

# El espectro del digrafo mariposa<sup>1</sup>

F.Comellas, M.A. Fiol, J. Gimbert y M. Mitjana<sup>2</sup>

## Resumen

La determinación del espectro de un grafo es de interés por la conexión que los autovalores y sus multiplicidades tienen con invariantes y propiedades topológicas del grafo como el diámetro, conectividad, expansión, particiones, etc. En este artículo determinamos completamente el espectro de los digrafos mariposa.

## 1 Introducción

Los grafos mariposa despiertan un interés notable en la literatura especializada por su aplicación extensa en el diseño de arquitecturas de ordenadores y en particular la implantación del algoritmo FFT (transformada rápida de Fourier). En el caso no dirigido, entre los aspectos que se han considerado se incluye, por ejemplo, el estudio de sus ciclos y hamiltonicidad [22, 1, 16] y el desarrollo de algoritmos de enrutamiento y comunicación [17, 10, 19, 18, 8, 10]. Algunos de estos resultados se han extendido recientemente al caso dirigido [2, 3].

La determinación del espectro de un grafo es de utilidad ya que, por ejemplo, el espectro de la matriz de adyacencia de un grafo da cotas relativas al diámetro y al número isoperimétrico

<sup>1</sup>Trabajo subvencionado en parte por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y fondos FEDER (proyecto TIC-2001-2171.)

<sup>2</sup>

F.C. Departament de Matemàtica Aplicada IV, Universitat Politècnica de Catalunya, Avda. Canal Olímpic s/n, 08860 Castelldefels, Barcelona. email: [comellas@mat.upc.es](mailto:comellas@mat.upc.es)

M.A.F. Departament de Matemàtica Aplicada IV, Universitat Politècnica de Catalunya, Jordi Girona 1-3, Mòdul C3, Campus Nord, 08034 Barcelona. email: [fiol@mat.upc.es](mailto:fiol@mat.upc.es)

J.G. Departament de Matemàtica, Universitat de Lleida, Jaume II 69, 25005 Lleida. email: [joangim@eup.udl.es](mailto:joangim@eup.udl.es)

M.M. Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya, Gregorio Marañón 44, 08028 Barcelona. email: [margarida.mitjana@upc.es](mailto:margarida.mitjana@upc.es)

del grafo [7, 20], entre otras propiedades. El espectro laplaciano, y en particular el autovalor segundo, proporciona información sobre la conectividad, propiedades de expansión, conjuntos de corte, número de independencia, genus, etc. [5, 21]. También se han diseñado algoritmos eficientes para la partición de grafos en base a sus autovalores y autovectores [14, 15]. El espectro de grafos mariposa no dirigidos se ha determinado recientemente en [12] a partir de su estructura jerárquica. Aquí, el estudio detallado de los recorridos en grafos mariposa dirigidos nos permite determinar completamente su espectro por primera vez.

## 2 Notación

Un digrafo mariposa (*wrapped butterfly digraph*)  $B_\Delta(n)$ , de grado  $\Delta$  y dimensión  $n$ , tiene sus vértices etiquetados por pares ordenados  $(l, \mathbf{x})$ , donde  $l \in \mathbf{Z}_n$  ( $l$  es el nivel) y  $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}_\Delta^n$ ; un vértice  $(l, x_0 x_1 \dots x_{n-1})$  es adyacente hacia los vértices  $(l+1, x_0 \dots x_{l-1} \alpha x_{l+1} \dots x_{n-1})$  para todo  $\alpha \in \mathbf{Z}_\Delta$ . Entonces  $B_\Delta(n)$  es un digrafo  $\Delta$ -regular de orden  $N = n \Delta^n$  y diámetro  $D = 2n - 1$ . Estos digrafos son vértice transitivos y hamiltonianos [22].

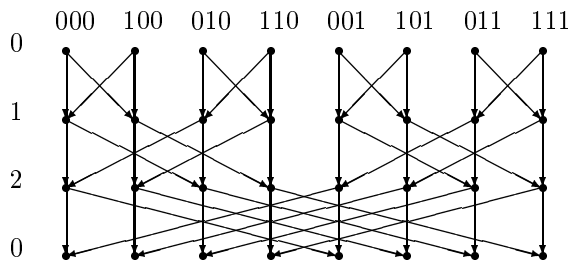


Figura 1: Digrafo mariposa  $B_2(3)$

La matriz de adyacencia  $\mathbf{A}=(a_{uv})$  de un digrafo  $\Gamma$  de orden  $N$ , es la matriz  $N \times N$  indexada por los vértices de  $\Gamma$  con entradas  $a_{uv} = 1$  si  $u$  es adyacente a  $v$  y  $a_{uv} = 0$  si no es así. Es bien cono-

cido que el número de recorridos de longitud  $k \geq 0$  desde el vértice  $u$  al vértice  $v$  es  $a_{uv}^{(k)} = (\mathbf{A}^k)_{uv}$ .

La matriz distancia- $k$  de un digrafo  $\Gamma$  con diámetro  $D$ ,  $0 \leq k \leq D$ , se define como

$$(\mathbf{A}_k)_{uv} := \begin{cases} 1 & \text{si } \text{dist}(u, v) = k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1)$$

En particular,  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$  and  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ , vease [4].

$d(v)$  denota el grado de  $v \in V(\Gamma)$  y  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\Gamma)$  es la matriz diagonal indexada por  $V(\Gamma)$  y tal que  $d_{vv} = d(v)$ . La matriz  $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$  se define como la matriz *laplaciana* del digrafo  $\Gamma$  (vease [6]).

### 3 Recorridos en un digrafo mariposa

En esta sección obtenemos las matrices distancia de un digrafo mariposa como polinomios de la matriz de adyacencia. Estos polinomios servirán en la sección siguiente para determinar los autovalores del digrafo y sus multiplicidades.

Observemos primero que en  $B_\Delta(n)$  cada arco une vértices en niveles consecutivos y dos vértices adyacentes  $(l, \mathbf{x})$  y  $(l', \mathbf{y})$  son tales que  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  difieren únicamente en un dígito. Obsérvese también que el vértice  $(l, \mathbf{x})$  tiene todos sus vértices adyacentes en el nivel  $l + 1 \pmod{n}$ , y dos vértices diferentes en el mismo nivel,  $(l, \mathbf{x})$  y  $(l, \mathbf{y})$ , se encuentran a distancia  $n$ . El lema siguiente proporciona una forma de calcular la longitud de un recorrido entre cualquier par de vértices.

**Lema 1** *La longitud de cualquier recorrido desde el vértice  $(l, \mathbf{x})$  al vértice  $(l', \mathbf{y})$  en  $B_\Delta(n)$  es congruente con  $l' - l$  modulo  $n$ .*

*Demostración:* Consideremos  $0 \leq l \leq l' \leq n$ . Si  $x_i = y_i$  para cada  $i$ ,  $0 \leq i < l$  o  $l' \leq i < n$ , la longitud del camino más corto es  $l' - l$

$$\begin{aligned} &(l, x_0 \dots x_{l-1} x_l x_{l+1} \dots x_{n-1}) \rightarrow \\ &\rightarrow (l+1, x_0 \dots x_{l-1} y_l x_{l+1} \dots x_{n-1}) \rightarrow \\ &\dots \\ &\rightarrow (l'-1, x_0 \dots x_{l-1} y_l y_{l+1} \dots y_{l'-2} \dots x_{n-1}) \\ &\rightarrow (l', x_0 \dots x_{l-1} y_l \dots y_{l'-1} x_{l'} \dots x_{n-1}) \end{aligned}$$

en otro caso se necesitan  $n$  pasos más para alcanzar el vértice  $(l', \mathbf{y})$ . Podemos usar un argumento similar cuando  $0 \leq l' < l \leq n$ . ■

Así tenemos:

$$\begin{cases} \text{si } l \leq l' \\ \left\{ \begin{array}{ll} d((l, \mathbf{x}), (l', \mathbf{y})) = l' - l & \begin{array}{l} \text{si } x_i = y_i \\ 0 \leq i < l, \\ l' \leq i < n \end{array} \\ d((l, \mathbf{x}), (l', \mathbf{y})) = n + l' - l & \text{en otro caso} \end{array} \right. \\ \text{si } l > l' \\ \left\{ \begin{array}{ll} d((l, \mathbf{x}), (l', \mathbf{y})) = n - (l - l') & \begin{array}{l} \text{si } x_i = y_i \\ l' \leq i < l \end{array} \\ d((l, \mathbf{x}), (l', \mathbf{y})) = 2n - (l - l') & \text{en otro caso} \end{array} \right. \end{cases} \quad (2)$$

Los resultados siguientes son consecuencia de la propia definición de los digrafos.

**Lema 2** *La longitud del ciclo más corto (girth) en el digrafo mariposa  $B_\Delta(n)$  es  $n$ .*

**Lema 3** *Dado cualquier par de vértices,  $(l, \mathbf{x})$  y  $(l', \mathbf{y})$ , en  $B_\Delta(n)$  con  $d((l, \mathbf{x}), (l', \mathbf{y})) = k \leq n$ , entonces el camino más corto de  $(l, \mathbf{x})$  a  $(l', \mathbf{y})$  es único.*

Cualquier vértice  $(l, \mathbf{x})$  en  $B_\Delta(n)$ , tiene  $\Delta$  vecinos en el nivel  $l + 1$  y cada uno de ellos tiene a su vez  $\Delta$  vértices adyacentes al nivel  $l + 2$  y así sucesivamente. Entonces, para  $0 \leq k < n$  el número de vértices a distancia  $k$  de  $(l, \mathbf{x})$  es el máximo posible para un digrafo  $\Delta$ -regular con girth  $g = n$ ,  $\Delta^k$ . Cuando  $k = n$ , todos los vértices a distancia  $n$  de  $(l, \mathbf{x})$  se encuentran al mismo nivel  $l$ , y el vértice  $(l, \mathbf{x})$  está en un único ciclo de longitud  $n$ , y entonces hay  $\Delta^n - 1$  vértices a distancia  $n$  de  $(l, \mathbf{x})$ .

El lema siguiente cuenta el número de recorridos de longitud  $k$ ,  $n + 1 \leq k \leq 2n - 1$ , desde el vértice  $(l, \mathbf{x})$  a cualquier vértice  $(l', \mathbf{x})$ .

**Lema 4** *Dado  $B_\Delta(n)$ , el número de recorridos de longitud  $k$ ,  $n + 1 \leq k \leq 2n - 1$ , desde el vértice  $(l, \mathbf{x})$  a cualquier vértice  $(l', \mathbf{x})$  es  $\Delta^{k-n}$ .*

*Demostración:* Para  $k = n + 1$  los recorridos de longitud  $n + 1$  del vértice  $(l, \mathbf{x})$  al  $(l', \mathbf{x})$ , son:

$$\begin{aligned} &(l, x_0 \dots x_{l-1} x_l x_{l+1} \dots x_{n-1}) \rightarrow \\ &\rightarrow (l+1, x_0 \dots x_{l-1} y_l x_{l+1} \dots x_{n-1}) \rightarrow \\ &\dots \\ &\rightarrow (l, x_0 \dots x_{l-1} y_l x_{l+1} \dots x_{n-1}) \\ &\rightarrow (l+1, x_0 \dots x_{l-1} x_l x_{l+1} \dots x_{n-1}) \end{aligned}$$

Puesto que  $y \in \mathbf{Z}_\Delta$ , hay  $\Delta^{(n+1)-n} = \Delta$  recorridos diferentes desde el vértice  $(l, \mathbf{x})$  hasta el  $(l', \mathbf{x})$ .

En general, para  $k = n + p$ ,  $1 \leq p \leq n - 1$ , cualquier camino desde  $(l, \mathbf{x})$  a  $(l', \mathbf{x})$  es

$$\begin{aligned} & (l, x_0 \dots x_{l-1} x_l x_{l+1} \dots x_{n-1}) \rightarrow \\ & \rightarrow (l+1, x_0 \dots x_{l-1} \alpha_1 x_{l+1} \dots x_{n-1}) \\ & \dots \\ & \rightarrow (l+p, x_0 \dots x_{l-1} \alpha_1 \dots \alpha_p x_{l+p} \dots x_{n-1}) \\ & \hspace{10em} (p \text{ pasos}) \\ & \rightarrow (l+p+1, x_0 \dots x_{l-1} \alpha_1 \dots \alpha_p x_{l+p} \dots x_{n-1}) \dots \\ & \rightarrow (l, x_0 \dots x_{l-1} \alpha_1 \dots \alpha_p x_{l+p} \dots x_{n-1}) \\ & \rightarrow (l+1, x_0 \dots x_{l-1} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \dots x_{n-1}) \\ & \dots \rightarrow (l+p, x_0 \dots x_{l-1} x_l x_{l+1} \dots x_{n-1}) \end{aligned}$$

Donde  $\alpha_i \in \mathbf{Z}_\Delta$ ,  $1 \leq i \leq p$ . Entonces hay  $\Delta^p = \Delta^{k-n}$  caminos diferentes. ■

En resumen, existe un recorrido de longitud  $k$ ,  $n < k \leq 2n - 1$ , de  $(l, \mathbf{x})$  a  $(l', \mathbf{y})$  si y solo si  $l' - l = k \pmod{n}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , que corresponde a vértices situados a distancia  $k-n$  o  $k$ . Hay un único recorrido desde  $(l, \mathbf{x})$  a cualquier  $(l', \mathbf{y})$  y para todo vértice  $(l', \mathbf{y})$  existen  $\Delta^{k-n}$  recorridos diferentes a  $(l', \mathbf{y})$ .

En consecuencia podemos enunciar el teorema siguiente:

**Teorema 5** *En un digrafo mariposa  $B_\Delta(n)$  y desde un vértice  $(l, \mathbf{x})$  al vértice  $(l', \mathbf{y})$ ,  $1 \leq k \leq n$ , existe un único camino de longitud  $k$  si  $d((l, \mathbf{x}), (l', \mathbf{y})) = k$  y hay  $\Delta^{k-n}$  recorridos de longitud  $k$  para todo  $n+1 \leq k \leq 2n-1$ .* ■

Sea  $\mathbf{A}$  la matriz de adyacencia y  $\mathbf{A}_k$  la matriz distancia- $k$ ,  $0 \leq k \leq 2n-1$  del digrafo mariposa  $B_\Delta(n)$ . Del teorema anterior tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= \mathbf{A}_k & \text{si } 0 < k < n \\ \mathbf{A}^k &= \Delta^{k-n}(\mathbf{A}_{k-n} + \mathbf{A}_k) & \text{si } n \leq k \leq 2n-1 \end{aligned}$$

y, por consiguiente, las matrices distancia  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{2n-1}$  del digrafo mariposa  $B_\Delta(n)$  se pueden expresar como polinomios de la matriz de adyacencia  $\mathbf{A}$ . Reescribimos las expresiones previas en terminos de estos polinomios, conocidos como *polinomios distancia* del digrafo  $B_\Delta(n)$ .

$$p_k(x) = \begin{cases} x^k & \text{si } 0 \leq k < n \\ \frac{1}{\Delta^{k-n}} x^k - x^{k-n} & \text{si } n \leq k \leq 2n-1 \end{cases} \quad (3)$$

Un *digrafo debilmente distancia regular* se define como un digrafo conexo  $\Gamma$  de diámetro  $D$  tal que el número de recorridos de longitud fijada  $0 \leq k \leq D$ , entre dos vértices de  $\Gamma$  depende solo de su distancia, vease [9]. Una caracterización para un digrafo debilmente distancia regular  $\Gamma$  es que cada matriz potencia  $\mathbf{A}^k$ ,  $0 \leq k \leq D$ , se pueda expresar como una combinación lineal de las matrices distancia de  $\Gamma$ . Entonces,  $B_\Delta(n)$  es un digrafo debilmente distancia regular.

## 4 El espectro de $B_\Delta(n)$

A partir de la definición de las matrices distancia- $k$ , podemos ver que  $\sum_{k=0}^{2n-1} \mathbf{A}_k = \mathbf{J}$ , donde  $\mathbf{J}$  denota la matriz con todas sus entradas 1. Por otra parte, el digrafo  $\Gamma$  es (fuertemente) conexo y regular si y solo si existe un polinomio  $p(x) \in \mathbf{Q}[x]$  tal que  $p(\mathbf{A}) = \mathbf{J}$  (vease [6], teorema 5.3.1). El polinomio  $H_\Gamma(x)$  de grado menor que satisface esta propiedad se llama *polinomio de Hoffman* de  $\Gamma$  y viene dado por

$$H_\Gamma(x) = \frac{NS(x)}{S(\Delta)}, \quad (4)$$

donde  $m_\Gamma(x) = (x - \Delta)S(x) \in \mathbf{Z}[x]$  es el polinomio mínimo de  $\Gamma$ ,  $\Delta$  es el grado de  $\Gamma$  y  $N$  su orden. Es conocido que el grado de  $H_\Gamma(x)$  es al menos  $D$ , siendo  $D$  el diámetro de  $\Gamma$ .

**Teorema 6** *El espectro del digrafo mariposa  $B_\Delta(n)$  es*

$$\lambda_j = \Delta \omega^j, (0 \leq j \leq n-1), y \quad \lambda_n = 0$$

donde  $\omega$  es una raíz primitiva enésima de la unidad,  $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ , con multiplicidades

$$m(\lambda_j) = 1, (0 \leq j \leq n-1) \text{ y } m(\lambda_n) = N - n$$

donde  $N = n\Delta^n$ .

*Demostración:* Puesto que  $\sum_{k=0}^{2n-1} p_k(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{2n-1} \mathbf{A}_k = \mathbf{J}$  y el grado de  $S(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} p_k(x)$  es igual al diámetro de  $B_\Delta(n)$ , tenemos que  $S(x)$  es el polinomio de Hoffman de  $B_\Delta(n)$ . Entonces, los diferentes autovalores de  $B_\Delta(n)$ , aparte de  $\lambda_0 = \Delta$ , son los ceros

$$S(x) = x^n \left( 1 + \frac{x}{\Delta} + \left(\frac{x}{\Delta}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{\Delta}\right)^{n-1} \right);$$

esto es,  $\lambda_j = \Delta\omega^j$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ , y  $\lambda_n = 0$ .

Es decir, hay  $n+1$  autovalores distintos. Sus multiplicidades respectivas se pueden determinar resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\text{tr } \mathbf{A}^j = \sum_{i=0}^n m(\lambda_i)\lambda_i^j = Na_{uu}^{(j)} \quad (0 \leq j \leq n),$$

donde  $a_{uu}^{(j)}$  representa el número de caminos  $u \rightarrow u$  de longitud  $j$ , que es  $a_{uu}^{(j)} = 1$ , si  $j = 0, n$ , y  $a_{uu}^{(j)} = 0$  en otro caso. La matriz de coeficientes es una matriz de Vandermonde formada por los distintos puntos  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

$$\begin{pmatrix} N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \Delta & \dots & \Delta\omega^{n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta^n & \dots & \Delta^n\omega^{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(\lambda_0) \\ m(\lambda_1) \\ \vdots \\ m(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

A partir de la primera y última ecuaciones, y teniendo en cuenta que  $\omega^n = 1$ , se obtiene  $m(\lambda_n) = N - n$ . En consecuencia, puesto que  $\sum_{j=0}^{n-1} m(\lambda_j) = N$  and  $m(\lambda_j) \geq 1$ , deducimos que  $m(\lambda_j) = 1$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ . ■

El espectro laplaciano de un digrafo  $\Delta$ -regular toma los valores  $\lambda_L = \Delta - \lambda_{\mathbf{A}}$ , donde  $\lambda_{\mathbf{A}}$  es un autovalor de la matriz de adyacencia y  $\Delta$  el grado del digrafo. En consecuencia tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 7** *El espectro laplaciano del digrafo ma-  
riposa  $B_{\Delta}(n)$  es*

$$\lambda_j = \Delta - \Delta\omega^j \quad (0 \leq j \leq n-1) \quad y \quad \lambda_n = \Delta$$

donde  $\omega$  es cualquier raiz primitiva  $n$ -ésima de la unidad,  $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ , con multiplicidades respectivas

$$m(\lambda_j) = 1 \quad (0 \leq j \leq n-1) \quad y \quad m(\lambda_n) = N - n.$$

## Referencias

[1] D. Barth y A. Raspaud, Two edge-disjoint Hamiltonian cycles in the butterfly graph, *Inform. Process. Lett.* **51** (1994), 175–179.  
 [2] J.-C. Bermond, E. Darrot, O. Delmas y S. Perennes, Hamilton circuits in the directed wrapped butterfly network, *Discrete Appl. Math.* **84**(1-3) (1998), 21–42.

[3] J.-C. Bermond, E. Darrot, O. Delmas y S. Perennes, Hamilton cycle decomposition of the butterfly network, *Parallel Process. Lett.* **8** (1998), 371–385.  
 [4] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974; second edition: 1993.  
 [5] C. Bornstein, A. Litman, B.M. Maggs, R.K. Sitaraman y T. Yatzkar, On the bisection width and expansion of butterfly networks *Proc. First Merged Int. Parallel Processing Symposium and Symposium on Parallel and Distributed Processing*. March 30- April 3, Orlando, FL, 1998  
 [6] R.A. Brualdi y H. J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.  
 [7] F.R.K. Chung, Constructing random-like graphs, in B. Bollobas (Ed.), *Proc. Symp. Applied Mathematics, Probabilistic Combinatorics and its Applications*, vol. **44**, AMS, Rhode Island (1991), pp. 21-56.  
 [8] R. Cole, B. Maggs y R. Sitaraman, Routing on butterfly networks with random faults, *Proc. IEEE Annual Symp on Foundations of Computer Science*, 1995, pp. 558–570.  
 [9] F. Comellas, M.A. Fiol, J. Gimbert y M. Mitjana, Weakly-distance regular digraphs, *submitted, 2001*.  
 [10] F. Comellas y G. Giménez, Genetic programming to design communication algorithms for parallel architectures, *Parallel Process. Lett.* **8**(4) (1998), 549–560.  
 [11] T. Decker, B. Monien y R. Preis, Towards optimal load balancing topologies, *Proc. 6th EuroPar Conference*, A. Bode, T. Ludwig, W. Karl, and R. Wismüller (eds.), Springer, LNCS 1900, 2000, 277–287  
 [12] R. Elsässer, R. Královic y B. Monien, Scalable sparse topologies with small spectrum, *Proc. 18th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, Springer Verlag, 2001

- [13] R. Feldmann y W. Unger, The cube-connected cycles network is a subgraph of the butterfly network, *Parallel Process. Lett.* **2** (1992), 13–19.
- [14] L. Hagen y A. Kahng, Fast spectral methods for ratio cut partitioning and clustering, International Conference on Computer-Aided Design, 1991. ICCAD-91. *IEEE Digest of Technical Papers*, 1991, pp. 10–13
- [15] L. Hagen y A. Kahng, New spectral methods for ratio cut partitioning and clustering, *IEEE Trans. CAD/ICS* **11**(9)(1992), 1074–1085
- [16] S.-C. Hwang y G.-H. Chen, Cycles in butterfly graphs, *Networks* **35**(2) (2000), 161–171.
- [17] R. Klasing, B. Monien, R. Peine y E. A. Stöhr, Broadcasting in butterfly and de Bruijn networks. *Discrete Applied Math.*, **53**, pp. 183–197, 1994.
- [18] B.M. Maggs y B. Vöcking, Improved routing and sorting on multibutterflies. *Algorithmica* **28**(4) (2000), 438–437
- [19] B.M. Maggs y R.K. Sitaraman, Simple algorithms for routing on butterfly networks with bounded queues, *SIAM J. Comput.* **28**(3) (1999), 984–1003.
- [20] B. Mohar, Isoperimetric number of graphs, *J. Combin. Theory, Ser. B* **47** (1989), 274–291.
- [21] B. Mohar, The Laplacian spectrum of graphs, in *Graph Theory, Combinatorics, and Applications*, Vol. 2, Ed. Y. Alavi, G. Chartrand, O. R. Oellermann, A. J. Schwenk, Wiley, 1991, pp. 871–898.
- [22] S.A. Wong, Hamilton cycles and paths in butterfly graphs, *Networks* **26** (1995), 145–150.