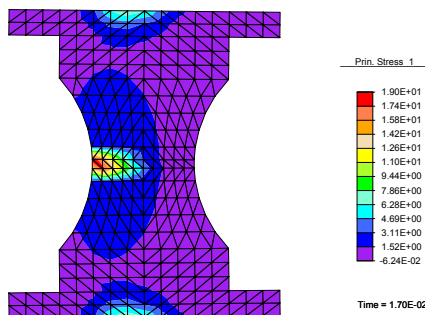


Figura 8. Esfuerzos principales σ_I para un estado con daño

Los análisis numéricos correspondientes se realizaron con un control de desplazamientos hasta que el

especímen alcanza un estado avanzado de daño. Se puede observar que una vez que la grieta ha evolucionado totalmente, las partes en que queda dividido el espécimen presentan un movimiento de cuerpo rígido, Figura 7.

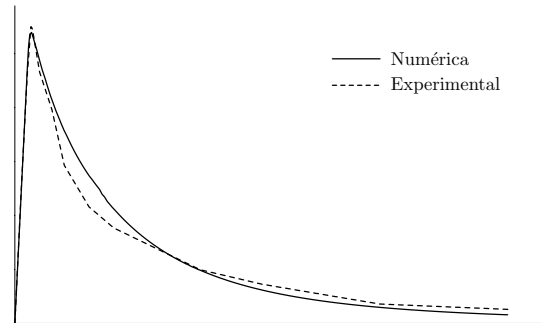


Figura 9. Curvas de ablandamiento del espécimen

La respuesta global de la estructura se obtuvo al graficar la carga aplicada contra la deformación. La deformación se calcula como el desplazamiento relativo entre los puntos originalmente separados una distancia L_s . En la Figura 9 se muestran dos respuestas; una correspondiente a la simulación numérica utilizando un ablandamiento exponencial, y la otra correspondiente a los resultados experimentales reportados por Van Vliet [13].

Como se puede observar, los resultados numéricos obtenidos utilizando la formulación de DI presentada son muy cercanos a los reportados del experimento de laboratorio sin embargo; la carga máxima obtenida numéricamente es menor a la experimental. Este efecto se atribuye al hecho de que el modelo de daño empleado considera que el modo II de falla ocurre con el modo I de manera frágil sin disipación de energía.

7. Conclusiones

En este artículo, se presentó una formulación variacional del problema de daño, en materiales cuasi-frágiles, mediante discontinuidades interiores en su aproximación discreta; utilizando la formulación de desplazamientos del método de los elementos finitos para aproximar las ecuaciones que gobiernan el problema. En ellas se observa que el equilibrio en la discontinuidad se satisface de manera consistente a partir de lo establecido en el funcional de energía; hecho que no sucede en otras formulaciones de discontinuidades interiores, [11, 10], donde la continuidad de tracciones se impone de

manera fuerte al modificar las ecuaciones que gobiernan al problema.

Se presentó un ejemplo de aplicación particular a la formulación de desplazamientos para validar su consistencia teórica. Con la finalidad de reproducir los resultados experimentales del problema, se definió una trayectoria de falla. Estos resultados pueden ser comparados con un modelado mediante elementos de interfaz, que ha mostrado ser un punto de comparación para este tipo de simulaciones numéricas.

Es importante mencionar que esta formulación de discontinuidades interiores en particular, presenta problemas de continuidad de tracciones en la discontinuidad. Para eliminar este problema y lograr el equilibrio, de manera débil, se han implementado dos criterios que serán discutidos detalladamente en el trabajo de doctorado del primer autor, [5].

A continuación se enumeran algunas de las conclusiones obtenidas en el presente trabajo para la formulación variacional y su implementación numérica, de la aproximación discreta de discontinuidades interiores:

1. la formulación variacional de DI presentada, impone de manera natural la continuidad de tracciones en la frontera de la discontinuidad al tomar en cuenta en el funcional la energía disipada en la discontinuidad,
2. la energía disipada en el proceso de daño es consistente con la energía de fractura G_F del material, obtenida en los experimentos de laboratorio reportados,
3. se puede observar en la Figura 9 que la simulación numérica, utilizando el modelo de DI presentado, reproduce satisfactoriamente la curva de ablandamiento del problema físico obtenida experimentalmente.

Agradecimientos

Los resultados presentados y divulgados en este artículo provienen del proyecto de investigación **IN121009-3** de la **DGAPA** de la *Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)*. La beca del primer autor fué proporcionada por el *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* de México (**CONACYT**).

Referencias

1. Rots J.G. (1988) Computational modeling of concrete fracture. Ph.D. Thesis. Delft University of Technology. Delfth. Holanda
2. Bazant Z.P., Planas J. (1998), *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press, Boca Raton
3. Juárez G. (2010) Aproximación del proceso de falla en sólidos con elementos finitos mixtos usando modelos de daño continuos. En CIMN 2010. *Congreso Internacional en Métodos Numéricos*. 3 al 5 de febrero de 2010. Guanajuato. México
4. Simone A. (2003) Continuous-discontinuous modelling of failure. Ph.D. Thesis. Delft University of Technology. Delfth. Holanda
5. Retama J. (2010) Formulation and approximation to problems in solids by embedded discontinuity models. Ph.D. Thesis, National Autonomous University of Mexico, Mexico
6. Retama J. (2010) Modelado de la propagación de grietas en sólidos mediante formulaciones variacionales de discontinuidades interiores y elementos finitos mixtos. En CIMN 2010, *Congreso Internacional en Métodos Numéricos*. 3 al 5 de febrero de 2010. Guanajuato. México
7. Dias-da-Costa D., Alfaiate J., Sluys L.J., Júlio E. (2009) A discrete strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*. 76:1176–1201
8. Fraeijs-De-Veubeke B. (2001) Displacement and equilibrium models in the finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 52:287–342
9. Washizu K. (1982) *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press. Oxford
10. Oliver J. (1996) Modelling Strong Discontinuities in Solid Mechanics Via Strain Softening Constitutive Equations. Part 1: Fundamentals. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 39:3575–3600
11. Alfaiate J. (2000) Strong Discontinuities Embedded in Finite Elements. Technical Report Relatorio ICIST, DTC no. 09/00. Instituto Superior Técnico. Lisboa. Portugal
12. Hillerborg A., Modeer M., Petersson P.E. (1976) Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*. 6:773–782
13. Van Vliet M.R.A. (2000) Size effect in tensile fracture of concrete and rock. Ph.D. Thesis. Delft University of Technology. Delfth. Holanda