

UTILIZACIÓN DE FUERZAS Y PARÁMETROS REDUCIDOS PARA EL ESTUDIO DINÁMICO DE MECANISMOS DE UN GRADO DE LIBERTAD

Cardona Foix, S., Jordi Nebot, L., Puig Ortiz, J.

ETSII de Barcelona. Dept. Ingeniería Mecánica. Universitat Politècnica de Catalunya. Av. Diagonal, 647. 08028 Barcelona. España. Tel: 34 934016588 Fax: 34 934015813 e-mail: salvador.cardona@upc.edu

Área Temática: Síntesis y análisis de mecanismos

RESUMEN

En el ámbito de las máquinas, es usual utilizar mecanismos de un grado de libertad en los que su configuración, y por lo tanto cualquier condición geométrica, queda definida en función de una única variable o coordenada independiente. Habitualmente, ésta se hace corresponder con el movimiento del elemento de entrada del mecanismo que, a menudo, corresponde a una manivela accionada por un motor rotativo. En el presente trabajo el planteamiento tanto de la ecuación del movimiento del mecanismo como la expresión para el cálculo de las fuerzas de enlace presentes se realiza a partir de las ecuaciones de Lagrange, lo que conduce a definir un conjunto de parámetros dinámicos, parámetros reducidos del sistema, función de la coordenada independiente. Estos parámetros reducidos se determinan mediante un análisis cinetostático y con ellos la dinámica del sistema se expresa con una ecuación diferencial de segundo orden de fácil integración. Si al mismo tiempo debe calcularse alguna acción de enlace ésta se obtiene a partir de una expresión algebraica que incluye los parámetros reducidos correspondientes así como la velocidad y la aceleración calculadas en el proceso de integración. El procedimiento expuesto ensancha las posibilidades y utilidades de un programa de fácil utilización que no disponga de capacidad de análisis dinámico directo. Se expone el procedimiento para la determinación de estos parámetros utilizando la aplicación PAM –Programa de Análisis de Mecanismos. Se presenta un estudio mediante parámetros reducidos de la dinámica del pedaleo en bicicleta estática para un proceso de rehabilitación. Se centra la atención en la determinación de la fuerza en la rodilla en régimen de pedaleo estacionario.

PALABRAS CLAVE: Parámetros reducidos, Ecuaciones de Lagrange, Dinámica

INTRODUCCIÓN

El análisis dinámico de mecanismos mediante procedimientos manuales suele ser laborioso y tedioso, ya sea por el número de ecuaciones a plantear si se utilizan los Teoremas Vectoriales, ya sea por la dificultad en la determinación de las fuerzas de inercia si se decide utilizar el Método de las Potencias Virtuales o de la energía cinética si se toma el camino de las Ecuaciones de Lagrange. En estos dos últimos casos la situación se agrava si además se requiere el cálculo de alguna acción de enlace.

La utilización de una aplicación específica de software para el estudio de sistemas multisólido puede no quedar justificada o incluso ser desaconsejada o inviable en algunos casos, como por ejemplo cuando el estudio del mecanismo deba realizarse en tiempo real [1] como parte de la simulación y control de un proceso productivo. En estos casos debe disponerse de un modelo de bajo coste tanto en implementación como computacional [1, 2].

En este trabajo, continuación de [3, 4], el planteamiento tanto de la ecuación del movimiento del mecanismo como la expresión para el cálculo de las fuerzas de enlace presentes en el mecanismo se realiza a partir de las ecuaciones de Lagrange, lo que conduce a definir un conjunto de parámetros dinámicos, *parámetros reducidos del sistema*, función de la coordenada independiente tomada para la descripción cinemática del mecanismo. Estos parámetros reducidos se determinan, en este trabajo, mediante un análisis cinetostático y con ellos la dinámica del sistema se expresa con una ecuación diferencial de segundo orden de fácil integración. Si al

mismo tiempo debe calcularse alguna acción de enlace ésta se obtiene a partir de una expresión algebraica que incluye los parámetros reducidos correspondientes así como la velocidad y la aceleración calculadas en el proceso de integración. El procedimiento expuesto ensancha las posibilidades y utilidades de un programa de fácil utilización que no disponga de capacidad de análisis dinámico directo. En este trabajo la determinación de los parámetros reducidos se realiza mediante la aplicación PAM –Programa de Análisis de Mecanismos– que realiza los análisis estático, cinemático y cinetostático de mecanismos planos de uno o más grados de libertad controlados por tantos actuadores, angulares o lineales, como grados de libertad tenga el mecanismo.

DINÁMICA DEL SISTEMA

Para el estudio de la dinámica de un mecanismo se propone la utilización de las ecuaciones ordinarias de Lagrange para sistemas holónomos [5]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = F_i^* \quad (1)$$

Siendo E_c la energía cinética del sistema, q_i las coordenadas generalizadas y F_i la fuerza generalizada asociada a la coordenada q_i en la que se incluyen las fuerzas conservativas

Si se desea encontrar una fuerza o momento de enlace, éste puede sustituirse, conceptualmente, por un actuador que garantice la condición cinemática impuesta por dicho enlace –actuador de enlace– (figura 1). Así pues, la fuerza o momento de enlace puede encontrarse aplicando las ecuaciones de Lagrange a un sistema con una coordenada generalizada más y posteriormente aplicando a las ecuaciones halladas la condición cinemática impuesta por el enlace.

En el caso que se estudia, mecanismo de un grado de libertad, la determinación de una acción de enlace conduce a un sistema de dos coordenadas independientes q_1 y q_2 , la primera asociada al movimiento real del mecanismo y la segunda al movimiento impedido por el enlace. Para un mecanismo holónimo de dos coordenadas independientes la energía cinética es [5]:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 (q_1, q_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (q_1, q_2) \dot{q}_2^2 + m_{12} (q_1, q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (2)$$

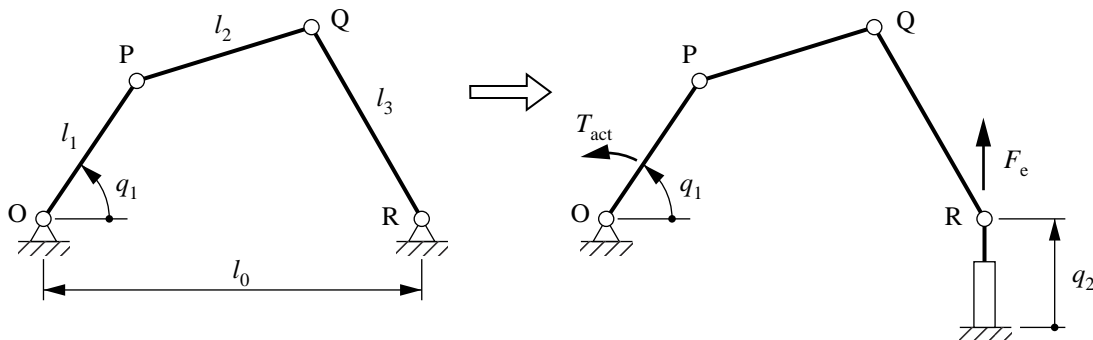


Fig. 1. Mecanismo de un grado de libertad y enlace sustituido por un actuador de enlace.

Desarrollando las ecuaciones de Lagrange y particularizando para el movimiento impuesto por el actuador de enlace $\ddot{q}_2 = 0$ y $\dot{q}_2 = 0$, en el ejemplo de la figura 1, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} m_1(q_1) \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} m_{1q_1}(q_1) \dot{q}_1^2 = T_{act} \\ m_{12}(q_1) \ddot{q}_1 + \left(m_{12q_1}(q_1) - \frac{1}{2} m_{1q_2}(q_1) \right) \dot{q}_1^2 = F_e \end{cases} \quad (3)$$

Siendo $m_{1q_1} = \frac{\partial m_1}{\partial q_1}$; $m_{12q_1} = \frac{\partial m_{12}}{\partial q_1}$; $m_{1q_2} = \frac{\partial m_1}{\partial q_2}$. En general, T_{act} es la fuerza generalizada asociada a la coordenada q_1 de todas las fuerzas distintas a las de enlace.

Los coeficientes de la Ec.(3), en el sistema de la figura 1, se pueden obtener, por ejemplo, haciendo los siguientes análisis cinetostáticos [2]:

i) Con $\ddot{q}_1 = 0$ y $\dot{q}_1 \neq 0$, de la primera ecuación de (3) se obtiene $m_2 = \frac{1}{2} m_{1q_1} (\dot{q}_1) = T_{act} / \dot{q}_1^2$

y de la segunda ecuación de (3) se obtiene $m_{e_2} = \left(m_{12q_1} (\dot{q}_1) - \frac{1}{2} m_{1q_2} (\dot{q}_1) \right) = F_E / \dot{q}_1^2$.

Para pasar de una configuración a la siguiente, y así barrer todo el rango de valores de interés de q_1 , puede usarse un actuador que imponga la condición citada con velocidad constante ($\ddot{q}_1 = 0$ y $\dot{q}_1 \neq 0$) y realizar un conjunto de análisis a intervalos regulares de tiempo con lo que se obtendrán los valores de m_2 y m_{e_2} para valores de q_1 equiespaciados.

ii) Con $\ddot{q}_1 \neq 0$ y $\dot{q}_1 = 0$ de la primera ecuación de (3) se obtiene

$$m_1 = m_1(q_1) = \left(T_{act} - \frac{1}{2} m_{1q_1}(q_1) \dot{q}_1^2 \right) / \ddot{q}_1 \text{ y de la segunda ecuación de (3) se obtiene}$$

$$m_{e_1} = m_{12}(q_1) = \left(F_E - \left(m_{12q_1}(q_1) - \frac{1}{2} m_{1q_2}(q_1) \dot{q}_1^2 \right) \right) / \ddot{q}_1$$

Si ahora para pasar de una configuración a la siguiente se utiliza, como en el caso anterior, el actuador que impone la condición citada ($\ddot{q}_1 \neq 0$ y $\dot{q}_1 = 0$) con aceleración constante y se realiza un conjunto de análisis a intervalos regulares de tiempo, los valores de m_1 y m_{e_1} evidentemente no se obtendrán para valores de q_1 equiespaciados. Si se desean obtener los valores de m_1 y m_{e_1} para los mismos valores de q_1 del apartado i) puede usarse un actuador que controle q_1 según una función temporal con una parte lineal y una parte armónica:

$$q_1(t) = (c_1 + c_2 t) + (c_3 \cos(c_4 t + c_5))$$

donde $c_1 \dots c_5$ son constantes que se escogen de forma que se repitan las condiciones $\ddot{q}_1 \neq 0$ y $\dot{q}_1 = 0$ en los puntos de interés. En definitiva pues, se define una función continua del actuador que muestreada adecuadamente proporcione las condiciones requeridas en las configuraciones q_i deseadas.

Por otro lado, debe tenerse en cuenta que los valores de m_1 también pueden obtenerse mediante un proceso de integración puesto que se conocen los valores de m_{1q_1} del análisis anterior del apartado i). Para ello debe aplicarse ii) para obtener el primer valor de $m_1(q_{1_0})$. Así:

$$m_1(q_1) = m_1(q_{1_0}) + \sum m_{1q_1}(q_1) \Delta q_1$$

PEDALEO EN UNA BICICLETA ESTÁTICA

El procedimiento expuesto en el apartado anterior se utiliza para estudiar la dinámica del pedaleo en una bicicleta estática en un proceso de rehabilitación de una lesión de rodilla [6, 7, 8]. El mecanismo mostrado en la figura 2 representa el modelo para este estudio. Se supone que el tobillo no actúa como articulación, y por lo tanto que está fijo al pedal, por lo que el modelo tiene un grado de libertad. Los parámetros geométricos y las

masas y los momentos de inercia se han obtenido experimentalmente en un trabajo paralelo y son los mostrados en la figura 2. Un volante fijo al piñón proporciona una energía cinética equivalente a la energía cinética de traslación de la bicicleta y el ciclista más la energía cinética de rotación de las ruedas de una bicicleta convencional. En este trabajo se muestra la viabilidad del método de estudio pero no se tienen en consideración aspectos como la actuación de diversos músculos, que pueden modelizarse mediante actuadores simultáneos.

Para determinar los parámetros reducidos se utiliza el programa PAM –Programa de Análisis de Mecanismos– que realiza los análisis estático, cinemático y cinetostático de mecanismos planos [9, 10]. Esta aplicación obtiene y permite exportar para un conjunto de instantes de tiempo todas las variables cinemáticas y dinámicas del mecanismo.

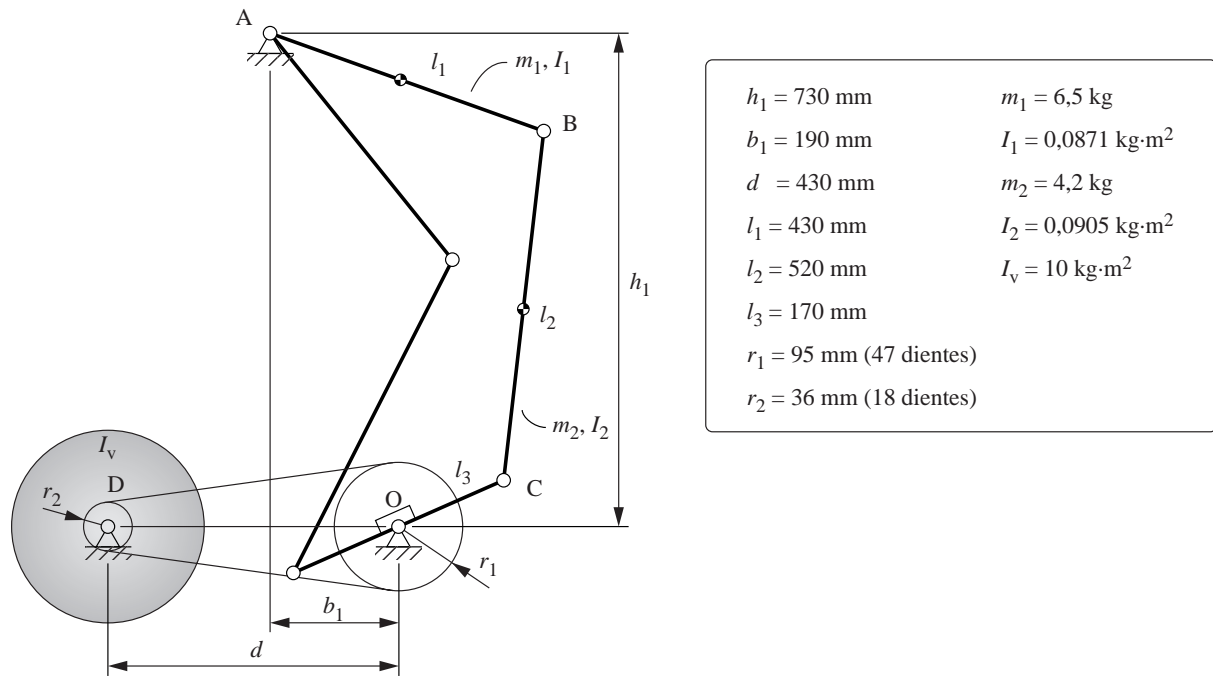


Fig. 2. Modelo de bicicleta estática.

La simulación cinetostática más razonable es la que usa un actuador que controla el ángulo girado por los pedales φ_p puesto que esta coordenada no presenta puntos muertos (figura 3). En esta simulación se consideran despreciables las variaciones de energía potencial del muslo y de la pierna.

Con la finalidad de obtener el valor de estos parámetros reducidos, m_1 y m_{e1} , para los mismos valores φ_p que en la simulación anterior, se utiliza en el programa PAM una combinación de dos actuadores, uno lineal y otro armónico, de manera que $\ddot{\varphi}_p \neq 0$ y $\dot{\varphi}_p = 0$ en los valores apropiados de φ_p .

Una vez obtenidos los parámetros reducidos al giro del pedal, aún queda obtener las fuerzas generalizadas $F_{\varphi_p}^*$ i F_x^* asociadas a las coordenadas correspondientes al giro del pedal φ_p y al alargamiento del actuador de enlace x .

Las expresiones de las fuerzas generalizadas se obtienen, por ejemplo, realizando los siguientes movimientos virtuales.

$$i) \quad \dot{\varphi}_p \neq 0 \text{ con } \dot{x}^* = 0 \text{ entonces } F_{\varphi_p}^* = T_m \left. \frac{\dot{\varphi}_m}{\dot{\varphi}_p} \right|_{\dot{x}=0} + T_{res} \left. \frac{\dot{\varphi}_{volante}}{\dot{\varphi}_p} \right|_{\dot{x}=0}$$

Este movimiento es compatible con los enlaces originales del sistema. La relación de velocidades se obtiene para un movimiento real con $\dot{x} = 0$.

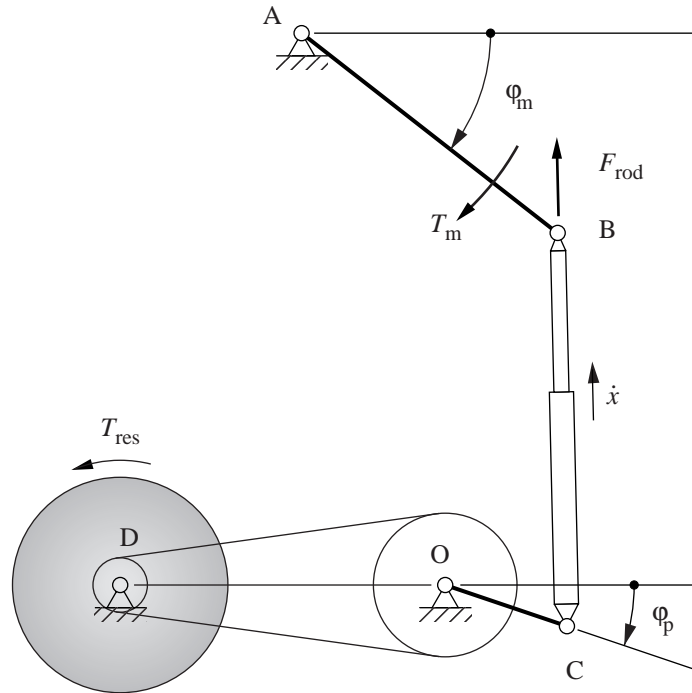


Fig. 3. Coordenadas generalizadas y parámetros considerados en la simulación.

$$ii) \quad \dot{x}^* \neq 0 \text{ con } \dot{\varphi}_p^* = 0 \text{ entonces } F_x^* = F_{rod} + T_m \left. \frac{\dot{\varphi}_m}{\dot{x}} \right|_{\dot{\varphi}_p=0}$$

En este movimiento se prescinde de la condición de enlace de la pierna $x = l_2$ con lo que se pasan a tener dos grados de libertad. La relación de velocidades se obtiene para un movimiento real con $\dot{\varphi}_p = 0$

En ambos casos, T_m es el par que actúa en la cadera sobre el muslo, T_{res} es el par de resistencias pasivas sobre el volante de inercia y F_{rod} es la fuerza en la rodilla en la dirección de la pierna.

Para acabar de simular el proceso de rehabilitación deben resolverse las ecuaciones del movimiento y para ello es necesario asignar valores a T_m y T_{res} . En el proceso de pedaleo estático simulado se supone que el muslo recibe en la cadera un par constante únicamente cuando el muslo está bajando. El par resistente sobre el volante de inercia se ha calculado de manera que la potencia disipada por éste sea de 125 W cuando el ritmo de pedaleo es de 1 Hz. Mediante aplicaciones sucesivas del modelo propuesto se ha determinado que el par sobre los muslos es de 69,7 N·m para mantener el ritmo de pedaleo constante. Las ecuaciones a resolver son:

$$\begin{cases} m_1(\varphi_p) \ddot{\varphi}_p + m_2(\varphi_p) \dot{\varphi}_p^2 = F_{\varphi_p}^* \\ m_{e_1}(\varphi_p) \ddot{\varphi}_p + m_{e_2}(\varphi_p) \dot{\varphi}_p^2 = F_x^* \end{cases}$$

SIMULACIÓN Y RESULTADOS

La figura 4 muestra los parámetros reducidos correspondientes a una vuelta del pedal obtenidos a partir del procedimiento expuesto. Los cálculos se han realizado mediante la herramienta MATLAB® por lo que ha sido necesario importar los resultados de PAM a dicha herramienta. En el proceso de simulación con PAM se han obtenido resultados cada 10° que se han considerado suficientes dada la forma de las funciones y para su uso en MatLab se han utilizado funciones definidas por tramos polinómicos de orden 3 (splines).

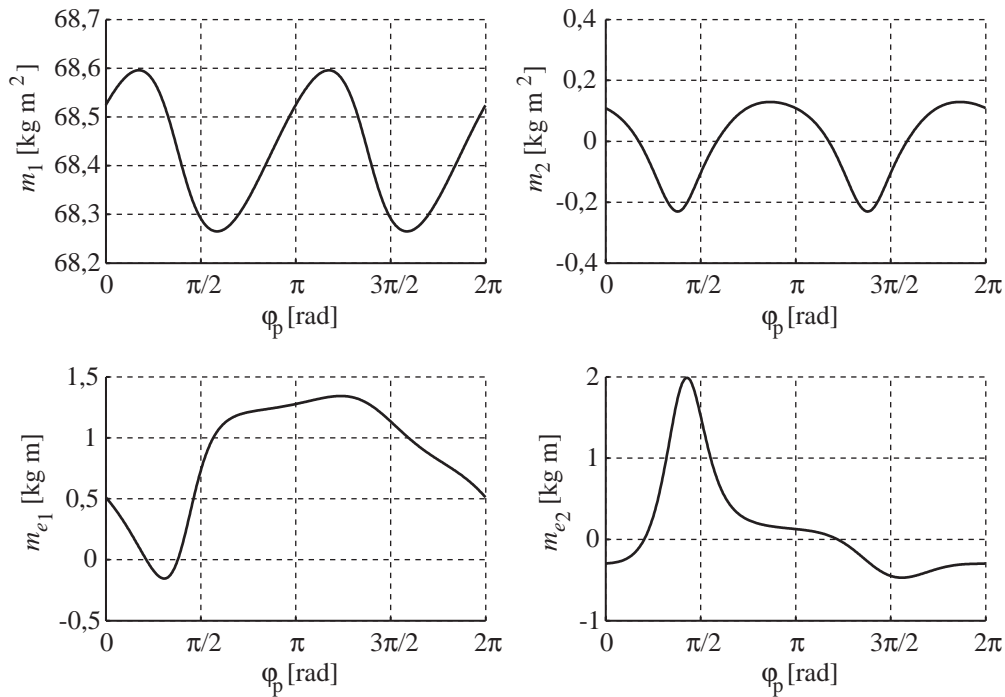


Fig. 4. Parámetros reducidos de la bicicleta estática estudiada.

La figura 5 muestra la velocidad de rotación del pedal obtenida mediante el proceso de integración de la ecuación del movimiento y puede observarse que su valor medio se mantiene sensiblemente constante. La figura 5 también muestra la fuerza en la rodilla en la dirección de la pierna. Puede observarse que tanto la velocidad angular como la fuerza son periódicas, como corresponde a un pedaleo estacionario.

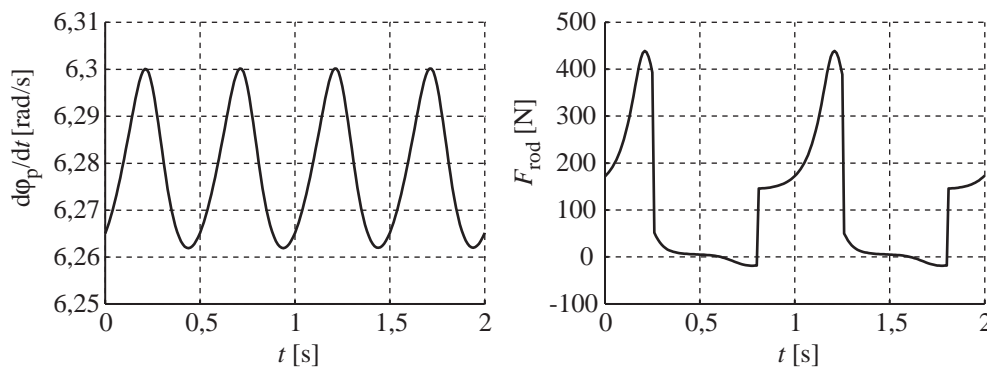


Fig. 5. Velocidad angular del pedal y fuerza en la rodilla en la dirección de la pierna.

CONCLUSIONES

El enfoque propuesto para el estudio de la dinámica de mecanismos de un grado de libertad, no necesariamente con movimiento plano, basado en la utilización de parámetros reducidos da lugar a un procedimiento simple y cómodo para su análisis.

La determinación de los parámetros reducidos, basada en el análisis cinetostático, ensancha las posibilidades y utilidades de programas de fácil utilización, como PAM, que no disponen de capacidad de análisis dinámico directo.

El procedimiento es fácilmente extensible a las fuerzas conservativas, que dependen sólo de posición. La fuerza generalizada asociada a éstas puede calcularse mediante análisis cinetostático. Evidentemente, no ocurre lo mismo con las fuerzas función de velocidad y por lo tanto deben ser tratadas directamente en el planteo de la ecuación diferencial del movimiento. Evidentemente las fuerzas función de velocidad también pueden reducirse a

la coordenada; lo que ocurre es que la fuerza generalizada es entonces función de posición y velocidad y su determinación mediante un análisis cinetostático no es operativa.

La estrategia de pedaleo es importante ya que se observa que para conseguir la potencia deseada se requiere un pico de fuerza muy elevada que castiga a la rodilla.

REFERENCIAS

1. J. García de Jalón y E. Bayo, *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems*, Springer-Verlag, New York, 1994.
2. S. Cardona, L. Jordi, Aplicación de engranajes no circulares para adaptar las características de un mecanismo a las prestaciones del motor y cumplir las especificaciones de movimiento requeridas, *Actas del 8º Cong. Iberoamer. de Ing. Mecánica (CIBIM8)*, Cusco, Perú, 2007.
3. L. Jordi, E. Zayas, S. Cardona, Reduced parameters for the dynamic study of a system of one degree of freedom, *Proc. of 12th International Research/Expert Conference "Trends in the Development of Machinery and Associated Technology" (TMT 2008)*, Istanbul, Turkey, 2008, pp. 1049-1052.
4. L. Jordi, S. Cardona, E. Zayas, Actuadores y fuerzas de enlace en el análisis cinetostático de mecanismos planos de barras, *Anales de Ingeniería Mecánica*, año 16 (1), pp. 599-604, 2008.
5. J. Agulló, *Mecánica de la partícula i del sòlid rígid*, Publicacions OK Punt, Barcelona, 2002.
6. R. Redfield, M. L. Hull, Prediction of pedal forces in bicycling using optimization methods, *J. Biomechanics*, vol 19 (7), pp. 523-540, 1986.
7. M. L. Hull, M. Jorge, A method for biomechanical analysis of bicycle pedalling, *J. Biomechanics*, vol 18 (9), pp. 631-644, 1985.
8. Y. Yoshizawa et al. Kinematic and static analyses of the pedalling by means of new slider-crank mechanism, *J. of Biomechanical Science and Engineering*, vol 2 (3), pp. 138-143, 2007.
9. D. Clos, J. Puig, PAM, un programa de análisis de mecanismos planos de n grados de libertad enfocado a la docencia universitaria, *Anales de Ingeniería Mecánica*, vol 15 (1), pp. 757-765, 2004.
10. S. Cardona et al. Curs d'autoaprenentatge de simulació de mecanismes, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2006.

NOMENCLATURA

E_c	Energía cinética [J]
F_E	Fuerza de enlace [N]
F_i^*	Fuerza generalizada asociada a la coordenada q_i
F_{rod}	Fuerza en la rodilla en la dirección de la pierna [N]
m_i	Parámetro reducido asociado a la inercia i
m_{iq_i}	Derivada del parámetro reducido asociado a la inercia i respecto a la coordenada q_i
q_i	Coordenada generalizada i
q_{i0}	Valor de la coordenada generalizada q_i en el instante inicial $t = 0$
\dot{q}_i	Primera derivada temporal de la coordenada generalizada q_i
\ddot{q}_i	Segunda derivada temporal de la coordenada generalizada q_i
t	Tiempo [s]
T_{act}	Par ejercido por un actuador [N·m]
T_m	Par en el muslo [N·m]
T_{res}	Par de resistencias pasivas en el volante de inercia [N·m]
x	Alargamiento del actuador de enlace representativo del enlace de la rodilla
ϕ_m	Ángulo girado por el muslo [rad]

φ_p	Ángulo girado por el pedal [rad]
$\dot{\varphi}_p$	Velocidad angular del pedal [rad/s]
$\dot{\varphi}_{\text{volante}}$	Velocidad angular del volante de inercia [rad/s]