

Complejos de homomorfismos y disecciones de polígonos

Pfeifle, J.*

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya,
Barcelona
julian.pfeifle@upc.edu

Resumen. Encontramos realizaciones canónicas de los complejos politopales $\text{Hom}(G, H)$ formados por homomorfismos de grafos y estudiados por Babson y Kozlov. Si G es un grafo completo, caracterizamos en qué casos cierta proyección canónica de esta realización es a su vez un complejo, y mostramos que multitud de objetos interesantes aparecen como subestructuras de estas proyecciones: las disecciones de un polígono convexo en k -ángulos, los permutaedros generalizados de Postnikov, triangulaciones escalera y el grafo de composiciones de un entero en un número fijo de sumandos no negativos.

Palabras clave. Truco de Cayley, complejo politopal, homomorfismo de grafos, número de clanes, disecciones de polígonos, composiciones

1. Introducción

Un *homomorfismo* de un grafo G a un grafo H es una aplicación $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ entre sus conjuntos de vértices, tal que $(\varphi(x), \varphi(y))$ es una arista de H siempre que (x, y) sea una arista de G . Hablando de manera intuitiva, las celdas del complejo politopal asociado $\text{Hom}(G, H)$ agrupan homomorfismos compatibles entre sí.

Recientemente, el estudio de los complejos Hom de grafos ha permitido cosechar varios éxitos relacionados con métodos topológicos para estudiar el número cromático de un grafo. Por ejemplo, Babson y Kozlov [1] han podido demostrar una célebre conjetura de Lovász, que proporciona una cota inferior para el número cromático de un grafo G en función de cierta propiedad topológica (la conectividad) del complejo $\text{Hom}(C, G)$, donde C es un ciclo impar. (En este contexto, hay que destacar también las posteriores simplificaciones por parte de Schultz [9] y Kozlov [5].)

En su demostración de la conjetura de Lovász, Babson y Kozlov definen también cierto complejo simplicial $\text{Hom}_+(G, H)$ de “homomorfismos parciales” de G

*Financiado por un contrato *Juan de la Cierva* del MEC

a H , es decir, homomorfismos de un subgrafo inducido de G a H . Tanto los complejos simpliciales $\text{Hom}_+(G, H)$ como los politopales $\text{Hom}(G, H)$ se definen puramente al nivel combinatorio.

En este trabajo realizamos $\text{Hom}_+(G, H)$ y $\text{Hom}(G, H)$ geoméricamente, y descubrimos que estas realizaciones canónicas están relacionados entre si mediante el *truco poliedral de Cayley*, explorado por Sturmfels, Huber, Rambau y Santos; véase [8] y las referencias allí citadas.

En el siguiente paso, proyectamos estos complejos de manera también canónica a cierto subespacio de dimensión menor. Aquí nos encontramos con que la proyección $\pi\text{Hom}(G, H)$ no siempre es a su vez un complejo politopal, puesto que las proyecciones de las celdas se pueden intersectar de manera no deseada. No obstante, podemos caracterizar qué tipo de celdas pueden aparecer: son exactamente los *permutaedros generalizados* hallados por Postnikov [7].

2. Disecciones

Continuando una tradición de cierta antigüedad [2], lo que nos interesa especialmente en este trabajo son las disecciones de un polígono convexo en k -ángonos, para k fijo, y los *flips* entre ellas:

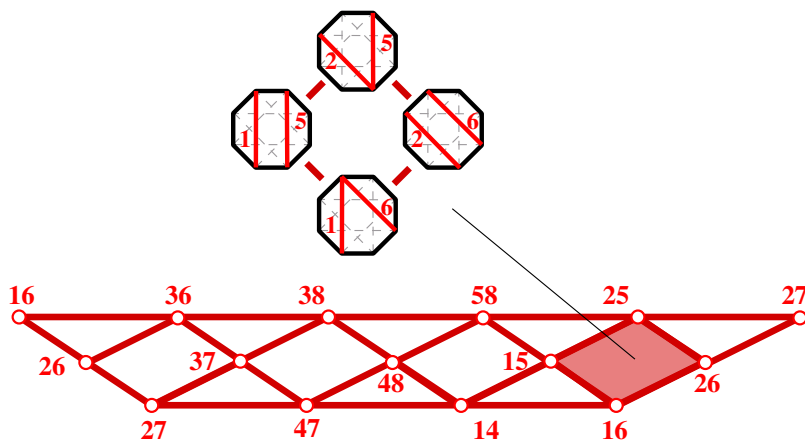


Figura 1: El grafo de flips de las disecciones de un octógono convexo en tres cuadriláteros ($k = 4$). Nótese las identificaciones (vértices repetidos) en los laterales derecho e izquierdo, que dan lugar a una cinta de Möbius.

Aunque el grafo de flips es de dimensión 1, en este ejemplo saltan claramente a la vista unas celdas politopales (triángulos y cuadriláteros) que juntos forman un complejo politopal, en este caso una cinta de Möbius.

De manera general, consideramos el conjunto de disecciones de un polígono convexo con $m(k - 2) + 2$ vértices en m polígonos convexos con k vértices, y definimos dos grafos asociados: El grafo $D(k, m)$ es el *grafo de flips* de la figura 1, cuyos vértices son las propias disecciones y donde dos disecciones están unidas por una arista si difieren en la ubicación de exactamente una diagonal.

En segundo lugar, sea $\delta(k, m)$ el conjunto de las diagonales k -admisibles (los que pueden formar parte de una tal disección), y $I(k, m)$ el *grafo de independencia* con conjunto de vértices $\delta(k, m)$, es decir, conectamos dos diagonales si y sólo si sus interiores relativos no se intersectan.

Para formular uno de los principales resultados de este trabajo, escribimos K_{m-1} para el grafo completo con $m - 1$ vértices, y

$$D(k, m) = \pi\text{Hom}(K_{m-1}, I(k, m)),$$

$$D_+(k, m) = \pi\text{Hom}_+(K_{m-1}, I(k, m)).$$

Teorema 1. $D(k, m)$ es un complejo politopal, y $D_+(k, m)$ un complejo simplicial. Además, $D(k, m)$ es una sección lineal de $D_+(k, m)$, y $D(k, m)$ es el grafo de $D(k, m)$.

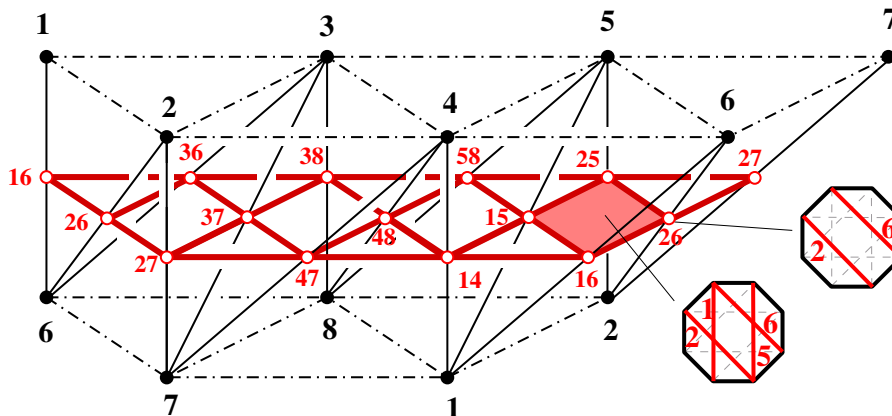


Figura 2: El complejo simplicial proyectado $D_+(4, 3)$, junto con el complejo politopal $D(4, 3)$ como sección lineal; el grafo de este último, en trazo grueso, es el grafo de flips $D(4, 3)$. Las aristas finas sólidas representan el complejo simplicial $T(4, 3)$.

Las celdas de $D(k, m)$, en virtud de ser celdas de un complejo Hom (aunque proyectado), representan disecciones del polígono que en cierta manera son “compatibles” entre si, tal y como indica la figura 2. El complejo simplicial $T(k, m)$ mencionado ha surgido con anterioridad en un trabajo de Tzanaki [10], concretamente, es el *complejo de independencia* asociado al conjunto de diagonales $\delta(k, m)$. Este complejo, de dimensión $m - 2$, generaliza el grafo de independencia $I(k, m)$, en tanto que los símplices de $T(k, m)$ son exactamente los conjuntos independientes de $\delta(k, m)$. En particular, el grafo de $T(k, m)$ es precisamente $I(k, m)$.

Es más, los bloques básicos de los que se componen $D_+(k, m)$, $D(k, m)$ y $D(k, m)$ son *triangulaciones escalera* del producto de símplices $\Delta^r \times \Delta^s$, *politopos polar-cíclicos* $C_d(n)^\Delta$, y *grafos de composiciones* $C(r, s)$, respectivamente [3], [6], siempre para valores apropiados de los parámetros.

Es de destacar que todos estos objetos asociados con las disecciones de un polígono en k -ángonos se encuentran inmersas de manera muy natural en las proyecciones de complejos de homomorfismos entre grafos.

3. Generalizaciones

El número $m(k - 2) + 2$ de vértices del polígono original ha sido escogido de manera que quede diseccionado en exactamente m polígonos de k vértices cada uno. Un momento de reflexión muestra claramente que esto significa que el número de clanes $\omega(I(k, m))$ del grafo $I(k, m)$, es decir el máximo número de diagonales k -admisibles que se pueden escoger sin que dos se intersecten en su interior relativo, es $m - 1$.

La primera afirmación del teorema 1, es decir el hecho de que $D(k, m) = \pi\text{Hom}(K_{m-1}, I(k, m))$ sea un complejo politopal, mantiene que no existen intersecciones no deseadas entre los politopos que son las proyecciones de las celdas de $\text{Hom}(K_{m-1}, I(k, m))$. Su demostración puede llevarse a cabo de manera directa, pero en realidad es un simple corolario del siguiente teorema general y la relación $\omega(I(k, m)) = m - 1$:

Teorema 2. *La proyección $\pi\text{Hom}(K_g, H)$ es un complejo politopal no vacío, y $\pi\text{Hom}_+(K_g, H)$ un complejo simplicial no vacío, si y sólo si $\omega(H) = g$.*

Si $\omega(H) < g$ los complejos Hom están vacíos, y si al contrario $\omega(H) > g$ en general habrá intersecciones no deseadas entre celdas proyectadas.

La demostración de este última teorema pasa por darse cuenta de que todos los vértices de la proyección canónica $\pi\text{Hom}(K_g, H)$ son, de hecho, vértices del *hipersimplex* $\Delta(h, g)$, el cierre convexo de todos los vectores 0/1 de longitud h con exactamente g entradas ‘1’.

De hecho, no sólo los vértices de $\pi\text{Hom}(K_g, H)$ son vértices de $\Delta(h, g)$, sino incluso se verifica el siguiente resultado:

Teorema 3. *El grafo de $\pi\text{Hom}(K_g, H)$ es un subgrafo del grafo de $\Delta(h, g)$, y cada celda $\pi(\sigma)$ de $\pi\text{Hom}(K_g, H)$ es un politopo matroidal [4].*

Este hecho constituye el punto de partida de futuros trabajos.

Bibliografía

- [1] E. BABSON AND D. KOZLOV, *Proof of the Lovász conjecture*, Annals of Mathematics, (2006), to appear.
- [2] N. FUSS, *Solutio quæstionis, quot modis polygonum n laterum in polygona m laterum, per diagonales resolvi quæat*, Nov. Act. Acad. Sci. Petropol., 9 (1791), pp. 243–251.
- [3] C. HUEMER, F. HURTADO, AND J. PFEIFLE, *Gray codes and polytopal complexes for dissections of a polygon into k -gons*, in Actas de los XI Encuentros de Geometría Computacional, Santander, 2005.
- [4] M. M. KAPRANOV, *Chow quotients of Grassmannians. I*, in I. M. Gel'fand Seminar, Adv. Soviet Math. **16** (1993), pp. 29–110.
- [5] D. KOZLOV, *Cobounding odd cycle colorings*, preprint (2006), 2 pages, arXiv:math.AT/0602561
- [6] J. PFEIFLE, *Dissections, Hom-complexes and the Cayley Trick*, preprint (2005), 21 pages, arXiv:math.CO/0512529
- [7] A. POSTNIKOV, *Permutahedra, Associahedra, and beyond*. 59 pages, arXiv:math.CO/0507163, 2005.
- [8] F. SANTOS, *The Cayley trick and triangulations of products of simplices*, in Integer points in polyhedra—geometry, number theory, algebra, optimization, Contemp. Math. 374 (2005), pp. 151–177.
- [9] C. SCHULTZ, *A short proof of $w_1^n(\text{Hom}(C_{2r+1}, K_{n+2})) = 0$ for all n and a graph colouring theorem by Babson and Kozlov*. Preprint, 8 pages, arXiv:math.AT/0507346, 2005.
- [10] E. TZANAKI, *Polygon dissections and some generalizations of cluster complexes*. 9 pages, math.CO/0501100v2; JCTA (2006), in press.