

## Cálculo numéricos de la escisión exponencialmente pequeña de una conexión heteroclínica en la singularidad Hopf Zero

OSWALDO JOSE LARREAL B, TERE M. SEARA

*Dpto. Matemàtica Aplicada 1, Universitat Politècnica de Catalunya, Diagonal 647,08028 Barcelona.  
 E-mails: oswaldo.larreal@upc.edu, tere.m-seara@upc.edu .*

**Palabras clave:** Hopf-Zero, bifurcación, desplegamiento universal, conexión heteroclínica,

### Resumen

Consideramos la siguiente familia de campos  $X_\delta$  en  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -\delta xz - y(\alpha + c\delta z) + \delta^{p+1}f(\delta x, \delta y, \delta z, \delta) \\ \frac{dy}{dt} &= -\delta yz + x(\alpha + c\delta z) + \delta^{p+1}g(\delta x, \delta y, \delta z, \delta) \\ \frac{dz}{dt} &= \delta(-1 + b(x^2 + y^2) + z^2) + \delta^{p+1}h(\delta x, \delta y, \delta z, \delta) \end{cases} \quad (1)$$

donde  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones reales analíticas, de orden mayor o igual que 3;  $\alpha$ ,  $b$  y  $c$  son constantes y  $\delta > 0$  es un parámetro pequeño. Cuando  $\delta = 0$ ,  $X_0$  es la singularidad llamada *Hopf-Zero*. De hecho considerando  $\tilde{X}_\mu$  un desplegamiento universal analítico de esta singularidad, y realizando su forma normal hasta términos de orden 2 obtenemos, después de un escalado de las variables de orden  $\delta = \sqrt{\mu}$ , la familia (1) considerada (ver [BV84]) con  $p = -2$ . Cuando  $f = g = h = 0$  observamos que el sistema tiene una órbita heteroclínica entre los puntos críticos  $(0, 0, \pm 1)$  la cual está dada por:  $\{(0, 0, z) : -1 < z < 1\}$ . El objetivo de este trabajo es ver que esta órbita heteroclínica se rompe si  $(f, g, h) \neq 0$  y calcular la distancia entre las variedades invariantes unidimensionales correspondientes. Para el caso en que  $p > -2$  (ver [BV84]) esta distancia sobre el plano  $z = 0$  esta dada por:

$$d^{s,u} = 2\pi e^{c\pi/2} |\hat{m}(i\alpha)| \delta^p e^{-\pi|\alpha|/(2\delta)} (1 + O(\delta^{p+2} |\log(\delta)|)), \quad (2)$$

donde  $\hat{m}$  es la transformada de Borel de la función  $m(u) = u^{1+ic}(f + ig)(0, 0, u, 0)$ . Nuestro estudio trata de establecer el valor de la distancia para el caso  $p = -2$ . Para este caso hemos desarrollado algoritmos que utilizan cálculos con multiprecisión debido a que, cuando el parámetro es pequeño, ambas variedades se aproximan exponencialmente. Nuestro objetivo fundamental es verificar la fórmula (2) para  $p > 2$  y obtener una fórmula válida para  $p = -2$ .

## Introducción

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\delta xz - y(\alpha + c\delta z) + \delta^{-1}f(\delta x, \delta y, \delta z, \delta) \\ \frac{dy}{dt} = -\delta yz + x(\alpha + c\delta z) + \delta^{-1}g(\delta x, \delta y, \delta z, \delta) \\ \frac{dz}{dt} = \delta(-1 + b(x^2 + y^2) + z^2) + \delta^{-1}h(\delta x, \delta y, \delta z, \delta) \end{cases} \quad (3)$$

donde  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones reales analíticas, de orden mayor o igual que 3;  $\alpha$ ,  $b$  y  $c$  constantes y  $\delta > 0$  es un parámetro pequeño.

Cuando  $f = g = h = 0$  el campo presenta dos puntos críticos en  $(0, 0, \pm 1)$  de tipo silla-foco. Así mismo, una rama de la variedad inestable del punto  $(0, 0, 1)$ , que es unidimensional, coincide con una rama de la variedad estable del punto  $(0, 0, -1)$ , dando lugar a una conexión hereroclínica.

El objetivo de este trabajo es estudiar la escisión de esta conexión causada por la perturbación regular analítica  $(f, g, h)$  y, concretamente, dar una fórmula asintótica de su distancia cuando ambas variedades unidimensionales intersecan el plano  $z = 0$ .

### Motivación: la singularidad Hopf-Zero

El sistema (3) puede ser deducido del estudio de los desplegamientos analíticos de la llamada singularidad Hopf-Zero. Para concretar, diremos que una familia de campos en  $\mathbb{R}^3$  tiene una bifurcación Hopf-Zero para ciertos valores de los parámetros si tiene un punto crítico y la matriz linealizada del campo en dicho punto tiene un autovalor cero y un par de autovalores imaginarios puros.

La bifurcación Hopf-Zero se encuentra genéricamente en familias biparamétricas de campos en  $\mathbb{R}^3$  pero también en familias uniparamétricas en campos conservativos. Otros nombres con que se conoce esta bifurcación es bifurcación silla-nodo Hopf o bifurcación Gavrilov-Guckenheimer.

Nosotros nos restringiremos al caso conservativo, si bien los cálculos son totalmente válidos en el caso general.

Vamos a suponer que el campo de vectores está en  $\mathbb{R}^3$  y que el origen es el punto crítico de este campo, así tenemos que su parte lineal debe ser semejante a:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \alpha^* & 0 \\ -\alpha^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ con } \alpha^* > 0. \quad (4)$$

En el caso de campos conservativos los diferentes comportamientos de los desplegamiento de esta singularidad has sido estudiados por varios autores como: [AMF<sup>+</sup>03, CK04, DI98, FGRLA02, GH90, LTW05, Tak73a, Tak73b]. En estos trabajos se estudian estos desplegamientos, usando la teoría de formas normales para escribir el campo vectorial en su forma más simple y, a continuación, estudiar los efectos de la no simetría en términos de la dinámica. Debido a que vamos a trabajar con campos conservativos podemos trabajar con una familia  $X_\mu$  de campos de vectores en  $\mathbb{R}^3$  que tienen un sólo parámetro  $\mu$ , tal que  $X_0$  tiene al origen como un punto crítico y con parte lineal igual a  $M$ .

Al aplicar el procedimiento de formas normales al campo conservativo  $X_\mu$  hasta orden dos, obtenemos en las nuevas variables  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  (ver [Tak73a, Tak73b]), las siguientes

ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{ds} &= \bar{x}(A_2(\mu) + A_4(\mu)\bar{z}) + \bar{y}(A_1(\mu) + A_3(\mu)\bar{z}) + O_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \mu) \\ \frac{d\bar{y}}{ds} &= -\bar{x}(A_1(\mu) + A_3(\mu)\bar{z}) + \bar{y}(A_2(\mu) + A_4(\mu)\bar{z}) + O_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \mu) \\ \frac{d\bar{z}}{ds} &= B_1(\mu) - 2A_2(\mu)\bar{z} + B_3(\mu)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - A_4(\mu)\bar{z}^2 + O_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \mu),\end{aligned}$$

donde  $A_1(0) = \alpha^*$ ,  $A_2(0) = B_1(0) = 0$ . Y además podemos suponer que  $\partial_\mu B_1(0) = -1$  reescalando el parámetro.

Cuando  $\mu > 0$  y  $A_4(0) < 0$ , haciendo el cambio de variables y tiempo  $\bar{X} = \delta/\sqrt{-A_4(0)}X$ ,  $s = t/(\delta\sqrt{-A_4(0)})$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -xz + \left(\frac{\alpha}{\delta} + cz\right)y + \delta^p f(\delta x, \delta y, \delta z, \delta) \\ \frac{dy}{dt} &= -yz - \left(\frac{\alpha}{\delta} + cz\right)x + \delta^p g(\delta x, \delta y, \delta z, \delta) \\ \frac{dz}{dt} &= -1 + b(x^2 + y^2) + z^2 + \delta^p h(\delta x, \delta y, \delta z, \delta),\end{aligned}\tag{5}$$

con  $\alpha = \alpha^*/\sqrt{-A_4(0)}$ ,  $c = A_3(0)/\sqrt{-A_4(0)}$ ,  $p = -2$  y  $f, g, h = O(\|\delta(X, 1)\|^3)$ , son funciones analíticas en una bola abierta cuyo desarrollo de Taylor empieza en términos de grado mayor o igual a tres y  $X = (x, y, z)$ . Ahora, cambiando el tiempo por  $\tau = t/\delta$ , las ecuaciones (5) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= -\delta xz - y(\alpha + c\delta z) + \delta^{p+1} f(\delta x, \delta y, \delta z, \delta) \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\delta yz + x(\alpha + c\delta z) + \delta^{p+1} g(\delta x, \delta y, \delta z, \delta) \\ \frac{dz}{d\tau} &= \delta(-1 + b(x^2 + y^2) + z^2) + \delta^{p+1} h(\delta x, \delta y, \delta z, \delta)\end{aligned}\tag{6}$$

Se puede notar que el sistema (3) es un caso particular del sistema (6) con  $p = -2$ .

## 1. El sistema no perturbado

A pesar de que el sistema (6) es degenerado para  $\delta = 0$ , puede ser considerado como una pequeña perturbación del sistema para  $f = g = h = 0$ . Así pues, para estudiar su dinámica empezamos considerando este caso.

**Lema 1** ([BV84]) *Si en el sistema (6)  $f = g = h = 0$  entonces para cualquier  $\delta > 0$  tenemos:*

1. *El sistema sólo tiene dos puntos fijos hiperbólicos  $S_\pm^0 = (0, 0, \pm 1)$  los cuales son silla-foco con autovalores  $\mp\delta + |\alpha + c\delta|i, \mp\delta - |\alpha + c\delta|i$  y  $\pm 2\delta$ .*
2. *Existe una conexión heteroclínica uno-dimensional entre los dos puntos críticos  $S_\pm^0$ , la cual se puede parametrizar como  $\sigma_0(t) = (0, 0, -\tanh(t))$ .*

3. El sistema tiene una integral primera dada por:

$$H(x, y, z) = \frac{x^2+y^2}{2} \delta \left( \frac{b}{2}(x^2 + y^2) + z^2 - 1 \right)$$

4. Si  $b > 0$  las variedades invariantes 2-dimensionales coinciden dando lugar a una superficie heteroclínica 2-dimensional. Además esta superficie está dada por el elipsoide:  $z^2 + \frac{b}{2}(x^2 + y^2) = 1$ .

Una vez que tenemos clara la dinámica del sistema (6) en el caso  $f = g = h = 0$ , nuestro objetivo es estudiar la dinámica cuando añadimos las funciones  $f, g, h$ , no simultáneamente nulas. El primer resultado es el siguiente:

**Lema 2** Dado el sistema (6) con  $\delta > 0$  suficientemente pequeño y  $p \geq -2$  entonces existen dos puntos fijos  $S_+(\delta)$  ( $S_-(\delta)$ ) tipo silla-foco, que tienen una variedad inestable (estable)  $W^u(S_+(\delta))$  ( $W^s(S_-(\delta))$ ) unidimensional y variedad estable (inestable)  $W^s(S_+(\delta))$  ( $W^u(S_-(\delta))$ ) 2-dimensional. Además no existe otro punto fijo dentro de la bola cerrada  $\bar{B}(\delta^{-1/3})$ .

El lema 2 nos dice que los puntos críticos persisten y que son de nuevo de tipo silla foco. Además, estos puntos tienen variedades estables e inestables como ocurría en el caso no perturbado. La pregunta es ahora si estas variedades pueden o no coincidir, en el caso de las unidimensionales, o intersecar, en el caso de las dos dimensionales.

Una respuesta parcial a la pregunta de si persiste la conexión entre las variedades unidimensionales, fue dada en el artículo [BS06] para  $p > -2$ . Aquí queremos continuar el estudio realizado en ese trabajo para el caso genérico  $p = -2$ . Otra pregunta interesante es conocer la posible intersección de las variedades dos dimensionales (ver [BV84]) pero este tema está completamente abierto y no lo vamos a tratar aquí.

## 2. Caso perturbativo

### 2.1. $p > -2$

En [BS06] se probó el siguiente teorema que propone una fórmula de la distancia para las variedades unidimensionales cuando éstas cortan el plano  $z = 0$ , con esta distancia podemos determinar si existe una conexión heteroclínica unidimensional entre los dos puntos críticos.

**Teorema 1** Consideremos el sistema (6) con  $p > -2$  y  $f, g$  y  $h$  funciones reales analíticas en una bola abierta. Además  $f, g, h$  son de orden mayor que 2, y  $\delta > 0$  y pequeño. Entonces:

1. Las variedades invariantes unidimensionales de los puntos críticos  $S_{\pm}(\delta)$  del sistema (6), pueden ser parametrizadas por  $\sigma^{s,u}(t, \delta)$  tales que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^s(t, \delta) = S_-(\delta), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \sigma^u(t, \delta) = S_+(\delta)$$

$$\pi^3 \sigma^s(0, \delta) = \pi^3 \sigma^u(0, \delta) = 0$$

2. La distancia entre las variedades estable e inestable del sistema (6) sobre el plano  $z = 0$  esta dada por:

$$d_{\delta}^{s,u} = 2\pi e^{c\pi/2} |\hat{m}(i\alpha)| \delta^p e^{-\pi|\alpha|/(2\delta)} (1 + O(\delta^{p+2} |\log(\delta)|)), \quad (7)$$

donde  $\hat{m}$  es la transformada de Borel de la función  $m(u) = u^{1+ic}(f + ig)(0, 0, u, 0)$ .

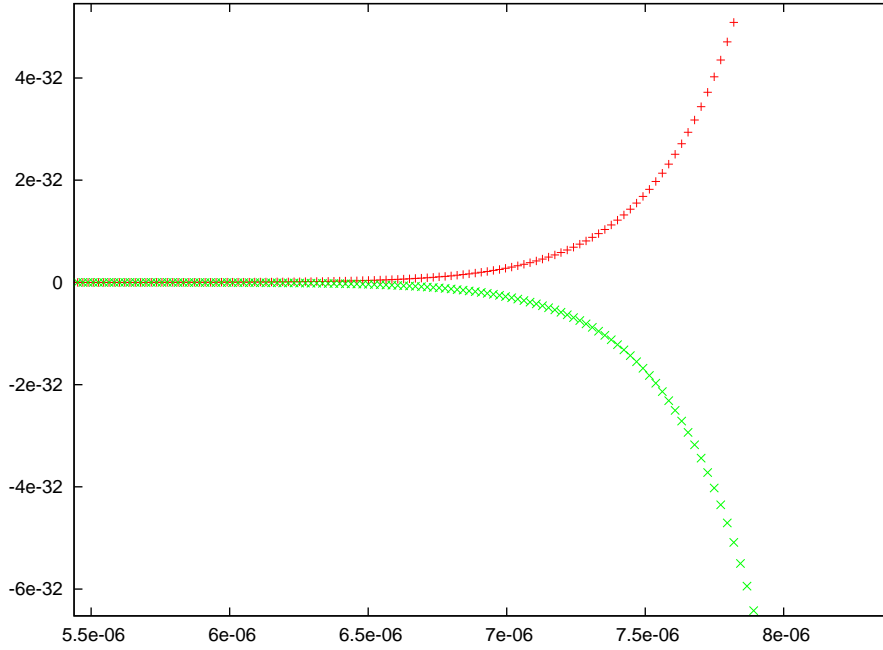


Figura 1: La figura muestra el comportamiento de las variedades cuando cortan al plano  $z = 0$ , variando el parámetro  $\delta$

### Observaciones

- La distancia es independiente de la función  $h$  del sistema y de la constante  $b$ .
- La distancia solo depende de los valores de  $f$  y  $g$  en  $x = y = \delta = 0$ .

### 2.2. Cálculos numéricos en el caso $p = -2$

El teorema anterior garantiza que no existe una conexión heteroclínica unidimensional entre los dos puntos críticos, o equivalentemente que debe existir una ruptura de la órbita heteroclínica si  $\hat{m}(i\alpha) \neq 0$ . El interés de comprobar la ruptura de esta órbita viene de que esta puede dar lugar al nacimiento de conexiones homoclínicas en el desdoblamiento, produciendo lo que se conoce como bifurcación de Šil'nikov (ver [BV84]).

Además, si  $p > -2$ , el teorema indica que es válida la predicción dada por la función de Poincaré-Melnikov en la medida de la distancia entre las dos variedades.

Hasta el momento no se ha dado una formula de la distancia para el caso  $p = -2$  debido a que en este caso no se puede probar la validez de la predicción dada por la función de Melnikov. De hecho el caso  $p = -2$  es una perturbación singular del sistema (6) en lo que cabe destacar los artículos [BS08, BS06].

Para poder atacar este problema nosotros usaremos cálculos numéricos teniendo presente que la distancia entre las variedades unidimensionales puede tener una fórmula exponencial que depende directamente del parámetro  $\delta$ , por este motivo debemos emplear aritmética con multiprecisión, para evitar cancelaciones y acumulación de errores en la distancia buscada.

El procedimiento a seguir en términos generales es el siguiente:

1. Debemos encontrar el exponente del splitting, para eso debemos analizar si la distancia  $d_\delta^{s,u}$  tiene una forma exponencial es decir si existe  $c_1 < 0$  tal que  $d_\delta^{s,u} \cong e^{c_1/\delta}$ , para  $\delta$  relativamente pequeña del orden  $10^{-2}$ , así tenemos la primera aproximación a la distancia  $d_\delta^1 = e^{c_1/\delta}$ .
2. Conociendo  $c_1$  podemos determinar el número de cifras  $N$  necesarias, haciendo la siguiente comparación  $10^N = d_\delta^1$ , por lo tanto  $N = c_1/(\ln(10)\delta)$ .
3. Luego procedemos a buscar las constantes  $c_2$  y  $n \in \mathbb{Z}$  tales que  $d_\delta^{s,u}$  sea aproximado a  $c_2\delta^n d_\delta^1$ .

Entre los pasos que no hemos nombrado anteriormente pero que indudablemente fueron necesarios tenemos:

1. Las variedades locales  $W^{s,u}(S_\pm(\delta))(\tau)$  se reescalaron en el tiempo a  $s$ , agregando al sistema (6) la ecuación  $ds/d\tau = \lambda s$ , con  $\lambda$  el autovalor real, de la parte lineal del campo.
2. Luego se prolongo la variedad usando Taylor con los algoritmos de diferenciación automática dados en [JZ05].
3. Por último fijando los coeficientes de Taylor cuando cambia de signo la  $z$ , construimos un polinomio al cual le debemos aplicar Newton para determinar el punto de intersección con el plano  $z = 0$ .
4. El método de Newton se empleó de la siguiente manera: primero buscamos una primera aproximación a la intersección con el plano  $z = 0$ , con pocas cifras por ejemplo 8, y luego en cada iterada duplicamos el numero de cifras.

Para corroborar la validez de los cálculos numéricos primero realizamos algunas pruebas para el caso  $p > -2$ , la elección de las funciones  $f, g$  y  $h$  y las constantes fueron de la forma más simple ya que así pudimos verificar la fórmula dada en el teorema. Tomamos por ejemplo:  $p = 0$ ,  $c = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $b = 1$ ,  $g = h = 0$  y  $f(x, y, z, \delta) = (z^2 - \delta^2)z$ , al comparar con fórmula de la distancia se ajustaba muy bien. Observemos que, en este caso  $\hat{m}(i\alpha) = i/6$ , con lo qual

$$d^{s,u} \simeq \frac{\pi}{3} e^{-\pi/(2\delta)}$$

Entre los valores test con  $p = -2$  tenemos a:  $f(x, y, z, \delta) = (z^2 - \delta^2)z + x^2y$ ,  $g = h = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha = -1$  y  $c = 0$ , al realizar cálculos numéricos obtuvimos que la forma de la distancia era:

$$d^{s,u} \simeq C\delta^{-2}e^{-\pi i/(2\delta)}$$

con  $C = 1,0509660883014$  y con un margen de error de  $1,346e - 05$ .

Realizamos otra prueba con:  $c = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $b = 1$ ,  $p = -2$ ,  $f(x, y, z, \delta) = (z^2 - \delta^2)z - x^2y$ ,  $g(x, y, z, \delta) = (z^2 - \delta^2)z - y^2x$  y  $h = 0$  y obtuvimos que:

$$d^{s,u} \simeq C\delta^{-2}e^{-\pi/(2\delta)}$$

con  $C = 1,05257840511122$  con un error relativo de  $0,03708\%$ .

Observemos que en ambos ejemplos también tenemos que  $\hat{m}(i\alpha) = i/6$ , con lo que la fórmula data en el teorema (1) establece en todos los caso anteriores que:

$$d^{s,u} = \pi/3\delta^{-2}e^{-\pi i/(2\delta)}$$

lo que descarta que sea igual a  $\pi/3$  como lo establece la formula de Baldomá y Seara para  $p > -2$  como ya se sugiere en [BS08].

## Conclusiones

- Cuando el sistema es conservativo los desplegamientos de la bifurcación Hopf-zero tiene un solo parámetro.
- El uso de formas normales reducen la familia  $X_\mu$  que presentan singularidades Hopf-zero al sistema (3).
- El sistema (6) tiene el mismo número de puntos críticos que el caso no perturbado y más aún la característica de cada uno de ellos se mantiene, a excepción de su conexión heteroclínica.
- Cuando  $p > -2$  y  $f$ ,  $g$  y  $h$  no son simultáneamente nulos, en el sistema (6) se rompen las conexiones heteroclínicas unidimensionales entre los puntos críticos.
- Para el caso  $p > -2$ , la distancia entre las variedades unidimensionales se pueden calcular en el sistema (6) cuando cortan al plano  $z = 0$ .
- La formula de la distancia es independiente de la función  $h$  del sistema y de la constante  $b$ , si  $p > -2$ .
- La fórmula de la distancia verifica la función de Poincaré-Melnikov.
- Para el caso perturbativo, los resultados numéricos descartan la posibilidad de conexiones heteroclínicas unidimensionales entre los puntos críticos, pero además establece que la fórmula de la distancia no esta dada por el teorema 1, cuando  $p = -2$ .

## Agradecimientos

La investigacion de Tere M. Seara y Oswaldo Larreal ha sido financiada con la ayuda del proyecto de investigación DGICYT n° MTM2006-00478.

## Referencias

- [AMF<sup>+</sup>03] A. Algaba, M. Merino, E. Freire, E. Gamero, and A. J. Rodríguez-Luis. Some results on Chua's equation near a triple-zero linear degeneracy. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 13(3):583–608, 2003.
- [BS06] I. Baldomá and T. M. Seara. Breakdown of heteroclinic orbits for some analytic unfoldings of the Hopf-zero singularity. *J. Nonlinear Sci.*, 16(6):543–582, 2006.
- [BS08] I. Baldomá and T. M. Seara. The inner equation for generic analytic unfoldings of the Hopf-zero singularity. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 10(2-3):323–347, 2008.
- [BV84] H. W. Broer and G. Vegter. Subordinate Šil'nikov bifurcations near some singularities of vector fields having low codimension. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 4(4):509–525, 1984.
- [CK04] A. R. Champneys and V. Kirk. The entwined wiggling of homoclinic curves emerging from saddle-node/Hopf instabilities. *Phys. D*, 195(1-2):77–105, 2004.
- [DI98] F. Dumortier and S. Ibáñez. Singularities of vector fields on  $\mathbf{R}^3$ . *Nonlinearity*, 11(4):1037–1047, 1998.
- [FGRLA02] E. Freire, E. Gamero, A. J. Rodríguez-Luis, and A. Algaba. A note on the triple-zero linear degeneracy: normal forms, dynamical and bifurcation behaviors of an unfolding. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 12(12):2799–2820, 2002.
- [Gel97] V. G. Gelfreich. Reference systems for splittings of separatrices. *Nonlinearity*, 10(1):175–193, 1997.
- [GH90] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1990. Revised and corrected reprint of the 1983 original.
- [Guc07] Fold-hopf bifurcation. *Scholarpedia*, 2(10):1855, 2007.
- [JZ05] Àngel Jorba and Maorong Zou. A software package for the numerical integration of ODEs by means of high-order Taylor methods. *Experiment. Math.*, 14(1):99–117, 2005.
- [LTW05] Jeroen S. W. Lamb, Marco-Antonio Teixeira, and Kevin N. Webster. Heteroclinic bifurcations near Hopf-zero bifurcation in reversible vector fields in  $\mathbb{R}^3$ . *J. Differential Equations*, 219(1):78–115, 2005.
- [Tak73a] Floris Takens. A nonstabilizable jet of a singularity of a vector field. In *Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971)*, pages 583–597. Academic Press, New York, 1973.
- [Tak73b] Floris Takens. Normal forms for certain singularities of vectorfields. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 23(2):163–195, 1973. Colloque International sur l'Analyse et la Topologie Différentielle (Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1972).
- [Tre97] Dmitry V. Treschev. Splitting of separatrices for a pendulum with rapidly oscillating suspension point. *Russian J. Math. Phys.*, 5(1):63–98 (1998), 1997.