Desigualtats matricials lineals amb valors complexos

J. Rubió-Massegú, F. Palacios-Quiñonero, Josep M. Rossell

Departament de Matemàtica Aplicada III,
Control, Dinàmica i Aplicacions (CoDALab)
Universitat Politècnica de Catalunya
Avinguda de les Bases de Manresa, 61-73, 08242 Manresa, Barcelona
josep.rubio@upc.edu, francisco.palacios@upc.edu, josep.maria.rossell@upc.edu

Resum Sovint ens trobem davant de desigualtats matricials lineals (LMIs) on les matrius involucrades prenen valors complexos. És ben conegut que tota LMI complexa es pot reduir a una LMI real. En aquest treball establim les propietats que permeten fer el procés de reducció de LMI complexa a LMI real de manera el més simplificada possible.

1 Introducció

Una de les eines més potents en teoria de sistemes i control són les desigualtats matricials lineals (LMIs), per a les quals existeixen algorismes de gran eficiència computacional [8, 9]. Aquests algorismes són vàlids per a LMIs amb valors reals, on les matrius involucrades són totes reals, i estan implementats en diversos programaris com MATLAB [1] o Scilab [4]. No obstant, en molts problemes ens trobem davant de LMIs on les matrius involucrades són amb coeficients complexos (veure per exemple [3, 5, 6, 7]). És ben conegut que tota LMI complexa es pot reduir a una LMI real, per tant el fet de topar amb una LMI complexa no suposa cap inconvenient almenys des d'un punt de vista teòric.

A la pràctica, a l'hora d'introduir la LMI real que correspon a una LMI complexa en un programari com els mencionats anteriorment, cal fer algunes manipulacions algebraiques a la LMI real que suposen una dificultat addicional per a l'usuari. En el MATLAB Robust Control Toolbox [1] es presenten algunes indicacions que simplifiquen considerablement les manipulacions algebraiques sobre la LMI real, però de forma bastant difusa i sense referències bibliogràfiques.

L'objectiu d'aquest treball és establir les propietats que subjeuen darrere de les indicacions de [1] i que permeten fer la reducció de LMI complexa a LMI real de manera eficient. Tot i tractar-se de propietats elementals, hem cregut convenient ajuntar-les en un text amb l'ànim de ser d'utilitat a l'hora d'introduir una LMI real associada a una LMI complexa en un programari. A la Secció 2 presentem la definició i alguns exemples de LMIs complexes. La reducció del cas complex al cas real està contingut a la Secció 3, amb les propietats més rellevants que permeten fer la reducció de manera eficient.

Notació Per $\mathcal{M}_{m\times n}$ denotem les matrius de mida $m \times n$ amb coeficients complexos. I_n i $0_{m\times n}$ són, respectivament, la matriu identitat d'ordre n i la matriu zero de mida $m \times n$. $\mathcal{H}_n$ són les matrius hermitianes d'ordre n, és a dir $\mathcal{H}_n = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} \mid A^* = A\}$, on $A^* = \overline{A}^T$ denota trasposta conjugada. Per a dues matrius hermitianes $A, B \in \mathcal{H}_n$, escriurem $A > B$ o $A \geq B$ per indicar que $A - B$ és definida positiva o semi-definida positiva, respectivament. Per abreujar, tractarem els dos tipus de desigualtat (desigualtat estricta i desigualtat no estricta) amb la sola notació

$$A \underset{(\geq)}{>} B,$$

notació que s'ha de llegir com $A > B$ (resp. $A \geq B$). La lletra j la reservem per al nombre complex $j = \sqrt{-1}$. Finalment, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ denoten les matrius de mida $m \times n$ amb coeficients reals i $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ i $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ són les matrius reals simètriques i anti-simètriques d'ordre n, respectivament.

2 Desigualtats matricials lineals amb valors complexos

Definició 1 *Una desigualtat matricial lineal amb valors complexos (LMI complexa, en el què segueix) és una desigualtat matricial de la forma*

$$H_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i H_i \underset{(\geq)}{>} 0, \tag{1}$$

on $H_0, \ldots, H_k \in \mathcal{H}_n$ són matrius hermitianes conegudes i $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ són les variables de la LMI.

Comentari 2 *La única diferència amb una LMI real és que en una LMI real les matrius $H_0, \ldots, H_k$ són de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.*

L'aplicació $F : \mathbb{R}^k \to \mathcal{H}_n$ definida com $F(x) = H_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i H_i$, $x = (x_1, \ldots, x_k)$, és afí entre els $\mathbb{R}$-espais vectorials $\mathbb{R}^k$ i $\mathcal{H}_n$. Recordem que una aplicació $F : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ entre dos $\mathbb{R}$-espais vectorials $\mathcal{V}$ i $\mathcal{H}$, és una aplicació $\mathbb{R}$-afí si existeix una aplicació $\mathbb{R}$-lineal $L : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ de manera que $F(v) = F(0) + L(v)$ per a $v \in \mathcal{V}$.

Definició 3 *Una LMI complexa abstracta és una desigualtat matricial de la forma*

$$F(v) \underset{(\geq)}{>} 0, \tag{2}$$

on

$$F : \mathcal{V} \to \mathcal{H}_n$$

és una aplicació $\mathbb{R}$-afí entre un $\mathbb{R}$-espai vectorial $\mathcal{V}$ de dimensió $k < \infty$ i el $\mathbb{R}$-espai vectorial de les matrius hermitianes d'ordre n, $n < \infty$.

Sigui $\{e_1, \ldots, e_k\}$ una base del $\mathbb{R}$-espai vectorial $\mathcal{V}$. Si $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ aleshores

$$F\left(\sum_{i=1}^{k} x_i e_i\right) = F(0) + \sum_{i=1}^{k} x_i L(e_i).$$

Denotant $H_0 = F(0)$ i $H_i = L(e_i)$, $1 \leq i \leq k$, podem escriure la desigualtat (2) com

$$H_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i H_i \underset{(\geq)}{>} 0.$$

Per tant, tota LMI complexa abstracta es redueix a una LMI complexa en forma estandard.

Exemple 4 *La desigualtat matricial*

$$A_0 + A_0^* + \sum_{i=1}^{m} z_i A_i + \sum_{i=1}^{m} \overline{z}_i A_i^* \underset{(\geq)}{>} 0,$$

amb

$$z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m, \ \ A_0, \ldots, A_m \in \mathcal{M}_{n\times n},$$

és una LMI complexa abstracta. En efecte, l'aplicació $F : \mathbb{C}^m \to \mathcal{H}_n$ definida per $F(z) = A_0 + A_0^* + \sum_{i=1}^{m} z_i A_i + \sum_{i=1}^{m} \overline{z}_i A_i^*$ és $\mathbb{R}$-afí. Fent servir la base de $\mathbb{C}^m$ formada pels vectors $\{e_i\}_{1\leq i\leq m} \cup \{je_i\}_{1\leq i\leq m}$, on e_i té un 1 a la posició i i zeros en les altres posicions, obtenim la LMI en forma estandard

$$A_0 + A_0^* + \sum_{i=1}^{m} x_i(A_i + A_i^*) + \sum_{i=1}^{m} y_i j(A_i - A_i^*) \underset{(\geq)}{>} 0,$$

amb $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$. Aquí, x_i i y_i representen les parts real i imaginària del nombre complex z_i, $1 \leq i \leq m$.

Exemple 5 *Les desigualtats matricials*

$$\begin{bmatrix} AX + XA^* + BY + Y^*B^* + \eta B_w B_w^* & (CX + DY)^* \\ CX + DY & -I_d \end{bmatrix} < 0, \ X > 0, \ \eta > 0, \qquad (3)$$

on $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$, $B_w \in \mathcal{M}_{n\times p}$, $C \in \mathcal{M}_{d\times n}$, $D \in \mathcal{M}_{d\times m}$ *són matrius constants i les variables són* X, Y *i* η *amb* $X \in \mathcal{H}_n$, $Y \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\eta \in \mathbb{R}$, *són una LMI complexa abstracta. En efecte, l'aplicació*

$$F : \mathcal{H}_n \times \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}_{2n+d+1}$$

definida per

$$F(X, Y, \eta) = \operatorname{diag}\left(-\begin{bmatrix} AX + XA^* + BY + Y^*B^* + \eta B_w B_w^* & (CX + DY)^* \\ CX + DY & -I_d \end{bmatrix}, X, \eta \right),$$
$$(X, Y, \eta) \in \mathcal{H}_n \times \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathbb{R},$$

està ben definida i és $\mathbb{R}$*-afí, per tant les desigualtats de (3) són una LMI. L'aplicació lineal associada a* F *és*

$$L(X, Y, \eta) = \operatorname{diag}\left(-\begin{bmatrix} AX + XA^* + BY + Y^*B^* + \eta B_w B_w^* & (CX + DY)^* \\ CX + DY & 0_{d\times d} \end{bmatrix}, X, \eta \right).$$

Prenent bases naturals de cada espai

$$\begin{aligned} \text{a } \mathcal{H}_n : &\quad \{E_{rr}\}_{1\le r\le n} \cup \{E_{rs} + E_{sr}\}_{1\le r<s\le n} \cup \{j(E_{rs} - E_{sr})\}_{1\le r<s\le n} \\ \text{a } \mathcal{M}_{m\times n} : &\quad \left\{\tilde{E}_{rs}\right\}_{1\le r\le m, 1\le s\le n} \cup \left\{j\tilde{E}_{rs}\right\}_{1\le r\le m, 1\le s\le n} \\ \text{a } \mathbb{R} : &\quad \{1\} \end{aligned}$$

on E_{rs} *i* $\tilde{E}_{rs}$ *denoten matrius amb un* 1 *a la fila* r *i columna* s, *i zeros en les altres posicions, obtenim una base de* $\mathcal{H}_n \times \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathbb{R}$ *que dóna lloc a la representació de la LMI en forma estandard*

$$H_0 + \sum_{r=1}^{n} x_r^1 H_r^1 + \sum_{1\le r<s\le n} x_{rs}^2 H_{rs}^2 + \sum_{1\le r<s\le n} x_{rs}^3 H_{rs}^3 + \sum_{\substack{1\le r\le m \\ 1\le s\le n}} x_{rs}^4 H_{rs}^4 + \sum_{\substack{1\le r\le m \\ 1\le s\le n}} x_{rs}^5 H_{rs}^5 + x^6 H^6 > 0,$$

amb

$$\begin{aligned} H_0 &= F(0_{n\times n}, 0_{m\times n}, 0), \\ H_r^1 &= L(E_{rr}, 0_{m\times n}, 0), \ \ 1 \le r \le n, \\ H_{rs}^2 &= L(E_{rs} + E_{sr}, 0_{m\times n}, 0), \ \ 1 \le r < s \le n, \\ &\ \vdots \\ H^6 &= L(0_{n\times n}, 0_{m\times n}, 1). \end{aligned}$$

Comentari 6 *La LMI (3) està íntimament lligada amb el* Bounded Real Lemma *[2] quan es volen dissenyar control·ladors H_∞ amb realimentació d'estat estàtics (state-feedback) per al sistema lineal*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \\ z(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases}$$

3 Reducció de desigualtats matricials complexes a desigualtats matricials reals

El resultat següent estableix que tota desigualtat matricial complexa es redueix a una desigualtat matricial real amb dimensions superiors, i es pot trobar enunciat en una gran varietat de treballs que involucren LMIs complexes [3, 5, 6, 7].

Proposició 7 *Sigui $A = U + jV \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriu quadrada amb U i V reals i considerem la matriu*

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} U & -V \\ V & U \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(2n)\times(2n)}(\mathbb{R}).$$

La matriu A és hermitiana si i només si la matriu $\widehat{A}$ és simètrica, i en aquest cas $A \underset{(\geq)}{>} 0$ si i només si $\widehat{A} \underset{(\geq)}{>} 0$.

Demostració. Tenim que

$$A = A^* \Leftrightarrow (U + jV) = (U + jV)^* \Leftrightarrow U + jV = U^T - jV^T \Leftrightarrow U = U^T \text{ i } V = -V^T,$$

condició que es pot escriure en forma compacta com $\left[\begin{smallmatrix} U & -V \\ V & U \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} U & -V \\ V & U \end{smallmatrix}\right]^T$, és a dir $\widehat{A} = (\widehat{A})^T$. Això demostra la primera part de l'enunciat. La segona part prové del fet que per a un vector $z = x + jy \in \mathbb{C}^n$ amb x, y reals es compleix

$$\begin{aligned} z^*Az &= (x^T - jy^T)(U + jV)(x + jy) \\ &= x^TUx + y^TUy - x^TVy + y^TVx + j\left(x^TVx + y^TVy + x^TUy - y^TUx\right). \end{aligned}$$

Com que $x^TVx = y^TVy = 0$ en ser V anti-simètrica, i $x^TUy = y^TUx$ en ser U simètrica, resulta

$$z^*Az = x^TUx + y^TUy - x^TVy + y^TVx = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U & -V \\ V & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

d'on s'obté immediatament que $A \underset{(\geq)}{>} 0$ si i només si $\widehat{A} \underset{(\geq)}{>} 0$. □

Comentari 8 *Com a conseqüència de la Proposició 7, la part real d'una matriu hermitiana sempre és simètrica, (semi-)definida positiva si la matriu original ho és. Per altra banda, la part imaginària d'una matriu hermitiana és sempre una matriu antisimètrica.*

En general, per a una matriu $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, no necessàriament quadrada, denotem $\widehat{A}$ la matriu amb coeficients reals

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(A) & -\mathrm{Im}(A) \\ \mathrm{Im}(A) & \mathrm{Re}(A) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(2m)\times(2n)}(\mathbb{R}).$$

Proposició 9 *Es compleixen les propietats següents, vàlides per a matrius A i B amb mides apropiades i $t \in \mathbb{R}$:*

(a) $\widehat{tA} = t\widehat{A}$, $\widehat{A+B} = \widehat{A} + \widehat{B}$, $\widehat{I_n} = I_{2n}$, $\widehat{A^*} = (\widehat{A})^T$,

(b) $\widehat{AB} = \widehat{A}\widehat{B}$, $\widehat{jA} = J_m\widehat{A} = \widehat{A}J_n$ *on* $J_r = \widehat{jI_r} = \left[\begin{smallmatrix} 0_{r\times r} & -I_r \\ I_r & 0_{r\times r} \end{smallmatrix}\right]$ *per a* $r \geq 1$,

Demostració. La demostració s'obté amb manipulacions algebraiques elementals i la ometem. □

Considerem una LMI complexa abstracta

$$F(v) \underset{(\geq)}{>} 0, \tag{4}$$

on $F : \mathcal{V} \to \mathcal{H}_n$ és una aplicació $\mathbb{R}$-afí. Tenint en compte que la funció $\widehat{\ }: \mathcal{H}_n \to \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ està ben definida (pren valors a $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$) i és $\mathbb{R}$-lineal en virtut de l'apartat (a) de la Proposició 9, obtenim per composició una aplicació $\mathbb{R}$-afí $\widehat{F} = \widehat{\ }\circ F$, i per la Proposició 7 la LMI complexa (4) equival a la LMI real

$$\widehat{F}(v) = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(F(v)) & -\mathrm{Im}(F(v)) \\ \mathrm{Im}(F(v)) & \mathrm{Re}(F(v)) \end{bmatrix} \underset{(\geq)}{>} 0.$$

Comentari 10 *En el cas d'una LMI complexa en forma estandard*

$$H_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i H_i \underset{(\geq)}{>} 0,$$

amb $H_0, \ldots, H_k \in \mathcal{H}_n$, aplicant directament la Proposició 7 i les propietats de linealitat $\widehat{tA} = t\widehat{A}$ i $\widehat{A+B} = \widehat{A} + \widehat{B}$ de la Proposició 9, obtenim la LMI real en forma estandard

$$\widehat{H_0} + \sum_{i=1}^{k} x_i \widehat{H_i} \underset{(\geq)}{>} 0.$$

A continuació generalitzem la Proposició 7 a matrius definides per blocs. La Proposició 7 s'obté en el cas particular d'un sol bloc ($p = 1$ en l'enunciat de la següent proposició).

Proposició 11 *Sigui*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pp} \end{bmatrix}$$

una matriu quadrada de mida $n \times n$ amb blocs A_{rs}, $1 \le r \le p$, $1 \le s \le p$, tals que A_{rr} és quadrada per a tot $1 \le r \le p$. Sigui $\Omega(A)$ la matriu

$$\Omega(A) = \begin{bmatrix} \widehat{A_{11}} & \widehat{A_{12}} & \cdots & \widehat{A_{1p}} \\ \widehat{A_{21}} & \widehat{A_{22}} & \cdots & \widehat{A_{2p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{A_{p1}} & \widehat{A_{p2}} & \cdots & \widehat{A_{pp}} \end{bmatrix}.$$

Aleshores A és hermitiana si i només si $\Omega(A)$ és simètrica, i en aquest cas $A \underset{(\ge)}{>} 0$ si i només si $\Omega(A) \underset{(\ge)}{>} 0$.

Demostració. Els blocs A_{rs}, $1 \le r \le p$, $1 \le s \le p$, tenen mides $n_r \times n_s$, on els nombres n_r, $1 \le r \le p$, són tals que $n = \sum_{r=1}^{p} n_r$. Sigui $A_{rs} = U_{rs} + jV_{rs}$ amb $U_{rs}, V_{rs} \in \mathcal{M}_{n_r \times n_s}(\mathbb{R})$, $1 \le r \le p$, $1 \le s \le p$. Aleshores

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= \begin{bmatrix} U & -V \\ V & U \end{bmatrix}, \\ U &= \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1p} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{p1} & U_{p2} & \cdots & U_{pp} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1p} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{p1} & V_{p2} & \cdots & V_{pp} \end{bmatrix}, \qquad (5) \\ \widehat{A_{rs}} &= \begin{bmatrix} U_{rs} & -V_{rs} \\ V_{rs} & U_{rs} \end{bmatrix}, \ 1 \le r \le p, 1 \le s \le p. \end{aligned}$$

Considerem la matriu permutació

$$Q = \begin{bmatrix} G_1 & 0_{n_1 \times n} \\ 0_{n_1 \times n} & G_1 \\ G_2 & 0_{n_2 \times n} \\ 0_{n_2 \times n} & G_2 \\ \vdots & \vdots \\ G_p & 0_{n_p \times n} \\ 0_{n_p \times n} & G_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(2n)\times(2n)}(\mathbb{R}),$$

on G_r, $1 \leq r \leq p$, és la matriu

$$G_r = \begin{bmatrix} 0_{n_r \times n_1} & \cdots & 0_{n_r \times n_{r-1}} & I_{n_r} & 0_{n_r \times n_{r+1}} & \cdots & 0_{n_r \times n_p} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n_r \times n}(\mathbb{R}).$$

Tenint en compte (5), és immediat veure que es compleix la identitat

$$Q\widehat{A}Q^T = \Omega(A),$$

de manera que $\widehat{A}$ i $\Omega(A)$ són matrius conjugades. En particular, $\widehat{A}$ és simètrica si i només si $\Omega(A)$ ho és, i $\widehat{A} \underset{(\geq)}{>} 0$ si i només si $\Omega(A) \underset{(\geq)}{>} 0$. Finalment, aplicant la Proposició 7 obtenim la resta de la demostració i ja hem acabat. □

Exemple 12 *Com a exemple d'aplicació de la Proposició 9 i la Proposició 11 considerem la LMI de l'Exemple 5. Les desigualtats matricials (3) equivalen a la LMI real*

$$\begin{bmatrix} \widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^T + \widehat{B}\widehat{Y} + \widehat{Y}^T\widehat{B}^T + \eta\widehat{B}_w^T\widehat{B}_w & \left(\widehat{C}\widehat{X} + \widehat{D}\widehat{Y}\right)^T \\ \widehat{C}\widehat{X} + \widehat{D}\widehat{Y} & -I_{2d} \end{bmatrix} < 0, \ \widehat{X} > 0, \ \eta > 0, \qquad (6)$$

on $\widehat{X}$ i $\widehat{Y}$ són matrius reals amb la següent estructura:

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X_1 & -X_2 \\ X_2 & X_1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_2 \\ Y_2 & Y_1 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Les variables de la LMI (6) són les matrius

$$X_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \ X_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \ Y_1 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \ Y_2 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad (8)$$

(que representen les parts real i imàginaria de les matrius originals X i Y), juntament amb l'escalar $\eta \in \mathbb{R}$. La resta de matrius constants $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{B}_w, \widehat{C}$ i $\widehat{D}$ prenen la forma

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(A) & -\mathrm{Im}(A) \\ \mathrm{Im}(A) & \mathrm{Re}(A) \end{bmatrix}, \widehat{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(B) & -\mathrm{Im}(B) \\ \mathrm{Im}(B) & \mathrm{Re}(B) \end{bmatrix}, \ldots, \widehat{D} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(D) & -\mathrm{Im}(D) \\ \mathrm{Im}(D) & \mathrm{Re}(D) \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Comentari 13 *Introduïnt (7) i (9) en la LMI (6) i efectuant les operacions matricials corresponents, es pot obtenir una representació explícita i simplificada de la LMI (6) en termes de les variables* X_1, X_2, Y_1, Y_2 *i* η. *No obstant, a l'hora de treballar amb el* MATLAB Robust Control Toolbox *[1], podem considerar que les variables de la LMI (6) són l'escalar* η *i les matrius* $\widehat{X}$ *i* $\widehat{Y}$, *definint aquestes darreres matrius com a* variables LMI tipus 3 *que representen matrius genèriques amb una estructura predefinida. En el nostre cas, utilitzem l'estructura de (7) i (8). Un cop això, s'introdueix la LMI tal com està en (6), sense necessitat d'efectuar cap operació matricial per part nostra.*

AGRAÏMENTS: Aquest treball està finançat parcialment pel *Ministerio de Economía y Competitividad* dintre del projecte DPI2012-32375/FEDER.

Referències

[1] G. Balas, R. Chiang, A. Packard, M. Safonov, *MATLAB Robust Control Toolbox. User's Guide.* The MathWorks, Inc., 2012.

[2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

[3] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.

[4] S.L. Campbell, J.-P. Chancelier, R. Nikoukhah, *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*, Springer, 2006.

[5] L. Chai, J. Zhang, C. Zhang, E. Mosca, Efficient computation of frame bounds using LMI-based optimization, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **56** (2008), 3029-3033.

[6] Y. Ebihara, D. Peaucelle, D. Arzelier, *S-Variable Approach to LMI-Based Robust Control*, Springer-Verlag, 2015.

[7] T. Iwasaki, S. Hara, Generalized KYP Lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50** (2005), 41-59.

[8] A. Nemirovskii, P. Gahinet, The projective method for solving linear matrix inequalities, *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore, USA, 1994, 840-844.

[9] Y. Nesterov, A. Nemirovskii, *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, SIAM, 1994.