

# Grado en Matemáticas

---

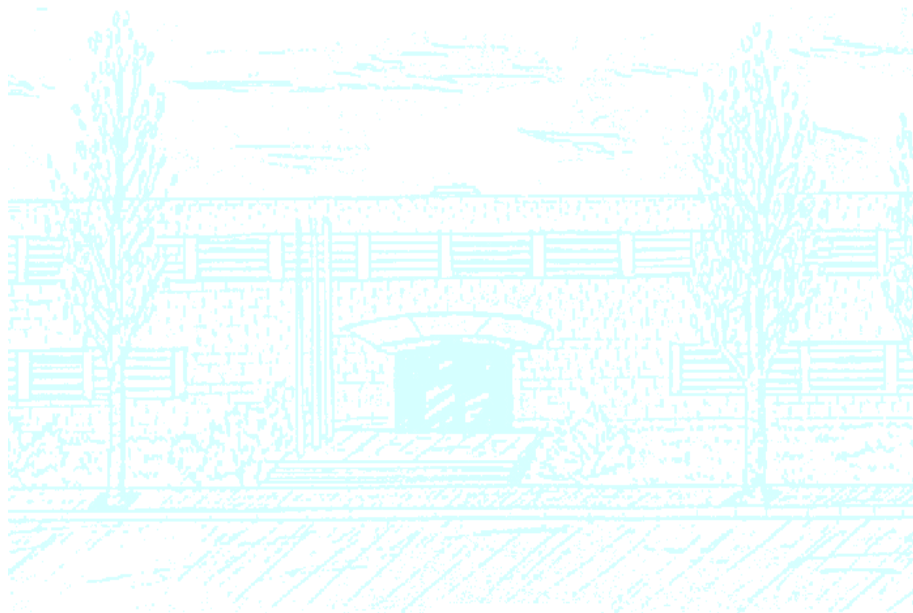
**Título:** El grupo F de Thompson

**Autor:** Rebeca Guardado Fuente

**Director:** Josep Burillo Puig

**Departamento:** Matemática Aplicada IV

**Convocatoria:** 2014/2015





Universidad Politécnica de Cataluña  
Facultad de Matemáticas y Estadística

# El grupo $F$ de Thompson

Rebeca Guardado Fuente

Director: Josep Burillo

Matemática Aplicada IV

Junio 2015



# Resumen

**Palabras clave:** Grupos de Thompson, Teoría de Grupos, Generadores y Relaciones.

**MSC2010:** 20F65, 20F38.

El tema principal de este trabajo es la introducción del grupo  $F$  de Thompson, que fue definido el 1965 por Richard Thompson.

Nuestro objetivo principal es el estudio del grupo  $F$  de Thompson, partiendo de su definición y algunas de sus propiedades. Después, interpretaremos sus elementos como pares de diagramas de árbol y definiremos en ellos la composición. Posteriormente, estudiaremos la presentación infinita de este grupo y la unicidad de la forma normal para cualquier elemento  $f$  de  $F$ . Por último, demostraremos que  $F$  admite una presentación finita pese a ser un grupo infinito, mostrando una presentación con dos generadores y dos relaciones.



# Abstract

**Keywords:** Thompson's Groups, Group Theory, Generators and Relations.

**MSC2010:** 20F65, 20F38.

The main topic of this work is the introduction of the  $F$  Thompson's group, which was defined in 1965 by Richard Thompson.

Our main objective is the study of the  $F$  Thompson's group. First, we are going to introduce its definition and some of its properties. Later on, we are going to interpret its elements as a tree pair diagram and we are going to define the composition in them. After that, we are going to study the infinite presentation of this group and the uniqueness of the normal form for any element  $f$  of  $F$ . Finally, we are going to demonstrate that  $F$  admits one finite presentation in spite of being an infinite group, showing a presentation with two generators and two relations.





# Índice general

<b>1. Definiciones y resultados iniciales</b>	<b>11</b>
1.1. Definiciones . . . . .	11
<b>2. Árboles binarios</b>	<b>15</b>
2.1. Definiciones . . . . .	15
2.2. Existencia del par de diagramas de árbol . . . . .	16
2.3. Composición de árboles binarios . . . . .	21
<b>3. La presentación infinita</b>	<b>25</b>
3.1. Presentación . . . . .	25
3.2. Palabras positivas . . . . .	26
3.3. La forma normal . . . . .	34
<b>4. La presentación finita</b>	<b>39</b>
4.1. Equivalencia entre la presentación finita y la infinita . . . . .	39



# Introducción

Los grupos de Thompson fueron definidos en el año 1965 por Richard Thompson. El matemático presentó tres grupos  $F$ ,  $T$  y  $V$  que usó en sus trabajos sobre lógica en unas notas que no ha llegado a publicar.

En estas mismas notas, Thompson demostró que  $T$  y  $V$  eran los primeros ejemplos conocidos de grupos simples de orden infinito. Además, tenían la peculiaridad de que admitían una presentación finita.

Más adelante, el grupo  $F$  de Thompson fue usado en el campo de homotopías en relación a las funciones idempotentes salvo homotopías. Fueron Brown y Geoghegan, [1], quienes probaron que  $F$  es  $FP_\infty$ , dando así el primer ejemplo de grupo infinito  $FP_\infty$  libre de torsión.

Una de las cosas más destacables del grupo  $F$ , es que tras muchos intentos de diversos matemáticos en los últimos años, aún está abierta la conjetura de si es  $F$  un grupo *amenable*.

El objetivo principal de este trabajo es definir el grupo  $F$  de Thompson y estudiar sus diversas interpretaciones y presentaciones, llegando a probar que es un grupo infinito que admite una presentación finita. Lo dividiremos en cuatro secciones principales.

En la primera daremos la definición del grupo  $F$  de Thompson como un grupo de los homomorfismos del intervalo  $[0, 1]$  a él mismo, lineales a trozos con ciertas condiciones en los puntos donde no es diferenciable y en las pendientes de sus tramos lineales. Podremos ver también algunos ejemplos para familiarizarnos con sus elementos. También se incluirán algunos resultados iniciales.

En este trabajo podremos ver otras dos interpretaciones del grupo  $F$  a parte de la previamente definida como pares de árboles binarios y de forma algebraica a través de sus presentaciones. A medida que las vayamos presentando, podremos usarlas indistintamente para demostrar los diferentes resultados, según nuestras necesidades en las pruebas.

Por ello, en el apartado 3 veremos cómo representar de forma muy visual los elementos de  $F$  como pares de árboles binarios. La ventaja que nos presenta es la facilidad

de hacer composiciones entre los elementos. Demostraremos la existencia de este par de diagramas y dejaremos pendiente para el siguiente apartado la unicidad usando árboles irreducibles.

En las dos siguientes secciones veremos dos presentaciones para el grupo  $F$ . Primero veremos una presentación infinita y demostraremos que genera  $F$ . Esta presentación nos aportará la facilidad de trabajar algebraicamente y con unas relaciones muy sencillas. Demostraremos la existencia y unicidad de la forma normal para cualquier elemento de  $F$ . Esto comportará también la unicidad de la representación por un par de diagramas de árbol irreducibles.

Por último, acabaremos el trabajo demostrando que  $F$  es un grupo infinito que admite una presentación finita, con dos elementos y dos relaciones.

# Capítulo 1

## Definiciones y resultados iniciales

En esta sección definiremos el grupo de Thompson como un grupo de funciones lineales del intervalo unidad a él mismo. También veremos alguno de sus primeros resultados.

### 1.1. Definiciones

**1.1.1 Definición.** El grupo de Thompson  $F$  es el grupo formado por aplicaciones lineales a trozos definidas del intervalo  $[0,1]$  a él mismo. Estas aplicaciones son homeomorfismos que cumplen las siguientes condiciones:

1. Son lineales a trozos y conservan la orientación.
2. Tiene un número finito de puntos donde no es diferenciable. A estos puntos les llamaremos *breakpoints*.
3. Estos puntos son diádicos, es decir, de la forma  $\frac{a}{b}$ , donde  $a \in \mathbb{Z}$  y  $b$  es potencia de 2.
4. En los intervalos donde es diferenciable, la derivada es una potencia de 2.

**1.1.2 Ejemplo.** Sean  $f$  y  $g$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \\ 2x - 1, & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{x}{2} - \frac{3}{8}, & \frac{1}{4} < x \leq \frac{3}{4} \\ x, & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases},$$

vemos que se cumple la definición 1.1.1 y por lo tanto son ejemplos de elementos de  $F$  (ver figura 1.1).

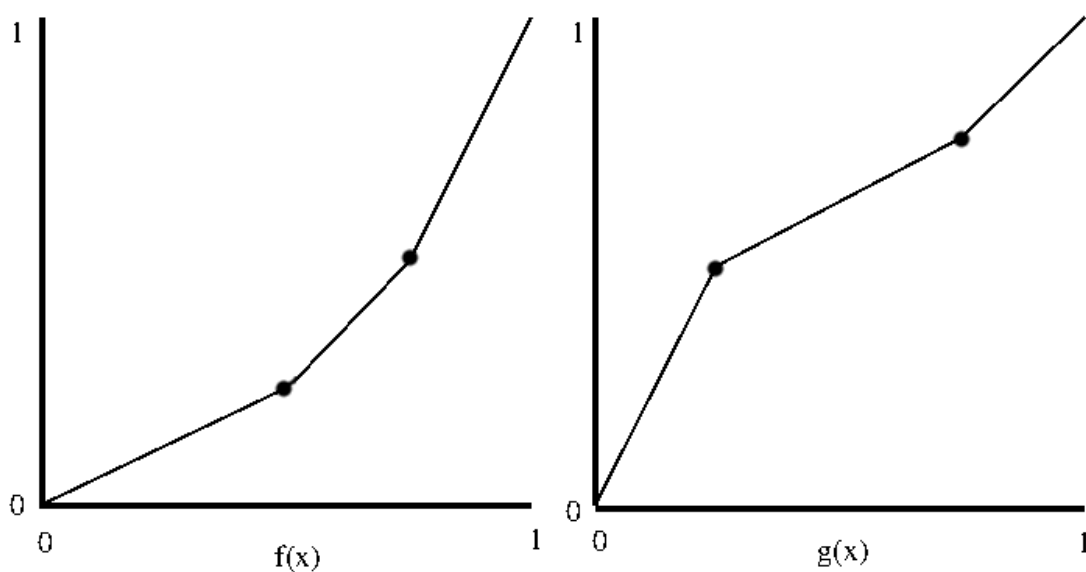


Figura 1.1: Funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ .

**Observación.** La función que define las imágenes del primer intervalo hasta llegar al primer *breakpoint* tiene forma

$$2^n x.$$

Por ello es fácil ver que envía puntos diádicos a puntos diádicos. Veamos qué sucede en cada tramo de definición de nuestra función (ver figura 1.2).

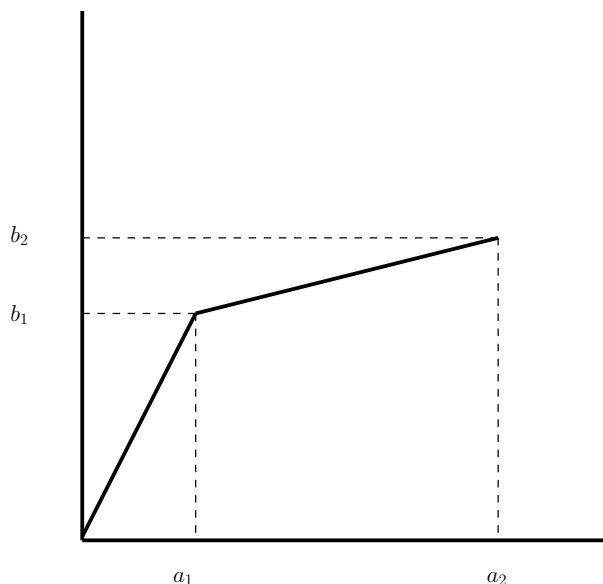


Figura 1.2: Representación de *breakpoints*

Sea  $a_1$  el número diádico tomado antes y  $b_1$  su imagen, tomemos un nuevo racional

diádico  $a_2$  y veamos que su imagen también lo es. Como nuestra gráfica se corresponde a un elemento de  $F$ , sabemos que la pendiente en sus tramos lineales es una potencia de 2. Supongamos que es  $2^m$  en este caso. Tenemos:

$$\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} = 2^m \Rightarrow b_2 = 2^m(a_2 - a_1) + b_1.$$

Es fácil ver que  $b_2$  será también un racional diádico. Por lo tanto, podemos concluir que los elementos de  $F$  envían diádicos a diádicos.

**1.1.3 Proposición.**  $F$  es un grupo con la composición de funciones.

*Demostración.* Para ver que es un grupo tenemos que comprobar varios puntos:

1. Sean  $f, g$  funciones pertenecientes a  $F$ , entonces la composición de ambas también pertenece a  $F$ .
2. Para todas funciones  $f, g, h$  pertenecientes a  $F$ ,  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .
3. Existe elemento neutro, es decir, existe una función  $i$  perteneciente a  $F$  tal que, para toda  $f$  de  $F$ ,  $f \circ i = i \circ f = f$ .
4. Existe elemento inverso, es decir, para toda función de  $F$ , existe una función  $f^{-1}$  tal que  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i$ .

Los tres primeros puntos son triviales, y la justificación del cuarto viene dada porque  $f$  es un homeomorfismo. El elemento inverso se puede obtener fácilmente como la reflexión de  $f$  respecto a la recta  $f(x) = x$ . Esta aplicación también pertenece al grupo de Thompson, pues sigue teniendo puntos diádicos como *breakpoints* y las pendientes son potencias de 2. □

**1.1.4 Proposición.** El grupo  $F$  es un grupo libre de torsión.

*Demostración.* Sea  $f$  un elemento cualquiera distinto de la identidad de  $F$  y sea  $[(a_0, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k), (a_{k+1}, b_{k+1})]$  su lista de *breakpoints*, donde  $(a_0, b_0) = (0, 0)$  y  $(a_{k+1}, b_{k+1}) = (1, 1)$ . Sea el primer  $i$  tal que  $a_i \neq b_i$ . Sabemos que existe porque si no  $f$  sería la identidad. La función  $f$  tiene pendiente  $2^j$  en el intervalo  $(a_{i-1}, a_i)$ , con  $j \neq 0$ . Por ello, el elemento  $f^n$  tendrá pendiente  $2^{jn}$ , que será diferente de 1, sea cual sea  $n$ . Por lo tanto, podemos concluir que  $f$  siempre tendrá orden infinito. □





# Capítulo 2

## Árboles binarios

En esta sección veremos otra forma de interpretar el grupo  $F$  de Thompson como pares de árboles binarios. Estos presentan grandes ventajas en el momento de trabajar con la composición de elementos de  $F$  y los usaremos en varias demostraciones de resultados posteriores.

### 2.1. Definiciones

Cada elemento de división diádica del intervalo  $[0,1]$  se puede representar usando un árbol binario, por ello veremos que los elementos de  $F$  vienen también representados por un par de este tipo de árboles.

**2.1.1 Definición.** Un árbol binario es un árbol cuyo vértice raíz tiene grado 2, y el resto tiene grado 3 (los llamaremos nodos) o grado 1 (en el caso de las hojas). Denominaremos *caret* al subgrafo formado por un vértice, las dos aristas que cuelgan de él y los vértices de los extremos.

Con los árboles binarios podemos representar divisiones diádicas del intervalo unidad. Consideremos la raíz el intervalo  $[0,1]$ . El hijo izquierdo corresponde al intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$  y el derecho  $[\frac{1}{2}, 1]$ . Si ahora subdividimos el intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$ , obtendremos  $[0, \frac{1}{4}]$  y  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ . Es fácil ver que el resultado de estas divisiones serán intervalos con extremos racionales diádicos. Del mismo modo, cualquier racional diádico se puede obtener a partir de este proceso.

**2.1.2 Definición.** Llamaremos par de diagramas de árbol a dos árboles binarios con el mismo número de hojas, que define un elemento de  $F$ . El primer árbol define una subdivisión del intervalo unidad origen y el segundo la división del intervalo de la imagen. El elemento se obtienen enviando linealmente los primeros intervalos a los segundos.

**2.1.3 Ejemplo.** Sea  $h(x)$  un elemento del grupo  $F$  de Thompson definido tal que

$$h(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{8} \\ x + \frac{3}{8}, & \frac{1}{8} < x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{x}{4} + \frac{9}{16}, & \frac{1}{4} < x \leq \frac{3}{4} \\ x, & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases},$$

podemos ver en la figura 2.1 cuál es su gráfica y qué par de diagramas de árbol le corresponde.

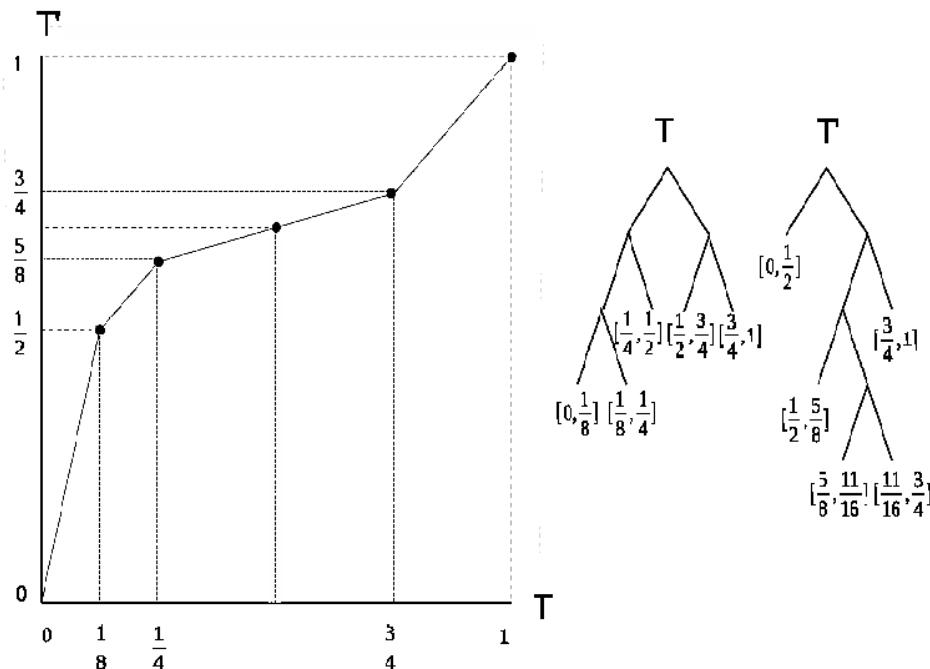


Figura 2.1: Gráfica y par de diagramas de árbol de  $h(x)$ .

## 2.2. Existencia del par de diagramas de árbol

Para poder usar los árboles binarios para representar los elementos del grupo de Thompson, demostraremos la existencia de estos para cada  $f$  de  $F$ .

**2.2.1 Proposición.** Todo elemento de  $F$  tiene un par de diagramas de árbol que lo representa.

*Demostración.* Sea  $f \in F$ , cuyos breakpoints sean  $[(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)]$ . Busquemos un entero  $n$  tal que para cada  $a_i$ , éste pueda ser expresado como un racional diádico con denominador  $2^n$ . Del mismo modo, tomamos un entero  $m$  tal que cada  $b_i$  se puede expresar como fracción de denominador  $2^m$ . Es decir, subdividimos el intervalo  $[0, 1]$  origen  $n$  veces en un árbol binario de profundidad  $n$ , de manera que todos los intervalos  $[a_i, a_{i+1}]$  estén representados por una o varias hojas del diagrama. Análogamente con el intervalo imagen. Además, sabemos que en los intervalos definidos por los *breakpoints* (y en sus subdivisiones) la función es lineal. En el caso de que  $n$  y  $m$  sean distintos, quiere decir que hay que seguir haciendo divisiones en los árboles.

Consideremos nuestra  $f$  restringida a un intervalo  $[a_i, a_{i+1}]$ . Sabemos que

$$a_{i+1} - a_i = \frac{l_i}{2^n},$$

ya que hemos comentado que ambos extremos del intervalo se pueden escribir con un  $2^n$  en el denominador. Además, éste  $l_i$  se corresponde al número de hojas que ocupa el intervalo en el árbol que hemos definido previamente.

Sea  $2^{r_i}$  la pendiente de nuestra función en el intervalo  $[a_i, a_{i+1}]$ , por la definición de la misma, tenemos que

$$2^{r_i} = \frac{b_{i+1} - b_i}{a_{i+1} - a_i} = \frac{b_{i+1} - b_i}{\frac{l_i}{2^n}} = \frac{2^n(b_{i+1} - b_i)}{l_i}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$b_{i+1} - b_i = \frac{l_i 2^{r_i}}{2^n} = \frac{l'_i}{2^m}$$

para cierto entero  $l'_i$ , que representa el número de hojas que ocupa el intervalo  $[b_i, b_{i+1}]$  en el árbol imagen. Podemos observar que

$$l'_i = \frac{l_i 2^{r_i} 2^m}{2^n} = l_i 2^{s_i},$$

donde  $s_i = r_i + m - n$ . Según el signo de  $s_i$ , tenemos tres casos.

1. Si  $s_i > 0$ , como  $l'_i = 2^{s_i} l_i$ , tenemos que  $l'_i > l_i$ , y por tanto el árbol imagen tiene más hojas que el de origen. Por ello, las hojas de la preimagen tienen que dividirse en  $2^{s_i}$  hojas cada una.
2. Si  $s_i = 0$ , estamos en el caso de que  $l_i = l'_i$ , y por ello el número de hojas de un diagrama se corresponde con el del otro y no hay que hacer nuevas subdivisiones.
3. Si  $s_i < 0$ , entonces  $l_i > l'_i$ . En este caso es el árbol origen el que tiene más hojas y hay que dividir cada una de las de la imagen en  $2^{-s_i}$ .

Con esta construcción obtenemos un par de diagramas de árbol que tienen el mismo número de hojas y que son una representación de la función  $f$ .  $\square$

La mejor forma de entender esta demostración es seguirla con una función concreta.

**2.2.2 Ejemplo.** Consideremos la función con la siguiente lista de *breakpoints*:

$$\left[ \left( \frac{1}{8}, \frac{1}{2} \right), \left( \frac{1}{4}, \frac{5}{8} \right), \left( \frac{1}{2}, \frac{11}{16} \right), \left( \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right) \right].$$

En este caso podemos ver que, siguiendo la demostración anterior, la primera coordenada de todos los *breakpoints* puede escribirse como un racional con un 8 en el denominador. Por lo tanto,  $n = 3$ . Análogamente, en el caso de la segunda coordenada,  $m = 4$ .

Por ello, construimos dos árboles binarios, uno de profundidad 3 que será el árbol origen, y otro de profundidad 4 que será el árbol imagen (ver imagen 2.2).

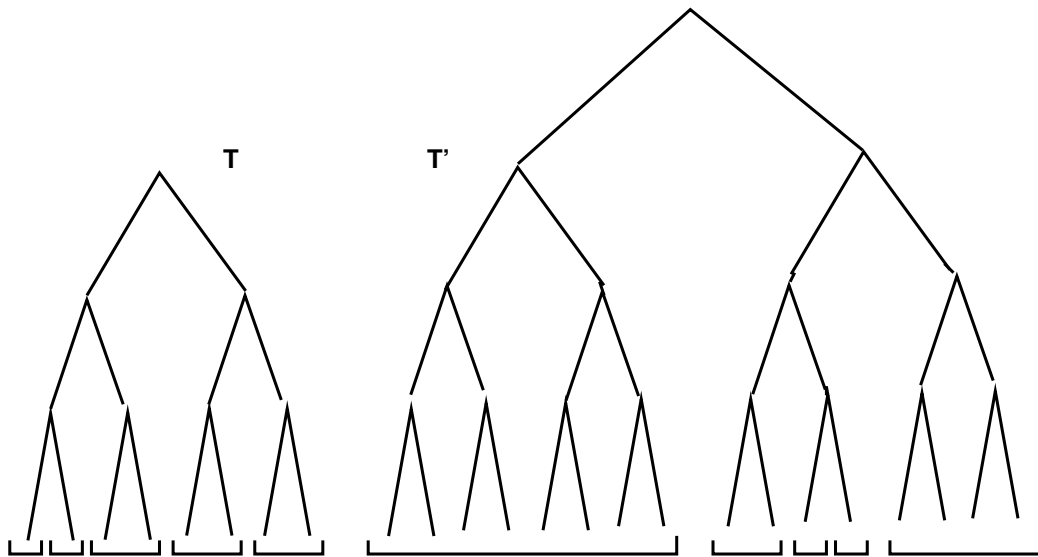


Figura 2.2: Par de diagramas de árbol.

Siguiendo la demostración:

$$\begin{aligned}
 a_1 - a_0 &= \frac{1}{8} - 0 = \frac{l_0}{8} \Rightarrow l_0 = 1, \\
 b_1 - b_0 &= \frac{1}{2} - 0 = \frac{l'_0}{16} \Rightarrow l'_0 = 8, \\
 l'_0 &= 2^{s_0} l_0 \Rightarrow s_0 = 3.
 \end{aligned}$$

Con esto vemos que, de los árboles definidos antes, el primer intervalo corresponde a una hoja en el diagrama de origen y a 8 en el de imagen. Por ello, tenemos que dividir la primera hoja del árbol preimagen en 8, añadiéndole un árbol de profundidad 3 (ver figura 2.3).

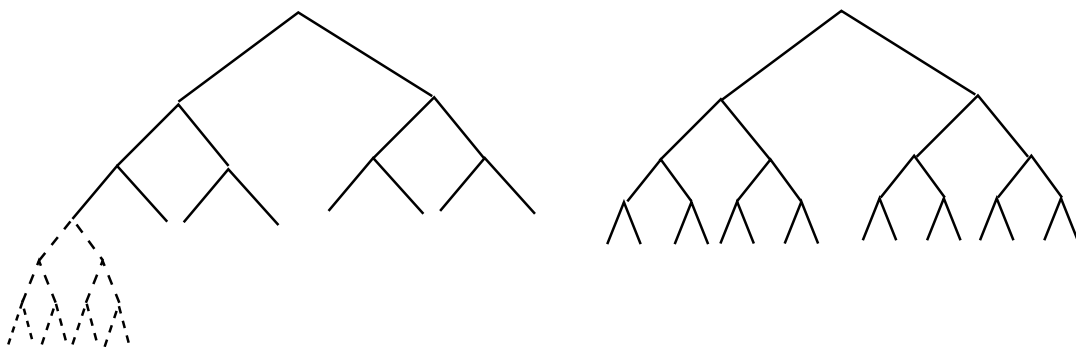


Figura 2.3: Primer intervalo: añadimos *carets* al árbol origen.

Repetimos el proceso con el segundo intervalo:

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{l_1}{8} \Rightarrow l_1 = 1,$$

$$b_2 - b_1 = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{l'_1}{16} \Rightarrow l'_1 = 2,$$

$$l'_1 = 2^{s_1} l_1 \Rightarrow s_1 = 1.$$

Ahora tenemos que dividir la hoja correspondiente del árbol origen, en dos, es decir, añadirle un *caret* (ver figura 2.4).

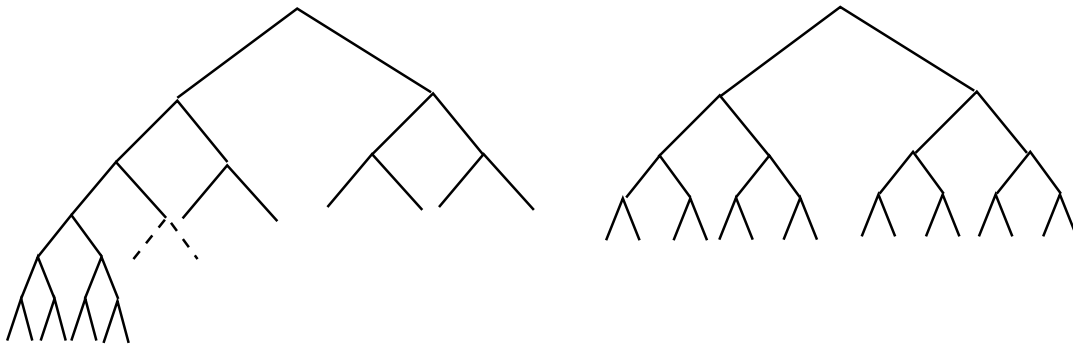


Figura 2.4: Segundo intervalo: añadimos *carets* al árbol origen.

El proceso se repite con el tercer intervalo donde la función es lineal.

$$a_3 - a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{l_2}{8} \Rightarrow l_2 = 2,$$

$$b_3 - b_2 = \frac{11}{16} - \frac{5}{8} = \frac{l'_2}{16} \Rightarrow l'_2 = 1,$$

$$l'_2 = 2^{s_2} l_2 \Rightarrow s_2 = -1.$$

En este caso, el intervalo ocupa 2 hojas en el árbol origen y una en el de imagen. Por ello, lo que tenemos que hacer es dividirla en dos añadiendo un nuevo *caret* (ver figura 2.5).

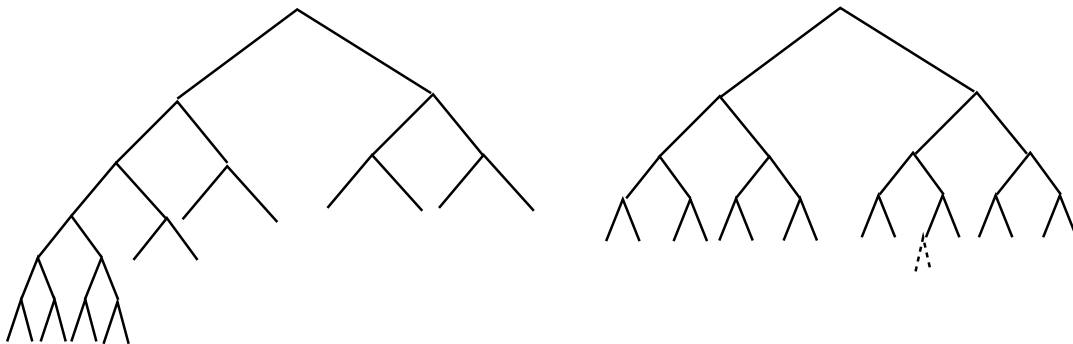


Figura 2.5: Tercer intervalo: añadimos *carets* en el árbol imagen.

$$\begin{aligned}
 a_4 - a_3 &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{l_3}{8} \Rightarrow l_3 = 2, \\
 b_4 - b_3 &= \frac{3}{4} - \frac{11}{16} = \frac{l'_3}{16} \Rightarrow l'_3 = 1, \\
 l'_3 &= 2^{s_3} l_3 \Rightarrow s_3 = -1.
 \end{aligned}$$

De nuevo añadimos un nuevo *caret* al árbol imagen (ver figura 2.6).

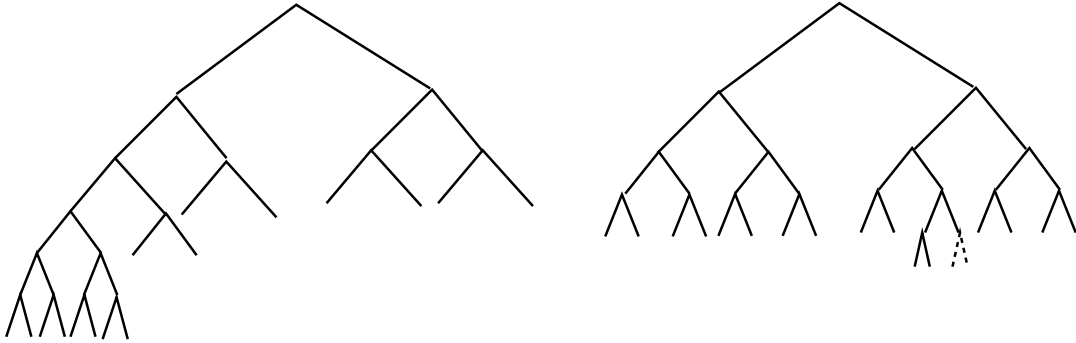


Figura 2.6: Cuarto intervalo: añadimos *carets* en el árbol imagen.

Y por último, realizamos los cálculos en el último intervalo.

$$\begin{aligned}
 a_5 - a_4 &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{l_4}{8} \Rightarrow l_4 = 2, \\
 b_5 - b_4 &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{l'_4}{16} \Rightarrow l'_4 = 4, \\
 l'_4 &= 2^{s_4} l_4 \Rightarrow s_4 = 1.
 \end{aligned}$$

En este caso, tomamos las dos hojas correspondientes del árbol origen y les añadimos un *caret* a cada una. En la imagen 2.7 podemos ver el resultado.

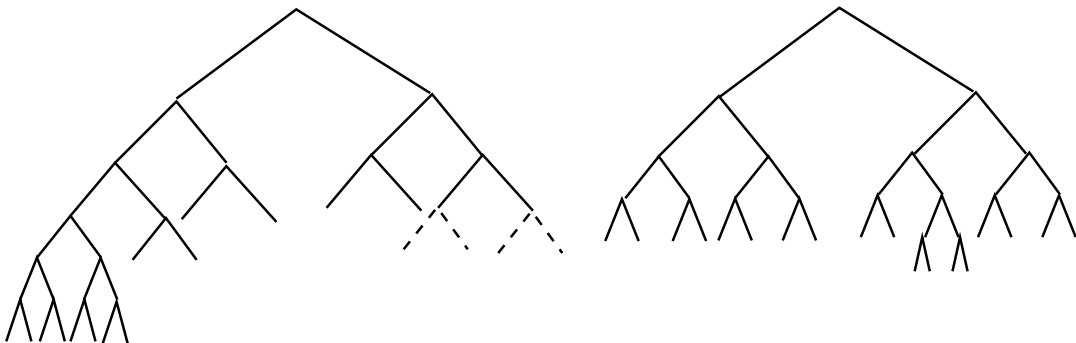


Figura 2.7: Quinto intervalo: añadimos *carets* al árbol origen.

Con este proceso hemos construido un árbol que es diagrama de  $f$  (se puede comprobar fácilmente). Por otro lado, este par de diagramas de árbol no es único, y

podemos en la imagen 2.8 otro par que también representa a  $f$ . Para pasar de uno a otro hemos quitado los *carets* que no aportaban nueva información. A este proceso le llamaremos reducir diagramas de árbol.

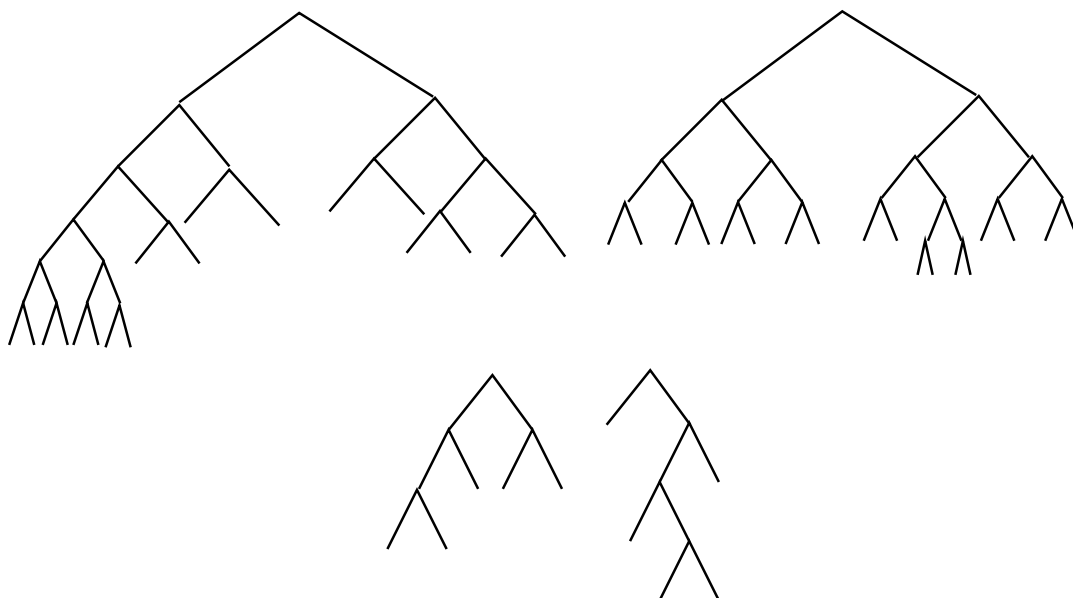


Figura 2.8: Resultado final y árboles reducidos.

**2.2.3 Definición.** Llamaremos *carets* reductibles a aquellos que se puedan eliminar de los árboles sin perturbar el elemento que representa el par de diagramas de árbol. Si tenemos un elemento representado por el par de árboles  $(T, T')$ , y en ambos árboles la hoja  $i$ -ésima y la siguiente se corresponden a un mismo *caret*, estos son reductibles y pueden ser eliminados.

**2.2.4 Definición.** Un par de diagramas de árbol irreductibles es aquél que no tiene *carets* reductibles.

**Observación.** Hasta ahora, dado  $f \in F$ , hemos estudiado la existencia de un par de diagramas de árbol que lo represente. Más adelante, en este mismo trabajo, veremos que sólo existe uno que cumpla la condición de irreductibilidad.

## 2.3. Composición de árboles binarios

Dado que cada par de diagramas de árbol representa un elemento de  $F$  es lógico definir la composición de estos elementos. Además, veremos que el uso de pares de diagramas de árbol para la composición de elementos del grupo presenta grandes ventajas por su sencillez.

**2.3.1 Definición.** Dados dos árboles binarios, denominamos su mínimo común múltiple al árbol mínimo que contiene a ambos. Este se obtiene superponiendo ambos árboles, es decir, cogiendo uno de ellos y añadiéndole los carets necesarios hasta que contenga al otro.

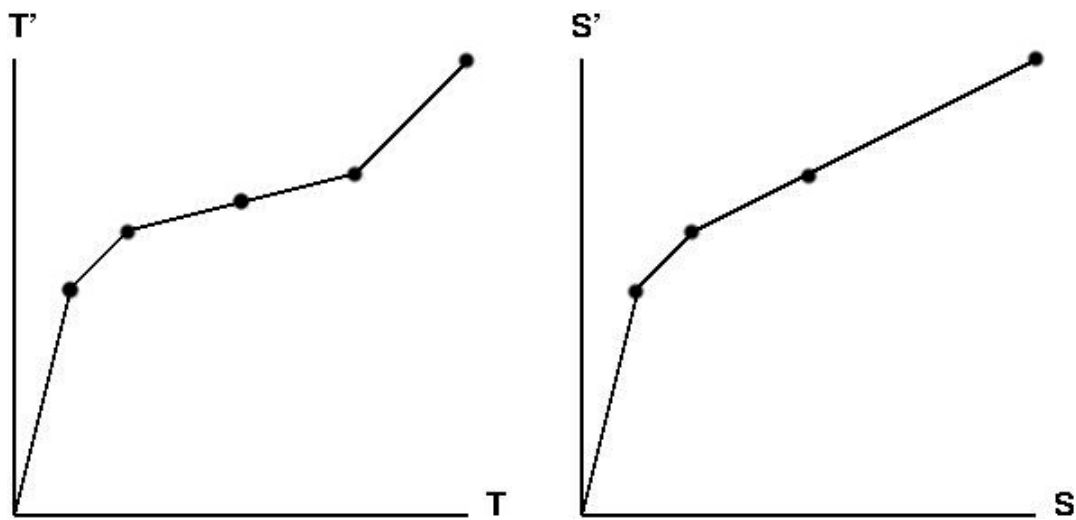


Figura 2.9: División del intervalo unidad.

Para componer dos elementos  $(T, T')$  y  $(S, S')$ , encontramos  $R$ , el mínimo común múltiplo de  $T'$  y  $S$ . Hacemos esto, porque la división de  $T'$  debe corresponderse con la de  $S$ , para asegurarnos de que la función es lineal en los intervalos que dividamos. Después, hay que añadir a  $T$  cada caret que esté en  $R$  y no en  $T'$  y obtenemos el árbol  $T''$ . Esto viene porque si subdividimos el intervalo imagen, también tenemos que dividir del mismo modo el origen, así que buscamos el par de diagramas de árbol equivalentes a  $(T, T')$ ,  $(T'', R)$  en este caso. Del mismo modo, añadimos a  $S'$  los carets que están en  $R$  y no en  $S$ , obteniendo  $S''$ . El resultado de la composición es, por tanto,  $(T'', S'')$  (ver figuras 2.9 y 2.10).

Esta interpretación del grupo  $F$  como pares de árboles binarios aporta una nueva herramienta muy visual para trabajar con este grupo.



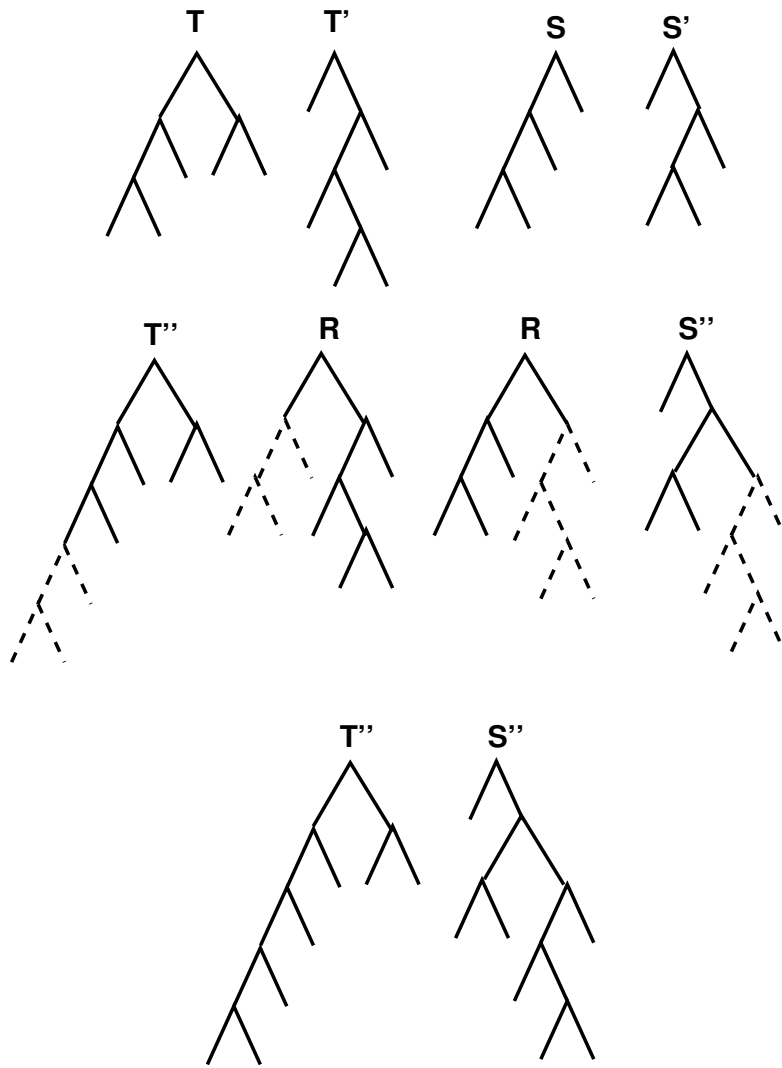


Figura 2.10: Composición de dos árboles binarios.



# Capítulo 3

## La presentación infinita

A partir de esta sección, trabajaremos con la interpretación del grupo  $F$  de forma algebraica. Para ello empezaremos con la presentación infinita, que nos aporta una manera fácil de trabajar con los elementos de  $F$  pues las relaciones de la presentación son sencillas.

### 3.1. Presentación

En esta sección veremos cuál es la presentación infinita del grupo de Thompson y usando propiedades de la misma, podremos demostrar que existe un único par de diagramas de árbol irreducibles que representen el elemento  $f$  de  $F$ .

**3.1.1 Teorema.** La presentación infinita del grupo de Thompson es

$$\langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \mid x_i^{-1}x_jx_i = x_{j+1} \text{ para } i < j \rangle.$$

Para probar este teorema necesitaremos hacerlo por pasos, introduciendo nuevos conceptos y nuevos resultados. Queremos construir un homomorfismo que mande el grupo generado por la presentación infinita al grupo de Thompson  $F$ .

Sea  $G$  el grupo generado por la presentación infinita, definamos el homomorfismo.

**3.1.2 Definición.** Definiremos un homomorfismo

$$\begin{aligned} \Theta : G &\longrightarrow F \\ x_n &\longmapsto f_n \end{aligned}$$

donde  $f_n$  tiene *breakpoints*

$$\left[ \left( 1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n} \right), \left( 1 - \frac{3}{2^{n+2}}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right), \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}}, 1 - \frac{1}{2^{n+2}} \right) \right]$$

**Observación.** Los elementos  $f_n$  se corresponden con los árboles de la figura 3.1. Podemos observar que si numeramos las hojas de ambos arboles, las hojas de la 0 a la  $n - 1$  son iguales en ambos, con lo cual, no tenemos *breakpoints* hasta llegar a la

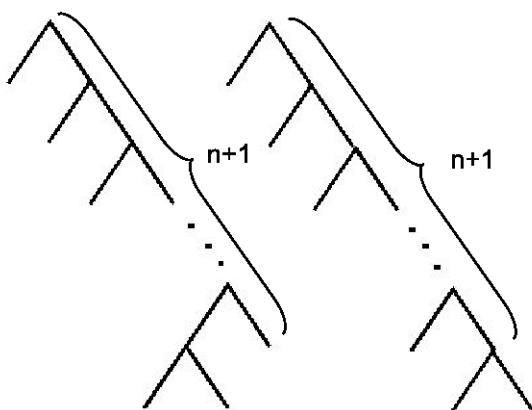


Figura 3.1: Par de diagramas de árbol correspondientes al elemento  $f_n$ .

$n$ . Calculemos qué intervalos representan estas hojas (ver tabla 3.1).

Hoja	Árbol origen	Árbol imagen
Hoja $n$	$\left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{3}{2^{n+2}}\right]$	$\left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right]$
Hoja $n + 1$	$\left[1 - \frac{3}{2^{n+2}}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right]$	$\left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}, 1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right]$
Hoja $n + 2$	$\left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}, 1\right]$	$\left[1 - \frac{1}{2^{n+2}}, 1\right]$

Cuadro 3.1: Intervalos que representan las hojas del par de diagramas de árbol  $f_n$ .

Observando los extremos de los intervalos de estas hojas, podemos ver que la lista de *breakpoints* es:

$$\left[ \left(1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n}\right), \left(1 - \frac{3}{2^{n+2}}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right), \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}, 1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) \right],$$

justo como queríamos ver.

Por otro lado veremos que las relaciones de  $G$  se cumplen en los  $f_n$ . Podemos ver en la figura 3.2 que se cumple  $f_i^{-1} f_j f_i = f_{j+1}$ .

### 3.2. Palabras positivas

Observemos que podemos reescribir las relaciones de la presentación de  $G$  de la siguiente forma:

$$x_j x_i = x_i x_{j+1}.$$

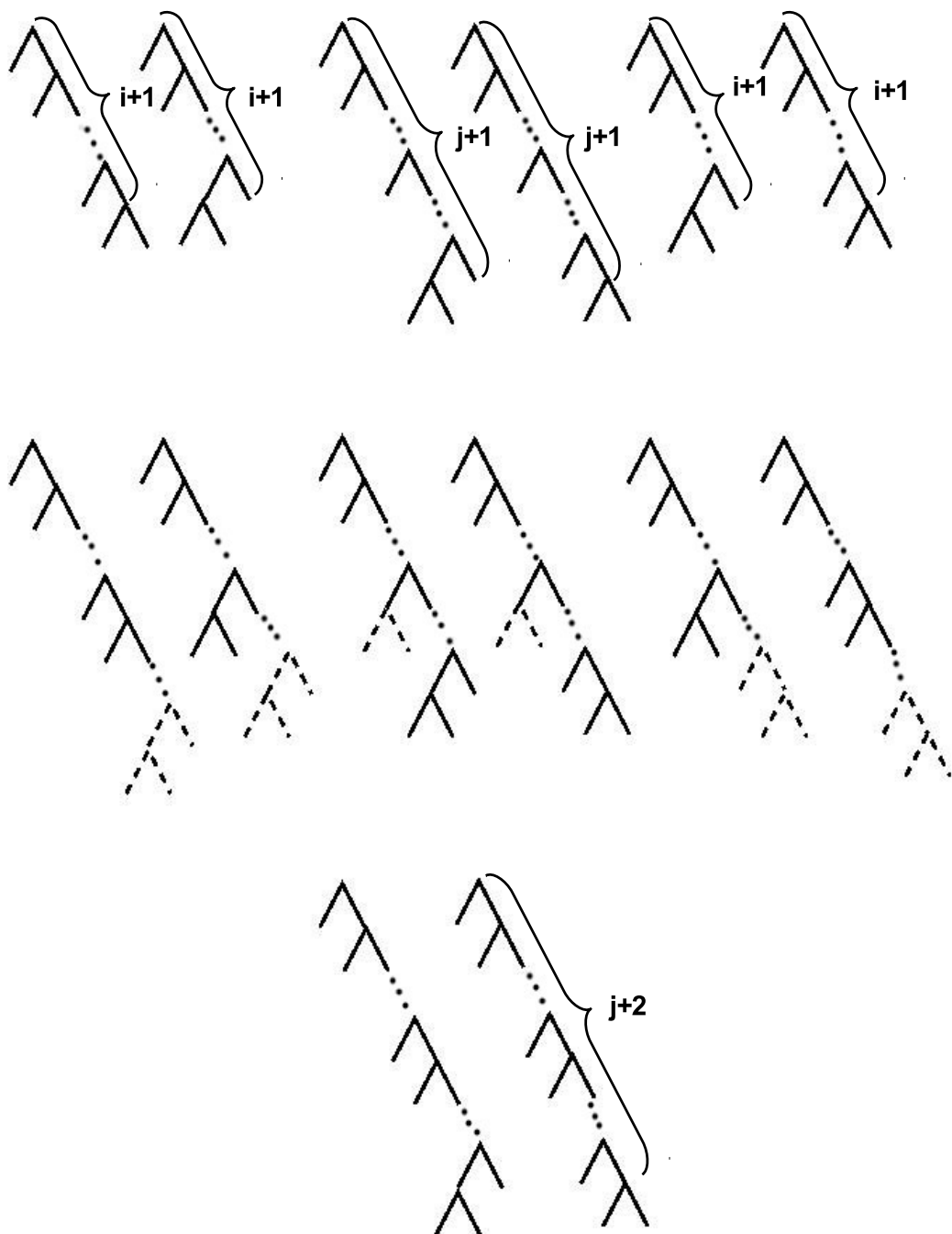


Figura 3.2: Se cumplen las relaciones del grupo  $G$  en  $F$ .

Por ello, es fácil ver que la presentación siguiente genera el grupo  $G$ .

$$\langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \mid x_j x_i = x_i x_{j+1} \text{ para } i < j \rangle$$

Por otro lado, dado la misma presentación, si sólo consideramos los generadores  $x_i$  sin sus inversos, ésta presenta un monoide que llamaremos  $P$ . De hecho,  $P$  es un submonoide de  $G$  y, por lo tanto,  $\Theta(P)$  es un submonoide de  $F$ .

Ahora observemos la relación que nos define  $P$ :

$$x_j x_i = x_i x_{j+1}.$$

Podemos ver que esta propiedad nos permitirá escribir los elementos de  $P$  de una determinada forma, con los generadores ordenados.

**3.2.1 Teorema.** Cada elemento de  $P$  se puede escribir como una palabra con la siguiente forma:

$$x_0^{a_0} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n},$$

para cierto  $n$  y ciertos enteros positivos  $a_i$ , donde algunos pueden ser cero. A estas palabras las llamaremos positivas.

*Demostración.* La relación

$$x_j x_i = x_i x_{j+1}.$$

que nos define  $P$ , nos permite escribir los elementos de una forma determinada. Si tenemos una palabra con un generador con índice mayor que el que tiene a su derecha, los podemos intercambiar aumentando en uno el índice mayor.

Si dada una palabra pasamos a las izquierda del todo las  $x_0$  usando la relación, después las  $x_1$  al segundo lugar y así sucesivamente, llegamos a una palabra con la forma determinada. □

**Observación.** Dado que en  $\Theta(P)$  existen relaciones equivalentes, el resultado anterior se encuentra también en este monoide.

**3.2.2 Definición.** Un *all-right tree* es un árbol binario cuyos *caret*s siempre son el hijo derecho del *caret* que queda por encima (exceptuando, por supuesto, la raíz).

**3.2.3 Definición.** Dado un árbol binario con las hojas numeradas empezando por el 0, el exponente de la hoja  $i$ -ésima es el número de nodos que son el hijo izquierdo del nodo que queda por encima, sin contar los que formen parte del *all-right tree*.

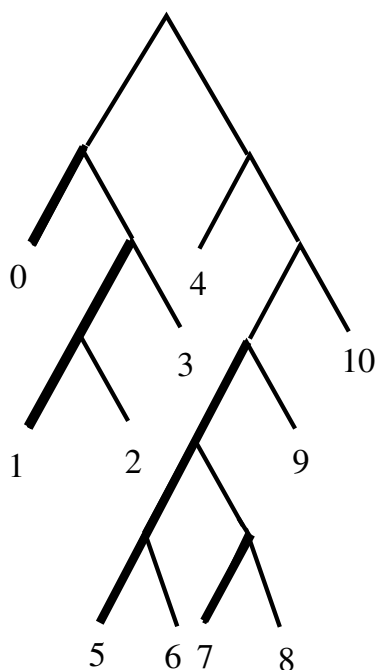


Figura 3.3: Ejemplo de los exponentes de las hojas de un árbol binario. Los exponentes son:  $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 3, a_6 = 0, a_7 = 1, a_8 = 0, a_9 = 0, a_{10} = 0$ . Éste es el árbol izquierdo del elemento  $f_0 f_1^2 f_5^3 f_7$ . El árbol derecho sería un *all-right tree* de 10 *carets* (ver Teorema 3.2.4).

En la figura 3.3 podemos ver un ejemplo de los exponentes de un árbol binario.

**3.2.4 Teorema.** Todo elemento de  $\Theta(P)$ , dado por la expresión

$$f_0^{a_0} f_1^{a_1} \dots f_n^{a_n}$$

se puede representar por un par de diagramas de árbol  $(T, T')$ , donde  $T$  tenga exponentes de hoja  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $T'$  sea un *all-right tree*.

*Demostración.* Primero, veremos que esta propiedad se cumple para los generadores  $f_n$ . Ya hemos visto en la figura 3.1 cómo son los árboles del elemento  $f_n$ . En estos casos,  $T'$ , es un *all-right tree* y el árbol  $T$  tiene todos los exponentes 0, menos el correspondiente a la hoja  $n$ -ésima, donde tenemos  $a_n = 1$ .

Supongamos ahora una palabra  $f_0^{a_0} f_1^{a_1} \dots f_n^{a_n}$ . Si  $a_i$  es el primer exponente no nulo, veamos cómo es su composición con un elemento  $f_j$ , con  $i \leq j$  en la figura 3.4.

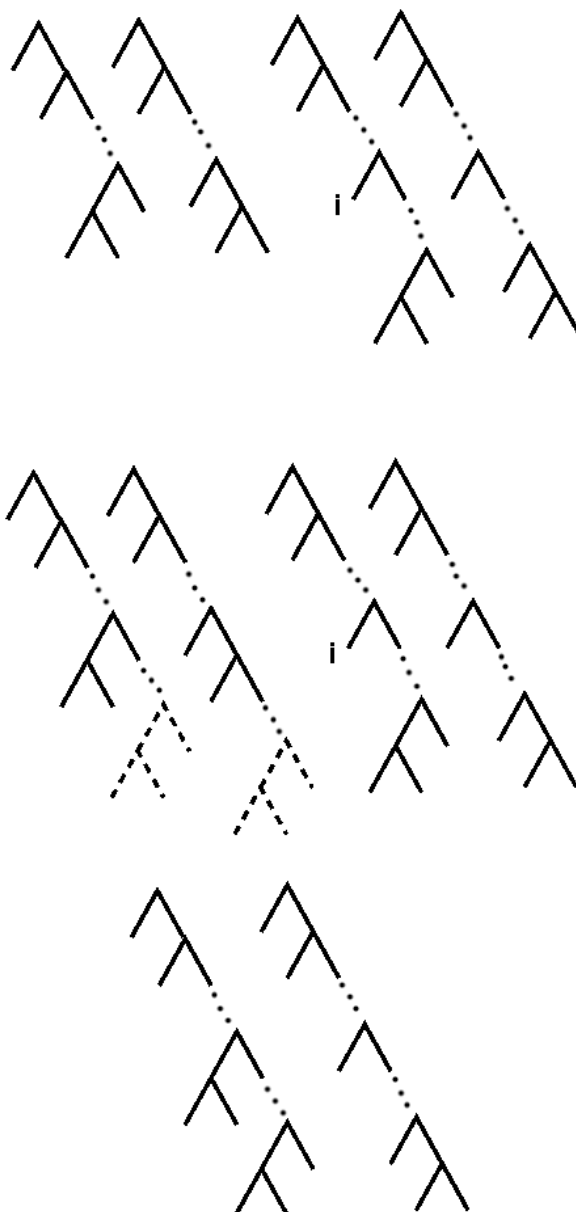


Figura 3.4: Composición entre los elementos  $f_i$  y  $f_j$ .

Vemos que sólo aumentamos en uno el exponente de la hoja  $j$ -ésima y añadimos *carets* en  $T'$  de forma que sigue siendo un *all-right tree*.

Apliquemos inducción sobre el número de generadores que componemos para formar nuestro elemento de  $F$ . Supongamos que el elemento resultante de la composición de  $n$  generadores de  $F$  cumple las condiciones del teorema, veremos que su composición con  $f_i$  también, es decir, que se cumple para  $n + 1$ .

Podemos considerar que tenemos un par de árboles  $(T, T')$  con  $k$  hojas cada uno. Al componerlo con  $f_i$ , tenemos tres casos:



■  $i < k$ :

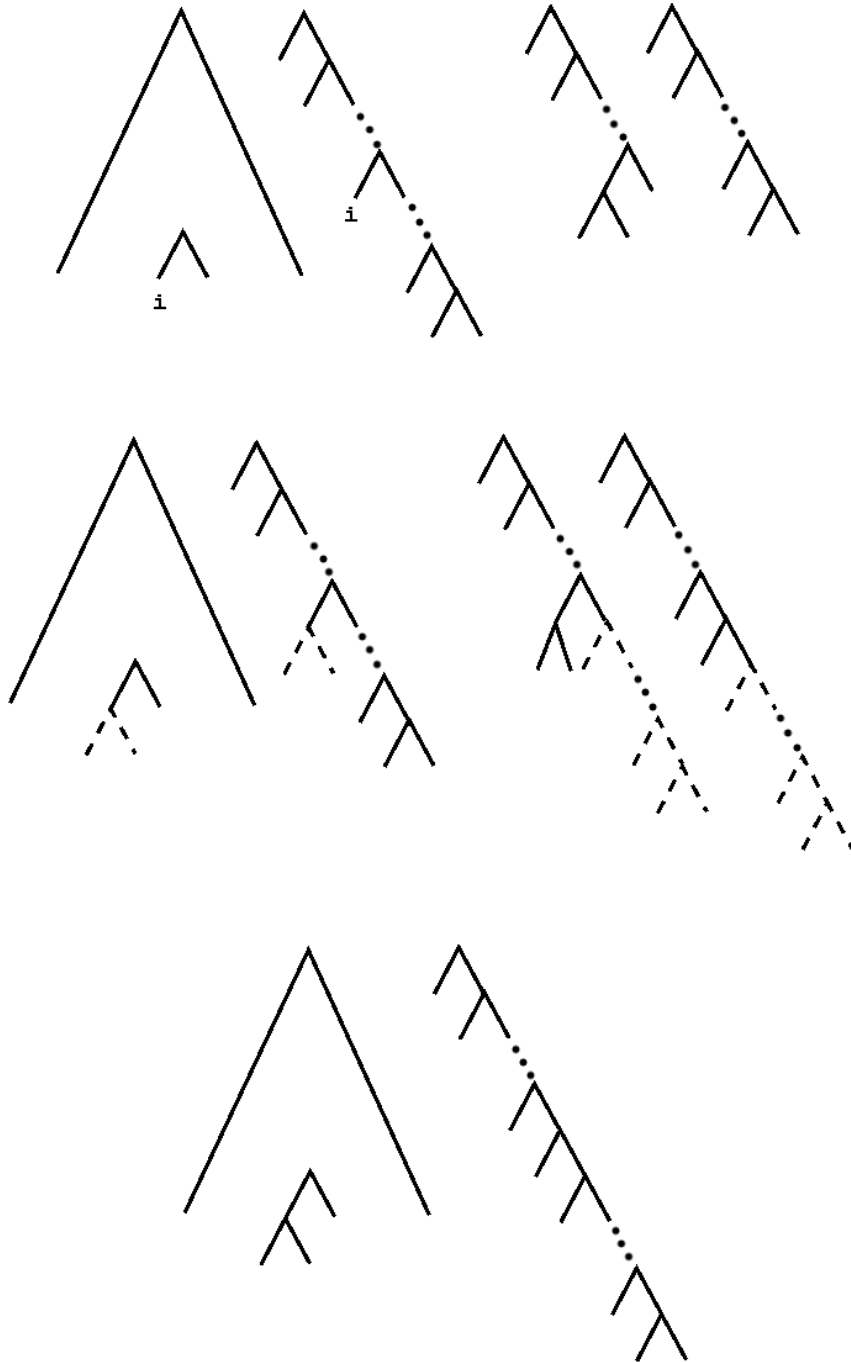


Figura 3.5: Caso en que  $i < k$ .

■  $i = k$ :

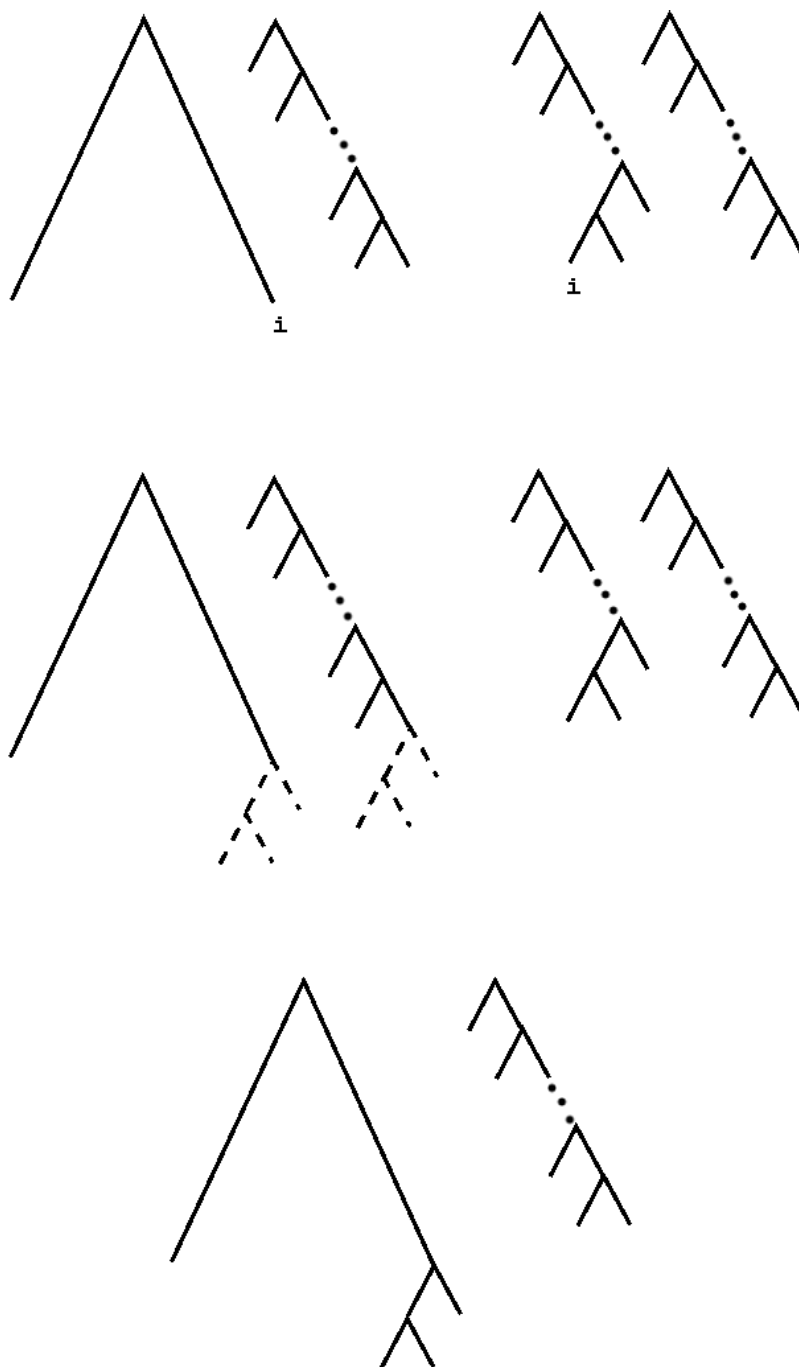


Figura 3.6: Caso en que  $i = k$ .

■  $i > k$ :

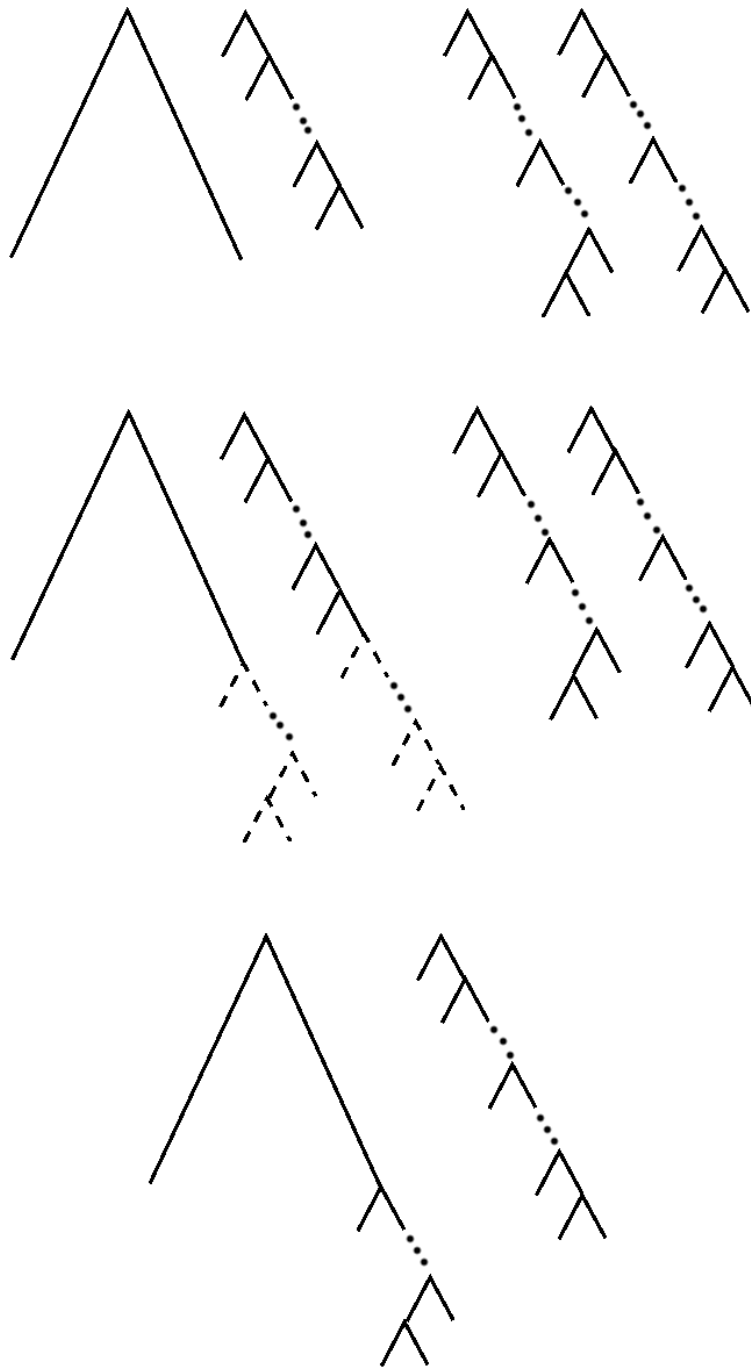


Figura 3.7: Caso  $i > k$ .

En los tres casos, la composición del árbol con un elemento  $f_i$  supone el aumento en uno del índice de la hoja  $i$ -ésima. Sin embargo, podemos observar que como las composiciones se hacen por orden de índice ascendente, al aumentar el exponente de una hoja, sólo cambiamos la numeración de las hojas posteriores, con lo cual no

se modifican los exponentes de los elementos anteriores.

Así vemos que se cumple el teorema. □

Como habíamos comentado, queremos demostrar que el homomorfismo  $\Theta$  es un isomorfismo para ver que la presentación infinita genera  $F$ . Por ello, primero veremos la exhaustividad.

**3.2.5 Teorema.** La función  $\Theta$  es exhaustiva.

*Demostración.* Todo elemento  $f$  de  $F$  viene dado por un par de diagramas de árbol  $(T, T')$ . A su vez, podemos expresar  $(T, T')$  como la composición de  $(T, R)$  y  $(R, T')$ , donde  $R$  sea un *all-right tree* con el número adecuado de hojas.

Buscaremos el elemento de  $P$  que tiene como imagen nuestro elemento  $f$ .

Aplicando el teorema anterior, observamos que  $(T, R)$  tiene forma de elemento positivo, es decir,

$$f_0^{b_0} f_1^{b_1} \dots f_n^{b_n}$$

y es la imagen del elemento de  $P$  de la forma  $x_0^{b_0} x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$ .

Fijémonos también que  $(R, T')$  es el inverso de un elemento positivo, por ello tiene la forma

$$f_m^{-c_m} \dots f_1^{-c_1} f_0^{-c_0},$$

y es imagen del elemento de  $P$   $x_m^{-c_m} \dots x_1^{-c_1} x_0^{-c_0}$ .

Entonces, vemos que la imagen por  $\Theta$  del elemento

$$x_0^{b_0} x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n} x_m^{-c_m} \dots x_1^{-c_1} x_0^{-c_0}$$

es nuestro elemento inicial  $f$ .

Por lo tanto, la aplicación  $\Theta$  es exhaustiva. □

### 3.3. La forma normal

Hemos visto en el anterior apartado que podemos representar un elemento de  $f$  usando su presentación infinita de una forma particular. Añadiendo algunas condiciones más, llegaremos a la forma normal de un elemento. Además, esta forma normal tiene la propiedad de ser única para cada  $f$ . Veremos también la relación de esta forma con la representación de los elementos en pares de diagramas de árbol irreductibles.

**3.3.1 Proposición.** Todo elemento de  $F$  admite una expresión de la forma

$$f_0^{a_0} f_1^{a_1} \dots f_n^{a_n} f_m^{-b_m} \dots f_1^{-b_1} f_0^{-b_0}.$$

*Demostración.* Ya hemos demostrado la existencia de esta forma seminormal en la construcción de la demostración anterior, poniendo cualquier elemento de  $F$  como resultado de la composición de un elemento positivo y el inverso de otro de ellos. □

Observemos que la forma seminormal no es única puesto que a partir de la relación  $f_{j+1} = f_i^{-1} f_j f_i$  llegamos a  $f_i f_{j+1} f_i^{-1}$  para  $j > i$ . Con lo cual, si en una palabra tenemos que los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  son simultáneamente no nulos, pero  $a_{i+1}$  y  $b_{i+1}$  son cero ambos, tenemos que podemos acortar la forma seminormal, aumentando en uno los índices de generadores que estén entre  $f_i$  y  $f_i^{-1}$ . Por ello, añadiremos una nueva condición que llamaremos *extra*, que nos aportará la unicidad.

**3.3.2 Teorema.** Todo elemento  $f$  de  $F$  admite una expresión de la forma

$$f_0^{a_0} f_1^{a_1} \dots f_n^{a_n} f_m^{-b_m} \dots f_1^{-b_1} f_0^{-b_0},$$

donde, para todo  $i$ , si  $a_i \neq 0$  y  $b_i \neq 0$  simultáneamente, entonces uno de los dos  $a_{i+1}$  o  $b_{i+1}$  (o los dos) es diferente de cero. Además, esta expresión es única y es la más corta para este elemento. Ésta diremos que es la forma normal del elemento  $f$ .

*Demostración.* La existencia de esta forma normal ya la hemos visto en la proposición anterior.

Para ver la unicidad, supongamos que hay elementos con más de una forma normal. Sea  $f$  uno de ellos, de todas sus formas posibles tomamos las dos tales que la suma de sus longitudes es mínima. Supongamos que estas dos formas son:

$$f_0^{a_0} f_1^{a_1} \dots f_n^{a_n} f_m^{-b_m} \dots f_1^{-b_1} f_0^{-b_0}$$

y

$$f_0^{c_0} f_1^{c_1} \dots f_n^{c_n} f_m^{-d_m} \dots f_1^{-d_1} f_0^{-d_0}.$$

Sea  $k$  el menor índice tal que aparece en al menos una de las dos formas. Es decir, tenemos  $a_i = b_i = c_i = d_i = 0$  para todo  $i$  menor que  $k$  y al menos uno de los exponentes  $a_k, b_k, c_k$  o  $d_k$  es no nulo. Primero veremos que el índice total es igual en ambas formas, es decir, que  $a_k - b_k = c_k - d_k$ . Esto se observa a partir de que el soporte de  $f$  está contenido en  $[1 - \frac{1}{2^k}, 1]$ , como veremos ahora.

Recordemos que el generador  $f_k$  tiene como lista de *breakpoints*

$$\left[ \left( 1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^k} \right), \left( 1 - \frac{3}{2^{k+2}}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \right), \left( 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, 1 - \frac{1}{2^{k+2}} \right) \right].$$

Con lo cual  $f_k$  tiene pendiente 1 hasta el valor  $1 - \frac{1}{2^k}$  de las abscisas y 2 en el siguiente intervalo, para  $k$  positivo, y  $f_0$  tiene pendiente 2 hasta  $\frac{1}{4}$  y después 1 en el siguiente intervalo. Puesto que este elemento de  $F$  tiene  $f_k$  como primer generador, y los generadores posteriores tienen pendiente 1 en ese tramo,  $f$  tiene soporte incluido en  $[1 - \frac{1}{2^k}, 1]$ , donde entendemos por soporte los puntos  $x$  de  $[0, 1]$  tal que la función es distinta de la identidad.

Veamos ahora que la pendiente derecha en el punto  $(1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^k})$  es  $2^{a_k - b_k}$ . Esto, de nuevo, viene dado porque  $f_k$  tiene pendiente 2 en ese tramo, y los generadores con índices mayores tienen pendiente 1. Entonces, como la pendiente es igual en ambas formas, podemos concluir que  $a_k - b_k = c_k - d_k$ .

El siguiente paso es ver que  $a_k - b_k = c_k - d_k = 0$ . Llegaremos por reducción al absurdo.

- Supongamos que  $a_k - b_k = c_k - d_k > 0$ . Entonces tanto  $a_k$  como  $c_k$  tienen que ser diferentes de cero, y podríamos tachar algún  $f_k$  de ambas formas (es decir, de ambos lados de la igualdad) y obtendríamos formas más cortas, llegando a contradicción con la suposición que hemos hecho de que la suma de las longitudes de las formas tomadas es mínima.
- Supongamos que  $a_k - b_k = c_k - d_k < 0$ . En este caso sabemos que tanto  $b_k$  como  $d_k$  son distintos de cero, y con lo cual podríamos tachar  $f_k^{-1}$  de ambas formas, obteniendo unas más cortas y llegando a contradicción.

Por ello,  $a_k - b_k = c_k - d_k = 0$ . Además,  $a_k$  o  $c_k$  es cero, pero no las dos a la vez. De nuevo lo veremos por reducción al absurdo.

- Si  $a_k$  y  $c_k$  son ambos cero, entonces  $b_k$  y  $d_k$  también serían nulos, y llegaríamos a contradicción.
- Si  $a_k$  y  $c_k$  son ambos distintos de cero, podemos tachar  $f_k$  de ambas formas, llegando de nuevo a contradicción.

Supongamos que es  $a_k$  la que es nula, entonces  $b_k$  también será cero y  $c_k$  y  $d_k$  serán iguales, pero diferentes de cero. En este caso, nuestras formas normales se pueden escribir como  $f_k z f_k^{-1}$  y  $w$ , donde  $w$  tiene generadores con índice mayor que  $k$ . Como son formas del mismo elemento, conjugando la igualdad por  $f_k$ , obtenemos  $z = f_k^{-1} w f_k$ , con todos los índices de  $w$  mayores que  $k$ , con lo cual podemos aplicar la relación la presentación infinita. Haciéndolo, obtenemos que  $z = \hat{w}$ , donde  $\hat{w}$  es  $w$  con todos los índices incrementados en uno.

Como hemos elegido las formas de tal manera que la suma de sus longitudes fuera mínima, como  $z$  y  $\hat{w}$  tienen longitud menor que las iniciales, si fueran distintas como formas, llegaríamos a contradicción. Entonces  $z$  tiene índices mayores o iguales que  $k + 2$ , con lo cual,  $f_k z f_k^{-1}$  no puede ser una forma normal, porque para cumplir las condiciones debería tener un  $f_{k+1}$  o un  $f_{k+1}^{-1}$ . Por lo tanto, llegamos a contradicción y podemos concluir que no hay dos formas normales.  $\square$

Usando la forma normal es fácil probar la inyectividad de  $\Theta$ .

**3.3.3 Proposición.** La función  $\Theta$  es biyectiva.

*Demostración.* Ya habíamos visto previamente que  $\Theta$  es exhaustiva, por lo tanto, sólo nos queda ver que es inyectiva. Para ello, tomamos dos palabras generadas por los  $x_i$  que tengan la misma imagen en  $F$ . Esta imagen tiene una única forma normal a la que podemos llegar a partir de las imágenes de los dos elementos usando las relaciones. Si usamos las mismas relaciones en los elementos, llegaremos a la misma forma normal en  $G$ . A su vez, podremos pasar de uno de los elementos al otro usando las relaciones, por lo tanto, serán el mismo. Podemos concluir que  $\Theta$  es biyectiva.  $\square$

Con este resultado ya hemos visto que ambos grupos,  $G$  y  $F$  son isomorfos, como habíamos enunciado en el Teorema 3.1.1.

**Observación.** Como hemos comentado previamente, las diversas interpretaciones del grupo  $F$  de Thompson suponen poder usar cualquiera de ellas indistintamente en las demostraciones, según cuál resulte más útil en el momento. Por ejemplo, para probar la exhaustividad de  $\Theta$ , hemos usado los pares de diagramas de árbol. Sin embargo, para demostrar la inyectividad, es más sencillo usar la presentación infinita del grupo.

La unicidad de la forma normal de un  $f$  de  $F$  induce la unicidad del par de diagramas de árbol reducido.

**3.3.4 Teorema.** Cada elemento de  $F$  admite un único par de diagramas de árbol reducidos.

*Demostración.* Veremos que la forma normal de un elemento guarda relación con su par de diagramas de árbol reducidos.

Si tenemos un par de diagramas de árbol  $(T, T')$  no reducidos, significa que ambos árboles tienen un *caret* cuyas hojas son la  $i$  y la  $i + 1$ . Supongamos que no se trata de un *caret* del *all-right tree*. Es fácil ver que los exponentes de las hojas  $i$ -ésimas serán no nulas, y los de las hojas  $i + 1$  serán cero. Es decir,

$$a_i = b_i = 0, a_{i+1} \neq 0, b_{i+1} \neq 0.$$

Con ello vemos que nuestro elemento no está en su forma normal. Al eliminar el *caret* reductible, disminuyen en uno los índices de las hojas que vienen después de este *caret*, lo cual se corresponde a usar las relaciones para acortar la expresión de nuestro elemento para llegar a la forma normal.

En el caso de un *caret* del *all-right tree*, para ser expuesto, tiene que tratarse del último *caret* en ambos árboles  $(T, T')$  y por ello, eliminarlo no afecta al índice de otras hojas. También por ser del *all-right tree*, los índices son cero, con lo cual no afecta en la expresión normal del elemento.

Con esto hemos visto que la forma normal de un elemento se corresponde a un par de diagramas reducidos. Como esta forma es única, el par de diagramas de árbol reducidos, también lo es. □

Hasta ahora hemos visto gran parte de la importancia de este grupo. El grupo de Thompson se puede ver indistintamente como funciones del intervalo unidad a él mismo, como pares de diagramas de árbol o expresado algebraicamente usando su presentación infinita.

Podemos ver que según se van probando las equivalencias entre las tres interpretaciones, se puede ir usando la que más convenga para las demostraciones de los resultados.





# Capítulo 4

## La presentación finita

En esta sección veremos que el grupo  $F$  de Thompson también puede ser definido con una presentación finita, a partir de dos generadores y dos relaciones. Para ello, demostraremos que es equivalente a la presentación infinita y, por tanto, es presentación de nuestro grupo.

### 4.1. Equivalencia entre la presentación finita y la infinita

**4.1.1 Teorema.** El grupo de  $F$  Thompson admite una presentación finita:

$$\langle x_0, x_1 \mid x_1^{-1}x_2x_1 = x_3, x_1^{-1}x_3x_1 = x_4 \rangle,$$

donde  $x_2 = x_0^{-1}x_1x_0$ ,  $x_3 = x_0^{-2}x_1x_0^2$  y  $x_4 = x_0^{-3}x_1x_0^3$ .

*Demostración.* Recordemos que la presentación infinita es

$$G = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \mid x_i^{-1}x_jx_i = x_{j+1} \text{ para } i < j \rangle.$$

Llamemos  $P$  al grupo generado por la presentación finita. Llegaremos a que ambas son equivalentes.

Observemos que  $P \cong F_2 / \langle\langle R \rangle\rangle$  y que  $G \cong F_\infty / \langle\langle S \rangle\rangle$ , donde  $\langle\langle S \rangle\rangle$  y  $\langle\langle R \rangle\rangle$  son las relaciones de las presentaciones. Queremos definir un homomorfismo que vaya de un grupo al otro y ver que se envían las relaciones al neutro.

Primero definiremos

$$\begin{aligned} F_2 / \langle\langle R \rangle\rangle &\longrightarrow F_\infty / \langle\langle S \rangle\rangle \\ x_0 &\longmapsto x_0 \\ x_1 &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

Es fácil ver que, puesto que tanto los generadores como las relaciones de la presentación finita están incluidas en la presentación infinita, la aplicación definida antes es un homomorfismo que envía las relaciones al neutro.

Ahora tenemos que ver el otro caso. Definimos

$$\begin{aligned} F_\infty / \langle\langle S \rangle\rangle &\longrightarrow F_2 / \langle\langle R \rangle\rangle \\ x_0 &\longmapsto x_0 \\ x_1 &\longmapsto x_1 \\ x_i &\longmapsto x_0^{-i+1} x_1 x_0^{i-1} \end{aligned}$$

En  $G$  los generadores  $x_n$  están definidos tal que  $x_n = x_0^{-1} x_{n-1} x_0$  para  $n > 1$ , veremos que podemos ponerlos en función de  $x_0$  y  $x_1$ :

$$x_n = x_0^{-1} x_{n-1} x_0 = x_0^{-1} (x_0^{-1} x_{n-2} x_0) x_0 = \dots = x_0^{-n+1} x_1 x_0^{n-1}.$$

Con lo cual, el homomorfismo está bien definido. Para ver que envía las relaciones al elemento neutro, veremos que la presentación de  $P$  es equivalente a la de  $G$ . Es decir, que podemos obtener las relaciones de  $G$  a partir de las de  $P$ .

Para ello, lo primero que haremos será añadir los elementos  $x_n$  como hemos descrito antes, para hacerla una presentación infinita. Con esto, obtenemos la presentación

$$P' = \langle x_0, x_1, x_2, \dots \mid x_1^{-1} x_2 x_1 = x_3, x_1^{-1} x_3 x_1 = x_4, x_i = x_0^{-i+1} x_1 x_0^{i-1} \text{ para } i \geq 2 \rangle,$$

donde  $P \cong P'$ .

Queremos llegar a ver que  $P' \cong G$ . Como notación, consideraremos que  $(i, j)$  es equivalente a la igualdad  $x_i^{-1} x_j x_i = x_{j+1}$ , y los representaremos como puntos del plano. Observemos que con la presentación infinita obtenemos todos los puntos  $(i, j)$ , donde  $i < j$ .

1. Primero añadiremos el punto  $(0, 1)$ , que viene dado por la relación añadida a  $P'$  con  $i = 2$ :

$$x_2 = x_0^{-1} x_1 x_0.$$

A partir de este punto, demostraremos que podemos obtener todos los de la forma  $(0, j)$ , para  $j > 1$ .

Si consideramos la relación de  $G$  con  $i = 0$ , obtenemos  $x_0^{-1} x_j x_0 = x_{j+1}$ . Para obtener la misma en  $P'$ , usaremos  $x_j = x_0^{-j+1} x_1 x_0^{j-1}$ :

$$\begin{aligned} x_0^{-1} x_j x_0 &= x_0^{-1} x_0^{-j+1} x_1 x_0^{j-1} x_0 \\ &= x_0^{-j} x_1 x_0^j \\ &= x_{j+1}. \end{aligned}$$

Uniendo ambas cosas, vemos que ya podemos tener todos los puntos de la forma  $(0, j)$  con  $j > 0$ . Si los representamos en el plano obtendremos la figura 4.1.

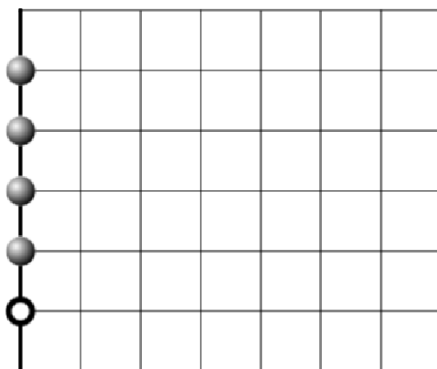


Figura 4.1: El punto vacío representa  $(0, 1)$  y el resto, a los de la forma  $(0, j)$  con  $j > 1$ .

2. Con la presentación de  $P'$  también obtenemos los puntos  $(1, 2)$  y  $(1, 3)$  a partir de las relaciones  $x_1^{-1}x_2x_1 = x_3$  y  $x_1^{-1}x_3x_1 = x_4$ . Demostraremos que a partir de ellos podemos obtener sus respectivas diagonales.

Si suponemos  $(i, j)$  cierto, demostraremos que  $(i + 1, j + 1)$  también lo es para  $0 < i < j$ . Supongamos que se cumple  $x_i^{-1}x_jx_i = x_{j+1}$  para  $0 < i < j$  y usando el punto anterior:

$$\begin{aligned}
 x_{i+1}^{-1}x_{j+1}x_{i+1} &= (x_0^{-1}x_i^{-1}x_0)(x_0^{-1}x_jx_0)(x_0^{-1}x_ix_0) \\
 &= x_0^{-1}x_i^{-1}x_jx_ix_0 \\
 &= x_0^{-1}x_{j+1}x_0 \\
 &= x_{j+2}.
 \end{aligned}$$

Así, vemos que como se cumple  $(1, 2)$ , hemos demostrado que todos los puntos de su diagonal son ciertos. En la figura 4.2 podemos ver que el punto vacío implica todos los puntos destacados de su diagonal. Pasa lo mismo con  $(1, 3)$ .

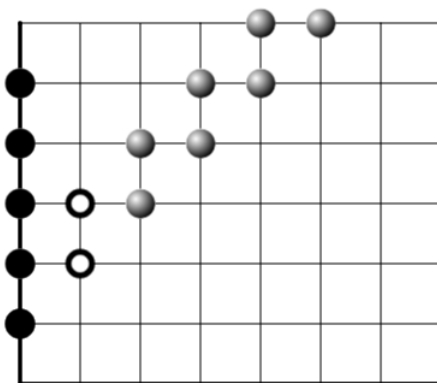


Figura 4.2: Los puntos vacíos implican los puntos destacados de sus diagonales.

3. Si ahora suponemos ciertos  $(1, j-1)$  y  $(j-1, j)$ , demostraremos que se cumple  $(1, j)$ :

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= x_{j-1}^{-1} x_j x_{j-1} \\ &= x_{j-1}^{-1} (x_1^{-1} x_{j-1} x_1) x_{j-1} \\ &= x_1^{-1} x_{j-2} x_{j-1} x_{j-2} x_1 \\ &= x_1^{-1} x_j x_1 \end{aligned}$$

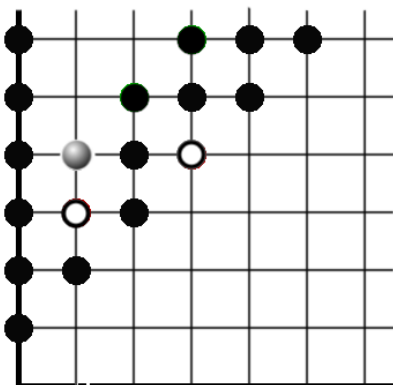


Figura 4.3: A partir de los puntos vacíos, obtenemos el destacado.

Por ello podemos ver en la figura 4.3 que si suponemos los puntos vacíos (que ya habíamos obtenido previamente), obtenemos el punto destacado. Aplicando el segundo apartado de esta demostración, a partir de éste, conseguimos su diagonal. Si ahora, de este mismo modo, obtuviéramos el punto  $(1, 5)$ , después su diagonal y siguiéramos el proceso infinitamente, obtendríamos todos los puntos del plano  $(i, j)$  tales que  $i < j$  (ver figura 4.4).

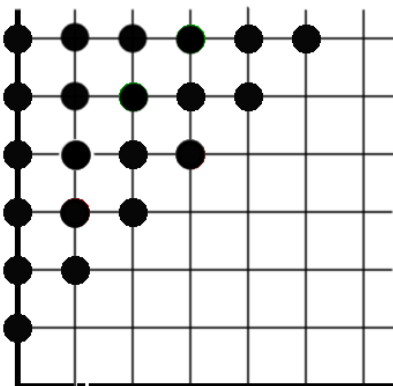


Figura 4.4: Ambas presentaciones generan los mismos puntos del plano.

Así, concluimos que ambas presentaciones son equivalentes, es decir, que  $P' \cong G$ , y por ello,  $P \cong G$ .  $\square$

Con esto hemos añadido una nueva forma de considerar en grupo de Thompson, a través de su presentación finita.



# Bibliografía

- [1] K. S. Brown, R. Geoghegan, An infinite-dimensional torsion-free  $FP_\infty$  group, *Inventiones Mathematicae*, (1984).
- [2] J. W. Cannon, W. J. Floyd, W. R. Parry, Introductory notes on Richard Thompson's Groups, *L'Enseignement Mathématique*, (1996).
- [3] J. Burillo, Thompson's Group F.
- [4] D. Yeow, Introduction to Thompson's Group  $F$ , Honours Thesis, (2006).