

SÍNTESIS DE LEYES DE DESPLAZAMIENTO EN LEVAS DE ANCHURA CONSTANTE CON PALPADOR PLANO DE TRASLACIÓN

Cardona Foix, S., Zayas Figueras, E., Jordi Nebot, L.

Dpto. Ingeniería Mecánica. ETSEI de Barcelona, UPC, Av. Diagonal 647. 08028. España,
salvador.cardona@upc.edu

Área Temática: Síntesis y análisis de mecanismos

RESUMEN

Las levas de anchura constante, se utilizan en aplicaciones en las que se requiere un accionamiento positivo del palpador durante todo el ciclo de funcionamiento. Éstas pueden considerarse conjugadas de sí mismas cuando se utiliza un palpador doble de caras paralelas separadas una distancia igual a la anchura de la leva. En este caso, las fuerzas están contenidas en el mismo plano, con lo cual se evitan momentos perpendiculares al eje de la leva, el mecanismo ocupa menor espacio y sus dimensiones son reducidas respecto al desmodrómico de levas conjugadas. Sin embargo, como contrapartida se tiene que la ley de desplazamiento del palpador no puede diseñarse libremente durante todo el ciclo de funcionamiento del mecanismo; ésta ha de cumplir ciertos criterios de diseño y lograr la continuidad deseada en ella no es evidente. Un tramo del ciclo completo de la ley se puede diseñar libremente mientras que el tramo restante debe calcularse a partir del primero. En el tramo diseñado debe tenerse en cuenta la continuidad adecuada de la ley en todo el ciclo, así como la continuidad en los puntos de unión entre el tramo diseñado y el tramo calculado. En el trabajo se estudian los mecanismos de levas de anchura constante que accionan un palpador doble de caras planas paralelas con movimiento de traslación. Se expone un procedimiento para definir la ley de desplazamiento y la continuidad global deseada. El trabajo muestra leyes de desplazamiento diseñadas con curvas de Bézier no paramétricas y los perfiles de levas de anchura constante que corresponden a dichas leyes. También muestra la comparativa gráfica de los radios de curvatura de las levas en los puntos de contacto leva-palpador, magnitud que es básica para la toma de decisiones en el proceso de diseño de las mismas.

PALABRAS CLAVE: Leva de anchura constante, Ley de desplazamiento, Curvas de Bézier, Continuidad

INTRODUCCIÓN

Los mecanismos de leva de anchura constante se encuentran dentro de los denominados mecanismos desmodrómicos, donde el cierre de par superior se garantiza a través de la geometría de la leva y del palpador. En este tipo de mecanismos se mantiene constante la distancia d_c entre dos puntos opuestos de contacto leva-palpador. Dicha distancia se mide entre dos tangentes al perfil de la leva, trazadas de manera que éstas sean paralelas [1]. El ejemplo más sencillo de leva de anchura constante es una leva de excéntrica cuyo perfil es una circunferencia de radio R , como se muestra en la Fig. 1. La distancia d_c entre las superficies de contacto del palpador es igual al diámetro de la excéntrica y $s(\theta)$ es la ley de desplazamiento del palpador en función del ángulo de giro θ de la leva.

La literatura que aborda el tema de mecanismos de levas de anchura constante es escasa y los investigadores que hacen referencias a estos mecanismos con frecuencia se refieren a aplicaciones de doble detención, donde los perfiles de las levas normalmente son generados a partir de arcos circulares y en los que la síntesis de las leyes de desplazamiento del palpador se realiza a partir de métodos tradicionales [2], utilizando básicamente las leyes cicloidal y polinomial en base de monomios, que garantizan la continuidad adecuada [3, 4, 5].

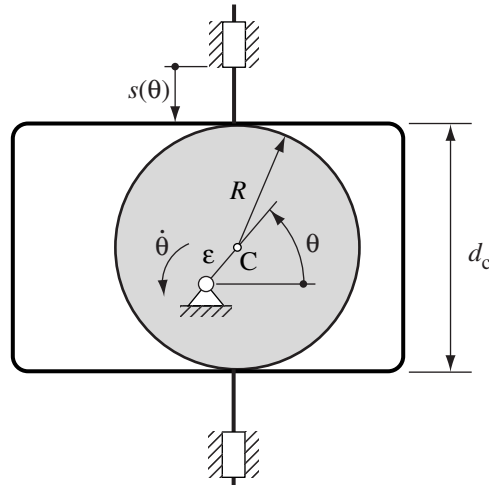


Fig. 1. Mecanismo de leva de excéntrica con palpador de translación

En trabajos anteriores de los autores [1, 6, 7], se presentan las características básicas que han de cumplir las leyes de desplazamiento del palpador, así como los métodos de síntesis de las mismas para poder generar perfiles de levas de anchura constante que accionen, tanto palpadores con movimiento de translación como de rotación. De estos trabajos se concluye que dichas leyes de desplazamiento se componen de dos tramos, el primero de ellos que se diseña –en los ejemplos expuestos utilizando curvas de Bézier– y el segundo que se calcula a partir del primero. Sin embargo, en dichos trabajos no se explicita la manera de garantizar la continuidad en la unión entre tramos.

El presente trabajo propone un procedimiento de síntesis de leyes de desplazamiento del palpador, utilizando curvas de Bézier no paramétricas, que garantiza la continuidad global de dichas leyes y el cumplimiento de los criterios de diseño que permiten generar perfiles de levas de anchura constante. Además, se muestran ejemplos de perfiles de anchura constante generados por el método antes citado y se comparan gráficamente los valores del radio de curvatura de los perfiles de la leva, cuando se varía la geometría del palpador plano de translación (ángulo de inclinación β y excentricidad ϵ del palpador). Esta magnitud es básica para la toma de decisiones en el proceso de diseño de levas. Se ha utilizado como herramienta de cálculo y graficación el programa Mathematica©.

CONTINUIDAD DE LA LEY DE DESPLAZAMIENTO DE PALPADORES DE TRANSLACIÓN ACCIONADOS POR UNA LEVA DE ANCHURA CONSTANTE

El trabajo estudia los mecanismos de levas de anchura constante que accionan un palpador doble plano de caras paralelas. En dichos mecanismos la ley de desplazamiento del palpador $s(\theta)$ no puede diseñarse libremente durante todo el ciclo de funcionamiento del mecanismo, sino que ha de cumplir con la igualdad siguiente:

$$s(\theta) + s(\theta + \pi) = \text{constante} = d_c \quad (1)$$

La Ec.(1) constituye una restricción en el proceso de diseño de los mecanismos de leva de anchura constante con palpador plano de translación, e implica que ley de desplazamiento del palpador sólo pueda definirse para el intervalo $0 \leq \theta < \pi$; el tramo $\pi \leq \theta < 2\pi$ puede tomarse como una imagen del anterior que cumple la igualdad citada [1, 6, 7]. La Fig. 2 muestra el diagrama de flujo que explica el procedimiento de obtención del tramo de ley que se calcula a partir del que se diseña, para un palpador de translación y un ejemplo de este tipo de ley, en el que en el tramo diseñado se utiliza una curva de Bézier no paramétrica. Esta ley permite obtener un perfil de leva de anchura constante.

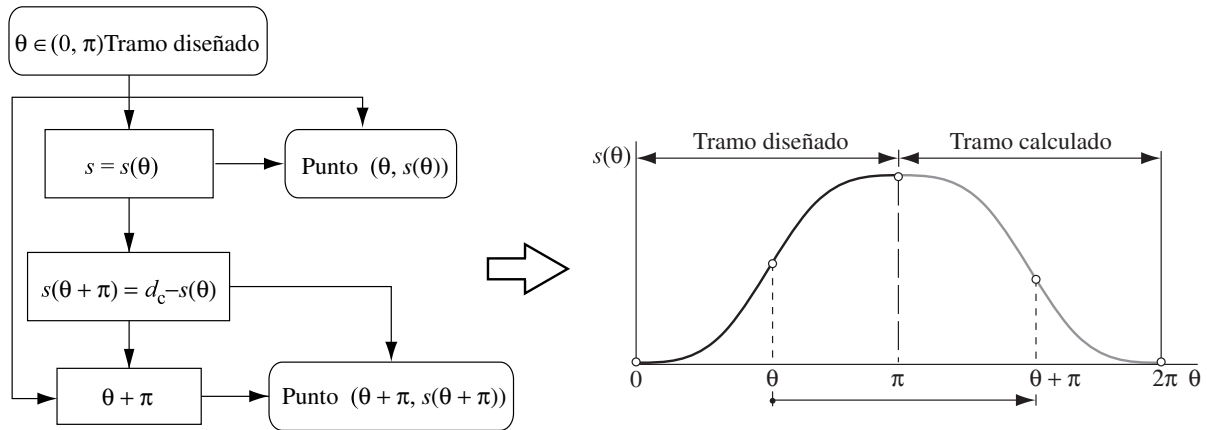


Fig. 2. Diagrama de flujo del proceso de obtención del tramo calculado de la ley de desplazamiento de un palpador de translación a partir del tramo diseñado. Ejemplo de ley de desplazamiento.

Las leyes de desplazamiento han de verificar ciertas condiciones de continuidad, en particular en las uniones entre tramos, para garantizar un comportamiento dinámico adecuado del mecanismo durante su funcionamiento [8]. Así, durante el proceso de diseño de una ley de desplazamiento se requiere, como mínimo, que tanto dicha ley como sus dos primeras derivadas sean continuas. Para cumplir lo mencionado, el tramo de ley $s(\theta)$ que se diseña en el intervalo $0 \leq \theta < \pi$ ha de tener como mínimo continuidad C^2 , de modo que para garantizar esta continuidad en toda la ley de desplazamiento sólo es necesario ocuparse de los puntos de unión en $\theta = \pi$ y en $\theta = 2\pi$, entre el tramo que se diseña y el que se calcula.

Para establecer las condiciones de continuidad entre los tramos diseñado y calculado de la ley de desplazamiento, se parte de la restricción que impone la Ec.(1), y se encuentran sus dos primeras derivadas respecto a la variable θ . Éstas son:

$$\frac{d}{d\theta}(s(\theta) + s(\theta + \pi) = d_c) \rightarrow s_{\theta}(\theta) + s_{\theta}(\theta + \pi) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(s(\theta) + s(\theta + \pi) = d_c) \rightarrow s_{\theta\theta}(\theta) + s_{\theta\theta}(\theta + \pi) = 0 \quad (3)$$

El análisis de la continuidad en $\theta = \pi$ y en $\theta = 2\pi$ se realiza estableciendo condiciones de fronteras. Para $\theta = 0$ y utilizando las ecuaciones Ec.(1), Ec.(2) y Ec.(3), se obtiene:

$$\begin{cases} s(0) + s(0 + \pi) = d_c \rightarrow s(\pi_+) = d_c - s(0); & C^0 \rightarrow s(\pi) = d_c - s(0) \\ s_{\theta}(0) + s_{\theta}(0 + \pi) = 0 \rightarrow s_{\theta}(\pi_+) = -s_{\theta}(0); & C^1 \rightarrow s_{\theta}(\pi) = -s_{\theta}(0) \\ s_{\theta\theta}(0) + s_{\theta\theta}(0 + \pi) = 0 \rightarrow s_{\theta\theta}(\pi_+) = -s_{\theta\theta}(0); & C^2 \rightarrow s_{\theta\theta}(\pi) = -s_{\theta\theta}(0) \end{cases} \quad (4)$$

Para $\theta = \pi$ y utilizando las ecuaciones Ec.(1), Ec.(2) y Ec.(3), se obtiene:

$$\begin{cases} s(\pi) + s(\pi + \pi) = d_c \rightarrow s(\pi) = d_c - s(2\pi); & C^0 \rightarrow s(2\pi) = s(0) \rightarrow s(\pi) = d_c - s(0) \\ s_{\theta}(\pi) + s_{\theta}(\pi + \pi) = 0 \rightarrow s_{\theta}(\pi) = -s_{\theta}(2\pi); & C^1 \rightarrow s_{\theta}(2\pi) = s_{\theta}(0) \rightarrow s_{\theta}(\pi) = -s_{\theta}(0) \\ s_{\theta\theta}(\pi) + s_{\theta\theta}(\pi + \pi) = 0 \rightarrow s_{\theta\theta}(\pi) = -s_{\theta\theta}(2\pi); & C^2 \rightarrow s_{\theta\theta}(2\pi) = s_{\theta\theta}(0) \rightarrow s_{\theta\theta}(\pi) = -s_{\theta\theta}(0) \end{cases} \quad (5)$$

Para el tramo de ley $s(\theta)$ que se diseña, se propone utilizar curvas de Bézier no paramétricas [9], ya que constituyen una buena herramienta para el diseño de leyes de desplazamiento del palpador, por las ventajas que ofrecen [2]. La ventaja de manipular la forma de la curva a través de su polígono de control, en el que se pueden controlar las ordenadas s_i de sus puntos de control b_i (Fig. 3), permite lograr la continuidad deseada entre los tramos que pueden formar una determinada ley de desplazamiento $s(\theta)$.

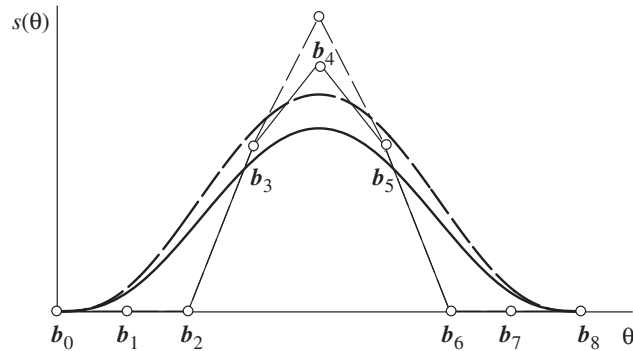


Fig. 3. Curva de Bézier y su polígono de control. Modificación de la forma de la curva (línea de trazos más gruesa) a través de la variación de la ordenada del punto de control b_4 .

En el caso general, la curva de Bézier del tramo diseñado puede tener n puntos de control b_i . En la Fig. 4 se representan de manera general las ordenadas s_i de n puntos de control.

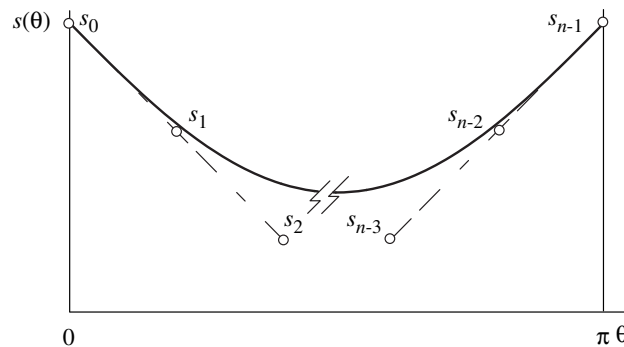


Fig. 4. Puntos de control de una curva de Bézier de grado n y sus ordenadas s_i .

La derivada de una curva de Bézier no paramétrica de grado n es otra curva de Bézier de grado $n-1$. Las ordenadas de Bézier s'_i de la curva derivada se obtienen como $s'_i = n(s_{i+1} - s_i)$.

Para la primera y la segunda derivadas, las ordenadas de los puntos de control son respectivamente:

$$\{s_1 - s_0, s_2 - s_1, \dots, s_{n-2} - s_{n-3}, s_{n-1} - s_{n-2}\} \text{ y } \{s_2 - 2s_1 + s_0, \dots, s_{n-1} - 2s_{n-2} + s_{n-3}\} \quad (6)$$

De modo que para garantizar la continuidad en la primera y segunda derivadas de la ley $s(\theta)$, en el tramo diseñado, las ordenadas s_0, s_1, s_2 de los tres primeros puntos de control se escogen y las de los tres últimos $s_{n-3}, s_{n-2}, s_{n-1}$ se calculan (Fig. 4) a partir de las expresiones de la Ec. (4) y de las expresiones de la Ec. (6). Así, las ordenadas de los tres últimos puntos de control son:

$$\begin{cases} s_{n-1} = d_c - s_0 \\ (s_1 - s_0) = -(s_{n-1} - s_{n-2}) \Rightarrow s_{n-2} = -2s_0 + s_1 + d_c \\ (s_2 - 2s_1 + s_0) = -(s_{n-1} - 2s_{n-2} + s_{n-3}) \Rightarrow s_{n-3} = -4s_0 + 4s_1 - s_2 + d_c \end{cases} \quad (7)$$

El procedimiento que garantiza la continuidad deseada entre el tramo que se diseña, utilizando curvas de Bézier, y el tramo que se calcula de la ley $s(\theta)$ del palpador, y por lo tanto la continuidad global de la ley, consiste en definir la curva de Bézier con al menos seis puntos de control b_i , de los cuales las ordenadas s_0, s_1, s_2 de los tres primeros se escogen y las ordenadas $s_{n-3}, s_{n-2}, s_{n-1}$ de los tres últimos se calculan según Ec. (7), garantizando continuidad C^2 en toda la ley de desplazamiento. Si se utilizan más puntos de control para el tramo diseñado, todos menos los tres últimos tienen sus ordenadas libres.

EJEMPLO DE DISEÑO DE LEY DE DESPLAZAMIENTO DEL PALPADOR PARA GENERAR PERFILES DE ANCHURA CONSTANTE UTILIZANDO CURVAS DE BÉZIER NO PARAMÉTRICAS

La Fig. 5 muestra una ley de desplazamiento $s(\theta)$, y sus derivadas de hasta tercer orden, de un doble palpador plano de caras paralelas horizontales con movimiento de translación accionado por una leva de anchura constante igual a $d_c = 60$ mm.

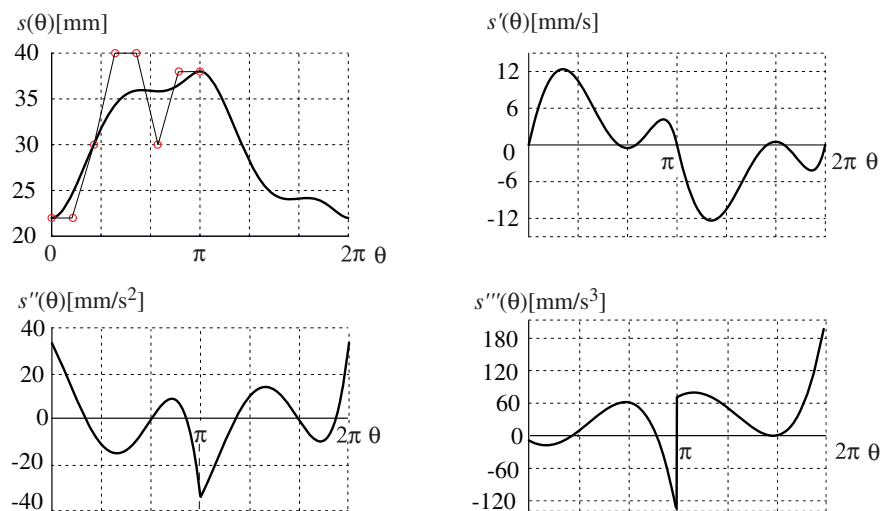


Fig. 5. Ley de desplazamiento de un doble palpador plano de translación y sus tres primeras derivadas.

El tramo diseñado está contenido en el intervalo $0 \leq \theta < \pi$ y consta de $n = 8$ puntos de control; las ordenadas de los cinco primeros son: $\{22, 22, 30, 40, 40\}$ mm y los tres últimos se calculan según el procedimiento expuesto. Las gráficas de la Fig. 5 muestran que se garantiza la continuidad C^2 en toda la ley de desplazamiento del palpador, cumpliéndose así el objetivo deseado.

La Fig. 6 muestra el perfil de la leva de anchura constante que impulsa el palpador cuya la ley de desplazamiento $s(\theta)$ es la de la Fig. 5.

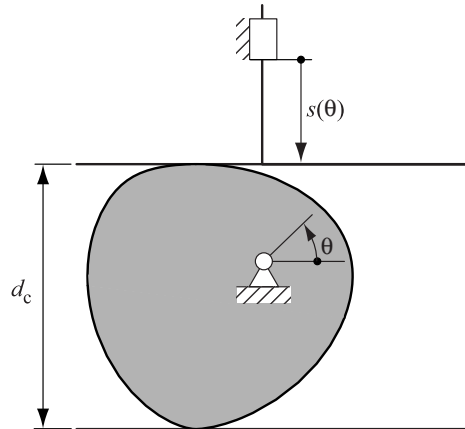


Fig. 6. Leva de anchura constante con doble palpador plano horizontal de translación que genera la ley de desplazamiento mostrada en la figura anterior

INFLUENCIA DE LA INCLINACIÓN β DEL PALPADOR PLANO DE TRANSLACIÓN Y DE LA EXCENTRICIDAD ε EN EL PERFIL DE LEVAS DE ANCHURA CONSTANTE

En Cardona y Clos [8] se muestra la expresión paramétrica de obtención del perfil de leva en el caso de un palpador plano de translación, a partir de utilizar dos diedros, uno x, y solidario a la leva y otro fijo 1, 2 orientado según el perfil del palpador; en este diedro 1, 2 se conocen las componentes del vector de posición $\overline{OP}(\theta)$ del punto de contacto leva-palpador y que se expresan en el diedro fijo a la leva a través de la matriz de cambio de base (Fig. 7a).

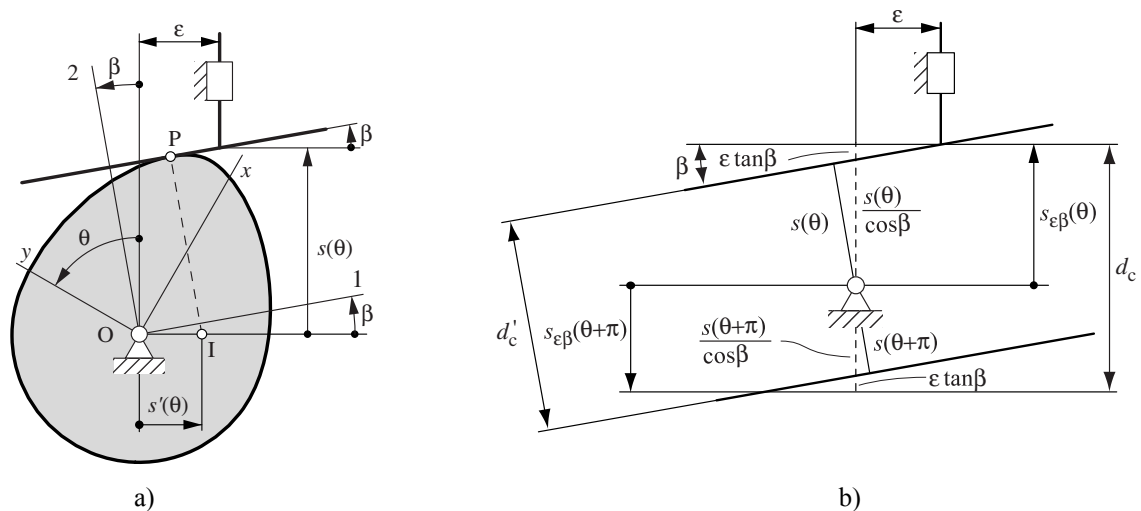


Fig. 7. a) Mecanismo de leva con palpador plano inclinado de translación, b) Influencia de los parámetros β y ε de un doble palpador plano inclinado de translación en la anchura de la leva

En el caso de levas de anchura constante, en las que su doble palpador plano está inclinado un ángulo β y tiene una excentricidad dada ε , resulta válido utilizar el esquema de la Fig. 7b, para establecer la condición de diseño de la ley de desplazamiento, que resulta ser:

$$s_{\varepsilon\beta}(\theta) = \frac{s(\theta)}{\cos\beta} + \varepsilon \tan\beta \quad \text{y} \quad s_{\varepsilon\beta}(\theta + \pi) = \frac{s(\theta + \pi)}{\cos\beta} + \varepsilon \tan\beta$$

$$s_{\varepsilon\beta}(\theta) + s_{\varepsilon\beta}(\theta + \pi) = \frac{d'_c}{\cos\beta} + 2\varepsilon \tan\beta = d_c \quad (8)$$

Si se diseña una ley que cumple la condición impuesta por la Ec.(8), se obtiene una leva de anchura constante $d'_c = (d_c - 2\varepsilon \tan\beta)\cos\beta$. La separación entre palpadores en la dirección del par prismático es $(d_c - 2\varepsilon \tan\beta)$ y la separación entre caras paralelas del doble palpador es $d'_c = d_c \cos\beta - 2\varepsilon \sin\beta$.

La expresión del radio de curvatura [8], en el punto de contacto leva-palpador, para un palpador de translación es:

$$r_c(\theta) = (s(\theta) + s''(\theta))\cos\beta - \varepsilon \sin\beta \quad (9)$$

Así entonces, de la Ec.(9) se observa que la incidencia de la excentricidad ε en el radio de curvatura r_c es una disminución global $\varepsilon \sin\beta$ y la incidencia del ángulo de inclinación β es un escalado global de factor $\cos\beta$ y un escalado de factor $\sin\beta$ en la disminución global.

En la Fig. 8 a) se muestra un mecanismo de leva de anchura constante en el que el doble palpador plano está inclinado un ángulo $\beta = 25^\circ$ respecto a la dirección normal a la guía del palpador y la excentricidad del palpador es $\varepsilon = 15$ mm. La ley $s(\theta)$ y el valor $d_c = 60$ mm utilizados son los mismos que los del ejemplo de la Fig. 5, donde el doble palpador plano es horizontal y está centrado. En la Fig. 8 b) se muestra la comparativa gráfica de los radios de curvaturas r_c de los perfiles de levas, generados con la misma ley $s(\theta)$; en el primero de los gráficos con el palpador doble de valores $\beta = 0$ y $\varepsilon = 0$ se observa que $r_c > 0$ para todo valor de θ , lo que indica que la leva es convexa y que el doble palpador podrá acceder al punto teórico de contacto sin problemas durante el ciclo de funcionamiento del mecanismo; en el segundo caso con el palpador doble excéntrico e inclinado según los valores antes indicados, se observa que existen valores de radio de curvatura negativos ($r_c < 0$), no admisible para palpadores planos, lo cual obliga a reconsiderar los valores de los parámetros ε o β .

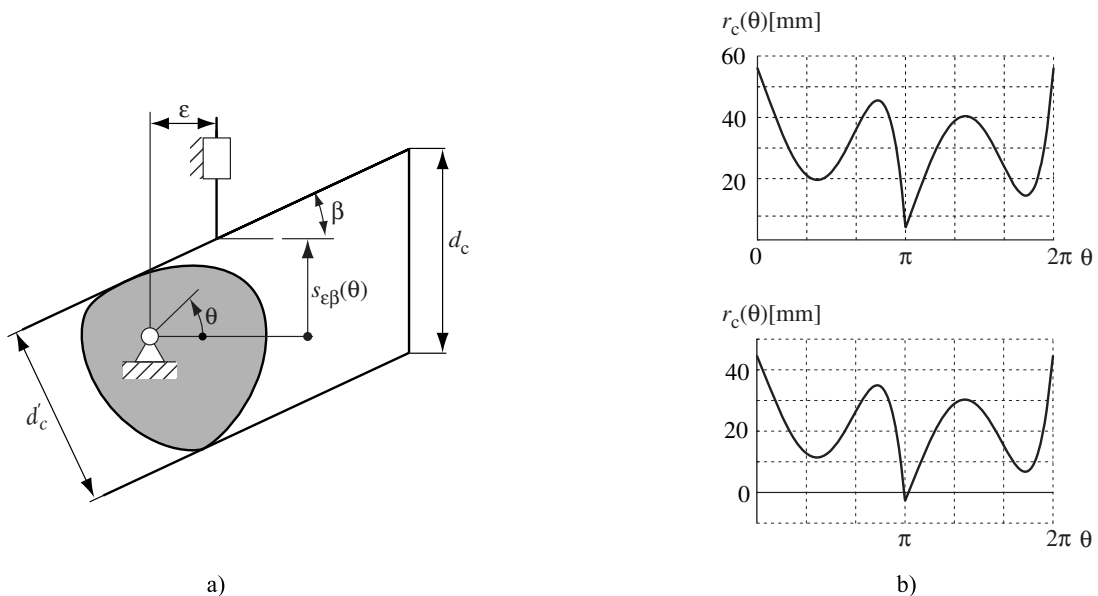


Fig. 8.a) Leva de anchura constante con doble palpador plano inclinado y excéntrico, b) Comparativa gráfica de los radios de curvatura de los perfiles: Palpador horizontal y centrado y Palpador inclinado y excéntrico.

CONCLUSIONES

Se ha propuesto un procedimiento que permite sintetizar leyes de desplazamiento del palpador, utilizando curvas de Bézier y garantizando la continuidad global de la ley, lo que facilita el proceso de diseño de levas de anchura constante. Los perfiles de anchura constante generados tienen geometría arbitraria. La variación de los parámetros, ángulo de inclinación y excentricidad del palpador plano, permite obtener perfiles de levas de menores dimensiones. Se han de controlar estos parámetros para garantizar siempre un radio de curvatura del perfil adecuado.

REFERENCIAS

1. Zayas, E.E. Aportación al estudio de levas desmodrómicas. Tesis Doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2001.
2. Reyes, G. Técnicas de Diseño Geométrico Asistido por Ordenador para Mecanismos Leva-Palpador. Tesis Doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona. 2000.
3. Qian, Z. Research on constant-diameter cam mechanism with a planar motion follower. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 42 n°8, pp. 1017-1028, 2007.
4. Václavík, M. y Koloc, Z. A Contribution to the Synthesis of a Trihedral Conjugate Cam. *Proceedings of EUCOMES 08. The Second European Conferences of Mechanism Science*, Ed. Springer Science+Business Media B.V. 22, pp. 341-346, 2009.
5. Ye, Z. y Smith, M. Synthesis of constant-breath cam mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 37 n°9, pp. 940-953, 2002.
6. Zayas, E.E. y Cardona, S. Aportaciones al análisis de levas con cierre geométrico. *Anales de Ingeniería Mecánica*, vol. 2, pp. 1017-1022, 2000.
7. Zayas, E.E. et al. Analysis and synthesis of the displacement function of the follower in constant-breadth cam mechanism. *Mech. Mach. Theory* (2009), doi:10.1016/j.mechmachtheory.2009.05.002.
8. Cardona, S. y Clos, D. Teoría de Máquinas (Edición en Castellano). Barcelona. Ed. UPC. 2001. pp. 252.
9. Farin, G. Curves and Surfaces for CAGD (Fourth Edition). U.S.A. Ed. Academic Press. Inc. 1997. pp. 427.

NOMENCLATURA

θ	ángulo de giro de la leva (°)
$\dot{\theta}$	velocidad angular de rotación de la leva (rad/s)
$s(\theta)$	ley de desplazamiento del palpador en función del ángulo de giro de la leva (mm)
$s_{\theta}(\theta), s'(\theta)$	primera derivada de la ley de desplazamiento del palpador respecto de la variable θ (mm/s)
$s_{\theta\theta}(\theta), s''(\theta)$	segunda derivada de la ley de desplazamiento del palpador respecto de la variable θ (mm/s ²)
$s'''(\theta)$	tercera derivada de la ley de desplazamiento del palpador respecto de la variable θ (mm/s ³)
$s(\pi_+)$	desplazamiento del palpador en el primer punto del tramo de ley $s(\theta)$ calculado (mm)
$s_{\theta}(\pi_+)$	velocidad del palpador en el primer punto del tramo de ley $s(\theta)$ calculado (mm/s)
$s_{\theta\theta}(\pi_+)$	aceleración del palpador en el primer punto del tramo de ley $s(\theta)$ calculado (mm/s ²)
$s_{\varepsilon\beta}(\theta)$	ley de desplazamiento del doble palpador plano inclinado y excéntrico (mm)
\mathbf{b}_i	puntos de control de una curva de Bézier no paramétrica
s_i	ordenadas de los puntos de control \mathbf{b}_i de una curva de Bézier no paramétrica
s'_i	ordenadas de los puntos de control de una curva de Bézier derivada
s_0, s_1, s_2	ordenadas de los tres primeros puntos de control de una curva de Bézier
$s_{n-3}, s_{n-2}, s_{n-1}$	ordenadas de los tres últimos puntos de control de una curva de Bézier
β	ángulo de inclinación del palpador (°)
ε	excentricidad del palpador (mm)
d_c	distancia entre las superficies de contacto del doble palpador; anchura de la leva (mm)
d'_c	distancia entre las caras paralelas del doble palpador plano inclinado y excéntrico (mm)
r_c	radio de curvatura del perfil de leva (mm)
P	punto de contacto leva-palpador
I	centro instantáneo de rotación relativo leva-palpador